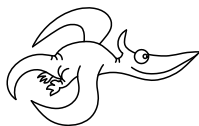


Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé,

tak jako každý rok, tak i letos máte možnost již během slunečných letních měsíců začít řešit první sérii 36. ročníku FYKOSu. FYKOS neorganizuje pouze tento korespondenční seminář, který právě držíte v ruce, ale také řadu jiných akcí, na kterých se můžete potkat nejen s organizátory, ale také s ostatními řešiteli. Jedná se zejména o jarní a podzimní soustředění, Den S Experimentální Fyzikou (DSEF), Fyziklání či Fyziklání Online. O všech akcích budeme včas informovat na našich webových stránkách fykos.cz nebo na našich sociálních sítích - @fykosak a fb.com/fykos. Povídání bylo dost, co nás letos na začátku čeká? Jarda není zrovna masterchef, ale zato mu to pálí, a dokáže improvizovat skoro jako Jirka Babica. S nefunkční váhou si hravě poradí a co vy? V kuchyni poté ještě chvíli zůstaneme a podíváme se na letošní úrodu meruněk ve formě marmelády, kterou budeme zavařovat. To by se jeden u plotny pořádně zapotil, pro ochlazení zkusíme změřit třeba hustotu ledu. A do finále míříme Opavanem až do Prahy. Závěrem vám přejeme krásné léto plné zábavy a úspěšný vstup do nového školního roku!

Organizátoři



Zadání I. série

Termín uploadu: 11. 10. 2022 23.59

Termín odeslání: 10. 10. 2022

Úloha I.1 ... užitečné máslo

3 body

Jarda se rozhodl upéct koláč, ale zjistil, že se v jeho kuchyňské váze vybila baterka a nemá jak odvážit 300 g mouky. Napadlo ho však, že může použít kostku másla, na které je napsáno, že má hmotnost $m = 250$ g. Naštěstí našel ještě vhodnou pružinu a stopky. Na velmi lehkou mističku nasypal hromádku mouky, připevnil na pružinu, rozkmital a změřil periodu $T_1 = 2,8$ s. To stejné udělal s kostkou másla a naměřil $T_2 = 2,3$ s. Poradte Jardovi, kolik mouky má přidat nebo odebrat.

Úloha I.2 ... vážíme neznámý předmět

3 body

Mějme ideální váhu, kterou zkalibruje státním etalonem o hmotnosti $m_e = 1,000\,000\,165$ kg a hustotě $\rho_e = 21\,535,40$ kg·m⁻³. Kalibrací myslíme to, že po položení etalonu na váhu přiřadíme naměřené hodnotě právě hmotnost m_e . Vážení neznámého předmětu pak provedeme za stejných podmínek, při kterých má objem $V_0 = 3,242\,27$ dl. Jestliže jsme navázili váhu $G = 1,420\,12$ N, jakou hmotnost jsme naměřili? Jaká je skutečná hmotnost předmětu? Experiment provádíme v místě s normálním tíhovým zrychlením $g = 9,806\,65$ m·s⁻² a hustotou vzduchu $\rho_v = 1,292\,23$ kg·m⁻³. Uvažujte, že kalibrace je lineární a že nezatížená váha ukazuje nulu.

Úloha I.3 ... zavařujeme

6 bodů

Do válcové sklenice o výšce $h = 7,0$ cm a vnitřním poloměru $r = 2,5$ cm nalijeme horkou meruňkovou marmeládu o teplotě $T_0 = 80$ °C, zavřeme ji víčkem a necháme chladnout, přičemž

mezi marmeládou a víčkem je ve sklenici trochu vzduchu. Víčko se může lehce promáčknout dovnitř, když na něj působí alespoň síla $F = 4\text{ N}$. Při promáčknutí se ozve zvuk, který jsme slyšeli po čase $t_p = 30\text{ min}$ od zavření skleničky. Jestliže marmeláda tuhne při teplotě $T_t = 60\text{ °C}$, bude již při promáčknutí víčka ztuhlá?

Bonus Jak dlouho po začátku chladnutí marmeláda ztuhne? Předpokládejme, že teplota je v celé sklenici všude stejná a rychlost chladnutí závisí pouze na rozdílu teplot ve sklenici a okolní teploty $T_{ok} = 25\text{ °C}$.

