Úloha I.S ... meriame čas

10 bodů; průměr 4,53; řešilo 79 studentů

1. *Za ako dlho sa v dlhodobom priemere posunie jarná rovnodennosť o jeden deň pri používaní Gregoriánskeho kalendára?*

2. *O koľko sa zmení doba kmitu kyvadla s dobou kmitu $t = 1\,\mathrm{s}$ pri zmene teploty o $T = 10\,^\circ\mathrm{C}$, ak je tyč a aj na nej zavesené oveľa ťažšie závažie vyrobené z medi? Akými procesmi na takéto kyvadlo vplýva zmena atmosférického tlaku a vlhkosti vzduchu?*

3. *Odhadnite akú dĺžku má najkratšia „tyč“ z kremeňa, ktorá rezonuje na frekvencii $f = 5\,\mathrm{MHz}$? Uvažujte hustotu kremeňa $\rho = 2{,}65\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ a modul pružnosti $E \approx 80\,\mathrm{GPa}$ a kmity v pozdĺžnom smere s jedným koncom upeveneným a druhým voľným.*

4. *Majme izotop ${}^{a}\mathrm{X}$, ktorý sa s polčasom $T_{1/2}$ rozpadá na izotop ${}^{b}\mathrm{Y}$. Vo vzorke zmeriame vo viacerých miestach relatívne zastúpenie izotopov materského a dcérskeho nuklidu voči inému izotopu dcérskeho prvku, o ktorom predpokladáme v čase nemenné zastúpenie: $[{}^{a}\mathrm{X}]\,/\,[{}^{c}\mathrm{Y}]$, $\left[{}^{b}\mathrm{Y}\right]\,/\,[{}^{c}\mathrm{Y}]$. Ako určíme vek vzorky t? Oba izotopy prvku Y sú stabilné a vyskytujú sa v pôvodnom materiále. Iné jadrové premeny neuvažujte.*

1. V Gregoriánskom kalendári je v priebehu 400 rokov priestupných 97 dní na rozdiel od 100 dní v kalendári Juliánskom. Dĺžka gregoriánskeho roka je tak

$$t_G = 365\,\mathrm{dní} + \frac{1\,\mathrm{deň}\cdot 97}{400} = 365{,}2425\,\mathrm{dňa}\,.$$

Dĺžka tropického roka okolo roku 2000 je $t_\mathrm{T} = 365{,}24219\,\mathrm{dňa}$, avšak s časom sa mierne mení vplyvom zmeny polohy zemskej osi a tvaru zemskej dráhy. Pomocou týchto údajov získame hľadaný čas, za ktorý bude Gregoriánsky kalendár chybný o deň ako

$$t = \frac{1\,\mathrm{deň}}{T_\mathrm{T} - T_\mathrm{G}} \cdot 1\,\mathrm{rok} \doteq 3\,200\,\mathrm{rokov}\,.$$

2. Pre periódu kyvadla máme $T \propto \sqrt{L}$, kde L je dĺžková škála kyvadla. Pri zmene teploty sa rozmery kyvadla zmenia podľa vzťahu pre dĺžkovú rozťažnosť

$$L = L_0(1 + \alpha\Delta T)\,,$$

kde v našom prípade máme pre meď koeficient dĺžkovej rozťažnosti $\alpha = 16\cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}}$. Pre novú periódu kyvadla tak máme

$$t = t_0 \cdot \sqrt{\frac{L}{L_0}} = \sqrt{1 + \alpha\Delta T} \rightarrow \Delta t \approx \frac{t_0}{2}\alpha\Delta T = 8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}\,.$$

Táto zmena sa môže zdať malá, no už za deň dosahuje kumulatívne odchýlku 7 s, čo je za mesiac až tri a pol minúty.

Zmena tlaku a vlhkosti vzduchu (spolu s teplotou) na kyvadlo pôsobí najmä prostredníctvom zmeny odporu vzduchu. Pohyb kyvadla v prostredí s odporom má za následok jednak postupný útlm kmitov – z času na čas je nutné hodinám navinúť závažie, ktoré nahrádza stratenú energiu, ale aj zmenu periódy samotnej – s rastúcim odporom sa perióda predlžuje. Atmosférický tlak pôsobí navyše aj inak – prostredníctvom Archimedovho zákona – vztlaková sila nadľahčuje závažie a mení tak efektívne tiažové zrýchlenie $g_{\text{eff}} = (1 - \rho_{\text{vz}}/\rho_{\text{Cu}})g$ so zmenou hustoty vzduchu ρ_{vz}.

