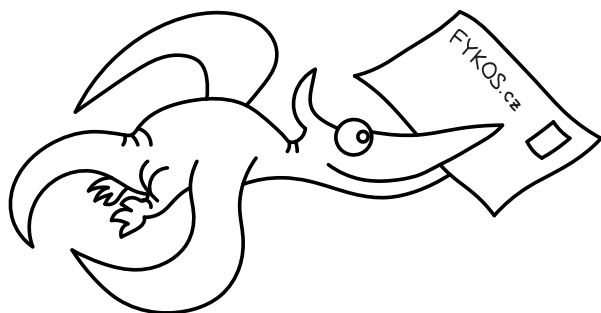


DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV

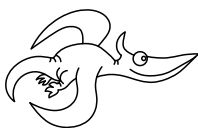
Fyzikální korespondenční seminář

XXXIII. ročník – 2019/20



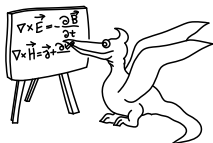
Copyright © Daniela Pittnerová, 2020
Copyright © MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy, 2020

ISBN 978-80-7378-419-5



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	14
Zadání experimentálních úloh	81
Řešení experimentálních úloh	83
Tipy a triky v řešení fyzikálních úloh	110
Kapitola 1: Tipy a triky v řešení fyzikálních úloh	110
Kapitola 2: Grafy, symetrie a souřadnice	123
Kapitola 3: Zákony zachování	131
Kapitola 4: Elektro-triky	139
Kapitola 5: Extrémy ve fyzice	148
Kapitola 6: Odhady	156
Řešení úloh ze seriálu	164
Akce FYKOSu	200
Podzimní soustředění v Jedlové	200
Jarní soustředění (neproběhlo)	201
Fyziklání 2020	201
Fyziklání online	204
Fyzikální Náboj	207
Den s experimentální fyzikou	208
Pořadí řešitelů	209



Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v jeho XXXIII. ročníku, který probíhal ve školním roce 2019/20.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm brožur, v nichž nalezneme šest sérií po osmi úlohách. Dvě z nich jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna „problémová“, vyžadující hlubší úvahu, jedna experimentální a jedna „seriálová“. Zbylé tři úlohy se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které studenti znají z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení (poštou nebo přes internet). Opravující pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpobulárnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů České země. Jejich účastníci si užijí bohatý program plný odborných přednášek z oblasti matematiky, fyziky nebo jiných přírodních věd, ale i her či jiných aktivit v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa. Tento akademický rok se podzimní soustředění konalo v Jedlové v Lužických horách a jarní soustředění bylo kvůli pandemii nemoci COVID-19 zrušeno.

Další FYKOSí akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR. Naším řešitelům tak umožníme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště v Praze a okolí, kde probíhá aktuální fyzikální výzkum. V tomto akademickém roce byl DSEF už podruhé součástí IAPS School Day, tentokrát na téma Elements and Materials.

Naše tradiční Fyziklání je tříhodinová soutěž až pětičlenných týmů v řešení

fyzikálních úloh. Soutěž vyhrává tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. V letošním 14. ročníku se účastnilo rekordních 201 družstev ze šesti států. Celkově 974 soutěžících je pro nás skvělým důkazem, že se fyzika a přírodní vědy obecně mezi středoškolskými studenty stále těší popularitě. Fyziklání se stalo akcí zahrnující nejen samotnou soutěž, ale také doprovodný víkendový program.

Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání online (v zahraniční verzi Online Physics Brawl). V listopadu 2019 proběhl její devátý ročník a opět znamenala velký úspěch. Soutěž byla své elektronické formě otevřena všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro které je vytvořena především. Tohoto ročníku se zúčastnilo 312 středoškolských a 78 jiných týmů celkově z 39 zemí. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, která se již řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší akce, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXXIII. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamyšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je seriál o tipech a tricích k řešení fyzikálních úloh, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošním soustředěním a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem či organizátorem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXXIII. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 182 studentů ze 117 středních škol z celého světa. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 2762 došlých řešení a udělili 11 565 bodů.



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... D1

3 body

Kamionák se rozhodne na dálnici předjet autobus. Kamion jede o 2 % vyšší rychlostí než autobus. Když je kamion přesně vedle autobusu, začne na dálnici pravotočivá zatáčka, která způsobí, že po celou zatáčku jedou obě vozidla vedle sebe a za nimi se už začíná tvořit značná kolona. Určete poloměr zatáčky (vnitřního jízdního pruhu), je-li šířka jízdních pruhů 3,75 m. *(řešení str. 14)*

Úloha I.2 ... bateriový problém na dovolené

3 body

Jak dlouho potrvá vybití plně nabité autobaterie (12 V, 60 Ah), zapomene-li někdo vypnout potkávací světla auta, zamkne a odejde pryč? Konkrétně nás zajímá situace pro přední světla H4 (výrobce udává 55 W každé) a zadní světla P21/5W (dle výrobce 5 W každé). Pro jednoduchost považujte transport energie z baterie do světel za bezztrátový, odběr dalších spotřebičů (jako GPS sledování) za zanedbatelný a napětí na baterii za konstantní. *(řešení str. 14)*

Úloha I.3 ... infrasauna

6 bodů

Dano pokračuje ve vybavování svojí vily další saunou – tentokrát infrasaunou. Chce umístit zářivku těsně pod strop sauny ve výšce $H = 2,5$ m nad zemí. Emituje-li zářič energii s délkovým zářivým výkonem $p = 1,2 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-1}$, jaké budou intenzita a celkový výkon záření dopadajícího na povrch lidského těla zhruba $h = 50$ cm nad zemí? Zářivka je rovná, září homogenně a je upevněna těsně pod středem stropu od jednoho kraje sauny do druhého.

Nápověda Pro jednoduchost uvažujte, že stěny, kde zářivka končí, a strop jsou zrcadla a že podlaha a stěny, kterých se zářivka nedotýká, záření dokonale absorbují a nevyzařují zpět do místnosti. *(řešení str. 15)*

Úloha I.4 ... disco koule

7 bodů

Bylo nebylo, Mišo chtěl uspořádat největší párty vůbec. K tomu je ale potřeba pořádná disco koule, a tak si nechal Měsíc obložit zrcadly, čímž z něj udělal největší disco kouli, která měla odrazet světlo od Slunce. Je zřejmé, jak párty dopadla, ale nás zajímá nejmenší možný rozdíl magnitud Slunce a disco koule při pohledu ze Země. *(řešení str. 16)*

Úloha I.5 ... obecně relativistická

9 bodů

Starman se před odletem do kosmu na cestu k Marsu ve svém voze Tesla Roadster domluvil s Muskem, že jakmile bude ve vzdálenosti $r = 5,0 \cdot 10^6$ km od hmotného

středu Země, tak na něj Musk zasvítí výkonným zeleným laserem. Vlnová délka laseru se vlivem gravitačního pole Země zvětší. Porovnejte tuto změnu vlnové délky s vlivem elektromagnetického Dopplerova jevu, vzdaluje-li se Starman od Muska rychlostí $v = 4,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvažujte, že oba jevy působí zvlášť. (řešení str. 18)

Úloha I.P ... ničitel planet

10 bodů

Jak velká by mohla být co nejmenší a nejlhčí zbraň, která by dokázala zničit planetu? Samozřejmě ještě v rozumném čase v rámci lidského života a čím rychleji, tím lépe. (řešení str. 22)

Úloha II.1 ... rychlovýtah

3 body

Říká se, že lidé ve výtahu bez větších problémů snesou zrychlení $a = 2,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Také bychom chtěli dorazit do plánovaného patra co nejdříve. Pokud by se výtah čtvrtinu doby jízdy rozjížděl s tímto zrychlením, polovinu doby jel konstantní rychlostí a zbývající čtvrtinu doby zpomaloval, jak vysoko by dokázal vyjet za celkovou dobu jízdy $t = 1,00 \text{ min}$? (řešení str. 28)

Úloha II.2 ... slabý naviják

3 body

Uvažujme pevně zavěšenou kladku, na níž je umístěno lano zanedbatelné hmotnosti. Na jednom konci lana je upevněno závaží o hmotnosti m_1 a na druhém konci se ve stejné úrovni nachází naviják o hmotnosti m_2 . V prvním případě je naviják ukotven na zemi a při navíjení lana se zvedá pouze závaží. V druhém případě je závaží pevně spojeno s navijákem tak, že při navíjení se zvedají společně závaží i naviják. Určete, ve kterém případě bude zapotřebí menší síly pro zdvihnutí závaží (a tudíž slabšího navijáku). (řešení str. 29)

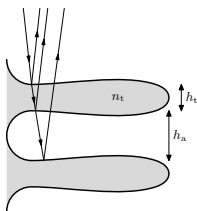
Úloha II.3 ... Dančina (ne)rovnovážná destička

6 bodů

Destička tloušťky $t = 1,0 \text{ mm}$ se šířkou $d = 2,0 \text{ cm}$ se skládá ze dvou částí. První část o hustotě $\rho_1 = 0,20 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ má délku $l_1 = 10 \text{ cm}$, druhá část o hustotě $\rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ má délku $l_2 = 5,0 \text{ cm}$. Desku položíme na hladinu vody s hustotou $\rho_v = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a počkáme, až se ustálí v rovnovážné poloze. Jaký úhel bude svírat rovina desky s hladinou vody? Jaká část destičky zůstane třet nad hladinou? (řešení str. 30)

Úloha II.4 ... motýli

7 bodů



Duhové modrozelené zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu *Morpho* je důsledkem konstruktivní interference světla odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných blan na povrchu křídel). Stupně mají index lomu $n_t = 1,53$ a tloušťku $h_t = 63,5$ nm a jsou odděleny mezerou vzduchu tloušťky $h_a = 120,3$ nm, viz obrázek. Světlo na ně dopadá kolmo. Pro jaké vlnové délky viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum?

(řešení str. 31)
Úloha II.5 ... kolečko s pružinkou

8 bodů

Máme tenký dokonale tuhý homogenní disk o poloměru R a hmotnosti m , ke kterému je připojena gumička. Jedním koncem je upevněná ve vzdálenosti $2R$ od okraje disku a druhým koncem na jeho okraji. Gumička funguje jako dokonalá tenká pružina o tuhosti k , klidové délce $2R$ a zanedbatelné hmotnosti. Disk je upevněný ve svém středu tak, že se může v jedné rovině volně otáčet kolem tohoto bodu, ale nemůže se posouvat či měnit rotační rovinu. Určete závislost velikosti momentu síly, kterou bude gumička urychlovat či zpomalovat rotaci disku v závislosti na úhlové výchylce φ , a sestavte pohybovou rovnici disku.

