

Úvodem

Milé řešitelky, milí řešitelé, organizátorům skončilo zkouškové, tak jsme se vzpamatovali a posíláme vám zadání páté série.

Za námi je také Fyziklání 2020 a tak bychom rádi poděkovali všem, kdo se zúčastnili či pomáhali s organizací. Letošní ročník byl rekordní, přijelo 201 týmů z 6 států v celkovém počtu 974 soutěžících. Na soutěži a akcích po ni se podílelo okolo 90 organizátorů.

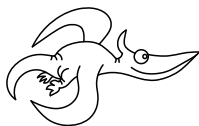
Pokud se vám líbilo Fyziklání a baví vás i matematika, doporučujeme zúčastnit se Náboje¹ který proběhne 13. 3. v Praze a v Opavě, mimo ČR pak v 11 dalších státech Evropy.

V páté sérii nás mimo jiné čeká zrychlující sud, úvahy nad časem potřebným k rožnutí světla či experiment aproximující chladnutí jídla.

Minulý týden jsme také poslali e-mailové pozvánky na jarní soustředění, které se bude konat v obci Sedloňov v Orlických horách. Pokud jste pozvánku dostali a přihlásili se na soustředění, gratulujeme a těšíme se na viděnou! Pokud jste ji nedostali a myslíte si, že byste ji měli dostat, nebojte se nám napsat.

Hodně úspěchů do dalšího pololetí vám přeji

Organizátoři



Zadání V. série

Termín uploadu: 24. 3. 2020 23.59

Termín odeslání: 23. 3. 2020

Úloha V.1 ... vlak na mostě

3 body

Na mostě dlouhém 300 m stojí nákladní vlak, jehož váha je rovnoměrně rozložena na plochu všech devíti ocelových pilířů mostu. Každý pilíř má podstavu tvaru čtverce se stranou $a = 2,0$ m a je vysoký $h = 10$ m. O kolik sa vlivem tíhy vlaku stlačí ocelové pilíře? Modul pružnosti oceli v tlaku je $E = 200$ GPa, celková hmotnost vlaku je $m = 574$ t.

Úloha V.2 ... pohne se?

3 body

Jáchym chce doma nakládat zelí, a tak si koupil válcový sud. Z obchodu ho však musí nějak dostat metrem domů. Sud i s víkem si můžeme představit jako dutý válec s vnějším poloměrem r a s vnější výškou h . Šířka stěn, podstavy i víka je t . Sud je vyrobený z materiálu s hustotou ρ . S jakým největším zrychlením se může souprava metra pohybovat, aby se volně stojící sud vůči ní nijak nepohnul? Koeficient tření mezi podlahou vagónu a sudem je f .

Úloha V.3 ... Matějova vysněná koule

6 bodů

Přesně na hraně stolu leží homogenní koule o poloměru r . Jelikož je to „polovratká“ poloha, začne koule padat ze stolu. Na jakou úhlovou rychlost se roztočí? Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

¹math.naboj.org

Úloha V.4 ... podivná smyčka

7 bodů

Kruhová kovová smyčka s poloměrem $r = 15$ cm má hmotnost $m = 18$ g. Pokud bychom ji rozstříhli, vznikl by drát s odporem $R = 3,5$ m Ω . Na počátku je smyčka v klidu. V čase $t = 0$ zapneme homogenní magnetické pole kolmé k rovině smyčky s časovým průběhem $B(t) = \alpha t$, kde $\alpha = 1$ mT \cdot s $^{-1}$ je konstanta. Smyčka se v důsledku přítomnosti nestacionárního magnetického pole začne nepatrně otáčet kolem své osy. Určete velikost úhlové rychlosti ω v čase $t = 0,1$ s. Deformaci smyčky neuvažujte.

Úloha V.5 ... opticko-relativistická

9 bodů

Určete, jaký fázový posun $\Delta\Phi$ vznikne přechodem laserového svazku s vlnovou délkou λ_0 přes skleněnou desku s klidovou tloušťkou h a s indexem lomu n , která se pohybuje ve směru svazku rovnoměrně rychlostí v , oproti případu, kdy je deska vůči zdroji i pozorovateli v klidu. Zajímá nás především první nenulový člen rozvoje podle rychlosti desky.

Úloha V.P ... budiž světlo

10 bodů

Odhadněte čas, který uplyne mezi stlačením vypínače a rozsvícením světelného zdroje. Zvlášť vyřešte pro žárovku, zářivku, LED a neonovou trubici. Diskutujte co nejvíc faktorů, které tento čas ovlivňují.

Úloha V.E ... nenaolejuje-li Jáchym, naolejuje Matěj

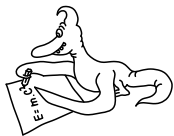
12 bodů

Změřte závislost teploty kapaliny v otevřeném hrnku na čase. Jako kapalinu použijte nejdříve vodu, potom olej a nakonec vodu s malou vrstvou oleje na povrchu. Vrstva by měla být co nejtenčí, ale zároveň musí pokrývat celý povrch vody. Měřte v rozsahu od 90 °C do 50 °C. Dávejte pozor na to, aby veškeré podmínky byly při všech experimentech stejné (použijte stejný hrnek se stejnou počáteční teplotou, teploměr ponechte celou dobu v kapalině pokaždé na stejném místě atd.). Popište co nejlépe experimentální aparaturu, srovnajte chladnutí v jednotlivých případech a výsledky diskutujte.

Úloha V.S ... mini a maxi

10 bodů

1. Máme PET lahev s vodou, která stojí na nekonečné rovině. V jaké výšce bychom měli vytvořit v lahvi malý otvor, aby voda dostříkla co nejdále od lahve? Lahev po celou dobu nehybně stojí na rovině a otvor prochází kolmo stěnou. Průřez otvoru je výrazně menší než průřez lahve.
2. Kam bychom měli umístit otvor (viz předchozí podúloha), pokud chceme, aby byl dostřík nejdlejší po jedné minutě? Předpokládejte, že lahev má konstantní průřez S a otvor má výrazně menší průřez s . Pro numerické řešení odhadněte rozumné hodnoty konstant.
3. Jaký může mít baterie maximální výkon na spotřebiči, pokud má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i ? Pro jaký odpor spotřebiče to nastane? Popřípadě, pro jakou impedanci to nastane, pokud bude obvod tvořen rezistorem, cívkou a kondenzátorem?
4. Jak nejlíže se k sobě mohou dostat dvě jádra dusíku 14, která se pohybují se střední kvadratickou rychlostí odpovídající plynu za normálních podmínek?
5. Najděte maximální možnou teplotu, kterou by mohl mít plyn, ve kterém by probíhal děj $p = p_0 e^{-\alpha V}$, kde α je kladná konstanta a p_0 je tlak plynu v počátečním stavu.



Řešení IV. série

Úloha IV.1 ... čibonaut

3 body; průměr 2,69; řešilo 88 studentů

Máme kosmonauta s hmotností M , který se v beztlížném stavu vznáší ve vzdálenosti l od stěny vesmírné stanice. Najednou se rozhodne, že těžké nářadí s hmotností m , které dosud držel v ruce, hodí po stanici ve směru kolmém na její stěnu. V jaké vzdálenosti od stěny kosmonaut bude, až do ní nářadí narazí?

Karel chtěl zadat tento název úlohy.

Vydeme ze zákona zachování hybnosti. Původně byla hybnost kosmonauta společně s jeho nářadím nulová. Taková musí zůstat i po odhození nářadí. Označíme rychlost kosmonauta v a rychlost nářadí u . Zvolíme-li, že u míří směrem ke stanici, zatímco v má přesně opačný směr, bude platit $Mv = mu$. Doba, kterou poletí nářadí, bude $t = l/u$. Za stejný čas urazí kosmonaut vzdálenost

$$l' = vt = \frac{v}{u}l = \frac{m}{M}l.$$

Celková vzdálenost kosmonauta od stěny bude součtem jím uražené dráhy a jeho počáteční pozice, neboli

$$L = l + l' = \left(1 + \frac{m}{M}\right)l.$$

Odpověď je, že nářadí dopadne na stěnu v okamžik, kdy bude kosmonaut ve vzdálenosti $\left(1 + \frac{m}{M}\right)l$ od stanice.

Karel Kolář

karel@fykos.cz

Úloha IV.2 ... Machovo číslo

3 body; průměr 2,78; řešilo 82 studentů

Letadla jsou ve vysokých hladinách letu řízena pomocí Machova čísla. Tato veličina vyjadřuje rychlost v násobku rychlosti zvuku v daném prostředí. Rychlost zvuku ve vzduchu se ovšem s výškou mění. Jaký je rozdíl mezi rychlostí letu letadla letícího při Machově čísle 0,85 ve dvou různých letových hladinách FL 250 (7 600 m) a FL 430 (13 100 m)? V jaké hladině je rychlost vyšší a o kolik kilometrů za hodinu? Závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na teplotě můžeme s dostatečnou přesností popsat vztahem $c = (331,57 + 0,607 \{t\}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, kde t je teplota ve stupních Celsia. Uvažujte standardní atmosféru, ve které klesá teplota s výškou od 0 do 11 km od 15°C o $0,65^\circ\text{C}$ na každých 100 m až k teplotě $-56,5^\circ\text{C}$, která je pak konstantní až do 20 km nad střední hladinou moře.

Karel se učil ATC.

Úloha je založená na relativně jednoduchém dosazování. Složitější může být neztratit se v postupu. Nejprve určíme teplotu v jednotlivých letových hladinách. Pro letovou hladinu FL 430 je přímo napsaná v zadání, tedy $t_{\text{FL430}} = -56,5^\circ\text{C}$. Pro letovou hladinu FL 250 nám vychází $t_{\text{FL250}} = -34,4^\circ\text{C}$. Zvolený pokles teploty s výškou odpovídá, jak je zmíněno v zadání, tzv. standardní atmosféře. Jde o idealizovaný profil pro přibližné rychlé výpočty a využívá se hojně v letectví. Standardní atmosféra zhruba odpovídá tomu, jaké jsou střední hodnoty veličin v reálné atmosféře.

Z teplot můžeme dosazením do vzorce dostat rychlosti zvuku pro jednotlivé letové hladiny, které jsou $c_{FL250} = 311 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $c_{FL430} = 297 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vynásobením Machovým číslem dostáváme rychlosti letadla $v_{FL250} = 264 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $v_{FL430} = 253 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vidíme tedy, že rychlejší je letadlo, které letí níže. Rozdíl jejich rychlostí je $\Delta v \doteq 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 41 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Tedy letadlo je zhruba o 4,2 % pomalejší, když za konstantního Machova čísla vystoupá na cestovní letovou hladinu 430.

Zvolená cestovní hladina odpovídá dostupu (nejvyšší možné cestovní hladině) některých běžných dopravních letadel. Konkrétní hodnoty dostupu a rychlosti jsou pro Airbus A380, ale prakticky stejné jsou i u Boeingu 777. Přesná hodnota optimální cestovní rychlosti je pak dána například i aktuálním naložením letadla. Obecně se také dá říci, že většina letadel létá do Machova čísla 0,9, protože přibližování se rychlosti zvuku a její mírné překročení vede k vysokému nárůstu odporové síly. Nižší cestovní hladina FL 250 pak odpovídá nejnižší cestovní hladině, od které jsou letadla řízená prostřednictvím Machova čísla. Pod touto hladinou se využívá řízení prostřednictvím indikované vzdušné rychlosti²

Karel Kolář

karel@fykos.cz

Úloha IV.3 ... uuu-trubice

5 bodů; průměr 3,57; řešilo 49 studentů

Jakou periodu malých kmitů bude mít voda ve skleněné trubici na obrázku? Uvažujte pokojovou teplotu a normální tlak a předpokládejte, že voda je dokonale nestlačitelná.

Karel zase přemýšlel nad U-trubicemi.

Harmonické kmity nastanou tehdy, když síly v systému působí proti výchylce (neboli vrací jej zpět do rovnovážné polohy) a zároveň je jejich velikost přímo úměrná velikosti výchylky. Tuto podmínku můžeme zapsat rovnicí $F = -kx$, kde k je tuhost systému. Ukážeme-li, že pohyb v uuu-trubici se řídí touto rovnicí, máme vyhráno, protože periodu kmitů harmonického systému lze snadno spočítat jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1)$$

kde m je hmotnost, na kterou síla F působí.

