

Úloha II.3 ... jeřáb na voru

6 bodů; (chybí statistiky)

Uprostřed řeky stojí na voru o zanedbatelné hmotnosti jeřáb a přemísťuje krabice stavebního materiálu o hmotnosti m z jednoho břehu na druhý. V jednom kroku jeřáb naloží materiál na jedné straně řeky, otočí se na druhou stranu, tam materiál vyloží a otočí se zpět. Určete nejmenší hodnotu úhlu, o který se může během jednoho kroku vor vychýlit oproti původní pozici. Jeřáb aproximujme homogenním válcem o hmotnosti M_j a poloměru r a otáčecím ramenem tvaru tenké tyče o délce kr . Rychlost řeky i „tření“ mezi vorem a vodou zanedbejte.

Vojta se vyučil inženýrem na YouTube.

Při řešení úlohy vyjdeme ze zákona zachování momentu hybnosti. Pro moment hybnosti vzhledem k ose otáčení platí $L = J\omega$, kde J představuje moment setrvačnosti a ω úhlovou rychlost otáčejícího se tělesa. Protože celkový moment hybnosti jeřábu na voru musí zůstat nulový, bude platit

$$J_j\omega_v - J_r\omega_r - m(kr)^2\omega_r = 0$$

v první fázi pohybu a

$$J_j\omega_v - J_r\omega_r = 0$$

ve druhé fázi. V rovnicích výše představuje $J_j = \frac{1}{2}M_jr^2$ moment setrvačnosti vertikální válcové části jeřábu, $J_r = \frac{1}{3}M_r(kr)^2$ moment setrvačnosti ramena jeřábu o hmotnosti M_r , ω_v úhlovou rychlost otáčení voru a ω_r úhlovou rychlost otáčení ramena jeřábu. Obě rovnice nyní přenásobíme časem potřebným k otočení ramene o 180° , dosadíme za momenty setrvačnosti a upravíme.

$$\varphi_{v1} = 2k^2\varphi_r \frac{m + \frac{1}{3}M_r}{M_j},$$

$$\varphi_{v2} = 2k^2\varphi_r \frac{\frac{1}{3}M_r}{M_j},$$

kde $\varphi_r = \pi$ rad je úhel pootočení ramene jeřábu a φ_{v1} , φ_{v2} jsou úhly, o které se v jednotlivých fázích pohybu pootočí vor. Menší úhel, o který se může vor pootočit, pak dostaneme odečtením těchto dvou hodnot – to nastane ve chvíli, kdy se bude jeřáb otáčet v jednotlivých fázích pohybu opačným směrem. Dostáváme tak

$$\Delta\varphi_v = 2k^2\pi \frac{m}{M_j} \text{ rad.}$$

Všimněme si, že se ve výsledném vztahu nevyskytuje hmotnost ramene jeřábu. To si můžeme intuitivně vysvětlit tak, že se při otočení tam i zpět vychýlení způsobené jeho pohybem navzájem vyruší a vliv na výsledek budou mít jenom hmotnost nákladu a základny jeřábu.

Vojtěch David

vojtech.david@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.