Bonus Určete periodu malých kmitů soustavy.

(řešení str. 33)
Úloha II.P ... Země vzplála

10 bodů

Odhadněte, o kolik by stoupl obsah CO_2 v atmosféře, pokud by shořela veškerá vegetace na zemském povrchu.

(řešení str. 35)
Úloha III.1 ... fontána s vodotryskem

3 body

Mějme fontánu s N tryskami stejného průřezu, které jsou napájeny jediným čerpadlem. Z trysek tryská voda do výšky h . Do jaké výšky bude voda tryskat, pokud zakryjeme všechny trysky kromě jedné? Čerpadlo má konstantní průtok.

(řešení str. 39)
Úloha III.2 ... boom

3 body

Nad hlavou nám přeletěla stíhačka letící rovnoměrným pohybem vodorovně se zemským povrchem. Za $t = 1,50$ s na to jsme uslyšeli sonický třesk v okamžiku, kdy měla stíhačka zenitovou vzdálenost $\vartheta = 30,0^\circ$. Zjistěte, jak vysoko nad námi stíhačka přeletěla.

Bonus Z jakého směru jsme třesk slyšeli a jak daleko se toto místo nachází od místa, kde stíhačku vidíme?

(řešení str. 39)

Úloha III.3 ... paprličko

5 bodů

Určitě jste si již všimli, že když umístíte lžičku pod proud vody (například při mytí nádobí), vytvoří jakýsi vodní hříbek. Pro zjednodušení uvažujte, že lžička je rovná a má kruhový tvar malého poloměru. Po umístění kolmo do středu proudu vody (jehož poloměr je ještě menší) padající z klidu z výšky h nad dnem umyvadla vytvoří krásný rotační paraboloid. Spočítejte, do jaké výšky musíme lžičku dát, aby voda dopadala co nejdále od osy původního proudu (dno umyvadla je vodorovné). Uvažujte, že voda je ideální kapalina (nestlačitelná, neviskózní, bez vnitřního tření).

Bonus Najděte výšku umístění lžičky, při které voda vytvoří „přístřešek“ s co největším objemem. (řešení str. 40)

Úloha III.4 ... берушка на гуме

8 bodů

Beruška leze rychlostí $4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Když ji postavíme na gumu 40 cm dlouhou, přeleze ji za 10 s. Co když ale v okamžiku, kdy берушка začne lézt, začneme gumu natahovat tak, že se její délka bude zvětšovat rychlostí $5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$? Může dolézt na konec? Pokud ano, jak dlouho jí to bude trvat? Guma se roztahuje rovnoměrně a nikdy se nepřetrhne. (řešení str. 42)

Úloha III.5 ... hustota pravděpodobnosti vody

9 bodů

Představme si nádrž, ze které neustále vodorovně vytéká proud vody s konstantním obsahem průřezu. Rychlost proudu však náhodně kolísá s rovnoměrným rozdělením od v_1 do v_2 . Po vytečení z nádrže voda volně padá na vodorovnou podlahu níže. Najděte libovolnou oblast podlahy, do které dopadne přesně 90 % vody.

(řešení str. 43)**Úloha III.P ... roj meteoritů**

10 bodů

Je možné, aby se kapka deště vypařila dříve, než dopadne na zem? Vymyslete vhodný model odpařování dešťových kapek během jejich pádu a ukažte, za jakých podmínek (mezi relevantní parametry patří například počáteční poloměr, průběh okolní teploty v závislosti na nadmořské výšce) se může kapka zcela odpařit. Můžete přitom předpokládat, že kapka vznikne náhle v určité výšce h_0 s počátečním poloměrem r_0 a v první aproximaci padá suchou atmosférou. A kdy je možné, aby kapka zamrzla? (řešení str. 44)

Úloha IV.1 ... čibonaut

3 body

Máme kosmonauta s hmotností M , který se v beztížném stavu vznáší ve vzdálenosti l od stěny vesmírné stanice. Najednou se rozhodne, že těžké nářadí s hmotností m , které dosud držel v ruce, hodí po stanici ve směru kolmém na její stěnu. V jaké vzdálenosti od stěny kosmonaut bude, až do ní nářadí narazí?

(řešení str. 49)

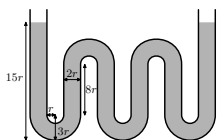
Úloha IV.2 ... Machovo číslo

3 body

Letadla jsou ve vysokých hladinách letu řízena pomocí Machova čísla. Tato veličina vyjadřuje rychlost v násobku rychlosti zvuku v daném prostředí. Rychlost zvuku ve vzduchu se ovšem s výškou mění. Jaký je rozdíl mezi rychlostí letu letadla letícího při Machově čísle 0,85 ve dvou různých letových hladinách FL 250 (7 600 m) a FL 430 (13 100 m)? V jaké hladině je rychlost vyšší a o kolik kilometrů za hodinu? Závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na teplotě můžeme s dostatečnou přesností popsat vztahem $c = (331,57 + 0,607 \{t\}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, kde t je teplota ve stupních Celsia. Uvažujte standardní atmosféru, ve které klesá teplota s výškou od 0 do 11 km od 15°C o $0,65^\circ\text{C}$ na každých 100 m až k teplotě $-56,5^\circ\text{C}$, která je pak konstantní až do 20 km nad střední hladinou moře. (řešení str. 50)

Úloha IV.3 ... uuu-trubice

5 bodů



Jakou periodu malých kmitů bude mít voda ve skleněné trubici na obrázku? Uvažujte pokojovou teplotu a normální tlak a předpokládejte, že voda je dokonale nestlačitelná. (řešení str. 51)

Úloha IV.4 ... optický fykosák

8 bodů

Pták Fykosák našel na Matfyzu nehlídanou optickou lavici, která umožňuje rozmístit různé pomůcky podél optické osy, a začal si s ní hrát. Na osu umístil postupně bodový zdroj světla, první čočku, druhou čočku a stínítko se stejnými rozestupy (vzdálenost stínítka od zdroje je tedy třikrát větší než vzdálenost jakýchkoli dvou sousedních pomůcek). Na stínítku se vytvořil ostrý obraz zdroje. Fykosák potom celou soustavu ponořil do neznámé kapaliny, kterou našel v podivném kanystru. K jeho úžasu zůstal obraz na stínítku stále ostrý. Určete index lomu této kapaliny, jenž je určitě jiný než index lomu vzduchu, který můžete považovat za jednotkový. Jedna z čoček má desetkrát větší ohniskovou vzdálenost než druhá a obě jsou tenké a vyrobené z materiálu o indexu lomu 2. (řešení str. 52)

Úloha IV.5 ... zkratka napříč časem

9 bodů

Jáchym se nachází v dvoudimenzionálním kartézském prostoru v bodě $J = (-2a, 0)$. Chce se co nejrychleji dostat do bodu $T = (2a, 0)$, který se (naštěstí) nachází ve stejném prostoru. Jáchym se zásadně pohybuje rychlostí o velikosti v . Aby to nebylo tak jednoduché, prostorem vede pojezdny pás ve tvaru přímky, procházející body $(-3a, 0)$ a $(0, a)$, po kterém se Jáchym pohybuje celkovou rychlostí kv . Pro jaké minimální $k \geq 1$ se Jáchymovi vyplatí jít po pásu? (řešení str. 54)

Úloha IV.P ... klimatické změny feat. letadla

10 bodů

Létání letadlem ovlivňuje atmosféru nejen dobře známými emisemi uhlíku. Diskutujte, jaký vliv má letecký průmysl na oteplování atmosféry Země. (řešení str. 56)

Úloha V.1 ... vlak na mostě

3 body

Na mostě dlouhém 300 m stojí nákladní vlak, jehož váha je rovnoměrně rozložena na plochu všech devíti ocelových pilířů mostu. Každý pilíř má podstavu tvaru čtverce se stranou $a = 2,0$ m a je vysoký $h = 10$ m. O kolik se vlivem tíhy vlaku stlačí ocelové pilíře? Modul pružnosti oceli v tlaku je $E = 200$ GPa, celková hmotnost vlaku je $m = 574$ t. (řešení str. 58)

Úloha V.2 ... pohne se?

3 body

Jáchym chce doma nakládat zelí, a tak si koupil válcový sud. Z obchodu ho však musí nějak dostat metrem domů. Sud i s víkem si můžeme představit jako dutý válec s vnějším poloměrem r a s vnější výškou h . Šířka stěn, podstavy i víka je t . Sud je vyrobený z materiálu s hustotou ρ . S jakým největším zrychlením se může souprava metra pohybovat, aby se volně stojící sud vůči ní nijak nepohnul? Koeficient tření mezi podlahou vagonu a sudem je f . (řešení str. 59)

Úloha V.3 ... Matějova vysněná koule

6 bodů

Přesně na hraně stolu leží homogenní koule o poloměru r . Jelikož je to „polovratká“ poloha, začne koule padat ze stolu. Na jakou úhlovou rychlost se roztočí? Předpokládejte, že koule neprokluzuje. (řešení str. 60)

Úloha V.4 ... podivná smyčka

7 bodů

Kruhová kovová smyčka s poloměrem $r = 15$ cm má hmotnost $m = 18$ g. Pokud bychom ji rozstříhli, vznikl by drát s odporem $R = 3,5$ m Ω . Na počátku je smyčka v klidu. V čase $t = 0$ zapneme homogenní magnetické pole kolmé k rovině smyčky s časovým průběhem $B(t) = at$, kde $\alpha = 1$ mT \cdot s $^{-1}$ je konstanta. Smyčka se v důsledku přítomnosti nestacionárního magnetického pole začne nepatrně otáčet kolem své osy. Určete velikost úhlové rychlosti ω v čase $t = 0,1$ s. Deformaci smyčky neuvažujte. (řešení str. 61)

Úloha V.5 ... opticko-relativistická

9 bodů

Určete, jaký fázový posun $\Delta\Phi$ vznikne přechodem laserového svazku s vlnovou délkou λ_0 přes skleněnou desku s klidovou tloušťkou h a s indexem lomu n , která se pohybuje ve směru svazku rovnoměrně rychlostí v , oproti případu, kdy je deska vůči zdroji i pozorovateli v klidu. Zajímá nás především první nenulový člen rozvoje podle rychlosti desky. (řešení str. 63)