Pokud v jednom rameni zvedneme hladinu vody o x , ve druhém rameni hladina klesne o x . Zvýšená hladina bude působit svou tíhou na celý vodní sloupec a bude se jej snažit navrátit do rovnovážné polohy. Můžeme si to představit tak, že nad sníženou hladinou se teď nachází sloupec vody o výšce $2x$, má hmotnost $m_x = 2\pi r^2 \rho x$. Tomu odpovídá síla

$$F = -m_x g = -2\pi r^2 \rho g x = -kx.$$

Teď před námi stojí těžší úkol, musíme spočítat celkový objem vody. Výpočet nám trochu komplikuje tvar uuu-trubice. Rozdělme ji na celkem 6 přímých úseků a 5 půltorů (polovin toru).³ Bez odvození uvedeme vztah pro objem toru³

$$V_{\text{torus}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

²Ano, není to ani ta rychlost, kterou se pohybuje letadlo vůči vzduchu, ani ta, kterou se pohybuje vůči zemi. Ale o tom možná někdy jindy.

³Vztah pro objem toru lze odvodit například z Guldinovy věty https://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinovy_věty. Jiné odvození využívající Cavalieriho princip naleznete zde <http://whistleralley.com/torus/torus.htm>, nebo si jej můžete odvodit sami jako cvičení na integrály.

kde v našem případě je hlavní poloměr kolen v trubici $R = 2r$. Objem jednoho kolena tak bude $V_k = 2\pi^2 r^3$. Přímé úseky uuu-trubice mají celkovou délku $56r$. Celkový objem vody potom vychází

$$V = 56r \cdot \pi r^2 + 5 \cdot 2\pi^2 r^3 = 2\pi(28 + 5\pi)r^3.$$

Hmotnost bude jednoduše $m = \rho V$. Po dosazení do rovnice (1) dostaneme pro periodu malých kmitů vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(28 + 5\pi)r}{g}}.$$

Jindřich Jelínek
jjelinek@fykos.cz

Úloha IV.4 ... optický fykosák

8 bodů; průměr 6,00; řešilo 25 studentů

Pták Fykosák našel na Matfyzu nehlídanou optickou lavici, která umožňuje rozmístit různé pomůcky podél optické osy, a začal si s ní hrát. Na osu umístil postupně bodový zdroj světla, první čočku, druhou čočku a stínítko se stejnými rozestupy (vzdálenost stínítka od zdroje je tedy třikrát větší než vzdálenost jakýchkoli dvou sousedních pomůcek). Na stínítku se vytvořil ostrý obraz zdroje. Fykosák potom celou soustavu ponořil do neznámé kapaliny, kterou našel v podivném kanystru. K jeho úžasu zůstal obraz na stínítku stále ostrý. Určete index lomu této kapaliny, jenž je určitě jiný než index lomu vzduchu, který můžete považovat za jednotkový. Jedna z čoček má desetkrát větší ohniskovou vzdálenost než druhá a obě jsou tenké a vyrobené z materiálu o indexu lomu 2. *Matěj si rád hraje s cizími věcmi.*

Obraz vytvořený na stínítku je skutečný (jinak by nemohl být zachycen na stínítku). To znamená, že můžeme zdroj a stínítko prohodit a dostaneme ostrý obraz (světlo se šíří stejně oběma směry). Bez újmy na obecnosti tedy předpokládáme, že první čočka má ohniskovou vzdálenost f desetkrát menší než druhá ($10f$). Vzdálenost jednotlivých součástí budeme značit h . Vzdálenost místa, kam zobrazí zdroj první čočka, od první čočky označme s_1 a vzdálenost tohoto „meziobrazu“ od druhé čočky s_2 . Znaménková konvence bude taková, aby s_1 bylo kladné, pokud obraz vznikne za první čočkou, zatímco s_2 bude kladné pro obraz před druhou čočkou. Musí platit

$$s_1 + s_2 = h. \quad (2)$$

Zároveň si můžeme napsat obě zobrazovací rovnice. První čočka zobrazí zdroj ze vzdálenosti h před čočkou do vzdálenosti s_1 . Druhá čočka zobrazí obraz zdroje ze vzdálenosti s_2 do vzdálenosti h za čočkou. To zapíšeme jako

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{h} + \frac{1}{s_1}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{10f} = \frac{1}{h} + \frac{1}{s_2}. \quad (4)$$

Máme celkem tři rovnice (2), (3) a (4), ze kterých po několika algebraických úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$0 = 30f^2 - 22hf + h^2, \\ f = \frac{11 \pm \sqrt{91}}{30}h. \quad (5)$$

Dvě možná řešení pro velikost ohniskových vzdáleností čoček odpovídají dvěma možným indexům lomu vzduchu a neznámé kapaliny. Rovnice tenké čočky je

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_c}{n_p} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

kde $n_c = 2$ je index lomu čočky, n_p je index lomu okolního prostředí a r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti čočky. Jelikož n_c , r_1 a r_2 jsou pro obě čočky v průběhu experimentu konstantní, můžeme psát

$$f = \frac{K}{\frac{n_c}{n_p} - 1}, \quad (6)$$

kde K je nějaká konstanta. Dále označíme indexy lomu hledané kapaliny n_k a vzduchu $n_v \approx 1$. Teď si můžeme uvědomit, že poměr ohniskových vzdáleností je 10 i v kapalině, protože čočky mají stejné indexy lomu. K rovnici (5) jsme došli pouze pomocí tohoto předpokladu, proto jedno řešení pro f musí odpovídat ohniskové vzdálenosti první čočky v kapalině a druhé řešení její ohniskové vzdálenosti ve vzduchu - označme je f_k a f_v . Jelikož ohniskové vzdálenosti obou čoček mají stejné znaménko, musí se jednat o spojky, a nikoliv o rozptylky (jinak by nemohly vytvořit skutečný obraz za soustavou). Ohnisková vzdálenost spojky je kladná, takže z rovnice (6) vyplývá $f_k > f_v$. K hodnotám f_k a f_v tak můžeme přiřadit jednotlivé kořeny z (5)

$$f_k = \frac{11 + \sqrt{91}}{30} h, \quad f_v = \frac{11 - \sqrt{91}}{30} h.$$

Z rovnice (6) pro f_k si vyjádříme konstantu K , kterou dosadíme do vztahu pro f_v . Odtud si vyjádříme poměr f_k/f_v , za který dosadíme z předchozí rovnice. Po několika drobných úpravách dostáváme

$$\frac{\frac{n_c}{n_v} - 1}{\frac{n_c}{n_k} - 1} = \frac{f_k}{f_v} = \frac{11 + \sqrt{91}}{11 - \sqrt{91}}.$$

Nyní už stačí jen vyjádřit hledaný index lomu neznámé kapaliny

$$n_k = \left(\frac{11 - \sqrt{91}}{11 + \sqrt{91}} \left(\frac{n_c}{n_v} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} n_c \doteq 1,87.$$

Matěj Mezera

m.mezera@fykos.cz

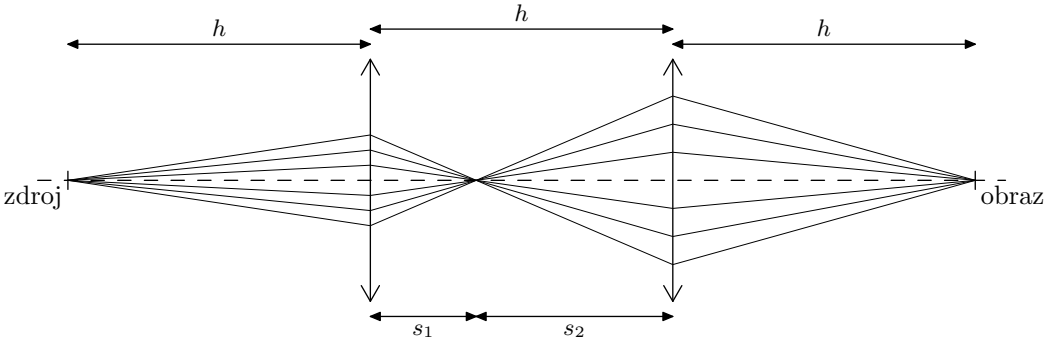
Úloha IV.5 ... zkratka napříč časem

9 bodů; průměr 4,49; řešilo 53 studentů

Jáchym se nachází v dvoudimenzionálním kartézském prostoru v bodě $J = (-2a, 0)$. Chce se co nejrychleji dostat do bodu $T = (2a, 0)$, který se (naštěstí) nachází ve stejném prostoru. Jáchym se zásadně pohybuje rychlostí v o velikosti v . Aby to nebylo tak jednoduché, prostorem vede pojízdný pás ve tvaru přímky, procházející body $(-3a, 0)$ a $(0, a)$, po kterém se Jáchym pohybuje celkovou rychlostí kv . Pro jaké minimální $k \geq 1$ se Jáchymovi vyplatí jít po pásu?

Jáchym, ze života.

Nejdříve spočítáme čas, za který Jáchym přejde přes pás. Nejrychlejší cesta bude mít zřejmě tři části – z bodu J na pás (průsečík prvního úseku dráhy a pásu označíme J'), kousek po pásu (až do bodu T') a nakonec z pásu do bodu T .



Obr. 1: Schéma optické soustavy.

Označme $x_0 = -3a$ a $y_0 = a$, což jsou body, ve kterých pás protíná osu x , resp. y . Pro úhel mezi pásem a osou x platí

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{y_0}{x_0}. \quad (7)$$

Z bodů J a T povedeme na přímkou danou pásem kolmice, jejich délka nechtě je po řadě d_1 a d_2 . Od místa průsečíků kolmic a přímkou vyznačíme vzdálenosti l_1 , resp. l_2 do bodů J' , resp. T' , viz obrázek 2. Spojnici J a J' nazveme dráha s_1 , stejně tak spojnici T a T' označíme s_2 . Z Pythagorovy věty máme $s_{1,2}^2 = d_{1,2}^2 + l_{1,2}^2$.

Nyní odvodíme podmínku pro nejkratší čas. Představme si, že Jáchym jde z bodu J do bodu P na pásu, který se nachází ve vzdálenosti p průsečíku kolmice d_1 a pásu. Nejdříve tedy ujde vzdálenost s_1 rychlostí v , potom ujde vzdálenost $p - l_1$ rychlostí kv . Celkový čas bude

$$t = \frac{s_1}{v} + \frac{p - l_1}{kv} = \frac{1}{v} \left(s_1 + \frac{p - l_1}{k} \right).$$

Za s_1 si dosadíme z Pythagorovy věty výše, čímž dostaneme závislost času na l_1 . Zbylé parametry (d_1 a p) jsou konstanty. Minimum času najdeme položením derivace rovné nule

$$\frac{dt}{dl_1} = \frac{d}{dl_1} \left(\frac{1}{v} \left(\sqrt{d_1^2 + l_1^2} + \frac{p - l_1}{k} \right) \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{l_1}{\sqrt{d_1^2 + l_1^2}} - \frac{1}{k} \right) = 0.$$

Řešením této rovnice dostaneme podmínku $d_1 = l_1 \sqrt{k^2 - 1}$, která zřejmě bude platit i pro d_2 a l_2 . Všimněme si, že konstanta p může být libovolná za předpokladu, že l_1 vyjde menší. Opětovným dosazením do Pythagorovy věty odvodíme vztah $s_{1,2} = kl_{1,2}$.