Úloha I.4 ... doprava na horách

8 bodů

Na úpatí hory tvaru dokonalého kužele s vrcholovým úhlem $\alpha = 90^\circ$ stojí město. Přesně na opačné straně hory ve stejné nadmořské výšce je železniční stanice, proto se radní z města rozhodli pro stavbu silnice ke stanici. Můžou postavit buď tunel, nebo cestu vést po povrchu hory. Jaký může být maximální poměr ceny za kilometr tunelu ku ceně za kilometr silnice, aby byla stavba tunelu levnější? Silnici lze vést libovolnou trasou po povrchu hory.

Úloha I.5 ... a zase ta U-trubice

8 bodů

Do U-trubice s celkovou délkou l a průřezem o obsahu S nalijeme V vody (tak, aby byl celý ohyb pod vodou a současně platilo $Sl > V$) a necháme ustálit hladinu. Jeden konec U-trubice uzavřeme a vodní hladinu rozkmitáme. Jaká bude perioda malých kmitů vodního sloupce?

Úloha I.P ... vlaková

9 bodů

Odhadněte spotřebu elektrické energie na jednu jízdu vlaku IC Opavan. Souprava se sedmi vozy má lokomotivu řady 151 a je schopná dosáhnout rychlosti $v_{\max} = 160\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pro jednoduchost uvažujte, že všichni cestující jedou z Prahy do Opavy.

Úloha I.E ... hustý led

13 bodů

Změřte hustotu ledu.

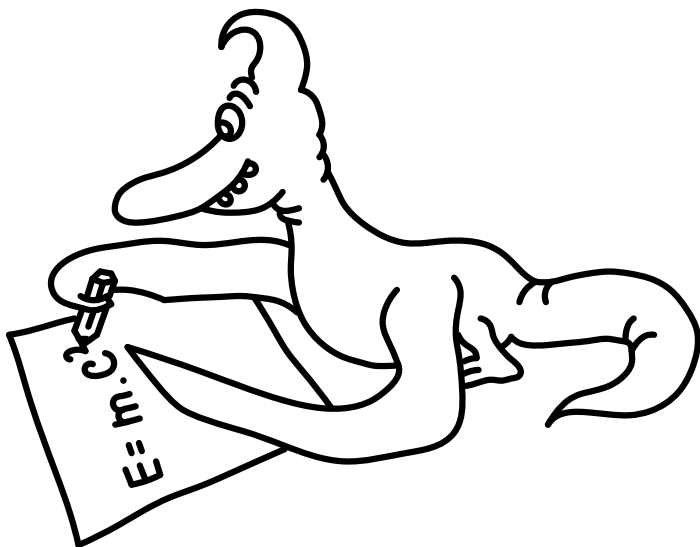
Úloha I.S ... hledáme kvanta

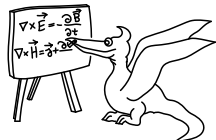
10 bodů

Najděte si hodnotu Rydbergovy konstanty a určete, které spektrální čáry vodíku náleží do viditelného spektra. Tyto čáry jsou jediné, které mohl Rydberg k objevení svého vztahu použít, protože UV ani IR spektra ještě nebylo možné měřit. Jakou mají barvu a kterým přechodům v Bohrově modelu odpovídají? (3 b)

Spočítejte si svoji de Broglieho vlnovou délku. Jaká je tato hodnota ve srovnání s velikostí atomu, případně atomového jádra? (3 b)

Máme kyvetu s 10 ml roztoku fluoresceinu ve vodě, do které svítíme argonovým laserem o vlnové délce 488 nm a výkonu 10 W. Zároveň molekula fluoresceinu fluorescenčně vyzařuje na vlnové délce 521 nm s kvantovým výtěžkem (podíl absorbovaných fotonů, které se vyzáří zpět) 95 %. Pokud je počáteční teplota kyvety 20 °C, za jak dlouho se její obsah začne vařit? Předpokládejte, že kyveta je dokonale tepelně izolovaná, že paprsek se v ní plně absorbuje a že množství fluoresceinu je zanedbatelné z hlediska tepelné kapacity. (4 b)





Seriál: Hledáme kvanta

Letos se v seriálu podíváme na kvantovou fyziku. Zaměříme se na to, co můžeme zjistit o světě kolem nás. Detaily matematického formalismu, kterými se učebnice kvantové fyziky zabývají obvykle, odsuneme do pozadí. Zatím bych nerad prozrazoval příliš mnoho, proto se nechte překvapit!