Úloha V.P ... budiž světlo

10 bodů

Odhadněte čas, který uplyne mezi stlačením vypínače a rozsvícením světelného zdroje. Zvlášť vyřešte pro žárovku, zářivku, LED a neonovou trubici. Diskutujte co nejméně faktorů, které tento čas ovlivňují. (řešení str. 65)

Úloha VI.1 ... gravitační urychlovač

3 body

Jakou energii v elektronvoltech by získal proton při pádu z nekonečna na povrch Země? Neuvažujte vliv jiných vesmírných těles. (řešení str. 69)

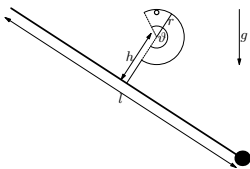
Úloha VI.2 ... pod tlakem

3 body

Ve vaně je napuštěna voda do výšky 15,0 cm. Špunt má tvar komolého kužele, který dokonale padne do otvoru ve dně (čili výška špuntu je stejná, jako tloušťka dna). Poloměry jeho podstav jsou 16,0 mm a 15,0 mm a jeho hmotnost je 11,0 g. Jakou silou působí dno vany na špunt? Předpokládejte, že v trubce pod ním je vzduch s atmosférickým tlakem. (řešení str. 69)

Úloha VI.3 ... ověšená

5 bodů



Jak těžké závaží můžeme zavěsit na konec ramínka věšáku bez toho, aby se převrhnul? Věšák je tvořen háčkem z velmi lehkého drátu, který je připevněn ke středu rovné dřevěné tyčky o délce $l = 30$ cm a o hmotnosti $m = 200$ g. Háček má tvar kružnicového oblouku s poloměrem $r = 2,5$ cm a s úhlovým rozpětím $\vartheta = 240^\circ$. Vzdálenost středu oblouku a středu tyčky je $h = 5$ cm. Veškeré tření zanedbejte. (řešení str. 70)

Úloha VI.4 ... zděšené vlasy

7 bodů

Z radosti nad koncem zkouškového začaly Dance přibývat vlasy konstantní rychlostí. Po nějaké době si všimla, že jí jeden vypadl, a zděsila se. Čím více vlasů jí vypadlo, tím větší cítí stres a o to rychleji jí vypadávají další. Přesněji, rychlost vypadávání vlasů je přímo úměrná počtu již vypadnutých vlasů. Rychlost přibývání vlasů zůstává stejná. Opět nás zajímá, kdy Dance vypadne poslední vlas?

(řešení str. 74)

Úloha VI.5 ... nazlátlý sirup

10 bodů

Magické pole Zeměplochy je natolik silné, že v něm světlo úplně ztratí smysl pro rychlost. To ovšem platí pouze v blízkosti povrchu, kde má index lomu magického pole hodnotu $n_0 = 2,00 \cdot 10^6$. S rostoucí výškou h index lomu klesá podle vztahu $n(h) = n_0 e^{-kh}$, kde $k = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$. Určete, pod jakým úhlem vůči svislému směru musíme z jednoho konce Zeměplochy vyslat světelný signál, aby na druhý konec dorazil v co nejkratším čase. Průměr disku Zeměplochy je $d = 15\,000$ km a rychlost světla ve vakuu je $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. (řešení str. 75)

Úloha VI.P ... vesmír ve 4D

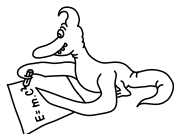
10 bodů

Pravděpodobně už jste slyšeli, že planety i libovolná jiná tělesa se v centrálním gravitačním poli pohybují po kuželosečkách (v případě Sluneční soustavy jsou to

elipsy s malou výstředností). Prozkoumejte, jak by vypadaly trajektorie planet ve vesmíru, kde by gravitační síla závisela na převrácené třetí mocnině vzdálenosti místo na druhé.

Nápověda Může se vám hodit Binetův vzorec.

(řešení str. 76)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... D1

Kamionák se rozhodne na dálnici předjet autobus. Kamion jede o 2% vyšší rychlostí než autobus. Když je kamion přesně vedle autobusu, začne na dálnici pravotočivá zatáčka, která způsobí, že po celou zatáčku jedou obě vozidla vedle sebe a za nimi se už začíná tvořit značná kolona. Určete poloměr zatáčky (vnitřního jízdního pruhu), je-li šířka jízdních pruhů 3,75 m.

Jako rychlost vozidla budeme uvažovat rychlost jeho středu. Dále předpokládáme, že jak kamion, tak autobus jedou středem svého pruhu. Vzdálenost kamionu a autobusu potom bude $d = 3,75$ m. Poloměry zatáček pravého a levého pruhu označíme po řadě r a R . Zřejmě platí $R = r + d$. Rychlost autobusu necht' je v , rychlost kamionu potom bude qv , kde $q = 1,02$. Jelikož celou zatáčku jedou vedle sebe, musí být jejich úhlové rychlosti stejné, neboli

$$\begin{aligned}\frac{v}{r} &= \frac{qv}{R}, \\ qr &= R = r + d, \\ r &= \frac{d}{q - 1} \doteq 200 \text{ m}.\end{aligned}$$

Poloměr zatáčky vychází přibližně 200 m.

Úloha I.2 ... bateriový problém na dovolené

Jak dlouho potrvá vybití plně nabité autobaterie (12 V, 60 Ah), zapomene-li někdo vypnout potkávací světla auta, zamkne a odejde pryč? Konkrétně nás zajímá situace pro přední světla H4 (výrobce udává 55 W každé) a zadní světla P21/5W (dle výrobce 5 W každé). Pro jednoduchost považujte transport energie z baterie do světel za bezztrátový, odběr dalších spotřebičů (jako GPS sledování) za zanedbatelný a napětí na baterii za konstantní.

Nejprve určíme celkový výkon světel. Ten je součtem dvou předních a dvou zadních světel, tedy

$$P = 2 \cdot 55 \text{ W} + 2 \cdot 5 \text{ W} = 120 \text{ W}.$$

Celková energie baterie je dána součinem jejího maximálního napětí $U = 12$ V a maximální kapacity, tedy náboje $Q = 60$ Ah,

$$E = QU \doteq 2,6 \text{ MJ}.$$

Energie se vybije za čas

$$t = \frac{E}{P} = 21\,600\text{ s} = 6\text{ h}.$$

Baterie se vybije zhruba za 6 hodin. Nejspíše vybitá nastane ještě rychleji, protože baterie nebude nabitá na 100 % a protože nastávají nějaké ztráty ve vedení energie z baterie. Faktor, který může trochu prodloužit svícení, je pokles napětí na baterii a následné svícení žárovek pod nižším výkonem. Ale vězte, že to už stejně nenastartujete. V rámci historky ze života stačí i tak 4 hodiny. Ponaučení pro život tedy je – nezapomínejte vypnout světla!

Úloha I.3 ... infrasauna

Dano pokračuje ve vybavování svojí vily další saunou – tentokrát infrasaunou. Chce umístit žářivku těsně pod strop sauny ve výšce $H = 2,5\text{ m}$ nad zemí. Emituje-li zářič energii s délkovým zářivým výkonem $p = 1,2\text{ kW}\cdot\text{m}^{-1}$, jaké budou intenzita a celkový výkon záření dopadajícího na povrch lidského těla zhruba $h = 50\text{ cm}$ nad zemí? Žařivka je rovná, září homogenně a je upevněna těsně pod středem stropu od jednoho kraje sauny do druhého.

Nápověda Pro jednoduchost uvažujte, že stěny, kde žářivka končí, a strop jsou zrcadla a že podlaha a stěny, kterých se žářivka nedotýká, záření dokonale absorbují a nevyzařují zpět do místnosti.

Nápověda se nám bude hodit. Říká nám, že si můžeme představit, že záření se šíří stejně, jako kdyby žářivka byla nekonečně dlouhá a měla nad sebou zrcadlo. Pokud bychom toto omezení neměli, museli bychom uvažovat, že každý materiál nějakou část elektromagnetických vln odráží a nějakou absorbuje. Absorbovanou energii potom zase vyzařuje zpět. Toto vyzařování ale obvykle probíhá na jiných vlnových délkách – podle toho, na jakou teplotu se materiál zahřeje. K určení této teploty bychom ale museli znát tepelnou kapacitu a vodivost materiálu. Navíc by se oblast bezprostředně u zdroje zahřála na výrazně vyšší teplotu než okolí a úloha by nejspíše nešla řešit jinak než numericky. Naše zjednodušené řešení je sice o něco méně přesné, ale mělo by být docela dobrým odhadem.

Úloha je zajímavá v tom, že intenzita záření dopadajícího na jednotkovou plochu neklesá jako obvykle s druhou mocninou vzdálenosti, ale klesá lineárně. To si můžeme odvodit například tak, že si kolem našeho tyčového zářiče představíme válec¹, který je s ním souosý. Ať bude mít válec jakýkoliv poloměr, celková energie záření dopadajícího na jeho plášť bude stále stejná. Záření vycházející podstavami nás nemusí zajímat, protože podle úvahy výše je situace stejná, jako kdyby byl zářič nekonečně dlouhý. Pro samotnou žářivku bez stěn by pro intenzitu záření I_0 ve vzdálenosti r od žářivky platilo

$$I = \frac{p}{2\pi r}.$$

¹V literatuře je někdy označován jako *Gaussův válec*.

K tomu musíme ještě uvažovat zrcadlo, které je nad zářivkou. To nám ale intenzitu záření jenom zdvojnásobí, protože díky němu se polovina záření odrazí zpět dolů. Závislost intenzity na vzdálenosti od zářivky tak bude

$$I = \frac{P}{\pi r}.$$

Vzdálenost zářivky od povrchu lidského těla je $r = H - h$, tedy intenzita vychází $I \doteq 190 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Celkový výkon dostaneme, pokud odhadneme, jakou plochu má lidské tělo. Jako přibližný odhad pro pozici vleže na zádech či na břicho můžeme vzít² například průměrnou výšku člověka $a = 1,7 \text{ m}$ a průměrnou hodnotu transversálního rozměru hrudníku $b \doteq 0,3 \text{ m}$ a tyto hodnoty vynásobit, jako kdyby byl člověk kvádrem. Odhad to nebude moc přesný, ale pokud bereme rozměr hrudníku, tak se částečně vykompenzuje chyba toho, že jsme zapomněli na ruce a že naopak nohy a hlava jsou užší. Takto odhadnutá plocha člověka je $S = ab \doteq 0,5 \text{ m}^2$ a výkon, který bude dopadat na povrch lidského těla, vychází

$$P = IS = \frac{P}{\pi(H-h)}ab \doteq 96 \text{ W}.$$

Na povrch člověka dopadá zhruba $P \doteq 100 \text{ W}$ záření. To je shodou okolností zhruba tepelný výkon bazálního metabolismu.