Celkový čas cesty je

$$t = \frac{s_1 + s_2}{v} + \frac{l - (l_1 + l_2)}{kv} = \frac{1}{kv} \left((d_1 + d_2) \sqrt{k^2 - 1} + l \right),$$

kde l je vzdálenost na přímkou od jedné kolmice k druhé, tedy $l = 4a \cos \varphi$. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= l \operatorname{tg} \varphi, \\ d_1 &= -\frac{x_0 + 2a}{4a} l \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned}$$

což vede na

$$d_1 + d_2 = -\frac{x_0}{2a} l \operatorname{tg} \varphi.$$

Dosazením do rovnice výše dostáváme

$$t = \frac{4a \cos \varphi}{v} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{x_0}{2a} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{k^2 - 1} \right).$$

Podíl $4a$ a v je zřejmě čas, který by Jáchymovi trvala cesta bez pásu. Pro mezní čas, při kterém se mu ještě vyplatí jít přes pás, platí

$$1 = \frac{\cos \varphi}{k} \left(1 - \frac{x_0}{2a} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{k^2 - 1} \right).$$

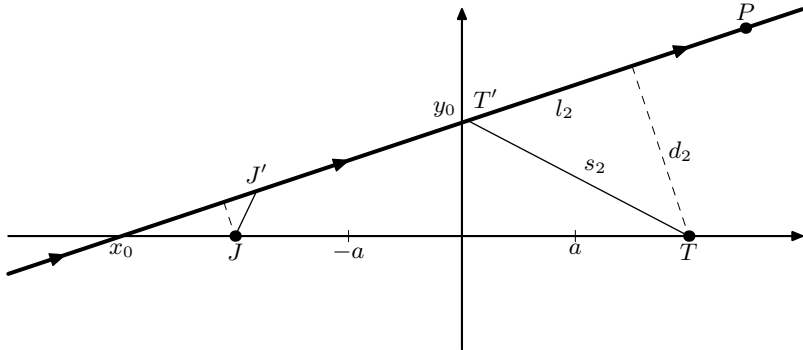
Ještě použijeme identitu $\cos x = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{-\frac{1}{2}}$, za $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}$ dosadíme z rovnice (7), kde $x_0 = -3$ a $y_0 = 1$, čímž získáme kvadratickou rovnici

$$31k^2 - 24k\sqrt{10} + 45 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení, konkrétně

$$k = \frac{12\sqrt{10} \pm 3\sqrt{5}}{31}.$$

Ještě musíme ověřit, že dráhy budou skutečně vypadat tak, jak jsme předpokládali. Zpětným dosazením zjistíme, že vyhovuje pouze kořen s $+$, tedy $k \doteq 1,44$.



Obr. 2: Jáchymova cesta pro $k = 1,44$

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Úloha IV.P ... klimatické změny feat. letadla

10 bodů; průměr 6,69;

řešilo 32 studentů

Létání letadlem ovlivňuje atmosféru nejen dobře známými emisemi uhlíku. Diskutujte, jaký vliv má letecký průmysl na oteplování atmosféry Země.

Katčino nové letadlo neprošlo emisní kontrolou.

Letecká doprava patří mezi významné antropogénne činitele vplývajúce na klímu Zeme. Komerčné lety sú čoraz populárnejším spôsobom prepravy aj napriek ich výraznejšej uhlíkovej stope v porovnaní s ostatnými spôsobmi prepravy.

Priame zohrievanie

Letecký priemysel za rok 2008 spotreboval 56 TWh energie,⁴ teda $2,02 \cdot 10^{17}$ J. Pri hmotnosti atmosféry⁵ $5,148 \cdot 10^{18}$ kg a mernej tepelnej kapacite vzduchu⁶ $1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ sa atmosféra za daný rok iba vplyvom leteckej dopravy ohriala o

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} \doteq 4 \cdot 10^{-5} \text{ K}.$$

Efekty ako ohrev runway-e trením pri vzlete a brzdení sú rádovo ešte menšie. Teda na ohrev klímy od lietadiel samotných nie je táto energia dostatočná. Pôvod ohrevu preto musíme hľadať mimo Zeme.

Skleníkový efekt

Konkrétne ide o slnečné žiarenie dopadajúce na Zem. Mnohé štúdie naznačujú, že dlhodobé otepľovanie klímy Zeme je spôsobené najmä skleníkovým efektom predovšetkým ľudského pôvodu. Podstatou vplyvu je práve emisia skleníkových plynov, aerosólov a zmena oblačnosti v hornej časti troposféry. Pri prelete lietadla dochádza k tvorbe kondenzačných stôp a následnému vzniku cirrových oblakov. Tie taktiež prispievajú k zmienenému javu.⁷

Vďaka dominancii oxidu uhličitého ako produkovaného skleníkového plynu, je jeho vplyv na zvyšovanie teploty atmosféry najlepšie preskúmaný. Preto je pre nás výhodne využiť koncept CO₂ ekvivalentu. Myšlienka je jednoduchá - namiesto toho, aby sme počítali efekt každého plynu či zmeny oblačnosti na atmosféru osobitne, nahradíme ich objemom oxidu uhličitého, ktorý by mal pri vypustení do atmosféry rovnaký efekt. Z podstaty myšlienky vyplýva linearita riešenia. Ak vieme, v akom pomere sú jednotlivé emisie, vieme nájsť multiplikatívny koeficient objemu vypusteného CO₂, ktorý bude reprezentovať všetky vplyvy. V prípade, že započítavame tvorbu cirrových oblakov, je multiplikatívny koeficient produkovaného oxidu uhličitého približne 1,7⁸ Dopad tvorby cirrov je znateľný – ak by sme vylúčili takéto zmeny oblačnosti, koeficient poklesne na úroveň asi 1,3.

V roku 2019 z objemu vyprodukovaného oxidu uhličitého patrili 2%, teda $9,15 \cdot 10^{11}$ kg, práve leteckému priemyslu. Z celkového objemu emisií CO₂ z dopravy to tvorí 12%.⁹ Pre porovnanie, množstvo uvoľneného CO₂ na osobu na kilometer je pre vnútroštátne lety (133 g) nižšie

⁴<https://cs.wikipedia.org/wiki/Letectví>

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth

⁶https://www.ohio.edu/mechanical/thermo/property_tables/air/air_Cp_Cv.html, merná tepelná kapacita vzduchu sa v skutočnosti mení s výškou, nám ide však len o odhad

⁷<https://www.nature.com/articles/nclimate1068>

⁸<https://doi.org/10.1007/s10584-011-0168-8>

⁹<https://www.atag.org/facts-figures.html>

ako pre auto s jedným pasažierom (171 g). Lety medzištátne (102 g) sú porovnateľné s autobusovou dopravou (104 g). Auto so štyrmi cestujúcimi či vlak sú výrazne efektívnejšie, a to na úrovni 40 g.¹⁰ Nesmieme však zabúdať, že osobná preprava nie je jediným druhom prepravy. V bežný deň je v Spojených štátoch amerických realizovaných viac ako 87 000 letov. Z toho je približne 28 500 komerčných letov (veľkých a regionálnych leteckých spoločností), 27 200 letov všeobecného letectva (súkromné lietadlá), 24 600 letov leteckých taxíkov (lietadlá na prenájom), 5 300 vojenských letov a 2 100 nákladných letov (Federal Express, UPS atď.).¹¹ Využitím ekvivalentu CO₂ dostávame efektívne množstvo emisií oxidu uhličitého $1,7 \cdot 9,15 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{y}^{-1} = 1,55 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{y}^{-1}$.

Citlivosť atmosféry na zmeny jej zloženia je *horúcou* témou fyziky atmosféry. V súčasnosti sú tu tri hlavné ukazovatele, ktoré vedci využívajú. Rovnovážna citlivosť klímy (ECS - equilibrium climate sensitivity) sa vzťahuje k rovnovážnym zmenám globálnej priemernej teploty vzduchu v blízkosti zemského povrchu, ktorá by zodpovedala trvalému zdvojnásobeniu atmosférickej koncentrácie oxidu uhličitého oproti pre-industriálnej ére (280 ppm). Vyplýva to z faktu, že zmeny klímy v závislosti na zmenách koncentrácie CO₂ vyžadujú čas. Oceán funguje ako veľký zásobník tepla a navyše sa vo vode oxid uhličitý rozpúšťa, preto by pri zdvojnásobení jeho objemu nastali rovnovážne podmienky až za niekoľko desiatok rokov. Postupná klimatická odozva (TCR - transient climate response) zodpovedá zmene teploty, opäť pri zdvojnásobení koncentrácie, avšak pri postupnom zvyšovaní o 1 % za rok. Od ECS sa líši práve tým, že ešte nedošlo k termodynamickej rovnováhe. Senzitivita zemského systému (ESS - earth system sensitivity) zahŕňa dlhodobé reakcie systému, ako zmeny hrúbky ľadovej pokrývky, distribúcie vegetácie a mnoho ďalšieho. Medzivládny panel o zmene klímy (The Intergovernmental Panel on Climate Change) pri Organizácii spojených národov vo svojej piatej (šiesta je na programe roku 2022) hodnotiacej správe predpovedá ECS v rozmedzí 1,5 °C až 4,5 °C a TCR 1 °C až 2,5 °C.¹²

Ak poznáme hmotnosť Zemskej atmosféry m_{atm} , jej molárnu hmotnosť M_{atm} a počet molekúl CO₂ na milión častíc k_{CO_2} , dokážeme zistiť počet častíc oxidu uhličitého v atmosfére ako

$$n_{\text{CO}_2} = \frac{k_{\text{CO}_2} m_{\text{atm}}}{1 \cdot 10^6 M_{\text{atm}}}.$$

Hmotnosť oxidu uhličitého v atmosfére potom dostaneme ako

$$m_{\text{CO}_2} = n_{\text{CO}_2} M_{\text{CO}_2},$$

kde M_{CO_2} je molárna hmotnosť CO₂. Zemská atmosféra má hmotnosť približne $m_{\text{atm}} = 5,15 \cdot 10^{18} \text{ kg}$, molárnu hmotnosť¹³ $M_{\text{atm}} = 28,96 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ a $M_{\text{CO}_2} = 44,01 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ je molárna hmotnosť oxidu uhličitého.¹⁴ V súčasnosti je v atmosfére $k_{\text{CO}_2} = 413,31 \text{ ppm}$. Dostávame teda, že v atmosfére je približne $3,23 \cdot 10^{15} \text{ kg CO}_2$. Táto koncentrácia dosiahne dvojnásobok pre-industriálnej hodnoty $m_{\text{CO}_2} = 2,19 \cdot 10^{15} \text{ kg CO}_2$, ak vypustíme ešte ďalších $1,15 \cdot 10^{15} \text{ kg}$. Súčasnou ročnou produkciou $3,62 \cdot 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{y}^{-1}$ takúto koncentráciu dosiahneme za 31,8 rokov.¹⁵ V prípade, že by sme prestali využívať letecký priemysel, rovnaký efekt docielime za 32,6 rokov.

¹⁰<https://www.bbc.com/news/science-environment-49349566>

¹¹<https://sos.noaa.gov/datasets/air-traffic/>

¹²<https://www.ipcc.ch/report/ar5/syr/>

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth

¹⁴https://cs.wikipedia.org/wiki/Oxid_uhličitý

¹⁵<https://ourworldindata.org/co2-and-other-greenhouse-gas-emissions#annual-co2-emissions>

Táto predpoveď ale nezahŕňa prirodzený cyklus koncentrácie CO₂, nárast či naopak možnú sprísnenú redukciu emisií a ani iné skleníkové efekty. Vidíme však, že letectvo má síce malý, ale nezanedbateľný vplyv na klímu Zeme.

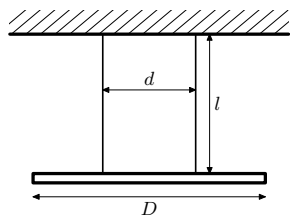
Tomáš Červeň

tomas.cerven@fykovo.cz

Úloha IV.E . . . torzní kyvadlo

12 bodů; průměr 6,56; řešilo 41 studentů

Veźmte si alespoň 40 cm dlouhou homogenní tyčku. Ve dvou bodech symetricky vůči jejímu středu k ní přiřtejte dva závěsy ze stejného materiálu (například nit nebo vlasec), které dále upevněte k nějakému pevnému stativu tak, aby měly stejnou délku a aby byly rovnoběžné. Změřte periodu torzních kmitů tyčky v závislosti na vzdálenosti závěsů d pro různé délky závěsů l a určete, o jakou závislost na těchto dvou parametrech se jedná. Torzní kmity vypadají tak, že se tyčka otáčí ve vodorovné rovině, přičemž její střed zůstává v klidu.



Karel chtěl hypnotizovat účastníky.

