Úloha III.3 ... paraplíčko

5 bodů; průměr 4,48; řešilo 56 studentů

Určitě jste si již všimli, že když umístíte lžičku pod proud vody (například při mytí nádobí), vytvoří jakýsi vodní hříbek. Pro zjednodušení uvažujte, že lžička je rovná a má kruhový tvar malého poloměru. Po umístění kolmo do středu proudu vody (jehož poloměr je ještě menší) padající z klidu z výšky h nad dnem umyvadla vytvoří krásný rotační paraboloid. Spočítejte, do jaké výšky musíme lžičku dát, aby voda dopadala co nejdále od osy původního proudu (dno umyvadla je vodorovné). Uvažujte, že voda je ideální kapalina (nestlačitelná, neviskózní, bez vnitřního tření).

Bonus *Najděte výšku umístění lžičky, při které voda vytvoří „přístřešek“ s co největším objemem.*

Matěj umýval nádobí.

Zásadním faktem, který je třeba si uvědomit, je, že voda při dopadu mění pouze směr a neztrácí přitom žádnou energii (tedy rychlost). To platí pouze v idealizovaném případě dokonalé kapaliny. Ve skutečnosti by dopad vody na lžičku nemusel být dokonale pružný a nějaká energie bude přeměněna na teplo. Jelikož neuvažujeme zakřivení lžičky, bude voda opouštět lžičku pouze s horizontální složkou rychlosti (voda proudí rovnoměrně do všech směrů rovnoběžných s povrchem lžičky).

Výšku lžičky nad dnem umyvadla si označíme proměnnou x. Voda pak dopadá na lžičku z výšky $h-x$ rychlostí

$$v=\sqrt{2g(h-x)}\,,$$

což vyplývá ze vztahů pro volný pád. Jelikož při dopadu není ztracena žádná energie, bude se voda po dopadu pohybovat stále rychlostí v, přičemž pouze změní směr ze svislého na vodorovný. Po opuštění lžičky začne konat vodorovný vrh z výšky x počáteční rychlostí v. Na dno dopadne za čas

$$t=\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

a dopadne tedy do horizontální vzdálenosti

$$y=vt=2\sqrt{x(h-x)}$$

od místa, kam dopadá voda před umístěním lžičky. Hledáme tedy taková x, při kterém nabývá výraz pod odmocninou maximální velikosti a voda tedy dopadne nejdále. Výraz $x(h-x)$ je kvadratická funkce s nulovými body x a h, proto je její maximum v bodě $x=h/2$. Lžičku tedy musíme umístit přesně do poloviny výšky mezi dnem a kohoutkem.

Bonus

Bonus řešíme podobným způsobem jako předchozí příklad, akorát je potřeba spočítat objem pod rotačním paraboloidem. Zanedbáme přitom poloměr lžičky, abychom mohli paraboloid jednodušeji parametrizovat. Paraboloid popíšeme tak, že najdeme funkci, která popisuje horizontální vzdálenost od jeho osy (tedy od přímky, která prochází původním proudem vody tekoucím z kohoutku) v závislosti na výšce od dna. Proměnnou označující výšku od dna označíme z.[1] Funkci udávající horizontální vzdálenost y od kohoutku můžeme psát jako $y(z)=2\sqrt{(h-x)(x-z)}$.

[1] Proměnná x označuje výšku lžičky, kterou jsme již určili, z značí výšku, ve které měříme vzdálenost vodní stěny od osy.

Objem pod paraboloidem vypočítáme podle vzorce pro výpočet objemu rotačních křivek. Využijeme větu, která říká, že objem tělěsa, které vznikne rotací podgrafu spojité funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,b\rangle$ kolem osy x, je dán vztahem

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x \,.$$

V našem případě po dosazení dostáváme

$$V = \pi \int\limits_0^x (y(z))^2 \mathrm{d}z = 4\pi \int\limits_0^x (h-x)(x-z)\mathrm{d}z = 2\pi(h-x)x^2 \,.$$

Nyní jsme se zbavili proměnné z. Dále hledáme maximum $V = 2\pi(h-x)x^2$ na intervalu od 0 do h. K tomu využijeme derivaci podle x

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(h-x)x^2 &= 0 \,, \\ -x^2 + 2(h-x)x &= 0 \,, \\ x &= 2(h-x) \,, \\ x &= \frac{2}{3}h \,. \end{aligned}$$

Při úpravách jsme vypustili řešení $x = 0$, které zřejmě neodpovídá maximu. Maximální objem dostaneme při zdvihnutí lžičky do výšky $\frac{2}{3}h$.

Zde jsme se setkali s trochu neintuitivní idealizací. Předpokládáme totiž, že lžička je hodně malá, abychom při výpočtu objemu paraboloidu mohli uvažovat, že lžička je pouhým bodem v jeho vrcholu. Kdybychom nezanedbávali rozměr paraboloidu, museli bychom počítat objem komplikovanějšího geometrického tělesa - jakéhosi pseudoparaboloidu s plošinkou namísto špičky.

Zároveň však předpokládáme, že dopadající proud vody má mnohem menší poloměr než lžička, aby voda ze lžičky vycházela vodorovně. Kdyby byl proud vody srovnatelný se lžičkou, mohlo by se stát, že by ho lžička dokonale nerozptýlila do horizontálního směru a vycházel by od lžičky směrem k zemi pod jistým úhlem.

Zajímavé je, že něco je velmi malé a něco jiného (v našem případě proud vody) může být ještě velmi menší v porovnání s tou velmi malou věcí (lžičkou). S takovými idealizacemi se ve fyzice potkáte ještě často.

Matěj Mezera
m.mezera@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.