Úloha I.4 ... disco koule

Bylo nebylo, Mišo chtěl uspořádat největší párty vůbec. K tomu je ale potřeba pořádná disco koule, a tak si nechal Měsíc obložit zrcadly, čímž z něj udělal největší disco kouli, která měla odrážet světlo od Slunce. Je zřejmé, jak párty dopadla, ale nás zajímá nejmenší možný rozdíl magnitud Slunce a disco koule při pohledu ze Země.

Mišo zmenil Mesiác na guľové zrkadlo. Ak si v prvom priblížení Slnko predstavíme ako bodový zdroj svetla v nekonečne, nezáleží na vzdialenosti Mesiaca a Zeme od Slnka. Situáciu si teda môžeme predstaviť ako guľové zrkadlo osvetlené (takmer) rovnomerne slnečným svetlom, okolo ktorého hľadáme najviac osvetlené miesto vo vzdialenosti Zem-Mesiác od neho.

Guľové zrkadlo zrejme odráža najviac svetla dopredu naspäť ku zdroju žiarenia. Bude nás preto zaujímať situácia v splne. Je však dôležité podotknúť, že ak by boli všetky tri telesá presne na jednej priamke, nastane zatmenie Mesiaca. Pre náš výpočet ale nie je veľký rozdiel medzi polohou tesne vedľa tieňa a polohou na priamke, ak tienenie Zeme nebudeme uvažovať.

Slnko sa v zrkadle zobrazí (podľa zobrazovacej rovnice pre $a_1 \gg f$ v paraxiálnej aproximácii) v polovici vzdialenosti medzi stredom Mesiaca a bodom na jeho povrchu najbližšie k Zemi. Navyše bude obraz Slnka extrémne zmenšený,

²<http://www.n-i-s.cz/cz/parametry-populace/page/33/>

takmer bodový. Na úrovni obežnej dráhy Zeme Slnko dodáva tok energie $F_0 = 1360 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Po odraze od zrkadla sa bude tok zmenšovať ako pri bodovom zdroji $F \propto x^{-2}$. Vzdialenosť povrchu Mesiaca od obrazu zdroja v zrkadle je

$$a_2 = \frac{r_M}{2},$$

kde $r_M = 1737 \text{ km}$ je polomer Mesiaca. Vzdialenosť od zdroja k povrchu Zeme je približne

$$s = R - a_2 - r_Z,$$

kde $R = 356 \cdot 10^3 \text{ km}$ je vzdialenosť stredov Zeme a Mesiaca v perigeu³ a $R_Z = 6378 \text{ km}$ je polomer Zeme. Tok energie od odrazu na povrchu Zeme teda máme ako

$$F = F_0 \left(\frac{a_2}{s} \right)^2.$$

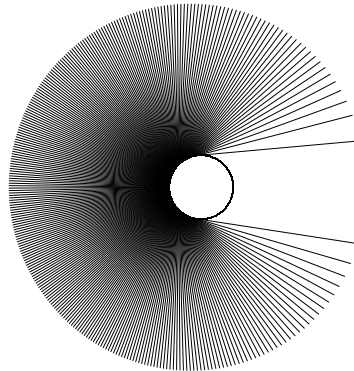
Rozdiel zdanlivých magnítud (jasností) Δm je definovaný pomocou Pogsonovej rovnice ako

$$\Delta m = m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_1}{F_2} \right).$$

Po dosadení F a F_0 za toky dostávame

$$\Delta m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right) = 5 \log_{10} \left(\frac{s}{a_2} \right) = 13,0 \text{ mag}.$$

Zdanlivá jasnosť Slnka je $-26,7 \text{ mag}$, čo dáva jasnosť odrazu $-13,7 \text{ magnítud}$. To je asi o jednu hviezdnu veľkosť jasnejšie ako Mesiac v splne v perigeu.



Obr. 1: Rovnobežné lúče po odraze od guľového zrkadla

³Zaujímá nás najmenší možný rozdiel magnítud Slnka a jeho odrazu, odraz je najjasnejší keď je k nám Mesiac najbližšie.

Úloha 1.5 . . . obecně relativistická

Starman se před odletem do kosmu na cestu k Marsu ve svém voze Tesla Roadster domluvil s Muskem, že jakmile bude ve vzdálenosti $r = 5,0 \cdot 10^6$ km od hmotného středu Země, tak na něj Musk zasvítí výkonným zeleným laserem. Vlnová délka laseru se vlivem gravitačního pole Země zvětší. Porovnejte tuto změnu vlnové délky s vlivem elektromagnetického Dopplerova jevu, vzdaluje-li se Starman od Muska rychlostí $v = 4,0 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvažujte, že oba jevy působí zvlášť.

Částí úlohy je vyřešit gravitační posuv vlnové délky v centrálním gravitačním poli. Tento efekt je dán čistě relativistickými jevy, které řeší obecná relativita. My se však pokusíme problém vyřešit nejdříve intuitivně užitím klasické fyziky. Poté si ukážeme řešení, které vychází z jednoho ze základních principů obecné teorie relativity, principu ekvivalence.

Klasický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky

Uvažujme pouze vliv gravitačního pole Země. Pro vyřešení této úlohy využijeme zákon zachování energie pro fotony vyzářené laserem. Náš foton se pohybuje v centrálním gravitačním poli Země, a proto při jejím opuštění se jeho gravitační potenciální energie zvýší z hodnoty $E_{p,0}$ na hodnotu E_p . Změnu gravitační potenciální energie vzhledem k ostatním tělesům (jako např. Slunci) zanedbáváme. Změna této energie se projeví změnou frekvence fotonu. Při výstupu z laseru na povrchu Země bude mít foton frekvenci f_0 a u Starmana frekvenci f . Celkově ze zákona zachování energie dostáváme rovnost

$$hf_0 + E_{p,0} = hf + E_p, \quad (1)$$

kde h je Planckova konstanta. Dále musíme najít vztah pro potenciální energii. Přírůstek potenciální energie gravitačního pole je roven

$$dE_p = -\mathbf{F}_g \cdot d\mathbf{r}, \quad (2)$$

kde $d\mathbf{r}$ je infinitezimální přírůstek polohového vektoru \mathbf{r} a \mathbf{F}_g je gravitační síla, pro kterou v našem případě podle Newtonova gravitačního zákona platí

$$\mathbf{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{\mathbf{r}},$$

kde G je gravitační konstanta, m je hmotnost fotonu, M je hmotnost Země, r je vzdálenost od hmotného středu Země a $\hat{\mathbf{r}}$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru \mathbf{r} . Síla \mathbf{F}_g má stejný směr a opačnou orientaci jako polohový vektor \mathbf{r} . Proto rovnice (2) pro přírůstek potenciální energie přejde do tvaru

$$dE_p = F_g dr = G \frac{mM}{r^2} dr, \quad (3)$$

kde F_g je velikost síly \mathbf{F}_g . Integrováním levé a pravé strany rovnice (3) dostaneme

$$E_p = -G \frac{mM}{r} + C,$$

kde C je integrační konstanta, která se obvykle volí jako $C = 0$, aby byla nulová hladina potenciální energie v nekonečnu. Tuto potenciální energii dosadíme do rovnice (1),

$$hf_0 - G\frac{m_0M}{r_0} = hf - G\frac{mM}{r}.$$

Otázkou je, co máme dosadit za hmotnost fotonu. Využijeme Einsteinova vztahu ekvivalence energie a hmotnosti $E = mc^2$ a za hmotnost dosadíme $m = hf/c^2$. Po dosazení rovnici vydělíme Planckovou konstantou h ,

$$f_0 - G\frac{f_0M}{r_0c^2} = f - G\frac{fM}{rc^2}.$$

Z této rovnice vyjádříme poměr frekvencí f/f_0 ,

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1 - \frac{GM}{r_0c^2}}{1 - \frac{GM}{rc^2}}.$$

Pro poměr vlnových délek λ/λ_0 platí reciprokový vztah

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \frac{GM}{rc^2}}{1 - \frac{GM}{r_0c^2}}.$$

Uvědomme si, že v našem případě je člen $\frac{GM}{r_0c^2}$ velmi malý (tj. $\frac{GM}{r_0c^2} \ll 1$), popř. člen $\frac{GM}{rc^2}$, a proto můžeme použít aproximaci $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, jedná se o první dva členy Taylorova rozvoje okolo bodu $x = 0$. Ke tvaru této aproximace můžeme také rychle dospět rozšířením zlomku $\frac{1}{1+x}$ výrazem $1 - x$. Jmenovatel tak nabyde tvaru $1 - x^2$. Vzhledem k tomu, že provádíme aproximaci do řádu x , můžeme člen x^2 ve jmenovateli zanedbat. Použitím aproximace dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) \left(1 + \frac{GM}{r_0c^2}\right) \approx 1 - \frac{GM}{rc^2} + \frac{GM}{r_0c^2}.$$

Relativní rozdíl pak je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right). \quad (4)$$

Dosadíme-li číselné hodnoty $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $r_0 = 6 \cdot 10^6$ m a další, zjistíme, že rozdíl vlnové délky světla, které Starman pozoruje a které Musk ze Země vyzáří, je řádově jen $10^{-9}\lambda_0$.