Dneska si povíme něco o jejich základech a jejím vzniku – kvantová fyzika nespada z nebe, ale samozřejmě vychází z pozorování světa okolo nás. Bylo by fér, abychom se dnes podívali a vysvětlili si (některé) experimenty, které vedly ke vzniku kvantové mechaniky tak, jak se používá dnes.

Historický úvod do vzniku kvantové mechaniky

Psal se konec 19. století, když se zdálo, že jsou známy veškeré fyzikální zákony a fyzici tehdejší doby mají v rukou teorii popisující veškeré fyzikální interakce ve vesmíru. Tento dojem krásně shrnuje dnes již legendární citát:

„Ve fyzice už není nic, co by se ještě dalo objevit. Zbývá jen stále přesnější a přesnější měření.“

Často je připisován Lordu Kelvinovi, přestože podle všeho se zdá, že jej nikdy nevyslovil.

Tehdy ještě nikdo netušil, jak moc je toto tvrzení mylné. Někaké náznaky ukazující na neúplnost tehdejší fyziky, kterou dnes označujeme jako klasickou teorii, samozřejmě byly známé už v tehdejší době. Například podle klasické teorie by měly atomy interagovat se všemi barvami světla stejně. Experimenty ale ukazovaly, že každý atom preferuje své oblíbené barvy, zatímco jiných si ani nevšimne. Dále bylo pro vysvětlení některých experimentů nutné zavést myšlenku éteru, který ale nikdo nikdy neviděl (a později se ukázal jako nadbytečný).

O něco později, na začátku 20. století, fyzici začali tyto nesoulady zkoumat a přetavili je ve velkou ránu klasickému pohledu na svět. Vznikly totiž dvě nové teorie, které zásadním způsobem změnilly tehdejší chápání světa. Trošku překvapivě u zrodu obou stál jeden a ten samý pán, o kterém jste nejspíš již někdy slyšeli. . .



Jedna z těchto teorií ukázala, že pojem prostoru a času není úplně tak rigidní a univerzální, jak se do té doby soudilo. Dnes je známá jako teorie relativity. V tomto seriálu se ale budeme spíše zajímat o tu druhou, kvantovou teorii. Podle ní se příliš malé částice vůbec nechovají tak jako běžné objekty, které známe ze světa okolo nás, tedy podle zákonů, které formuloval jeden jablkem do hlavy praštěný génius o něco více než 2 století předtím. Jejich chování je naopak podle našeho vnímání velmi podivné a ještě podivnější, ale to již trochu předbíháme.

Pojďme se ale vrátit k nesrovnalostem experimentální fyziky a klasické teorie. Již v 19. století se vědělo, že tělesa, která mají nenulovou teplotu, vyzařují elektromagnetické záření. Spektrum takového tělesa se mění s jeho teplotou. Pro teploty běžné kolem nás toto záření leží zejména v infračervené oblasti. Naše lidské oči ho proto nevidí, narozdíl třeba od hadů nebo jiné havěti. Pokud chceme, aby předmět svítil i ve viditelném spektru, stačí se ho zahřát na teploty řádově tisíců stupňů (rozžhavit do ruda, případně do běla).

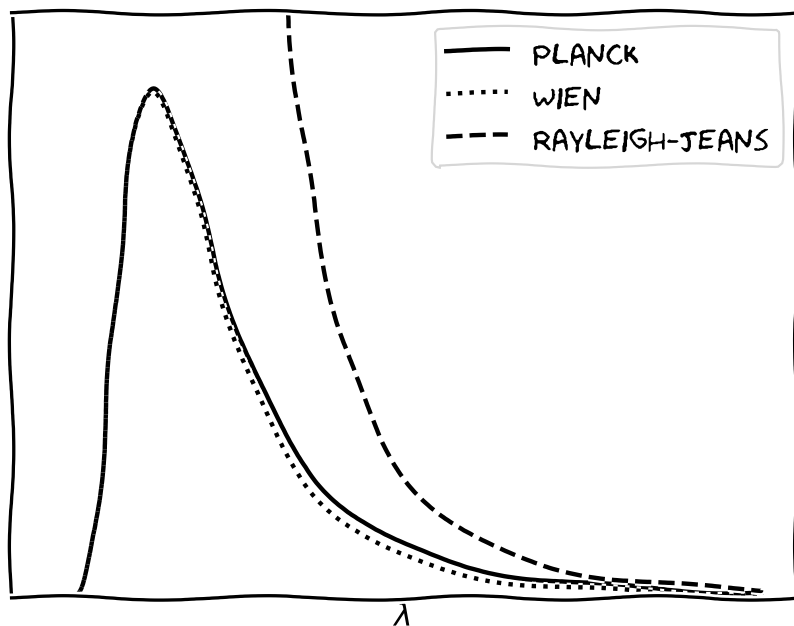
Se zaváděním úsporných žárovek je tento problém docela aktuální. Výrobci přímo na obalech uvádějí teplotu světla, aniž by takové teploty žárovky skutečně dosahovaly, proto se astronomicky vysokých teplot nemusíme bát. Místo toho je na obalu uvedena teplota černého tělesa, jehož spektrum by nám přišlo stejné jako spektrum daného zdroje světla uvnitř obalu. A to i přesto, že například zářivky nebo mnohé LED zdroje tvoří bílé světlo jen z pár konkrétních vlnových délek, oproti relativně rovnoměrnému rozložení černého tělesa. Paradoxně zdroje označované jako teplé mají nejnižší teplotu, protože mají tendenci být zabarveny do červena, což je vnímáno jako teplá barva. (Možná, kdyby oheň v krbu měl 10000 °C, bylo by tomu jinak.)

