Úloha III.2 ... hrajeme si s klíči

3 body; průměr 1,82; řešilo 67 studentů

Vašek si rád hraje s klíči tak, že je roztočí na šňůrce a pak si je nechá namotat na ruku. Pro názornost si tuto situaci zjednodušme modelem, kdy máme ve stavu beztíže hmotný bod o hmotnosti m uchycený na konci nehmotného vlákna délky l_0. To je druhým koncem připevněno na pevný válec o poloměru r. Vlákno napneme tak, že v bodě uchycení představuje kolmici k povrchu válce, a hmotnému bodu udělíme rychlost $\mathbf{v}_0$ ve směru kolmém jak na osu válce, tak na napnuté vlákno. To se díky tomu začne na válec namotávat. Jak bude záviset velikost rychlosti hmotného bodu na délce nenamotané části vlákna l?

Nápověda *Najděte veličinu, která je od začátku do konce namotávání konstantní.*

Bonus *Za jak dlouho se vlákno namotá celé?* *Vašek si hrál při pádu z okna s klíči.*

V inerciální vztažné soustavě spojené s válcem působí na hmotný bod jediná síla, a to tahová síla vlákna. Je-li vlákno napnuté, míří tahová síla ve směru vlákna a hmotný bod se pohybuje ve směru kolmém na vlákno. Výkon tahové síly, který je daný skalárním součinem tahové síly a rychlosti hmotného bodu, je pak nulový.

Zachovávající se veličinou je tedy mechanická energie hmotného bodu, která je v našem případě rovna kinetické energii. Mechanická energie hmotného bodu je rovna

$$E = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost hmotného bodu. Její velikost v se zachovává, neboť mechanická energie i hmotnost jsou konstantní. Znamená to, že po celou dobu namotávání je $v = v_0$ a velikost rychlosti na délce nenamotané části vlákna l nezávisí.

V okamžiku, kdy se vlákno na válec namotá, narazí hmotný bod do válce a následující pohyb je dán charakterem srážky.

Bonus

Označme $\varphi \geq 0$ úhel, který svírá vlákno v daném čase t se směrem, který svíralo na začátku v čase $t = 0$. Zpočátku se vlákno na válec namotávat nebude. Nejdříve se totiž otočí o pravý úhel ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). V tomto okamžiku bude směr vlákna tečný na povrch válce a při dalším otáčení se bude muset vlákno na válec namotávat. V této první čtvrtotáčce se hmotný bod otáčí kolem bodu uchycení vlákna, a proto je poloměr otáčení l_0. Navíc úhlová rychlost ω je konstantní a je rovna

$$\omega = \frac{v_0}{l_0}\,.$$

Připomeňme, že úhlová rychlost je definována jako časová změna úhlu natočení, matematicky vyjádřeno jako časová derivace úhlu $\varphi(t)$,

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t) = \dot{\varphi}(t)\ . \tag{1}$$

Úhlová rychlost ω je konstantní, a proto jednoduše dostaneme, že se vlákno natočí o úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ za čas

$$t_1 = \frac{\pi l_0}{2v_0}\,. \tag{2}$$

Dále se bude vlákno na válec postupně namotávat, takže se celkově bude hmotný bod pohybovat po jakési spirále. V každém bodě trajektorie lze však v malém okolí tohoto bodu aproximovat trajektorii kružnicovým obloukem, který tvoří tzv. oskulační kružnici. Tyto oskulační kružnice jsou charakterizovány svým středem a poloměrem. Středem oskulační kružnice je v každém okamžiku místo, kde se vlákno od válce začíná odchylovat, a poloměr je dán délkou l nenamotané části vlákna. Velikost rychlosti $v = v_0$ je proto rovna

$$v_0 = l\omega = l\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3}$$

kde délka l závisí na čase, $l = l(t)$, a úhlová rychlost stále definovaná vztahem (1) nyní závisí na čase. Tato délka souvisí s délkou namotané časti vlákna, která je rovna $r\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$ pro $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$, a proto

$$l(t) = l_0 - r\left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2}\right)\,. \tag{4}$$

Dohromady dostaneme z rovnic (3) a (4) diferenciální rovnici

$$v_0 = \left(l_0 - r\left(\varphi(t) - \frac{\pi}{2}\right)\right)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,,$$

kterou řešíme separací proměnných. Tuto rovnici můžeme integrovat, a to od okamžiku $t = t_1$ (rovnice (2)), kdy je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, a do nějakého obecného času t před namotáním celého vlákna, kdy je $\varphi = \varphi(t)$ neboli

$$\int_{t_1}^{t} v_0\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\left(l_0 - r\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}\varphi\,.$$

Všimněte si, že pravá strana představuje délku spirály, po které se hmotný bod po první čtvrtotáčce pohybuje. Abychom si usnadnili práci, můžeme provést substituci $\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Úhel $\tilde{\varphi}$ představuje natočení vlákna od začátku namotávání. Pro diferenciál máme $\mathrm{d}\tilde{\varphi} = \mathrm{d}\varphi$ a diferenciální rovnice přejde na tvar

$$\int_{t_1}^{t} v_0\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{\tilde{\varphi}}\left(l_0 - r\tilde{\varphi}\right)\mathrm{d}\tilde{\varphi}\,.$$

Velikost rychlosti v_0 je konstantní, a proto je levá strana jednoduše rovna násobku v_0 a času pohybu hmotného bodu po spirále. Dále zintegrováním pravé strany vedoucí na délku spirály dostaneme

$$v_0\left(t - t_1\right) = l_0\tilde{\varphi} - \frac{r\tilde{\varphi}^2}{2} \quad\Rightarrow\quad t = t_1 + \frac{\tilde{\varphi}}{2v_0}\left(2l_0 - r\tilde{\varphi}\right)\,.$$

Vlákno se namotá na válec za čas $t = t_2$, kdy $r\tilde{\varphi} = l_0$ neboli

$$t_2 = \frac{\pi l_0}{2v_0} + \frac{l_0^2}{2v_0 r} = \frac{l_0}{2v_0}\left(\pi + \frac{l_0}{r}\right)\,,$$

kde jsme za t_1 dosadili výraz z rovnice (2).

Václav Mikeska
`v.mikeska@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.