Elektromagnetický Dopplerův jev

Nyní budeme samostatně uvažovat elektromagnetický (relativistický) Dopplerův jev. V případě, že se zdroj a příjemce vzájemně vzdalují ve směru šíření signálu rychlostí v , platí pro něj vztah

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}},$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Jednoduchým přepočtem podle vztahu $c = \lambda f$ dostaneme pro vlnové délky vztah

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Rychlost v , kterou se Starman vzdaluje od Země, je v porovnání s rychlostí světla c velmi malá (nerelativistická). Můžeme tak využít přiblížení $\sqrt{1+x} \approx 1 + 1/2x$ pro malá x (tj. $x \ll 1$), jedná se o první dva členy Taylorova rozvoje okolo bodu $x = 0$. Po aproximaci dostáváme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{1 + \frac{v}{2c}}{1 - \frac{v}{2c}}.$$

Použijeme-li ještě aproximaci $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$, kterou jsme již jednou použili výše, dostaneme

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} \approx \left(1 + \frac{v}{2c}\right)^2 \approx 1 + \frac{v}{c}.$$

Relativní rozdíl vlnových délek je pak

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \approx \frac{v}{c}. \quad (5)$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme, že rozdíl vlnových délek způsobený elektromagnetickým Dopplerovým jevem je přibližně $10^{-5}\lambda_0$. Z vypočtených hodnot můžeme usoudit, že vliv Dopplerova jevu je v našem problému asi o 4 řády větší než vliv gravitačního pole Země.

Obecně relativistický přístup ke gravitačnímu posuvu vlnové délky

Jedním ze základních principů, na nichž je vybudovaná obecná teorie relativity, je princip ekvivalence. Názorně je tento princip představen v myšlenkovém experimentu s tzv. Einsteinovým výtahem. Podle principu ekvivalence nemůže osoba nacházející se v uzavřeném výtahu žádným experimentem zjistit, zda se výtah nachází v homogenním gravitačním poli, anebo zrychluje s konstantním zrychlením. V prvním případě na osobu působí gravitační síla a v druhém případě setrvačná síla. Jedná se tedy o princip ekvivalence gravitační a setrvačné hmotnosti.

Pro úplnost dodejme, že druhým krajním případem je situace, kdy není schopna osoba uvnitř uzavřeného výtahu rozlišit, zda se nachází ve volně padajícím výtahu v homogenním gravitačním poli, anebo jako volný objekt ve vakuu.

Einsteinovým výtahem vyřešíme i naši úlohu. Foton v gravitačním poli umístíme do myšleného Einsteinova výtahu o malé výšce Δh (jedná se o klidovou výšku), který se vzhledem k Zemi nepohybuje. Foton poletí od podlahy ke stropu. U podlahy má vlnovou délku λ_p a u stropu λ_s . Vlivem gravitačního pole bude vlnová délka λ_s větší než λ_p . Kvantitativní výsledek tohoto experimentu neznáme. Víme však, že bude stejný jako v druhé situaci. V té se výtah nachází ve vakuu a zrychluje se zrychlením \mathbf{a} , které má stejnou velikost a opačnou orientaci jako intenzita gravitačního pole \mathbf{K} v první situaci.

Na obě situace budeme nahlížet z pohledu pozorovatele uvnitř výtahu. Z první situace víme, že doba letu fotonu výtahem je rovna

$$\Delta t = \frac{\Delta h}{c}.$$

Vzhledem k tomu, že se nacházíme v relativitě, upřesňujeme, že se jedná o čas, který by naměřil onen pozorovatel ve výtahu. Ten samý čas naměří v druhé situaci. V druhé situaci však za tento čas zrychlí výtah o rychlost

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{a\Delta h}{c}.$$

To znamená, že rozdíl rychlosti při vyzáření fotonu u podlahy výtahu, kde měl vlnovou délku λ_p , a při detekci fotonu u stropu výtahu, kde měl vlnovou délku λ_s , je právě Δv . Osoba ve výtahu v této situaci by tedy spočítala změnu vlnové délky fotonu podle elektromagnetického Dopplerova jevu, který už umíme popsat kvantitativně.

Využijeme už dříve získané aproximace, tj. rovnice (5), podle které v našem případě platí

$$\frac{\lambda_s - \lambda_p}{\lambda_p} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_p} \approx \frac{\Delta v}{c} = \frac{a\Delta h}{c^2}.$$

Vzhledem k tomu, že v našem problému se Starmanem se foton pohybuje v nehomogenním gravitačním poli, musíme přejít k infinitezimálním změnám,

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{Kdh}{c^2}.$$

Zde píšeme už rovnost, neboť při přechodu k infinitezimálním přírůstkům všechny členy, které jsme zanedbali, vymizí. Zároveň jsme za zrychlení dosadili velikost intenzity gravitačního pole \mathbf{K} , pro kterou platí

$$K = \frac{GM}{r^2}.$$

Dosazením dostaneme rovnici

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{c^2 r^2} dr.$$

Zde je infinitezimální přírůstek vzdálenosti $dh = dr$. Integrovaním levé a pravé strany poslední rovnice dostaneme

$$\ln \frac{\lambda}{\lambda_0} = -\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Nyní použijeme aproximace $\ln x \approx x - 1$ v okolí bodu $x = 1$. Víme totiž, že vlnová délka se příliš nezmění. Dostáváme tedy

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \approx \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right).$$

To je stejný výsledek jako v případě klasického přístupu (rovnice (4)). Uvědomme si však, že v případě klasického přístupu jsme postupovali spíše tak, že jsme jen použili několik, na první pohled vhodných, známých vzorečků. Použití některých vzorečků jsme ani pořádně neodůvodnili, což ale nelze, protože gravitační posuv vlnové délky je čistě obecně relativistický jev. Správný postup řešení příkladu je tedy pouze skrze obecnou teorii relativity. V případě, že bychom chtěli uvažovat jak gravitační posuv vlnové délky, tak elektromagnetický Dopplerův jev zároveň, se už bez nástrojů obecné teorie relativity neobejdeme.

Úloha I.P . . . ničitel planet

Jak velká by mohla být co nejmenší a nejlehčí zbraň, která by dokázala zničit planetu? Samozřejmě ještě v rozumném čase v rámci lidského života a čím rychleji, tím lépe.

V této úloze je naším úkolem zamyslet se nad tím, jak zničit planetu. Pod pojmem planeta budeme chápat těleso obíhající kolem nějaké hvězdy, které je dostatečně hmotné na to, aby mělo přibližně kulový tvar a které své okolí vyčistilo od ostatních menších těles. Mírně tak rozšíříme současnou definici⁴, abychom se nemuseli omezovat jen na naši Sluneční soustavu. Nyní se musíme zamyslet nad tím, jakým způsobem můžeme takovou planetu zničit. Můžeme ji například

- rozmetat na kousíčky (nebo aspoň na několik kusů),
- stlačit do tak malého objemu, že se z ní stane černá díra,
- vypařit nebo jinak přeměnit většinu její hmoty,
- navést na kolizní dráhu s hvězdou, kolem které obíhá, nebo s jinou planetou.

Někdo by za zničení planety mohl požadovat stav, kdy je na ní vyhuben veškerý život nebo kdy se stane pro život neobyvatelnou. Kvůli všemožným bakteriím a virům je však toto kritérium velmi vágní – některý život dokáže přežít dokonce i ve volném vesmíru, někdy se pro změnu nedokážeme shodnout na tom, co ještě život je a co už není.

Nyní se podíváme na jednotlivé způsoby zničení planety a navrheme a prověříme zbraň, které bychom k tomu mohli použít.

Rozmetání na kousíčky

Snad jako první nás napadne umístit doprostřed planety nějakou bombu. Jak silná exploze by to musela být? Spočítáme energii potřebnou k tomu, abychom rozmetali planetu na kousíčky, které spolu gravitačně neinteragují. Určitě je to více energie než potřebujeme, čili tím dostaneme alespoň horní odhad.

Hmotnost planety označme M , její poloměr bude R . Předpokládejme konstantní hustotu ρ , neboli pro celkovou hmotnost m nacházející se pod poloměrem r platí

$$\frac{m}{r^3} = \frac{M}{R^3} = \frac{4}{3}\pi\rho.$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/IAU_definition_of_planet

Nyní odstraníme „slupku“ s poloměrem dr ve vzdálenosti r od středu. Její hmotnost bude $dm = \rho dV$, kde pro její objem platí $dV = 4\pi r^2 dr$. Gravitační potenciál od zbytku planety je přitom

$$V(r) = -\frac{Gm}{r} = -\frac{4}{3}\pi Gr^2 \rho.$$

Na odstranění slupky tak musíme dodat energii

$$dE = -V(r)dm = \frac{16}{3}\pi^2 Gr^4 \rho^2 dr.$$

Celkovou dodanou energii spočítáme integrálem přes jednotlivé slupky

$$E_b = \int_0^R dE = \frac{16}{3}\pi^2 G \rho^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Tím jsme získali energii potřebnou na zničení planety touto cestou. Samozřejmě jsme zanedbávali gravitační působení ostatních těles.

Pro planetu Zemi by rozmetání vyžadovalo $E_Z \doteq 2 \cdot 10^{32}$ J. Mohlo by se to provést například šikovně umístěnou bombou ve středu Země. Pro porovnání, nejsilnější dosud vytvořená bomba jménem Tsar⁵ uvolnila energii $E_T \doteq 2 \cdot 10^{17}$ J, přičemž její objem byl $V_T \doteq 30 \text{ m}^3$. Jistě by šlo sestrojít ještě účinnější bombu, nicméně toto je pouze řádový odhad. Objem Země je přibližně $1 \cdot 10^{21} \text{ m}^3$, potřebný objem Tsar bomb by tak byl zhruba $3 \cdot 10^{16} \text{ m}^3$. Nicméně problém je v tom, že veškerá tato energie by se nejspíše nepřeměnila na kinetickou energii zbytků planety, protože nějaká část by se určitě přeměnila na teplo. Navíc, velikost bomby by byla při explozi trochu nepraktická. Nicméně jako řádový odhad to stačí.

Kdybychom netrvali na použití alespoň rámcově představitelných technologií, mohli bychom přemýšlet o bombě vytvořené z antihmoty. Ačkoliv anihilace neproběhne tak rychle, jak bychom mohli myslet díky tomu, že energie vznikající na styčné ploše brání dalšímu kontaktu, za lidský život by se potřebná energie jistě uvolnila. Výrobu antihmoty budeme ještě diskutovat, nyní se zaměříme čistě na její velikost.

Energii antihmoty lze vyjádřit pomocí Einsteinova vzorce jako $E_a = 2m_a c^2$, kde faktor 2 značí, že antihmota při anihilaci využije i energii skrytou ve hmotě, se kterou reaguje. Potřebná hmotnost antihmoty je tedy $m_a = E_a / (2c^2)$.