Vraťme se ale k absolutně černému tělesu a pojďme ho nadále zahřívát. Začneme si hrát s plazmatem o teplotě milionů stupňů (nedoporučuji!) a máme zase smůlu. Naše oko ani v tomto případě záření nevidí, protože vyzařované světlo nám uteče do ultrafialové části spektra. Lidé pracující na tokamaku by vám mohli vyprávět, že ty jasně zářící oblasti v něm jsou trochu paradoxně právě ty nejstudenější.

Každopádně, spektrum záření absolutně černého tělesa bylo přesně změřené dávno před 20. stoletím. Zároveň z termodynamiky a především statistické fyziky, oborů překotně se rozvíjejících na konci 19. století, se povedlo odvodit Rayleighův-Jeansův zákon, který dává velice přesné předpovědi pro dlouhé vlnové délky. Bohužel diverguje pro opačnou část spektra (krátké vlnové délky) a předpovídá nekonečnou vyzařovanou energii v ultrafialové oblasti. Asi nemusím zdůrazňovat, že takový výsledek je silně problematický, také by se dal označit za nefyzikální. Pro krátké vlnové délky byl naopak znám empirický Wienův vzorec, který je ale pro změnu nepoužitelný pro dlouhé vlnové délky.

Perfektní shodu mezi teoretickou předpovědí a experimentálně změřeným zářením absolutně černého tělesa dostal poprvé v roce 1901 německý fyzik Max Planck. Do té doby nevídanou univerzálnost předpovědi získal zavedením úplně jednoduchého předpokladu. Těleso v jeho práci nemůže energii zářením vydávat libovolně, ale musí tak činit v balíčcích o přesně dané velikosti úměrné frekvenci záření. Balíčkům se později začalo říkat kvanta a daly název celému oboru, který se okolo této myšlenky později začal rozvíjet. Navíc nebyl problém určit ze známého spektra konstantu této úměrnosti h ve vztahu $E = h\nu$. Tato konstanta od té doby nese Planckovo jméno a asi vás nepřekvapí, že se s ní ještě mnohokrát setkáme. Bohužel Planck ale neměl správnou fyzikální intuici, a celý koncept kvant považoval více za matematický trik než za novou fundamentální změnu v chápání fyziky.

Tuto chybu ale vzápětí napravil již v úvodu (implicitně) zmiňovaný Albert Einstein, který použil stejný „trik“, aby v roce 1905 vysvětlil fotoefekt. Když do kovu svítíme ultrafialovým



Obr. 1: Rozložení vyzařovaného výkonu absolutně černého tělesa podle vlnové délky, jak jej předpovídali tři teorie zmiňované v textu. Všimněme si, že přestože Rayleighův-Jeansův vzorec vypadá velmi odlišně od toho Planckova, pro velmi dlouhé vlnové délky dávájí podobný výsledek. A naopak Wienův vzorec pro dlouhé vlnové délky začne předpovídat nižší vyzařovaný výkon. Přestože se tento rozdíl může zdát malý, celkový výkon vyzařovaný přes všechny vlnové délky (plocha pod křivkou) je asi o 8% menší, ale pořád je to lepší předpověď než Rayleighova-Jeansova.

světlem, začneme z něj vyrážet elektrony. Jakmile ale frekvenci záření snížíme pod nějakou mez, najednou elektrony vylétávat přestanou, i kdybychom zvyšovali intenzitu nízkofrekvenčního světla sebevíc. V takovém případě bychom dříve kov roztavili, než bychom z něj vyrazili elektrony (ve skutečnosti při teplotě kolem 1000 °C dochází k termoemisi, ale to není příliš podstatné). Závislost fotoefektu na frekvenci světla a nezávislost na intenzitě světla je velmi neintuitivní. I Einstein dokázal z experimentálních dat přesně určit konstantu úměrnosti mezi frekvencí záření a energií „balíčků“ a (pro nás už nepřilíš) překvapivě obdržel přesně stejnou hodnotu jako Planck!