Teória

Zaujímame sa o malé kmity zavesenej tyčky vo vodorovnej rovine pri jej otáčaní okolo zvislej osi prechádzajúcej ťažiskom. Moment zotrvačnosti I tyčky voči tejto osi je

$$I = \frac{mD^2}{12}$$

a príslušná kinetická energia E_k pri pohybe uhlovou rýchlosťou ω bude

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{mD^2}{24}\omega^2.$$

Potenciálnu energiu E_p určíme z nadvihnutia sústavy ako pri obyčajnom kyvadielku ako

$$E_p = mg\Delta h = mgl(1 - \cos\beta) \approx \frac{1}{2}mgl\beta^2,$$

kde β je uhol, o ktorý sa vychýlilo vlákno zo zvislého smeru. My však potrebujeme túto energiu vyjadriť vo veličine asociovanej s rýchlosťou ω , teda prostredníctvom uhla α , o ktorý sa pri pohybe pootočila tyč. Tieto dve veličiny sú prepojené vzťahom

$$\beta = \alpha \frac{d}{2l}$$

získaným z rovnosti dĺžky oblúkov opísaných bodom závesu pri otáčaní okolo stredu tyčky a závesu. Po dosadení dostávame

$$E_p = mg \frac{d^2}{8l} \alpha^2.$$

Dobu kmitu určíme analógiou s harmonickým oscilátorom ako 2π násobok odmocniny podielu členov v energiách pred ω^2 a α^2 dostávajúc

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

Postup merania

Ako tyč sme použili drevený hranol s rozmermi $D = 89$ cm, šírkou $t = 1,5$ cm a výškou $h = 3,5$ cm. Chybu merania týchto dĺžok odhadujeme na $D = 0,1$ cm. Hmotnosť tyče sme určili ako $m = (240 \pm 2)$ g. Na tyči sme vyznačili miesta na zavesenie, chybu vzdialenosti závesov odhadujeme ako $\sigma_d = 0,2$ cm. Vzdialenosť d sme menili s krokom 10 cm. Záves tvoril motúz s dĺžkovou hustotou $\lambda = 2,0 \text{ g}\cdot\text{m}^{-1}$ uviazaný na pevnú oceľovú trubku. Merali sme pri štyroch rôznych dĺžkach závesu, chybu určenia dĺžky závesu odhadujeme na $\sigma_l = 1$ cm. Po uvoľnení tyče sme po ustálení kmitov stopkami merali dobu dvadsiatich kmitov $20T$.

Spracovanie merania

Namerané hodnoty, z nich vypočítané periódy kmitov a ich neistoty sú uvedené v tabuľke 1. Slovom „priečne“ sú označené klasické kmity, pre ktorých periódu platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l + h/2}{g}}.$$

Tu je dôležité si uvedomiť, že priečne kmity sa dejú s dĺžkou závesu až po ťažisko, zatiaľ čo torzné kmity len po záves.

Závislosti periódy kmitov od rozostupu závesov $T(d)$ sú vynesené v grafe 3 a preložené závislosťou $T = a/d$. Pre jednotlivé dĺžky závesu sme dostali konštanty a uvedené v tabuľke 2. Porovnaním so vzťahom pre periódu dostávame referenčné

$$a_t = 2\pi D\sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

Chybu výpočtu a_t určíme ako

$$\sigma_{a_t} = a_t\sqrt{\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{2g}\right)^2}.$$

Diskusia

Z grafu a z malých chýb regresných parametrov a môžeme vidieť, že náš model závislosti periódy kmitov na šírke závesu je správny. Porovnaním experimentálnych hodnôt s vypočítanými vidíme ďalej aj to, že model je správny aj ako závislosť na dĺžke závesu a má aj správne určenú multiplikatívnu konštantu.

Malý rozdiel medzi nameranými a vypočítanými hodnotami môže byť spôsobený vplyvom iných kmitov ako torzných, no najmä nepresnosťou merania dĺžky závesu. V úvahách sme zanedbali možné nehomogenity hranola, ktorý sme navyše aproximovali tyčou. Táto aproximácia je však oprávnená, keďže moment zotrvačnosti hranola je v plnom tvare $I = \frac{1}{12}m(D^2 + t^2) \approx \frac{1}{12}mD^2$ v rámci chyby merania D . Ťažisko hranola sa nenachádzalo presne v strede, bolo odchýlené asi 0,5 cm na stranu, stred závesov sme umiestnili práve do tohto bodu.

Pozoruhodné je rozpätie meraných periód od takmer pol sekundy po skoro desať (pôvodne sme chceli merať aj pre $d = 10$ cm, kde by jedno meranie trvalo asi 4 minúty).

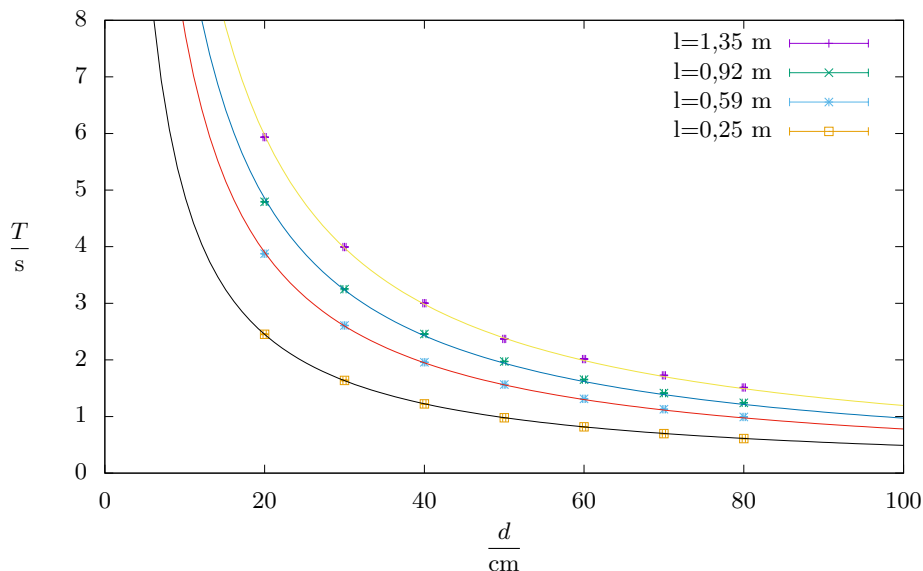
Na meranie samotné malo vplyv aj tlmenie kmitov. Na začiatku sme prebytočný povrázok nechali voľne visieť, čo spôsobovalo silné tlmenie pri rýchlych kmitoch. To sme odstránili namotaním prebytočného povrázku okolo hranola v mieste závesu. Táto malá prebytočná hmotnosť povrázku mohla ovplyvniť dobu kmitu, veľkosť tohto vplyvu odhadujeme do 1%.

Tab. 1: Namerané periody torzných kmitov.

$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{20T}{\text{s}}$			$\frac{T}{\text{s}}$	$\frac{\sigma_T}{\text{ms}}$
1,35	80	30,3	30,3	30,2	1,513	5
1,35	70	34,6	34,6	34,5	1,728	5
1,35	60	40,3	40,4	40,2	2,015	6
1,35	50	47,4	47,4	47,4	2,370	5
1,35	40	60,1	60,1	60,0	3,003	5
1,35	30	79,7	80,1	79,9	3,995	8
1,35	20	118,8	118,6	118,7	5,935	6
1,37	priečne	47,4	47,2	47,2	2,363	6
0,92	80	24,9	24,8	24,9	1,243	5
0,92	70	28,3	28,2	28,3	1,413	5
0,92	60	33,0	33,2	33,0	1,653	6
0,92	50	39,4	39,4	39,5	1,972	5
0,92	40	49,1	49,2	49,1	2,457	5
0,92	30	64,6	65,2	65,2	3,250	11
0,92	20	90,9	95,8	95,9	4,793	6
0,94	priečne	39,0	38,6	38,7	1,938	8
0,59	80	19,9	19,9	19,8	0,993	5
0,59	70	22,6	22,6	22,5	1,128	5
0,59	60	26,1	26,4	26,2	1,312	7
0,59	50	31,3	31,2	31,4	1,565	6
0,59	40	39,2	39,1	39,2	1,958	5
0,59	30	52,1	52,1	52,3	2,608	6
0,59	20	77,7	77,4	77,5	3,877	7
0,61	priečne	31,2	30,9	31,2	1,555	7
0,25	80	12,2	12,2	12,2	0,610	5
0,25	70	14,0	13,9	14,0	0,698	5
0,25	60	16,3	16,4	16,4	0,818	5
0,25	50	19,5	19,6	19,6	0,978	5
0,25	40	24,5	24,5	24,4	1,223	5
0,25	30	32,9	32,6	32,7	1,637	7
0,25	20	49,2	49,2	48,8	2,453	8
0,27	priečne	20,3	20,0	19,8	1,002	9

Tab. 2: Výsledné koeficienty fitu.

$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{a}{\text{cm}\cdot\text{s}}$	$\frac{\sigma_a}{\text{cm}\cdot\text{s}}$	$\frac{a_t}{\text{cm}\cdot\text{s}}$	$\frac{\sigma_{a_t}}{\text{cm}\cdot\text{s}}$
1,35	119,4	0,3	119,8	0,5
0,92	97,1	0,5	98,9	0,6
0,59	78,0	0,2	79,2	0,7
0,25	49,03	0,04	51,5	1,0

Obr. 3: Závislost periody torzných kmitov T na šířce závěsu d .

Záver

Zostavili sme teoretický model kmitov, ktorý sme následne experimentálne overili. Perióda torzných kmitov tyče na dvoch závesoch dĺžky l upevnených d od seba symetricky okolo ťažiska tyče je popísaná vzťahom

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{l}{3g}},$$

kde D je dĺžka tyče a g je tiažové zrýchlenie.

Jozef Lipták

liptak.j@fykos.cz

Úloha IV.S ... elektro todleto

10 bodů; průměr 4,80; řešilo 40 studentů

1. Jak velký je odpor mezi sousedními vrcholy n -dimenzionálního drátěného „čtyřřtěnu“? Každá hrana má odpor R . Začněte výpočtem pro $n = 1$ (úsečka), $n = 2$ (trojúhelník) a $n = 3$ (čtyřřtěn) a následně najděte obecný vztah.
2. Jaké umístění a velikost bude mít zrcadlový elektrický náboj k přímce s homogenní délkovou hustotou náboje λ , která je umístěna ve vzdálenosti $r > R$ od středu uzemněného dutého nekonečně dlouhého válcového vodiče o poloměru R ? Válcový vodič a přímka jsou rovnoběžné.
3. Mějme nekonečnou rovinu s plošnou hustotou náboje σ_1 . Té se téměř dotýká kulová slupka s poloměrem R a s plošnou hustotou náboje σ_2 . Jaký musí být vztah mezi uvedenými veli-

činami, aby v místě, kde jsou k sobě deska se slupkou nejbližší, byla intenzita elektrického pole nulová?

Bonus Jaká je intenzita gravitačního pole uvnitř a vně planety o poloměru R , jejíž hustota závisí pouze na vzdálenosti od středu r podle vztahu $\varrho = \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$?

Karel stále dělá problémy.

Odpor n -dimenzionálního čtyřstěnu

Budeme postupovat podle doporučení a začneme s úsečkou, u které víme, že odpor bude triviálně $R_1 = R$. Druhým krokem má být trojúhelník. Ten je složený z jednoho přímého spojení a druhého, které má odpor dvou hran. Ty jsou zapojené paralelně, a proto výsledný odpor bude

$$R_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \left(\frac{2+1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2}{3}R.$$

Děle nás zajímá čtyřstěn. Označme a a b vrcholy, mezi kterými měříme odpor, zbylé dva budou c_1 a c_2 . Všimněme si, že každý vrchol je spojen se všemi ostatními. Proud z a do b poteče po těchto cestách: (a, b) , (a, c_1, b) a (a, c_2, b) . Všechny ostatní cesty obsahují hranu (c_1, c_2) , přes kterou ale proud téct nemůže. Vysvětlení je jednoduché – vrcholy c_1 a c_2 jsou stejně daleko od bodů a a b (přesně jednu hranu), čili jsou na stejném potenciálu. Jak bylo zmíněno v seriálu, proud teče pouze mezi body s rozdílným potenciálem. Odpor tří paralelně spojených cest určíme snadno jako

$$R_3 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{1}{2}R.$$

Nyní provedeme indukční krok, potřebný k zobecnění do n -té dimenze. Přidáme další vrchol, označme jej c_{n-1} , a spojíme jej se všemi dalšími vrcholy. Tím vznikne n nových hran – (a, c_{n-1}) , (b, c_{n-1}) a $n-2$ hran typu (c_i, c_{n-1}) , kde $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Podle argumentu výše ale budou všechny vrcholy c_j na stejném potenciálu, takže po hranách mezi nimi nepoteče proud. Jediná nová cesta, kterou zvětšením dimenze o jedna získáme, bude (a, c_{n-1}, b) . Tuto cestu připojíme paralelně se všemi ostatními, čili výsledný odpor bude

$$R_n = \left(\frac{1}{R} + (n-1)\frac{1}{2R}\right)^{-1} = \frac{2}{n+1}R.$$

Odpor n -dimenzionálního čtyřstěnu je $\frac{2}{n+1}R$ pro libovolné přirozené n .