Jako prvek by bylo nejjednodušší použít vodík. Problém je v tom, že s plynným antivodíkem by se nejspíš trochu špatně manipulovalo, pokud bychom ho neuzavřeli do nějaké pevné nádoby (samozřejmě také z antihmoty). Navíc, se samotnými antiprotony bychom si nevystačili, protože ve stlačování by nám zabránila elektrická síla. Mohli bychom vodík zchladit na nějakých 14 K, kdy přejde do pevného skupenství, jenže i to je trochu nepraktické. Druhou možností je pak uchovávat antiprotony v elektromagnetické pasti, ovšem tak bychom nejspíše nedokázali dosáhnout dostatečné hustoty a výsledná bomba by byla příliš velká.

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Tsar_Bomba

Předpokládejme tedy, že by se nám podařilo vytvořit nějaký jednoduchý a za běžných podmínek pevný kov, například lithium. Jeho hustota je $\rho_{\text{Li}} \approx 500 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, čili pro objem zbraně dostáváme

$$V_a = \frac{E_a}{2c^2 \rho_{\text{Li}}}.$$

Pro Zemi to dělá cca $2 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$, což není vůbec málo. Na druhou stranu vychází o čtyři řády menší objem, než u Tsar bomby.

Rozbití na kusy

Tento způsob je vlastně méně důkladné rozmetání na kousičky – spokojíme se s tím, že planetu rozbijeme na několik kusů, které výbuchem odmrštíme alespoň o nějakou malou vzdálenost od sebe. Je zřejmé, že k tomu bude stačit méně energie než v předchozím případě. Otázkou ale je, kolik přesně. Mohli bychom například uvažovat rozmetání nějaké části planety, pak bychom potřebovali jen nějaké procento energie výše.

Považujeme za rozumný kompromis scénář, ve kterém rozptýlíme zbytky planety rovnoměrně do oblasti tvaru koule s poloměrem $2R$. Energií potřebnou na takovýto čin lze spočítat pomocí výsledného vzorce z předchozího případu. Představme si, že spotřebujeme energii

$$E(R) = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

na to, abychom kousky planety poslali do nekonečna. Potom je necháme spadnout zpět tak, že zformují soustavu trosek s poloměrem $2R$. Tím získáme zpět energii $E(2R)$. Celková energie tak vychází

$$E = E(R) - E(2R) = \frac{3}{4} E(R) = \frac{3}{4} \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

Takto složitým způsobem planetu samozřejmě ničit nebudeme, pouze jsme pomocí něj snadno spočítali potřebnou energii z dříve spočítaného případu. Vidíme, že potřebnou energii jsme zmenšili pouze o čtvrtinu. Nevíme přesně, do jak moc velké oblasti musíme planetu rozptýlit, abychom ji mohli považovat za zničenou, nicméně je rozumné očekávat, že to bude něco mezi dvojnásobkem jejího poloměru a nekonečnem, což ale energeticky vychází téměř stejně. Z toho vyplývá, že jako řádový odhad energie lze použít $E(R)$.

Stlačení do černé díry

Stlačení planety do černé díry je určitě náročný úkol, neboť nám v tom brání elektrická síla a jaderné síly, které jsou mnohem silnější než gravitační, která naopak stlačování pomáhá. Mohli bychom ale na planetu vypustit černou díru, která by ji pohltila.

Schwarzschildův poloměr černé díry o hmotnosti m je

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2}.$$

Pro typickou planetu je tato hodnota docela malá, řádově centimetry. Intuice napovídá, že černá díra vytvořená z většího tělesa, třeba ze Slunce, by planetu pohltila spolehlivěji. Taková díra by měla poloměr řádově jednotky kilometrů, takže by se jednalo o celkem efektivní zbraň z hlediska velikosti.

Jak by ale přesně černá díra působila na planetu, kdyby se dostala například do jejího středu? Díky své velké hmotnosti by do sebe začala vtahovat hmotu z planety, která by se díky tomu stlačovala a zahřívala, následkem čehož by padající hmota velmi silně vyzařovala. V rozporu s naší intuicí by tak černá díra část planety pohltila, nicméně zbytek planety by v důsledku vznikajícího záření explodoval. Díky zákonu zachování momentu hybnosti by navíc hmota padající do černé díry začala neuvěřitelně rotovat.

Je těžké podat výpočty podložený odhad, jakou velikost černé díry bychom potřebovali, neboť procesů, které se při ničení planety odehrávají, je hodně. Navíc vyžadují znalost obecné relativity a obratné řešení diferenciálních rovnic. Odhadněme tedy, že ke zničení planety by stačila černá díra o hmotnosti planety samotné, tedy (v případě Země) se Schwarzschildovým poloměrem v řádu centimetrů.

Zdá se tedy, že jsme narazili na relativně prostorově efektivní způsob, byť je k němu potřeba sehnat a na Zem dopravit těžkou černou díru, což je těžké provést.

Přeměna planety

Pokud bychom nějakým způsobem měnili chemické složení planety, pořád by se jednalo o planetu, takže bychom ji nezničili. Musíme tedy planetu anihilovat kompletně. K anihilaci bychom přitom mohli využít antihmotu. Předpokládejme, že antihmotu můžeme nějakým způsobem vytvořit, přičemž k získání množství o hmotnosti m potřebujeme energii $E_a = mc^2$. Antihmota při kontaktu s hmotou anihiluje a uvolní jak svou energii, tak energii hmoty. Tím dostaneme energii $2E_a$. Můžeme tak vytvořit stroj, který generuje antihmotu, nechává ji anihilovat s hmotou a ze získané energie vytváří ještě více antihmoty.

Představme si, že takový stroj máme. Nechť generuje hmotnostní tok antihmoty q . Stroj ale vyrábí tolik antihmoty, na kolik energie má k dispozici, takže tento tok se časem mění podle toho, kolik hmoty již bylo anihilováno. Tento fakt můžeme zapsat pomocí rovnice $q(t + T) = 2\eta q(t)$, kde η je účinnost celého procesu a T je součet času, za který proběhne anihilace, a času, za který se ze získané energie vytvoří nová antihmota.

Řešením této rovnice je například funkce

$$q(t) = q_0 (2\eta)^{\frac{t}{T}} = q_0 e^{\frac{t}{T} \ln 2\eta},$$

kde q_0 je nějaký počáteční tok. Nyní můžeme tok q zintegrovat podle času, čímž dostaneme celkovou hmotnost vytvořené antihmoty

$$m_a = \int_0^T q dt = \frac{q_0 T}{\ln 2\eta} (e^{\frac{T}{T} \ln 2\eta} - 1).$$

Anihilace planety s hmotností M bude úspěšně dokončena ve chvíli, kdy bude platit $m_a = M$, tedy v čase

$$\tau = \frac{T}{\ln 2\eta} \ln \left(\frac{M \ln 2\eta}{q_0 T} + 1 \right).$$

Závislost $M(\tau)$ potom bude exponenciální. Z toho plyne, že pokud budeme mít k dispozici zařízení, které dokáže relativně konsistentně z energie tvořit antihmotu a vzniklou antihmotu anihilovat, tak dokážeme planetu zničit extrémně rychle. Není se ale čemu divit, neboť přístroj, který by efektivně zužitkoval jakékoliv množství energie na tvorbu antihmoty není ani zdaleka v dnešních technologických možnostech, lze-li jej vůbec sestrojít. Pro srovnání: doposud lidstvo vytvořilo jen pár nanogramů antihmoty⁶.

Továrna na antihmotu v CERNu⁷ má kupříkladu poloměr 30 m, průřez odhadujeme na 1 m^2 , tedy má objem V_a řádově desítky metrů krychlových. Jestliže se CERNu podařilo vyrobit $\mu = 1 \text{ ng}$ za řádově $t = 10$ let provozu a my chceme vyprodukovat antihmotu o hmotnosti Země, tak bychom potřebovali celkový objem urychlovačů na zničení planety za $\tau = 100$ let

$$V_1 = \frac{M_Z}{\mu} \frac{t}{\tau} V_a \approx 10^{35} \text{ m}^3,$$

což je tak o čtrnáct řádů více než její objem. Všechny v současnosti známé reakce navíc vytváří stejně antihmoty, jako hmoty, čili by se nedaly použít k výrobě energie. Celá předchozí úvaha tak stojí na tom, že bychom objevili proces, který by produkoval více antihmoty než hmoty. Na druhou stranu, současné poznatky existenci takového procesu nevylučují.

Pokud bychom nechtěli vytvořit antihmotu o objemu planety, ale spokojili bychom se s energií planet-ničící bomby vypočítané v předcházející sekci, potřebovali bychom k tomu hmotnost

$$m_a = \frac{E}{2c^2} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{Rc^2}.$$

Stačila by přitom polovina energie, neboť při anihilaci dodá druhou polovinu energie hmota. Tomu odpovídá objem

$$V_2 = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{Rc^2\mu} \frac{t}{\tau} V_a,$$

kde M je hmotnost planety a R její poloměr. Pro Zemi vychází $V_2 \approx 10^{25} \text{ m}^3$, což je stále o tři řády více než její objem.

⁶<https://tinyurl.com/ybufrj61>

⁷<https://home.cern/science/accelerators/antiproton-decelerator>

Pád do Slunce

Aby planeta spadla do Slunce, nemůžeme ji jen postrčit, neboť by akorát zaujala jinou oběžnou dráhu. Musíme zastavit její obíhání, a pak se treffi. Samozřejmě nemusíme zastavit oběh úplně, nicméně počítat, jakou maximální oběžnou rychlost planetě můžeme nechat, je komplikované; nám jde stejně pouze o řádový odhad.

Spočítejme si, jak rychle by pád probíhal, kdybychom planetu zastavili najednou. Pohybovala by se po velmi protáhnuté elipse s přísluním v Slunci, a tedy s hlavní poloosou $a' = \frac{1}{2}a$, kde a je původní poloosa orbity planety. Z třetího Keplerova zákona dostáváme řešení jako polovinu oběžné doby

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a'^3}{GM}}.$$

Pro Zemi dostáváme $T = 65$ dní, tedy pád probíhá velmi rychle.

Nyní se zamyslíme nad tím, jakým způsobem můžeme planetu do Slunce shodit. Výhodné je planetu zpomalovat postupně, neboť větší čas působení může znamenat menší zařízení. Mohli bychom třeba na planetu umístit nějaký kanón, který by proti směru rychlosti střílel hmotu, čímž by obíhání zpomaloval. Čelíme problému otáčení planety. Ten by se ale dal vyřešit tím, že bychom umístili symetricky dvě otočné zbraně na oba póly. Kanóny by tak musely vystřelit dohromady hmotu o hybnosti planety $p = mv$.