Einstein ale narozdíl od Plancka správně usoudil, že to nemůže být náhoda, a tak povýšil tento matematický trik na fundamentální fyzikální zákon. Světlo se vždy musí šířit v kvantech o přesně dané energii. Energie nemůže být libovolná, ale je daná součinem frekvence záření a Planckovy konstanty. Zároveň zavedl dodnes používané označení pro tato kvanta, fotony. Vzkřísil tak teorii o částicové povaze světla, která v té době byla považována za překonanou.

Víceméně souběžně s tím probíhala snaha vysvětlit strukturu atomů a molekul, která se vyznačovala vytvářením teoretických modelů, které byly vzápětí vyvráceny novými experimentálními daty. Z počátku to byly spíše dohady – John Dalton na začátku 19. století je považoval za tuhé koule, později naopak zmíněný Lord Kelvin očekával, že jsou to víry v éteru. První experimentem podložený model přišel po roce 1897, kdy J. J. Thomson objevil elektrony. Definitivně tedy prokázal, že atom má nějakou vnitřní strukturu, na což navázal v roce 1904 svým pudinkovým modelem atomu. Atom si představoval tak, že záporně nabitě elektrony plavou v rovnoměrně rozprostřeném kladném náboji.

V letech 1908-1913 prováděl Ernest Rutherford se svými spolupracovníky experimenty s rozptylem alfa částic na tenké zlaté fólii. Zjistil, že část částic se rozptyluje a velmi významně přitom změní směr, některé se dokonce odrazily zpět do směru, ze kterého přiletěly. To je neslučitelné s Thompsonovým modelem, protože v rozprostřeném náboji „pudinku“ by se nabitě částice rozptylovaly naprosto minimálně. Rutherford výsledky (správně!) interpretoval tak, že veškerý kladný náboj a hmotnost v atomu jsou koncentrovány v jádře, které je téměř bodové. Tak vznikl Rutherfordův planetární model atomu, kde kolem těžkého, téměř bodového a kladně nabitého jádra obíhají lehké elektrony. Energie elektronů v takovém modelu musí nutně záležet na poloměru dráhy daného elektronu. Jedním z největších problémů tohoto modelu bylo, že podle zákonů klasické elektrodynamiky nemohl být stabilní. Elektron obíhající kolem jádra se chová jako miniaturní anténa, která vysílá elektromagnetické záření. Ze systému by takové záření odnášelo energii, což by mělo vést k tomu, že elektron během zlomku vteřiny spadne do jádra.

Tento drobný nedostatek vyřešil Niels Bohr zdánlivě jednoduchým předpokladem, že se elektrony nemohou v atomech pohybovat po libovolných drahách, ale jen po specifických orbitách. Elektrony sice mohou libovolně mezi orbitami přeskakovat, popřípadě se od jádra úplně odpoutat. Tím zároveň vysvětlil úplně jiný jev, který jsme zatím nezmiňovali. Atomy totiž nevyzařují záření spojité, ale jen na konkrétních vlnových délkách - spektrálních čarách.

Již na počátku 19. století si Joseph von Fraunhofer (jakož i před ním William Hyde Wollaston) všimli, že když pomocí hranolu (nebo Fraunhofer pomocí difrakční mřížky, kterou sám vymyslel) rozloží sluneční světlo na jednotlivé barvy, ve výsledném spektru barev jsou černé čárky. Ty se interpretují tak, že dané vlnové délky ve spektru chybí. Zanedlouho poté byl velmi podobný jev objeven i u prvků zde na Zemi. Atomy při zahřátí vyzařují na přesně daných vlnových délkách. Vědci nelenili a velmi rychle vznikla empirická pravidla popisující chování spektrálních čar, jakož i byly změřeny vlnové délky čar tehdy známých prvků. Vyvrcholení přišlo v roce 1868, kdy Norman Lockyer našel ve slunečním spektru spektrální čáru, která neodpo-

vídala žádnému dosud známému prvku. Neznámý prvek, helium, byl o 20 let později objeven a izolován i na Zemi.