Zrcadlový náboj

Původně se mělo jednat o zjednodušení 2. úlohy z 6. série 22. ročníku FYKOSu, kterou jsme citovali v textu seriálu, protože nyní bylo možné zjednodušit situaci na dvojrozměrný problém. Ale ukázalo se, že v řešení je háček a přijímali jsme relativně tolerantně i pokusy o řešení, které dávaly alespoň trochu smysl (tedy zrcadlový náboj byl uvnitř válce a měl zápornou velikost). Nejdříve se trochu netradičně podíváme na špatný způsob řešení, protože i chybami se člověk učí.

Omezíme se na rovinu kolmou na hlavní osu válce. Případně, pokud chceme, můžeme si představovat, že vezmeme nějaký tenký řez výšky h , ve kterém bude uzavřen náboj $Q = \lambda h$.

Hledáme takový drát,¹⁶ který bychom umístili dovnitř válce rovnoběžně s vnějším drátem tak, aby byl potenciál elektrického pole na povrchu válce nulový (na povrchu libovolného uzemněného tělesa je vždy nulový potenciál). To bude náš zrcadlový náboj. Vzdálenost tohoto drátu od středu válce označíme r' a jeho délkovou hustotu náboje λ' . Předpokládáme, že zrcadlový drát bude umístěn stejným směrem od středu válce jako je původní. Pokud by to tak nebylo, pak by nám v následujícím řešení vyšla záporná vzdálenost. A nyní se dopustíme zásadní chyby, protože budeme předpokládat následující vztahy pro potenciál, odpovídající bodovým nábojům

$$\frac{\lambda}{r - R} + \frac{\lambda'}{R - r'} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{r + R} + \frac{\lambda'}{R + r'} = 0.$$

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých odpovídá podmínce nulového potenciálu pro bod na povrchu kružnice nejbližší, resp. nejdále od původního nabitého drátu. Můžeme z ní určit jak polohu, tak délkovou hustotu zrcadlového náboje

$$r' = \frac{R^2}{r}, \quad \lambda' = -\lambda \frac{R}{r}.$$

Podmínku jsme splnili pro dva body. Měli bychom ještě ověřit, jestli je splněna na celé kružnici. Pokud umístíme osu válce do počátku a oba dráty na osu x , pro potenciál v libovolném bodě roviny můžeme psát

$$\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{(x - r)^2 + y^2}} + \frac{\lambda'}{\sqrt{(x - r')^2 + y^2}}.$$

Položíme-li $\varphi = 0$, dosazením za λ' a r' dostaneme

$$\frac{\lambda}{\sqrt{(x - r)^2 + y^2}} - \frac{\lambda \frac{R}{r}}{\sqrt{(x - \frac{R^2}{r})^2 + y^2}} = 0,$$

což můžeme upravit na $(x^2 + y^2 - R^2)(r^2 - R^2) = 0$. Jelikož rovnice kružnice je $x^2 + y^2 = R^2$, tato podmínka je zřejmě splněna a potenciál na celé kružnici je skutečně nulový. Problém je, že jsme i k této kontrole využili stejný vztah pro potenciál, a proto chyba nebyla odhalena.

Správně bychom si měli uvědomit, že intenzita elektrického pole ve vzdálenosti r od středu homogenně nabitě přímky je

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}.$$

Jak vidíme, zjednodušení situace na dvojrozměrný případ není tak triviální, jak by se mohlo na první pohled zdát. Nyní spočítáme potenciál

$$\varphi(x) = - \int_{\infty}^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_x^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}} d\tilde{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} [\ln \tilde{r}]_x^{\infty}.$$

Problém s tímto výpočtem je ten, že nulová hodnota potenciálu se typicky volí v nekonečnu, ale v tom případě dostáváme nekonečné hodnoty, což nechceme. Musíme tedy nulovou hladinu

¹⁶Jako drát budeme v této úloze označovat nabitou přímku s konstantní délkovou hustotou náboje.

zvolit v nějaké konečné vzdálenosti r_0 . To navíc potřebujeme i kvůli tomu, aby v logaritmu byla bezrozměrná veličina. Výsledný potenciál bude

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} [\ln \tilde{r}]_x^{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{x}.$$

Stejně jako ve špatném řešení, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r-R} + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{R-r'} &= 0, \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r+R} + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{R+r'} &= 0. \end{aligned}$$

Její řešení a následné ověření platnosti $\varphi = 0$ na celé kružnici je však mnohem obtížnější, proto byl udělován plný počet bodů už za sestavení těchto rovnic a diskuzi.

Plošně nabitě objekty

Z textu seriálu víme, že pro velikost intenzity elektrického pole desky platí

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}.$$

Podívejme se na tenkou kulovou slupku. Budeme uvažovat, že jsme těsně nad povrchem a že plocha, na které je intenzita stejná, je $S = 4\pi R^2$, což odpovídá povrchu koule. Náboj uzavřený v kouli je pak $Q = S\sigma_2$. Dostáváme intenzitu

$$E_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Vidíme, že intenzita těsně nad povrchem koule nabitě plošným nábojem nezávisí na jejím poloměru. Intenzity směřují v nejbližším bodě proti sobě – aby byla celková intenzita nulová, musí se velikosti obou intenzit rovnat, čili platí

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} &= \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}, \\ \sigma_1 &= 2\sigma_2. \end{aligned}$$

Nalezli jsme hledanou podmínku pro parametry, kdy musí platit $\sigma_1 = 2\sigma_2$ a poloměr koule může být libovolný. Na závěr poznamenejme, že úloha předpokládá, že nabití je pevné a náboje se na objektech nehýbou. V případě, že by koule či deska byly vodivé, bylo by to daleko složitější. Už z logiky věci bychom nemohli použít zjednodušenou verzi Gaussova zákona, protože by byla porušena symetrie, kterou pro ni potřebujeme.

Gravitační pole planety

Začneme výpočtem vnější intenzity. Jelikož je situace sféricky symetrická, bude nám stačit určit celkovou hmotnost planety

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) dr = 4\pi \varrho_{\max} \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr = 4\pi \varrho_{\max} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]_0^R = \\ &= 4\pi \varrho_{\max} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5}\right) = \frac{8\pi}{15} \varrho_{\max} R^3. \end{aligned}$$

Pokud bychom srovnali hmotnost homogenní planety s hustotou ρ_{\max} s naší planetou, byla by dva a půl krát větší.

Intenzita gravitačního pole naší planety nad jejím „povrchem“¹⁷ je dle Gaussovy věty

$$K = -\frac{4\pi GM}{S} = -\frac{8\pi}{15}G\rho_{\max}\frac{R^3}{r^2}.$$

Jak vidíme, opět jsme dostali intenzitu klesající s druhou mocninou vzdálenosti od středu koule. Nyní přejdeme do vnitřní oblasti. Integrovat nebudeme celou hmotnost planety, ale pouze její část do vzdálenosti r od středu. Jde ovšem o prakticky stejnou úlohu, pouze s jinou konečnou mezí

$$M_r = \int_0^r 4\pi\tilde{r}^2\rho_{\max}\left(1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R}\right)^2\right)d\tilde{r} = 4\pi\rho_{\max}\left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right).$$

Pro intenzitu platí

$$K = -\frac{4\pi GM_r}{S_r} = -4\pi G\rho_{\max}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2}\right).$$

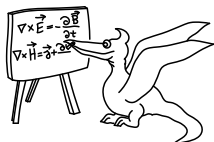
Záporné znaménko u intenzity znamená, že vždy směřuje do středu koule. V řešení je potřeba dodržovat znaménkovou konvenci či alespoň uvést, kterým směrem bude intenzita směřovat. V tomto případě to sice není tak nutné, protože máme pouze jedno těleso a jde o gravitační pole, ale už v případě dvou či více těles se to komplikuje.

Zajímavostí, které si všiml Jaroslav Herman, je, že maximální intenzita gravitačního pole není na povrchu planety, ale ve vzdálenosti $r_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{3}R$ od středu planety. Intenzita v tomto bodě je $K = -\frac{8\sqrt{5}\pi}{27}G\rho_{\max}R$, což je zhruba 1,24 násobek velikosti na povrchu planety.

Na závěr bychom rádi připomněli, že jsme sice spočítali intenzitu gravitačního pole, ale tím jsme neurčili tíhové zrychlení. Bohužel, tyto pojmy se často pletou. Tíhové zrychlení totiž zahrnuje i odstředivé zrychlení způsobené rotací planety.

Karel Kolář
karel@fykos.cz

¹⁷Dle definice hustoty v závislosti na poloměru je akorát na povrchu nulová hustota. Tedy není to nějaký pevný povrch, ale ohraničení, které považujeme za povrch.



Seriál: Extrémy ve fyzice

Úvod

Hledání extrémů je ve fyzice velice důležitou disciplínou. Řešení fyzikální úlohy můžeme často najít tak, že jednoduše maximalizujeme či minimalizujeme nějakou veličinu. Dalo by se říct, že příroda je často líná¹⁸ a snaží se minimalizovat potenciální energii či dojít z bodu A do B tím nejrychlejším způsobem.

Jiný pohled na extremalizaci je takový, že nám v kombinaci se zákony zachování dává omezení na to, kam se nám může těleso dostat za libovolnou dobu (pokud nedojde k vnějšímu zásahu do systému). Například když tělesu na Zemi udělíme menší než první kosmickou rychlost,¹⁹ tak víme, že časem zase spadne na Zem. Samozřejmě za předpokladu, že jej dál neurychlujeme, jako tomu je u raket. Ti, kteří znají kosmické rychlosti, si mohou říct, že jim na to stačí i méně omezující druhá kosmická rychlost,²⁰ ale u rychlostí o něco málo nižších než 2. kosmická se již můžeme docela snadno dostat do blízkosti dalších těles sluneční soustavy, kde se může pomocí gravitačního praku naše těleso urychlit či zpomalit.

V optice lze uvažovat, že světelné paprsky se pohybují po extrémálních drahách. V klasické optice se světlo pohybuje po drahách odpovídajících nejkratšímu času. Ve speciální teorii relativity se (ve vakuu) pohybuje po tzv. světelném kuželu a v obecné teorii relativity po potenciálně výrazně složitějších geodetikách. V obou teoriích relativity je pro pohyb světla ve vakuu specifické to, že prostoročasový interval mezi událostí vyzáření a událostí absorpce je nulový.

Nezapomínejme na zákony zachování

Podívejme se rovnou na konkrétní příklad. Jak nejlépe se může přiblížit nějaký asteroid k hvězdě o hmotnosti M , když přilétá z velké dálky s rychlostí v_0 a impaktním parametrem b ? Předpokládáme, že tuto rychlost má v „nekonečné vzdálenosti“. Impaktní parametr je odborný výraz pro vzdálenost od původní přímky pohybu našeho asteroidu a středu hvězdy. Jinak řečeno, je to vzdálenost jejich středů, kterou by tělesa měla v nejbližším bodě, pokud by gravitačně neinteragovala.