Pro výpočet rychlosti v použijeme Newtonův první zákon aplikovaný na gravitační a (myšlenou) odstředivou sílu

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{R} &= G \frac{mM}{R^2}, \\ v^2 &= G \frac{M}{R}, \\ v &= \sqrt{G \frac{M}{R}}. \end{aligned}$$

Potřebná hybnost je

$$p = m \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Zbývá vyřešit, jakým způsobem by kanón střílel. Mohli bychom například použít laser. Dnešní nejsilnější lasery mají špičkový výkon⁸ $W_1 = 1$ PW, budeme optimisticky počítat s tím, že to je stálý výkon. Za čas τ vydá laser energii $E_1 = W_1\tau$. Víme dále, že pro fotony platí $p = h/\lambda$, $E = hc/\lambda$, tedy celkově dostáváme

$$p_1 = \frac{E_1}{c} = \frac{W_1\tau}{c}.$$

Když za τ dosadíme 100 let jako dobu lidského života, dostaneme při výkonu dnešního nejsilnějšího laseru hybnost $p_1 \approx 10^{16}$ kg·m·s⁻¹. Oproti tomu hybnost např.

⁸<https://tinyurl.com/ybpxu5p>

Země činí $p_Z \approx 10^{26} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Laser tedy zřejmě nemá dost velkou hybnost na to, aby zastavil rotaci Země, stejně to bude platit i pro jiné planety.

Nabízí se kanón, který by střílel hmotu. Nicméně Saturn 5, jedna z největších raket, kterou lidstvo vypustilo,⁹ má tah motorů prvního stupně $F = 35 \text{ MN}$, což dělá dohromady za $t = 100 \text{ let}$ hybnost $p = Ft \approx 1,1 \cdot 10^{17} \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, což je o 9 řádů nižší, než potřebujeme. I střílení hmoty se tedy zdá neproveditelné.

Srovnání

Zmínili jsme čtyři možné způsoby zničení planety: explozi, pohlčení černou dírou, anihilaci a shození do Slunce. Z těchto způsobů nejmenší zbraň potřebovalo zničení planety pomocí černé díry, pokud pomineme nutnost dopravy nebo tvorby černé díry. S našimi předpoklady se bomba ukázala jako energeticky nejefektivnější, byť anihilace by mohla být ještě lepší, pokud bychom dokázali antihmotu vyrábět dostatečně rychle. Shození planety do Slunce se ukázalo jako neproveditelné.

Ničení planety je tedy značně nepraktická záležitost, nicméně je pozitivní, že můžeme dosáhnout úplného zničení přístrojem menším, než je planeta samotná. Závěrem, pokud vás žádný z výše zmíněných způsobů neoslovil, nezbyvá než doporučit, abyste zkusili použít vlastní.

Úloha II.1 . . . rychlovýtah

Říká se, že lidé ve výtahu bez větších problémů snesou zrychlení $a = 2,50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Také bychom chtěli dorazit do plánovaného patra co nejdříve. Pokud by se výtah čtvrtinu doby jízdy rozjížděl s tímto zrychlením, polovinu doby jel konstantní rychlostí a zbývající čtvrtinu doby zpomaloval, jak vysoko by dokázal vyjet za celkovou dobu jízdy $t = 1,00 \text{ min}$?

Za čtvrtinu doby $t_1 = t/4 = 15 \text{ s}$, po kterou zrychluje, urazí dráhu h_1 , která je stejná, jako dráha h_3 během zpomalování.

$$h_1 = h_3 = \frac{1}{2}at_1^2 \doteq 281 \text{ m}$$

Za tu dobu zrychlí na rychlost $v = at_1 = 37,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Při rovnoměrném pohybu urazí

$$h_2 = vt_2 = at_1t_2 \doteq 1\,130 \text{ m}.$$

Celková výška je $h = 2h_1 + h_2 = \frac{3}{16}at^2 \doteq 1\,690 \text{ m}$. Takže takový hypotetický výtah by dokázal za minutu vyjet do dvojnásobné výšky nejvyšší budovy světa Burdž Chalífa. Nicméně takto rychle výtahy nejezdí – maximální rychlost¹⁰ mají výtahy kolem $16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

⁹https://cs.wikipedia.org/wiki/Saturn_V

¹⁰<https://www.elevatorworld.com/the-maximum-speed-of-elevators/?cn-reloaded=1>

Úloha II.2 . . . slabý naviják

Uvažujme pevně zavěšenou kladku, na níž je umístěno lano zanedbatelné hmotnosti. Na jednom konci lana je upevněno závaží o hmotnosti m_1 a na druhém konci se ve stejné úrovni nachází naviják o hmotnosti m_2 . V prvním případě je naviják ukotven na zemi a při navíjení lana se zvedá pouze závaží. V druhém případě je závaží pevně spojeno s navijákem tak, že při navíjení se zvedají společně závaží i naviják. Určete, ve kterém případě bude zapotřebí menší síly pro zdvihnutí závaží (a tudíž slabšího navijáku).

Úlohu budeme řešit srovnáním vykonané práce a přírůstku potenciální energie. V prvním případě při navinutí lana délky Δl silou F_1 vykonáme práci

$$W_1 = F_1 \Delta l.$$

Tím vytáhneme závaží o výšku Δl , čímž se zvýší jeho potenciální energie o přírůstek

$$\Delta E_p = m_1 g \Delta l,$$

kde g je místní tíhové zrychlení. Ze zákona zachování energie ve tvaru $W_1 = \Delta E_p$ dostáváme pro velikost potřebné síly vztah

$$F_1 = m_1 g. \quad (6)$$

To je očekávaný výsledek.

Ve druhém případě navíjením lana zkracujeme úsek lana na obou koncích kladky, a to stejnou měrou. Navinutím lana délky Δl zkrátíme úsek lana na obou koncích kladky o délku $\Delta l/2$, tedy i závaží a naviják zdvihneme o výšku $\Delta l/2$. Přírůstek celkové potenciální energie je v tomto případě

$$\Delta E_p = (m_1 + m_2) g \frac{\Delta l}{2}.$$

Přírůstek ΔE_p je roven práci $W_2 = F_2 \Delta l$ vykonané navijákem, odtud dostáváme rovnost

$$F_2 \Delta l = (m_1 + m_2) g \frac{\Delta l}{2}.$$

Vydělením rovnice délkou Δl dostáváme vztah pro velikost potřebné síly navijáku,

$$F_2 = \frac{(m_1 + m_2) g}{2}. \quad (7)$$

Srovnáním rovnic (6) a (7) vidíme, že menší síly bude zapotřebí v prvním případě pro naviják těžší než závaží ($m_2 > m_1$) a v druhém případě pro naviják lehčí než závaží ($m_2 < m_1$).

Úloha II.3 . . . Dančina (ne)rovnovážná destička

Destička tloušťky $t = 1,0$ mm se šírkou $d = 2,0$ cm se skladá ze dvoch častí. První část o hustotě $\rho_1 = 0,20 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ má dĺžku $l_1 = 10$ cm, druhá časť o hustote $\rho_2 = 2,2 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ má dĺžku $l_2 = 5,0$ cm. Desku položíme na hladinu vody s hustotou $\rho_v = 1,00 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a počkáme, až sa ustálí v rovnovážnej poloze. Jaký úhel bude svírat rovina desky s hladinou vody? Jaká část destičky zůstane třet nad hladinou?

Na doštičku sa môžeme pozerat' z boku ako na 2D problém. Aby sa ustálila v rovnovážnej polohe, tak pre ňu musia platiť dve podmienky

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{o},$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i = \mathbf{o}.$$

Uvažovaná doska má dve časti – časť s hustotou $\rho_2 > \rho_v$ a časť s menšou hustotou $\rho_1 < \rho_v$. Tú si môžeme rozdeliť ešte na časť ponorenú vo vode l_{1v} a časť nad hladinou vody l_{1n} , pričom $l_1 = l_{1v} + l_{1n}$. Ponorené časti dosky l_2, l_{1v} sú vo vode nadľahčované vztlakovou silou

$$F_{vz} = (V_2 + V_{1v}) \rho_v g = (l_2 + l_{1v}) S \rho_v g,$$

kde $S = td$. Súčasne na ne pôsobí aj tiažová sila

$$F_{gv} = (l_2 \rho_2 + l_{1v} \rho_1) S g.$$

Celkovo dostávame silu

$$F_v = F_{gv} - F_{vz} = (l_2 (\rho_2 - \rho_v) + l_{1v} (\rho_1 - \rho_v)) S g.$$

Nad hladinou vody nepôsobí na dosku vztlaková sila, teda výsledná sila na neponorenú časť je tvorená iba tiažovou silou

$$F_n = F_{gn} = l_{1n} \rho_1 S g.$$

Z našich predpokladov pre rovnovážnu polohu vyplýva, že výsledná sila pôsobiaca na teleso musí byť nulová, teda

$$F_v + F_n = 0.$$

Odtiaľ dostávame podmienku, kedy bude výsledná sila pôsobiaca na teleso rovná nule

$$l_{1n} \rho_1 + l_2 (\rho_2 - \rho_v) + l_{1v} (\rho_1 - \rho_v) = 0.$$

Nakoniec zistíme dĺžku časti dosky, ktorá je pod hladinou vody. Za l_{1n} dosadíme $l_1 - l_{1v}$ a dostávame

$$l_{1v} + l_2 = \frac{l_1 \rho_1 + l_2 \rho_2}{\rho_v}.$$

Výsledná část dosky, která vytřčá nad hladinu, má délku

$$l_{1n} = l_1 - l_{1v} = \frac{l_1(\rho_v - \rho_1) + l_2(\rho_v - \rho_2)}{\rho_v} = 2,0 \text{ cm}. \quad (8)$$

Aby těleso bylo v rovnovážnej polohe, je potřebné, aby výsledný moment síl

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \\ M &= rF \cos \alpha, \end{aligned}$$

spôsobujúci otáčanie telesa, bol nulový. Za bod otáčania volíme miesto, kde doska vytřčá z hladiny. Pre časti našej dosky získame ramená r_2 , r_{1v} a r_{1n} ako

$$\begin{aligned} r_2 &= l_{1v} + \frac{l_2}{2}, \\ r_{1v} &= \frac{l_{1v}}{2}, \\ r_{1n} &= \frac{l_{1n}}{2}. \end{aligned}$$

Výsledný moment sily je potom

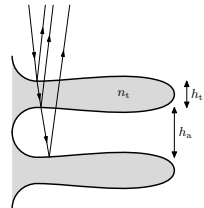
$$M = (r_2 l_2 (\rho_2 - \rho_v) + r_{1v} l_{1v} (\rho_1 - \rho_v) - r_{1n} l_{1n}) Sg \cos \alpha,$$

kde α je uhol medzi rovinou dosky a rovinou hladiny. Nech má výraz v zátvorke akúkoľvek hodnotu, pre splnenie podmienky $M = 0$ stačí, aby platilo $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Túto časť úlohy však možno riešiť aj úvahou. Doštička se bude vždy snažiť dostať do takej pozície, v ktorej bude mať najmenšiu energiu, teda kde bude jej ťažisko najnižšie. Pretože $l_{1n} = 2,0 \text{ cm}$, je jasné, že ťažisko bude pod hladinou – potom bude najnižšie vtedy, keď bude doštička kolmá na hladinu.