3. Ak budeme uvažovať kmity v kompresii pozdĺž tyče za predpokladu, že bude jeden koniec pevný a druhý voľný máme pre základný mód vzťah medzi dĺžkou tyče l a vlnovou dĺžkou kmitov λ vzťah $l = \lambda/4$ – v jednom konci je uzol vlnenia a v druhom je hneď nasledujúci mód. Frekvencia a vlnová dĺžka sú previazané rýchlosťou šírenia vlnenia, teda rýchlosťou zvuku c, v prostredí ako $\lambda f = c$. Pre tenkú tyč o hustote ρ a module pružnosti E máme rýchlosť šírenia

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\,.$$

Postupným dosadením dostaneme výsledný vzťah pre dĺžku „tyče“

$$l = \frac{1}{4f}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \doteq 0{,}28\,\mathrm{mm}\,.$$

Zaujímavou možnosťou bolo riešiť úlohu pomocou rozmerovej analýzy, keďže máme tri premenné (f, E, ρ) a tri základné veličiny obsiahnuté v jednotkách (čas, vzdialenosť a hmotnosť). Ak budeme hľadať výsledok v tvare $l = f^\alpha E^\beta \rho^\gamma$, dostaneme z rovnosti exponentov jednotiek nasledujúcu sústavu rovníc

$$\begin{aligned}
[s] &: 0 = -\alpha - 2\beta\,,\\
[m] &: 1 = -\beta - 3\gamma\,,\\
[kg] &: 0 = \beta + \gamma\,,
\end{aligned}$$

ktorej riešením je $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1/2$, teda dostávame vzťah

$$l = \frac{A}{f}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\,,$$

rovnaký ako v predošlom výpočte, až na číselnú konštantu A, ktorej veľkosť sa priamo rozmerovou analýzou nedá určiť. V porovnaní vidíme, že má hodnotu $A = 1/4$.

4. Pre zastúpenie rozpadajúceho sa izotopu v čase máme

$$\left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right](t) = \left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right](t_0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}\,.$$

Dcérskeho izotopu bude teda postupne pribúdať z pôvodného množstva $\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right](t_0)$ podľa vzťahu

$$\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right](t) = \left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right](t_0) + \left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right](t_0)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}\right)\,.$$

Ak dosadíme za neznáme pôvodné zastúpenie izotopu ${}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}$ z predchádzajúcej rovnice dostávame vzťah

$$\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right](t) = \left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right](t_0) + \left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right](t)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-t}{T_{1/2}}} - 1\right)\,,$$

čo po vydelení zastúpením izotopu $^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}$ a úpravou exponenciály dáva finálny vzťah

$$\frac{\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t) = \frac{\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t_0) + \frac{\left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t)\left(2^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1\right) .$$

Pomocou tohto vzťahu sa zo zmeraných zastúpení jednotlivých izotopov v čase t určia pomery $\frac{\left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t)$ a $\frac{\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t)$ v jednotlivých vzorkách s mierne odlišným chemickým zložením. Tu je dôležité podotknúť, že keďže po chemickej stránke sú si rôzne izotopy jedného prvku (takmer) totožné, pomer $\frac{\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t_0)$ je preto rovnaký v každej vzorke. Použitím lineárnej regresie na závislosť

$$\frac{\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t) = A + B \cdot \frac{\left[{}^{\mathrm{a}}\mathrm{X}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t) ,$$

tak môžeme určiť ako pôvodný pomer $A = \frac{\left[{}^{\mathrm{b}}\mathrm{Y}\right]}{\left[{}^{\mathrm{c}}\mathrm{Y}\right]}(t_0)$, tak zo smernice určiť hodnotu výrazu $B = \left(2^{\frac{t}{T_{1/2}}} - 1\right)$, z ktorej už jednoducho určíme vek vzorky ako

$$t = T_{1/2} \cdot \log_2(B + 1) = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \ln(B + 1) .$$

Táto metóda sa využíva, napríklad, pre izotopy rubídia a stroncia pri datovaní meteoritov, čo nám umožnilo určiť vek Slnečnej sústavy.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.