Pro jednoduchost budeme dále uvažovat, že můžeme obě tělesa považovat za hmotné body a že asteroid má zanedbatelně malou hmotnost oproti hvězdě. Dostáváme se k tomu, proč je tato úloha zařazena do zákonů zachování. Na počátku má totiž asteroid nenulový moment hybnosti vůči hvězdě a jeho velikost zůstává konstantní v průběhu celého pohybu, je dána jeho velikostí na počátku

$$L = mbv_0, \quad (8)$$

kde jsme hmotnost asteroidu označili m . Jaká bude situace v okamžiku největšího přiblížení? V tu chvíli bude vektor vzdálenosti r kolmý na vektor rychlosti tělesa. Můžeme opět psát vztah pro velikost momentu hybnosti

$$L = mrv, \quad (9)$$

¹⁸Možná ještě více než autor tohoto seriálu či ti řešitelé, kteří si seriál stejně nechtou.

¹⁹První kosmická rychlost odpovídá kruhové dráze kolem planety.

²⁰Minimální úniková rychlost z povrchu planety, která je $\sqrt{2}$ násobkem první kosmické rychlosti.

kde v je rychlost při průchodu nejbližším bodem k hvězdě. Máme také zákon zachování energie, který využijeme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}, \quad (10)$$

kde G je gravitační konstanta. Z dvou výrazů (8) a (9) pro moment hybnosti dostáváme

$$v = \frac{b}{r}v_0,$$

což dosadíme do vztahu pro energii (10). Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro r , kterou vyřešíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_0^2 &= \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2}v_0^2 - \frac{GM}{r}, \\ 0 &= r^2 + \frac{2GM}{v_0^2}r - b^2, \\ r_{1,2} &= -\frac{GM}{v_0^2} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + b^2}. \end{aligned}$$

Vybereme řešení s kladným znaménkem, protože to je jediné kladné. Nejbližší vzdálenost, do které se asteroid dostane, je

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + b^2} - \frac{GM}{v_0^2}.$$

Částečně si můžeme ověřit výsledek tak, že se podíváme na případ $b = 0$ m. Vzdálenost r_{\min} vyjde nulová, což bychom čekali. Zkusme do výsledku dosadit také nějaké potenciálně zajímavé hodnoty. Uvažujme hvězdu podobnou Slunci s hmotností $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg a asteroid, který má impaktní parametr $b = 1,0$ au a rychlost v nekonečnu odpovídající třetí kosmické rychlosti $v_0 = 42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Potom vychází $r_{\min} = 0,62$ au. Pro tuto kombinaci parametrů tedy dávají použitá přiblížení dobrý smysl – asteroid neskončí ve hvězdě, předpokládáme-li že se na své cestě nesblíží s nějakou planetou.

Doplnění na čtverec

Pod heslem „pro jednoduché případy můžeme použít jednoduché metody“ se nejdříve podíváme na metodu, kterou najdeme extrém u polynomu druhého stupně, neboli u funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kde a , b a c jsou konstanty a x je proměnná. Doplnění na čtverec spočívá v tom, že funkci upravíme na tvar

$$f(x) = k(x - x_0)^2 + y_0. \quad (11)$$

Jak to uděláme? Ukažme si obecný postup

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Získali jsme tak požadovaný tvar. Konstanty z rovnice (11) odvodíme snadno

$$\begin{aligned} k &= a, \\ x_0 &= -\frac{b}{a}, \\ y_0 &= c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Co ale náš výsledek znamená? Hledali jsme extrém. Parabola s kladným koeficientem a jde z $+\infty$ pro $x = -\infty$ do $+\infty$ pro $x = +\infty$. Mezi těmito limitními hodnotami má právě jedno minimum, které najdeme v bodě $x = x_0$. Proč je to extrém? Pokud se podíváme na vztah (11), vidíme, že y_0 je konstanta a pro $x = x_0$ je $f(x)$ rovna právě y_0 , ale pro jiné hodnoty x je vždy vyšší. Současně v tomto tvaru snadno vidíme, jestli by měla kvadratická rovnice $f(x) = 0$ řešení. V případě, že $y_0 = 0$, má rovnice právě jedno řešení v x_0 . Pokud $y_0 < 0$, má rovnice dvě řešení. Pokud $y_0 > 0$, pak rovnice nemá žádné řešení. Sami si rozmyslete, co by se na těchto úvahách změnilo, pokud by byl koeficient k záporný.

Tato metoda je dobrá v tom, že nemusíte znát vysokoškolskou matematiku. Její nevýhodou je, že se nedá nějak snadno zobecnit ani na vyšší stupně polynomů, natož na další složitější funkce.

Derivace

Úvod k derivacím

Ti, kteří derivace znají, mohou přeskóčit až k poslední části této podkapitoly.

Základní metodou hledání extrémů v matematice je derivování. Derivace funkce je vlastně jenom jiná funkce, která má hodnotu směrnice tečny k původní funkci v daném bodě. Jinak řečeno nám říká, jak moc se nějaká funkce mění. Pokud je derivace nulová, pak v daném bodě funkce neroste ani neklesá. Kladná derivace znamená, že funkce roste a to tím víc, čím je hodnota derivace vyšší. V oblasti, kde je derivace záporná, funkce klesá.

Podrobnější texty o derivacích naleznete například v archivu maturitního semináře,²¹ který pořádal FYKOS v minulosti, ve středoškolské učebnici Diferenciální a integrální počet (Dag Hrubý a Josef Kubát, Prometheus) či na různých dalších webech.²² Zde se v rámci stručnosti výkladu omezíme na polynomiální funkce, tedy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (12)$$

²¹https://fykos.cz/_media/akce/rseminar/derivace_1_.pdf

²²Například <https://matematika.cz/derivace>.

Silně však doporučujeme, pokud ještě derivace neovládáte, začněte se je učit, protože ve vysokoškolské fyzice (nebo v některých příkladech z FYKOSu) se jim nevyhnete. Navíc nám mohou výrazně usnadnit řešení úloh, kde bychom se k výsledku jinak dostávali velice pracně.

Tab. 3: Příklady vztahů ve fyzice, ve kterých vystupují derivace.

Vztah	Popis
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$	Rychlost v je derivace polohy x podle času t .
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$	Zrychlení a je derivací rychlosti v podle času t .
$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}$	Ryv j (anglicky <i>jerk</i>) je derivací zrychlení a podle času t .
$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$	Úhlová rychlost ω je derivací úhlu rotace φ podle času t .
$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	Úhlové zrychlení ε je derivací úhlové rychlosti ω podle času t .
$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$	V konzervativních systémech je změna potenciální energie E_p v čase stejně velká, ale opačného znaménka jako změna kinetické energie E_k . Na tento vztah se můžeme také dívat jako na diferenciálně zapsaný zákon zachování mechanické energie.
$P = \frac{dW}{dt}$	Výkon P je derivace práce W podle času t .
$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{a}$	Pro situace s konstantní hmotností tělesa je síla F úměrná hmotnosti m a zrychlení tělesa a .
$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	Síla F je derivací hybnosti p podle času t .
$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	analogie předchozího pro otáčivý pohyb, moment síly M je derivací momentu hybnosti L .
$\mathbf{F} = -\nabla V$	Síla F je mínus gradient potenciálu V . Derivace jsou schované ve znaku ∇ nazývaném nabra, který je definovaný jako vektor $\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$.
$I = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$	Elektrický proud I je změna elektrického náboje Q za čas t .
$U_i = -\dot{\Phi} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Elektrické napětí U_i indukované ve smyčce vodiče je mínus derivace magnetického toku Φ .
$I(t) = C\dot{U}(t) = C\frac{dU(t)}{dt}$	Proud $I(t)$ kondenzátorem o kapacitě C určíme v případě jiného, než stejnosměrného proudu, pomocí derivace přivedeného napětí $U(t)$,
$U(t) = L\dot{I} = L\frac{dI(t)}{dt}$	napětí $U(t)$ na cívce o indukčnosti L z derivace procházejícího proudu $I(t)$.

Rovnou si řekneme, že polynom ze vztahu (12) má derivaci

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Všimněte si, že derivace konstantního polynomu je všude identicky nulová. To je z logiky věci správně, protože konstantní funkce se nikde nemění.

Kde hledat extrém?

Předně si vždy musíme uvědomit, na jakém intervalu je vůbec má smysl hledat. Například – má v úloze smysl záporná délka? Pokud jde o prodloužení tyče, třeba při změně teploty, tak to

může dávat smysl. Ale pokud by vyšlo minimum pro zápornou délku tyče, pak to zjevně reálné minimum nebude. Kromě toho si musíme uvědomit samotný rozsah intervalu, na kterém jsou výsledky rozumné. Například těžiště tyče metr za jejím koncem by nás mělo upozornit na to, že je něco špatně.

Proto bychom měli vždy zvážit, jaké hodnoty nabývá funkce, jejíž extrém hledáme, na krajích intervalu. Pokud jde o funkci klesající na celém intervalu, její maximum bude na začátku a minimum na konci intervalu. U rostoucí funkce to bude právě naopak.

Když toto jednoduché pozorování nestačí, zkusíme hledat extrém pomocí derivace. Pokud narazíme na bod, který nelze zderivovat, tak je podezřelý z extrému a musíme jej prozkoumat podrobněji.²³ Další podezřelé body budou ty, kde je derivace nulová. Nulovost derivace pro diferencovatelnou funkci je totiž nutným předpokladem pro extrém mimo okraj intervalu. Není to ale postačující podmínkou. Příkladem může být funkce $f(x) = x^3$, která má derivaci $f'(x) = 3x^2$, která je v $x = 0$ nulová. Přitom ale víme, že funkce je neklesající. V bodě $x = 0$ má pouze inflexní bod, kde dojde ke změně z konkávní funkce na konvexní.

Jedním způsobem, jak ověřit, jestli jde skutečně o minimum či maximum, je dosadit do funkce hodnotu v daném bodě a nějaké hodnoty v blízkosti potenciálního extrému. Například u $f(x) = x^3$ víme, že jediný nulový bod derivace ($3x^2$) je v $x = 0$. Dosadíme např. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Ihned vidíme, že nepůjde o extrém – hodnoty se pro rostoucí x zvětšují. Jiným příkladem je funkce $g(x) = x^2$, která má derivaci $g'(x) = 2x$. Ta je opět nulová v nule, což je také jediný podezřelý bod, kromě okrajů intervalu. Dosazením stejných bodů jako předtím dostáváme $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Vidíme, že před podezřelým bodem musela funkce klesat a potom zase růst, takže se jedná o minimum.

Pro ty, co se najdou v derivování, je vhodný alternativní postup. Ten se může hodit i u zobecnění na vícedimenzionální problémy, i když v tom případě se to také o něco zkomplikuje. Jde o to podívat se na druhou derivaci, například $g''(x) = 2$. Vidíme, že druhá derivace je v bodě $x = 0$ kladná a proto půjde o minimum. Pokud by byla druhá derivace záporná, šlo by o maximum. Pokud ale vyjde 0, jako například $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$, pak tento postup nerozhodne o tom, jestli jde o maximum, minimum, nebo inflexní bod a je potřeba použít něco jiného.

Měli bychom poznamenat, že důležité je řešit i to, jestli je extrém pouze lokální, například jeden vrcholek z mnoha vrcholků – nebo jestli je globální, tedy jde o zcela maximální (či minimální) hodnotu funkce na intervalu a nikde jinde vyšší (či nižší) nenajdeme.

Příklady derivací

Příklad 1: Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^3 - 12x$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$.

Můžeme začít tím, že se podíváme na hodnoty na okraji intervalu, které jsou $f(0) = 0$ a $f(5) = 65$. Tím jsme získali dva body podezřelé z extrému. Funkce je definovaná na celém intervalu, a tak ji můžeme zderivovat a dostáváme $f'(x) = 3x^2 - 12$. Podezřelé body z extrému jsou nulové body derivace. Rovnice $3x^2 - 12 = 0$ má dvě řešení, z nichž -2 leží mimo interval. Zajímáme se tedy pouze o hodnotu v bodě 2, která je $f(2) = -16$.

Již v tuto chvíli bychom mohli říct, že maximum je $f(5) = 65$ a minimum je $f(2) = -16$, protože funkce f je spojitá (jinak řečeno, nejsou v ní přítomny žádné skoky). Z cvičných důvodů ale spočítáme druhou derivaci funkce $f''(x) = 6x$. Druhá derivace v podezřelém bodu, který

²³Třeba v případě $1/x$ víme, že v nule funkce skočí z mínus nekonečna do plus nekonečna. Derivace tady není definována, stejně jako funkční hodnota. Tento případ je specifický tím, že v jednom bodě zleva dostáváme minimum a v tom samém bodě zprava maximum.

jsme získali derivováním, je $f''(2) = 12$. Hodnota druhé derivace je kladná, a proto jde o lokální minimum. Protože je naše funkce omezená na zadaný interval $\langle 0, 5 \rangle$, můžeme prohlásit, že jde o globální minimum.

