Úloha II.3 ... Dančina (ne)rovnovážná destička

6 bodů; průměr 4,46; řešilo 80 studentů

Destička tloušťky $t = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ se šířkou $d = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ se skládá ze dvou částí. První část o hustotě $\varrho_1 = 0{,}20 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ má délku $l_1 = 10\,\mathrm{cm}$, druhá část o hustotě $\varrho_2 = 2{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ má délku $l_2 = 5{,}0\,\mathrm{cm}$. Desku položíme na hladinu vody s hustotou $\varrho_\mathrm{v} = 1{,}00 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a počkáme, až se ustálí v rovnovážné poloze. Jaký úhel bude svírat rovina desky s hladinou vody? Jaká část destičky zůstane trčet nad hladinou? *Danka si povídala s Peťem o mytí nádobí.*

Na doštičku sa môžeme pozerať zboku ako na 2D problém. Aby sa ustálila v rovnovážnej polohe, tak pre ňu musia platiť dve podmienky

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{o}\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = \mathbf{o}\,.$$

Uvažovaná doska má dve časti – časť s hustotou $\varrho_2 > \varrho_\mathrm{v}$ a časť s menšou hustotou $\varrho_1 < \varrho_\mathrm{v}$. Tú si môžeme rozdeliť ešte na časť ponorenú vo vode $l_{1\mathrm{v}}$ a časť nad hladinou vody $l_{1\mathrm{n}}$, pričom $l_1 = l_{1\mathrm{v}} + l_{1\mathrm{n}}$. Ponorené časti dosky l_2, $l_{1\mathrm{v}}$ sú vo vode nadľahčované vztlakovou silou

$$F_\mathrm{vz} = \left(V_2 + V_{1\mathrm{v}}\right) \varrho_\mathrm{v} g = \left(l_2 + l_{1\mathrm{v}}\right) S \varrho_\mathrm{v} g\,,$$

kde $S = td$. Súčasne na ne pôsobí aj tiažová sila

$$F_{g_\mathrm{v}} = \left(l_2 \varrho_2 + l_{1\mathrm{v}} \varrho_1\right) S g\,.$$

Celkovo dostávame silu

$$F_\mathrm{v} = F_{g_\mathrm{v}} - F_\mathrm{vz} = \left(l_2 \left(\varrho_2 - \varrho_\mathrm{v}\right) + l_{1\mathrm{v}} \left(\varrho_1 - \varrho_\mathrm{v}\right)\right) S g\,.$$

Nad hladinou vody nepôsobí na dosku vztlaková sila, teda výsledná sila na neponorenú časť je tvorená iba tiažovou silou

$$F_\mathrm{n} = F_{g_\mathrm{n}} = l_{1\mathrm{n}} \varrho_1 S g\,.$$

Z našich predpokladov pre rovnovážnu polohu vyplýva, že výsledná sila pôsobiaca na teleso musí byť nulová, teda

$$F_\mathrm{v} + F_\mathrm{n} = 0\,.$$

Odtiaľ dostávame podmienku, kedy bude výsledná sila pôsobiaca na teleso rovná nule

$$l_{1\mathrm{n}} \varrho_1 + l_2 \left(\varrho_2 - \varrho_\mathrm{v}\right) + l_{1\mathrm{v}} \left(\varrho_1 - \varrho_\mathrm{v}\right) = 0\,.$$

Nakoniec zistíme dĺžku časti dosky, ktorá je pod hladinou vody. Za $l_{1\mathrm{n}}$ dosadíme $l_1 - l_{1\mathrm{v}}$ a dostávame

$$l_{1\mathrm{v}} + l_2 = \frac{l_1 \varrho_1 + l_2 \varrho_2}{\varrho_\mathrm{v}}\,.$$

Výsledná časť dosky, ktorá vytŕča nad hladinu, má dĺžku

$$l_{1\mathrm{n}} = l_1 - l_{1\mathrm{v}} = \frac{l_1 \left(\varrho_\mathrm{v} - \varrho_1\right) + l_2 \left(\varrho_\mathrm{v} - \varrho_2\right)}{\varrho_\mathrm{v}} = 2{,}0\,\mathrm{cm}\,. \tag{1}$$

Aby teleso bolo v rovnovážnej polohe, je potrebné, aby výsledný moment síl

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}\,,$$
$$M = rF\cos\alpha$$

spôsobujúci otáčanie telesa bol nulový. Za bod otáčania volíme miesto, kde doska vytŕča z hladiny. Pre časti našej dosky získame ramená r_2, $r_{1\mathrm{v}}$ a $r_{1\mathrm{n}}$ ako

$$r_2 = l_{1\mathrm{v}} + \frac{l_2}{2}\,,$$
$$r_{1\mathrm{v}} = \frac{l_{1\mathrm{v}}}{2}\,,$$
$$r_{1\mathrm{n}} = \frac{l_{1\mathrm{n}}}{2}\,.$$

Výsledný moment sily je potom

$$M = \left(r_2 l_2\left(\varrho_2 - \varrho_\mathrm{v}\right) + r_{1\mathrm{v}} l_{1\mathrm{v}}\left(\varrho_1 - \varrho_\mathrm{v}\right) - r_{1\mathrm{n}} l_{1\mathrm{n}}\right) Sg\cos\alpha\,,$$

kde α je uhol mezi rovinou dosky a rovinou hladiny. Nech má výraz v zátvorke akúkoľvek hodnotu, pre splnenie podmienky $M = 0$ stačí, aby platilo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Túto časť úlohy však možno riešiť aj úvahou. Doštička se bude vždy snažiť dostať do takej pozície, v ktorej bude mať najmenšiu energiu, teda kde bude jej ťažisko najnižšie. Pretože $l_{1\mathrm{n}} = 2{,}0\,\mathrm{cm}$, je jasné, že ťažisko bude pod hladinou – potom bude najnižšie vtedy, keď bude doštička kolmá na hladinu.

Ak by bol výraz v zátvorke nulový, nezáležalo by na uhle naklonenia. To by znamenalo, že ťažisko dosky by bolo presne na hladine. Nakoniec, ak by ťažisko vychádzalo vyššie než hladina, doštička by sa prevrátila tak, aby bola rovnobežne s hladinou. Mohlo by sa zdať, že aj v tom prípade by bolo legálne riešenie $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ale nie je to tak. Moment síl by v tej chvíli síce bol nulový, ale daná poloha by nebola stabilná. Tiež by sme už nemohli zanedbávať hrúbku dosky t, čím by sa situácia značne skomplikovala.

Tereza Labudová
tereza.labudova@fykos.cz