Pro náš příběh je ale zajímavé hlavně to úplně nejjednodušší spektrum, a to konkrétně spektrum atomu vodíku. Vodík má jen jeden elektron, a tak jeho spektrum nemůže být ovlivněno interakcí mezi více elektrony, která zásadním způsobem ovlivňuje polohy spektrálních čar. Právě u takového spektra si Johann Jakob Balmer, který byl trochu posedlý numerologií, všiml, že vlnové délky spektrálních čar vodíku lze vyjádřit vcelku jednoduchým vztahem, který pak Johannes Rydberg zobecnil na

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right),$$

kde R je Rydbergova konstanta a n_1, n_2 jsou libovolná přirozená čísla.

Když se teď vrátíme zpět k Bohrovu modelu atomu, zjistíme, že přirozeným způsobem zahrnuje i tyto spektrální čáry. Rozdíly mezi energiemi Bohrových orbit by v takovém modelu odpovídaly spektrálním čarám daného atomu. Zároveň je (trochu ad hoc) zajištěná stabilita atomů, protože z nejnižší orbity již elektron nemůže spadnout do jádra.

Pokud použijeme Rydbergův vztah na spektrum atomu vodíku, zjistíme, že odpovídá přeskokům mezi hladinami o energiích daných vztahem $\frac{hcR}{n^2}$, kde n je číslo hladiny. Z toho Bohr vyvodil, že podobně jako kvanta světla u Einsteina a Plancka předtím, i v tomto případě máme kvantovanou veličinu. Tou je tentokrát moment hybnosti elektronu, který na povolených drahách nabývá celočíselného násobku $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. Ač je Bohrovův model v podstatě pravdivý, stále nedokáže vysvětlit, proč toto kvantování vzniká.

V roce 1924 přišel Louis de Broglie ve své dizertační práci s revoluční myšlenkou. Pokud se světlo chová v některých případech jako vlnění a v jiných případech jako částice, proč by se nemohly entity doposud považované čistě za částice (například elektrony) chovat v některých případech jako vlna? Ze vztahů pro hybnost a energii fotonu o konkrétní vlnové délce odvodil, že vlnová délka elektronu o hybnosti p by měla být

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Zároveň učinil pozorování, že podmínka kvantování momentu hybnosti v Bohrově modelu odpovídá tomu, že na kruhovou orbitu se vejde právě celočíselný počet vln (ve chvíli, kdy o elektronu v tomto případě uvažoval jako o vlně). Část vědecké komunity ale byla k této myšlence silně skeptická. Dokonce se traduje (spíše ale nepodložená) historka, že kdyby se za jeho dizertaci předtím nepostavil sám Einstein, de Broglie by svoji práci neobhájil. Na druhou stranu jiný nositel Nobelovy ceny, Max von Laue, o této teorii prý prohlásil: „Pokud se toto ukáže být pravdivé, přestanu se věnovat fyzice.“ (Asi tušíte jak to dopadlo: Poté, co se de Broglieho hypotéza potvrdila experimentálně, obdržel roku 1929 Nobelovu cenu a Max von Laue se věnoval fyzice až do své smrti v roce 1960. Paradoxně experiment, který ukázal, že de Broglie měl pravdu, byl velice podobný tomu, za který obdržel Nobelovu cenu Laue.)

Okolo roku 1925 začal Werner Heisenberg formulovat rigorózní teorii kvantovaných elektronů pomocí násobení nekomutujících matic, ale protože je dost komplikovaná na pochopení, tak se s dovolením přeneseme až do roku 1926. To Erwin Schrödinger, vycházející z de Broglieho ideje, formuloval rovnici, která jako řešení pro pohyb volného elektronu dává právě de Broglieovy rovinné vlny. K všeobecnému přijetí této rovnice ale vedlo až to, že její řešení pro atom vodíku, tedy elektron pohybující se v elektrostatickém potenciálu jádra, přesně odpovídalo experimentálně změřenému spektru.

Tato rovnice, která se v téměř nezměněné podobě používá dodnes, nás bude provázet celým zbytkem seriálu. Ale tuto rovnici si ukážeme až příště, včetně řešení pro jednoduché modelové systémy.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

 /FYKOS  @fykosak

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.