Pokud by byla funkce f definována na celých reálných číslech, pak by byl postup obdobný, ale prozkoumali bychom ještě $f(-2) = 16$, což by bylo lokální maximum. Globální extrémy by ovšem byly nevlastní²⁴ v nevlastních bodech²⁵ totiž $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Příklad 2: Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^5 + x$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Začneme tentokrát s derivací $f'(x) = 5x^4 + 1$. Rovnice $5x^4 + 1 = 0$ nemá v reálných číslech žádné řešení, proto není žádný bod podezřelý z extrému. Funkce by rostla na celých reálných číslech. My ji máme omezenou na interval $\langle 0, 2 \rangle$. Proto bude minimum v počátečním bodě a maximum v koncovém bodě intervalu, přičemž budou mít hodnoty $f(0) = 0$ a $f(2) = 34$.

Kde ve fyzice nalezneme derivace?

Jednoduše řečeno, všude. V tabulce 3 jsou nejnámější příklady i s ukázkou toho, jak derivace značíme ve fyzice. Pokud místo čárek použijeme tečky, dáváme tím najevo, že jde o úplnou derivaci podle času.

Znakem ∂ (místo d) značíme parciální derivace – tedy takové, kdy naše funkce závisí na více proměnných, ale my se zajímáme pouze o to, jak se mění podle jedné proměnné.

Opačnou, čili inverzní operací k derivaci je integrace. S tou se také budete setkávat často. Derivace a integrály se uplatňují ve všech možných dalších vztazích, které pak mají formu diferenciálních rovnic.

Řešení pomocí počítače

Využití počítačového programu, který extremalizaci provede za vás, se může hodit v následujících případech:

- Sami neumíte derivovat.
- Funkce je příliš složitá na to, co umíte zderivovat.
- Chcete výsledek získat rychleji, zejména u komplexnějšího problému.
- Pokud si chcete ověřit výsledek.

Ačkoli v dnešní době už některé programy počítají derivace analyticky, i tak si vždy musíme dát pozor. U numerických metod může být kromě nižší přesnosti problémem to, že metoda nalezne pouze některý z lokálních extrémů, zatímco my hledáme globální extrém. Proto je vždy vhodné si například zobrazit graf funkce.

Nástroj, který můžeme nejvíce doporučit a který je pro jednodušší úlohy zdarma na internetu, je WolframAlpha.²⁶

²⁴ Jejich hodnoty jsou $\pm\infty$, což nejsou reálná čísla, čili jich funkce f nemůže nabývat.

²⁵ Opět, $\pm\infty$ nejsou reálná čísla a proto v nich funkce f není definována.

²⁶ <https://www.wolframalpha.com>

Příklad – výlet

Fykosák si vyšel na výlet, během kterého chtěl popsat nadmořskou výšku na základě uražené vzdálenosti. Výlet byl dlouhý 5,0 km a funkce, která dostatečně dobře popisuje nadmořskou výšku terénu, je

$$f(x) = -\frac{x^4}{6 \cdot 10^{13} \text{ m}^3} + \frac{x^3}{5,7 \cdot 10^9 \text{ m}^2} - \frac{x^2}{20\,000 \text{ m}} + \frac{10x}{42} + 260 \text{ m}.$$

Zajímalo by nás, jaké vertikální převýšení Fykosák musel překonat a kde byl nejvyšší a nejnižší bod jeho cesty.

Taková dlouhá čísla se nám určitě nechce přepisovat. Navíc bychom je stejně nemohli bezmyšlenkovitě „vrazit do kalkulačky“, protože první člen má příliš mnoho cifer. Proto využijeme WolframAlpha. Zadáme-li do něj

```
-x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 on (0,5000)
```

vykreslí se nám funkce a získáme alespoň nějakou představu. Vidíme, že minimum bude na konci výletu a maximum někde po cestě. Mimochodem nám WolframAlpha vypíše i „Arc length of curve“, tedy délku křivky, což je i pěší délka výletu, která je přibližně 5 051 m.

Podívejme se na koncový bod – zadáme

```
-x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 for x=5000
```

a dostáváme $f(5,0 \text{ km}) \doteq 212 \text{ m}$. Obdobně můžeme zjistit, že $f(0,0 \text{ km}) = 260 \text{ m}$. Nadmořská výška místa, odkud Fykosák vyšel, je tedy 260 m a místo, kde výlet skončil, má nadmořskou výšku zhruba 212 m.

Funkci na našem intervalu zderivujeme

```
derivative -x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 on (0,5000)
```

a zjistíme, že v celém intervalu derivace klesá a nulová je pro nějaký bod uvnitř intervalu. Tento bod určíme pomocí vyhledání řešení rovnice

```
(derivative -x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260) = 0 on (0,5000)
```

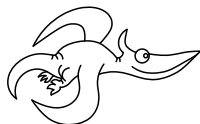
Jediný reálný kořen je pro $x \doteq 2\,402 \text{ m}$. Tuto hodnotu opět dosadíme do funkce a dostaneme $f(2,402 \text{ km}) \doteq 545 \text{ m}$.

Celkově můžeme shrnout, že Fykosák nejdříve vystoupal 285 m z nadmořské výšky 260 m do 545 m. Od vrcholu pak už stále klesal, celkem 333 m do nadmořské výšky 212 m.

Závěr a upoutávka na příště

V tomto dílu seriálu jsme se vás snažili přesvědčit o tom, jak je ve fyzice důležité hledání extrémů. Také doufáme, že se nám podařilo naučit vás některé metody, které se při extremalizaci používají. Nedá se ale říct, že by témata seriálu byla separovaná – opět jsme se vrátili například k zákonům zachování.

V příštím dílu čekajte odhady, odhady a odhady. Fyzika není vždycky o tom dokázat něco spočítat přesně. Často je důležité provést alespoň řádový odhad, abychom zjistili, jestli se nějaký jev v našem experimentu projeví. Naopak nezbytné je umět odhadnout, zda může být naše řešení reálné či nikoli. Schopnost odhadovat se ale hodí i v ekonomii a v dalších vědách, kde pro nedostatek vstupních dat nebo díky příliš složitým modelům není možné počítat přesně.



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na <http://fykos.cz>.

Kategorie prvních ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“%		Σ
		6	6	5	8	9	10	12	10		66	100	
1. Tomáš Patsch	Slovanské G, Olomouc	6	6	–	8	–	–	5	3	28	81	52	187
2. Pavel Provažník	G Dašická, Pardubice	6	6	0	8	7	1	–	6	34	61	38	138
3. Martin Kysela	G, Český Krumlov	6	6	–	–	6	1	7	–	26	66	35	126
4. Jakub Hadač	G V. Hlavatého, Louny	6	4	–	2	–	–	7	3	22	64	33	119
5. David Bálek	G Legionářů, Příbram	6	6	–	8	–	–	–	–	20	85	32	115
6. Barbora Čemanová	G, Park mládeže, Košice	–	6	5	–	–	10	6	3	30	65	30	108
7. David Mendl	G P. de Conbertina	6	6	–	–	–	–	8	–	20	80	24	86
8. Martin Švanda	Arcibiskupské G, Praha	6	6	–	–	–	3	–	–	15	54	23	83
9. Sandeep Kandí	IMSA, Aurora, USA	6	6	–	8	3	5	1	8	37	62	20	72
10. Jan Čícha	Gymnázium Brno-Bystrc	6	4	–	–	–	–	–	–	10	53	16	61
11. Jonáš Dej	Wichterlovo G, Ostrava	4	2	4	–	8	–	8	12	38	82	14	53
12. Juraj Pavolko	G, P. Horova, Michalovce	6	6	3	–	–	–	–	–	15	72	14	52
13. Dominik Blaha	G, Uherské Hradiště	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	14	50
14. Otomar Miskolczi	G J. Heyrovského, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	11	40
15. Dalibor Očenášek	G Uničov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	50	10	38
16. Michaela Jarošová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	6	25
17. Ladislav Vávra	G, Rožnov pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	6	24
18. Michael Křivan	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	56	6	23
19.–21. Andrej Bružeňák	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	5	18
19.–21. Vojtěch Pluskal	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	75	5	18
19.–21. Matúš Púll	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44	5	18
22. Anna Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	49	4	17
23.–24. Tadeáš Ďurčanský	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	34	4	15
23.–24. Daniel Franc	G, Roudnice nad Labem	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	4	15
25.–28. Kristýna Jenčíková	G nám. E. Beneše, Kladno	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	3	12
25.–28. Adam J. Jerhot	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košiče	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
25.–28. Julie Křimská	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	12
25.–28. Matej Repa	G Grösslingová, Bratislava	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	3	12
29. Patrik Jendele	SPŠ stavební Plzeň	4	6	–	–	0	–	–	0	10	32	2	10
30. Aleš Chaloupka	G J. Blahoslava, Ivančice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	6
31. Michaela Jarošová	G Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	30	0	3
32. Anna Hýžová	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student</i>	Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	%	Σ
			6	6	5	8	9	10	12	10	66	100	73	264
1.	<i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	6	6	5	–	9	10	9	8	53	92	63	229
2.	<i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	6	6	4	8	9	–	12	8	53	91	56	203
3.–4.	<i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	6	6	5	–	–	10	3	30	79	45	162	
3.–4.	<i>Jáchym Mraček</i>	Akademické G, Praha	6	6	3	–	1	10	10	–	36	68	45	162
5.	<i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	6	6	5	–	7	6	7	3	40	70	42	154
6.	<i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	6	6	5	8	9	–	–	8	42	89	42	150
7.	<i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	6	6	5	6	4	5	7	6	45	79	39	141
8.	<i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	6	6	1	–	4	6	4	–	27	58	37	135
9.	<i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	6	6	–	6	2	10	5	–	35	57	36	130
10.	<i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	6	6	–	–	4	3	6	–	25	62	35	126
11.	<i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	6	6	–	–	3	9	–	–	24	68	34	122
12.	<i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tábor	6	6	–	–	–	–	–	–	12	71	32	118
13.	<i>Marek Brodský</i>	G Jiřího z Poděbrad, Po- děbrady	6	6	5	–	3	–	4	–	24	58	30	108
14.–15.	<i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	6	–	–	–	–	–	–	–	6	51	27	98
14.–15.	<i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	6	4	5	–	2	–	6	–	23	51	27	98
16.	<i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	6	6	5	–	–	–	–	–	17	94	25	90
17.	<i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	6	6	–	–	1	7	–	–	20	58	22	81
18.	<i>Ondřej Grohmann</i>	G, Olomouc-Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	20	75
19.	<i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	4	4	3	–	3	–	–	–	14	77	20	73
20.	<i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	4	6	–	–	4	–	–	–	14	86	19	69
21.	<i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	4	6	–	–	4	–	–	–	20	70	18	65
22.	<i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovi- ce	–	6	–	–	2	10	–	–	18	41	17	63
23.–24.	<i>Adam Hůštava</i>	European School Luxem- bourg II	6	6	3	–	–	–	6	–	21	79	17	62
23.–24.	<i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	17	62
25.	<i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	4	6	–	–	–	6	3	–	19	32	16	61
26.	<i>Jakub Jedlička</i>	G Christiana Dopplera, Pra- ha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	16	57
27.	<i>Anežka Karamonová</i>	G B. Hrabala	6	6	–	–	4	–	–	–	16	69	15	55
28.	<i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	48	13	49
29.	<i>Paulína Dujavová</i>	G J. A. Raymana, Prešov	6	6	–	–	–	–	–	–	12	84	13	48
30.	<i>Marie Poláková</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	6	–	–	–	4	–	–	–	10	42	13	47
31.	<i>Wiktor Macura</i>	G J. Słowackiego, Český Tě- šín	6	6	–	–	–	–	–	–	12	74	12	45
32.	<i>Jan Hlavsa</i>	G J. Palacha, Mělník	–	–	–	–	–	–	–	–	–	67	10	39
33.	<i>Daniël Mýšák</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	10	37
34.	<i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	6	6	–	–	–	–	–	–	12	100	10	36
35.	<i>Jakub Dubský</i>	G, Ostrov	4	–	–	–	–	–	–	–	4	35	10	35
36.	<i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Tě- šín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	61	8	31
37.	<i>Oto Ulrich</i>	G, Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	8	28
38.	<i>Tomáš Pecl</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Pl- zeň	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	7	26
39.	<i>Karolína Zemene</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	89	6	25
40.	<i>Tomáš Zatloukal</i>	G, Boskovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	71	5	20
41.	<i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	6	6	3	–	–	–	2	17	63	4	17	
42.–43.	<i>Filip Brutovský</i>	G Alejová, Košice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	83	4	15
42.–43.	<i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxem- bourg II	–	–	–	–	–	–	–	–	–	38	4	15

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	%	Σ
		6	6	5	8	9	10	12	10	66	100	73	264
44.–45. <i>Barbora Cabalková</i>	G, Žamberk	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	4	14
44.–45. <i>Matěj Prokopič</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	64	4	14
46.–47. <i>Jakub EL Mouhib</i>	Gymnázium Milady Horákové Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3	12
46.–47. <i>Petr Šícho</i>	G Jana Keplera, Praha	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	3	12
48. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	2	8
49. <i>Lukáš Šrol</i>	G Hubeného, Bratislava	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100	2	6
50. <i>Eliška Štégelová</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	-	-	-	-	-	-	-	-	-	9	0	3

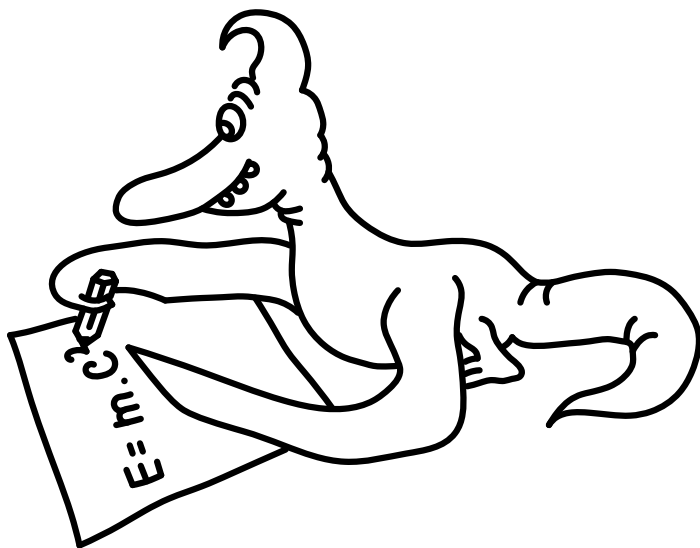
Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	%	Σ	
		3	3	5	8	9	10	12	10	60	100	66	240	
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	3	3	3	8	8	11	13	9	58	96	64	231	
2. <i>Vojtěch Kuchař</i>	Wichterlovo G, Ostrava	3	3	5	5	6	10	12	7	51	84	54	196	
3. <i>Jakub Kliment</i>	G Tajovského, B. Bystrica	3	3	3	8	9	–	–	–	26	87	44	161	
4. <i>Jozef Csipes</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	92	43	156
5. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	3	3	3	–	7	–	10	4	30	73	42	151	
6. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	3	3	3	2	4	9	–	7	31	69	38	139	
7. <i>Marek Milička</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	3	3	5	8	7	7	–	5	38	76	35	127	
8. <i>Martina Daňková</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	3	3	–	–	5	7	10	–	28	78	34	124	
9. <i>Martin Opat</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	3	2	4	8	–	–	–	8	25	75	33	119	
10.–11. <i>Dominik Farhan</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	4	5	–	10	–	–	25	65	30	107	
10.–11. <i>Elena Chocholaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	3	3	5	–	7	–	–	8	26	82	30	107	
12. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	–	–	4	8	6	–	24	68	29	106	
13. <i>Karolína Letochová</i>	G, Šternberk	3	3	–	–	–	–	–	–	6	67	25	92	
14. <i>Ondřej Sladký</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	3	3	3	6	6	–	–	3	24	64	25	90	
15. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	3	3	1	–	8	–	5	–	20	67	24	86	
16. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	3	3	5	–	–	–	–	–	11	92	21	76	
17. <i>Jan Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	3	3	5	–	–	–	–	5	16	84	18	68	
18. <i>Aneta Pjatkanová</i>	G, Kralupy	2	3	–	–	4	–	–	1	10	56	18	65	
19. <i>Mona Alizadeh</i>	St Paul's GS	3	3	5	4	4	6	10	1	36	57	17	63	
20. <i>Josef Trojan</i>	G Botičská, Praha	3	3	5	4	3	–	–	–	18	74	16	60	
21. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	3	3	2	–	–	–	–	2	10	62	14	53	
22. <i>Marco Souza de Joo</i>	G Nad Štolou, Praha	3	3	–	–	3	–	4	–	13	53	14	52	
23. <i>Alexandra Mészáros</i> <i>vá</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	40	13	48	
24. <i>Riley Lofgren</i>	Lambert High School, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	79	11	41	
25. <i>Anna Marie Ortová</i>	G Jana Nerudy, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	54	10	39	
26. <i>Matej Michalko</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	1	3	4	–	1	–	–	–	9	42	9	34	
27. <i>Zuzana Horváthová</i>	G Andreja Vrábľa, Levice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	9	33	
28. <i>Zsolt Beke</i>	G H. Selyeho Komárno	3	3	–	–	–	–	–	–	6	63	8	29	
29. <i>Adrián Šegeda</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	77	7	27	
30.–32. <i>Matyáš Háze</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	–	–	1	–	5	3	15	45	6	24	
30.–32. <i>Maroš Mešter</i>	G Poštová, Košice	3	3	–	–	4	–	11	3	24	65	6	24	
30.–32. <i>Petr Skupien</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	73	6	24	
33. <i>Martin Bucko</i>	G Grösslingová, Bratislava	–	–	–	–	–	–	–	–	–	63	6	22	
34.–35. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	6	21	
34.–35. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	–	95	6	21	
36. <i>Ondřej Chlubna</i>	G Orlová	–	–	–	–	–	–	–	–	–	57	5	20	
37. <i>Jaroslav Grulich</i>	Jiráskovo G, Náchod	2	–	–	–	–	–	3	4	9	46	5	19	
38.–39. <i>Marek Broul</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	–	–	–	–	–	–	–	–	47	5	18	
38.–39. <i>Michal Žáček</i>	G, Lovosice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	51	5	18	
40. <i>Marek Čermák</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	–	–	–	–	–	3	3	9	41	4	17	
41. <i>Jaroslava Ježková</i>	Jiráskovo G, Náchod	3	3	–	–	5	–	5	–	16	59	4	16	
42.–43. <i>Tomáš Jánský</i>	G V. Hlavatého, Louny	–	–	–	–	–	–	–	–	–	21	4	14	
42.–43. <i>Petr Šolc</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	5	–	5	35	4	14	
44.–45. <i>Daniél Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	3	13	
44.–45. <i>Daniel Theis</i>	G, Cheb	–	–	–	–	–	–	–	–	–	52	3	13	
46.–47. <i>Martin Felkl</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	4	3	7	34	3	11	
46.–47. <i>Ondřej Hejna</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	5	–	5	44	3	11	
48. <i>Tomáš Foral</i>	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	–	–	45	2	10	
49.–50. <i>Laura Hanousková</i>	G J. Wolker, Prostějov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	21	2	9	
49.–50. <i>Václav Sedlák</i>	S/PŠ Jedovnice	3	–	–	–	–	–	–	–	3	100	2	9	

jméno <i>Student</i> <i>Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%“	%	Σ	
		3	3	5	8	9	10	12	10	60	100	66	240	
51.–52. <i>Ondřej Galuščák</i>	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	2	8	
51.–52. <i>Jakub Krátký</i>	S/PŠ Jedovnice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	42	2	8	
53.–55. <i>Brian Chu</i>	AWS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	6	
53.–55. <i>Daniel Ježek</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	6	
53.–55. <i>Martin Uždil</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	46	2	6	
56. <i>Martin Polyácko</i>	G Alejová, Košice	3	–	–	–	–	–	–	–	–	3	100	0	3
57. <i>Daniel Kubrt</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	20	0	2
58.–59. <i>Duong Phan</i>	Cumberland Valley HS, USA	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	33	0	1
58.–59. <i>Veronika Staňková</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	10	0	1


Kategorie čtvrtých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	P	E	S	IV	„%	“%	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	3	3	5	8	9	10	12	10	60	100	66	240
1. <i>Jaroslav Herman</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	5	8	9	5	11	13	57	92	61	221
2. <i>Martin Schmied</i>	G, Jihlava	3	3	5	8	–	5	–	12	36	89	51	184
3. <i>Radka Krížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	3	3	5	8	8	–	–	3	30	85	48	176
4. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	3	3	–	–	6	9	–	3	24	83	36	133
5. <i>Martin Ormoš</i>	G J. A. Raymana, Prešov	3	3	2	–	4	–	–	2	14	51	18	68
6. <i>Mohamed Ahmed El-sayed</i>	STEM High School, Egypt	0	1	0	2	3	6	4	2	18	36	18	65
7. <i>Tomasz Twardoch</i>	XIII LO w Szczecinie, Poland	–	–	–	–	–	–	–	–	–	64	18	64
8. <i>Mostafa Ahmed</i>	STEM High School, Egypt	0	1	0	2	3	6	4	2	18	33	16	59
9. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	3	–	5	–	–	–	–	–	8	91	14	52
10. <i>Veronika Hendrychová</i>	G, Turnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	68	14	51
11. <i>Mohamed Ayman</i>	STEM High School, Egypt	0	1	0	2	1	3	4	3	14	27	13	49
12.–13. <i>Matěj Holubička</i>	Zemědělská akademie a Gymnázium	a	2	3	3	–	–	7	–	15	63	13	47
12.–13. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	3	2	5	–	–	–	–	–	10	87	13	47
14. <i>Jaroslav Scheinpflug</i>	G Jírovcova, České Budějovice	–	–	–	–	–	–	–	–	–	94	12	45
15. <i>Jan Stoklasa</i>	Mendelovo G, Opava	–	–	–	–	–	3	–	–	3	68	12	42
16. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	–	105	11	40
17. <i>Ondrej Tomášik</i>	G J. G. Tajovského	–	3	–	–	–	–	–	–	3	93	10	39
18. <i>Adam Grunt</i>	G, Trutnov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	103	10	38
19. <i>Peter Ehab</i>	STEM High School, Egypt	0	1	0	–	3	–	–	–	4	29	9	34
20. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	9	33
21. <i>Jan Divila</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	53	8	32
22.–23. <i>David Kománek</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	91	8	29
22.–23. <i>Tereza Němcová</i>	G a SOŠ, Jaroměř	–	–	–	–	–	–	–	–	–	41	8	29
24. <i>Jan Piroutek</i>	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	–	70	7	26
25. <i>Jindřich Maňas</i>	G J. Pivečky, Slavičín	–	–	–	–	–	–	–	–	–	80	5	20
26. <i>Mohamed Tarek Abdelmohsen Heggi</i>	STEM High School, Egypt	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28	4	17
27. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	–	–	39	3	13
28. <i>Štefan Evin</i>	G, Bardejov	–	–	–	–	–	–	–	–	–	55	3	12
29. <i>Samuel Krempaský</i>	G L. Svobodu, Humenné	3	–	5	–	–	–	–	3	11	61	3	11
30.–31. <i>Šimon Prudil</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	28	2	9
30.–31. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	–	69	2	9
32. <i>Mostafa Khalil</i>	STEM High School, Egypt	0	1	0	2	0	–	4	–	7	18	2	7
33. <i>Kornel Howil</i>	XIII LO w Szczecinie, Poland	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	2	6
34.–35. <i>Aleksander Lenart</i>	AGH U of Technology, Poland	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3
34.–35. <i>Šimon Prudil</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	–	100	0	3



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
e-mail: fykos@fykos.cz

FYKOS je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/FYKOS>

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.