Ak by bol výraz v zátvorke nulový, nezáležalo by na uhle naklonenia. To by znamenalo, že ťažisko dosky by bolo presne na hladine. Nakoniec, ak by ťažisko vychádzalo vyššie než hladina, doštička by sa prevrátila tak, aby bola rovnobežne s hladinou. Mohlo by sa zdať, že aj v tom prípade by bolo legálne riešenie $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ale nie je to tak. Moment síl by v tej chvíli síce bol nulový, ale daná poloha by nebola stabilná. Tiež by sme už nemohli zanedbávať hrúbku dosky t , čím by sa situácia značne skomplikovala.

Úloha II.4 ... motýli

Duhové modrozelené zbarvení povrchu křídel motýlů z rodu *Morpho* je důsledkem konstruktivní interference světla odraženého na tenkých terasovitě uspořádaných stupních průsvitných kutikul (buněčných blan na povrchu křídel). Stupně mají index lomu $n_t = 1,53$ a tloušťku $h_t = 63,5 \text{ nm}$ a jsou odděleny mezerou vzduchu tloušťky $h_a = 120,3 \text{ nm}$, viz obrázek. Světlo na ně dopadá kolmo. Pro jaké vlnové délky viditelného světla vzniká při odrazu interferenční maximum?



Aby došlo ku konštruktívnej interferencii, jednotlivé lúče musia mať fázový rozdiel $\Delta\Phi = 2k\pi$, kde k je celé číslo. Fázy určíme z optických dráh jednotlivých lúčov.

Pre prvý lúč, ktorý sa odráža od prvého rozhrania, platí $\Phi_1 = \Phi_0 - \pi$, kde Φ_0 je fáza žiarenia pri dopade na prvé rozhranie. Keďže ide o odraz od opticky hustejšieho prostredia sa navyše zmenila fáza na opačnú.

Druhý lúč sa odráža od druhého rozhrania, prekoná optickú dráhu $s_2 = 2n_t h_t$, pri odraze na rozhraní k zmene fázy nedochádza. Celkovo je teda fáza po odraze a opätovnom prechode prvým rozhraním

$$\Phi_2 = \Phi_0 + 2\pi \frac{2n_t h_t}{\lambda}.$$

Tretí lúč sa odráža od tretieho rozhrania a prekoná optickú dráhu $s_3 = 2(n_t h_t + n_a h_a)$, kde $n_a = 1$ je index lomu vzduchu. Pri odraze dochádza k zmene fázy, po opätovnom prechode prvým rozhraní má tento lúč fázu

$$\Phi_3 = \Phi_0 + 4\pi \frac{n_t h_t + n_a h_a}{\lambda} - \pi.$$

Pre fázové rozdiely dvojíc lúčov dostávame

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_{2,1} &= 4\pi \frac{n_t h_t}{\lambda} + \pi = 2k\pi & \lambda_{2,1} &= \frac{4}{2k-1} n_t h_t, \\ \Delta\Phi_{3,1} &= 4\pi \frac{n_t h_t + n_a h_a}{\lambda} = 2k\pi & \lambda_{3,1} &= \frac{2}{k} (n_t h_t + n_a h_a), \\ \Delta\Phi_{3,2} &= 4\pi \frac{n_a h_a}{\lambda} - \pi = 2k\pi & \lambda_{3,2} &= \frac{4}{2k+1} n_a h_a. \end{aligned}$$

Zostáva nám dosadiť číselné hodnoty. Môžeme si všimnúť, že so zvyšujúcim k sa vlnová dĺžka svetla znižuje. S vlnovou dĺžkou väčšou ako $\lambda = 380$ nm dostávame len prvé maximá vo všetkých troch prípadoch s vlnovými dĺžkami¹¹

- $\lambda_{2,1} = 389$ nm, čo je fialové svetlo na hranici viditeľnosti ľudským okom,
- $\lambda_{3,1} = 435$ nm, čo je fialovo-modré svetlo,
- $\lambda_{3,2} = 481$ nm, čo je modro-tyrkysové svetlo.

Ďalšie interferenčné maximá by sme mohli hľadať pre viacnásobné odrazy, teda v prípade, keď sa lúče odrazia aspoň raz smerom nadol. Tieto maximá však budú málo výrazné, keďže k ich vzniku potrebujeme aspoň trojnásobný odraz, pričom každým odrazom sa stráca časť intenzity svetla.

¹¹V treťom prípade by sme mohli hovoriť o nultom maxime, keďže preň $k = 0$.

Úloha II.5 . . . kolečko s pružinkou

Máme tenký dokonale tuhý homogenní disk o poloměru R a hmotnosti m , ke kterému je připojena gumička. Jedním koncem je upevněná ve vzdálenosti $2R$ od okraje disku a druhým koncem na jeho okraji. Gumička funguje jako dokonalá tenká pružina o tuhosti k , klidové délce $2R$ a zanedbatelné hmotnosti. Disk je upevněný ve svém středu tak, že se může v jedné rovině volně otáčet kolem tohoto bodu, ale nemůže se posouvat či měnit rotační rovinu. Určete závislost velikosti momentu síly, kterou bude gumička urychlovat či zpomalovat rotaci disku v závislosti na úhlové výchylce φ , a sestavte pohybovou rovnici disku.

Bonus Určete periodu malých kmitů soustavy.

Zvolme počátek soustavy souřadné ve středu disku tak, aby souřadnice bodu upevnění gumičky k disku byla

$$\begin{aligned}x &= R \sin \varphi, \\y &= R \cos \varphi.\end{aligned}$$

Délku gumičky potom určíme jako

$$\begin{aligned}l &= \sqrt{x^2 + (3R - y)^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + 9R^2 - 6R^2 \cos \varphi + R^2 \cos^2 \varphi} = \\&= \sqrt{10 - 6 \cos \varphi} R.\end{aligned}$$

Obecně pro velikost síly, kterou gumička působí na bod upevnění, platí

$$F = k \Delta l,$$

kde Δl je prodloužení gumičky, neboli $\Delta l = l - l_0 = l - 2R$. V našem případě je tato vzdálenost vždy nezáporná, čili velikost síly bude kladná.

Velikost momentu síly M , který roztáčí disk, je součinem síly a kolmé vzdálenosti síly \mathbf{F} od středu, kterou označíme r . Uvažujme trojúhelník, jehož vrcholy jsou body upevnění gumičky a střed disku. Úhel u vrcholu daného bodem upevnění gumičky mimo disk označme α , potom platí

$$r = 3R \sin \alpha.$$

Ze sinové věty vyplývá

$$\sin \alpha = \frac{R}{l} \sin \varphi,$$

takže pro r dostáváme

$$r = 3R \frac{\sin \varphi}{\sqrt{10 - 6 \cos \varphi}}.$$

Velikost momentu síly bude

$$M = Fr = 3kR^2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{10 - 6 \cos \varphi}} \right) \sin \varphi.$$

Posledním úkolem bylo sestavit pohybovou rovnici. Pro rotační pohyb platí $J\varepsilon = M$, kde ε je úhlové zrychlení, neboli $\ddot{\varphi}$. Celkově pak dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} &= 3kR^2\left(\frac{2}{\sqrt{10-6\cos\varphi}}-1\right)\sin\varphi, \\ \ddot{\varphi} &= \frac{6k}{m}\left(\frac{2}{\sqrt{10-6\cos\varphi}}-1\right)\sin\varphi.\end{aligned}$$

Z rovnice vidíme, že úhlové zrychlení nezávisí na poloměru disku, pokud je disk homogenní, ale na jeho hmotnosti a na tuhosti gumičky. Rovnici bychom mohli dále řešit, ale obecně analytické řešení zapsané pomocí konečného počtu základních funkcí téměř jistě neexistuje. Řešit bychom museli numericky pro konkrétní případ zvolených počátečních podmínek.

Bonus

Dalo by se vyjít z pohybové rovnice, ale použijeme jiný postup. Začneme s tím, že určíme potenciální energii pružnosti

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}kR^2\left(\sqrt{10-6\cos\varphi}-2\right)^2.$$

Provedeme Taylorův rozvoj potenciální energie pro $\varphi_0 = 0$ a to až do 4. řádu, protože první tři členy vychází nulové. To ukazuje, že okolí rovnovážné polohy je docela metastabilní, protože obvykle pro kmitání dostáváme nenulový člen už ve druhém řádu. Pro malé kmity stačí aproximovat potenciální energii pouze prvním nenulovým členem

$$E_p \approx \frac{9}{32}kR^2\varphi^4.$$

Periodu kmitů určíme pomocí zákona zachování celkové mechanické energie

$$E_p + E_k = \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{32}kR^2\varphi^4 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 = \frac{9}{32}kR^2\varphi_m^4,$$

kde φ_m je úhel maximální výchylky. Dostáváme diferenciální rovnici

$$9kR^2\varphi^4 + 8mR^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 9kR^2\varphi_m^4,$$

kterou řešíme separací proměnných

$$\sqrt{\frac{8m}{9k}}\int_0^{\varphi_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_m^4-\varphi^4}} = \int_0^{T/4} dt.$$

Úpravou dostáváme

$$T = \frac{4}{\varphi_m^2}\sqrt{\frac{8m}{9k}}\int_0^{\varphi_m}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{\varphi}{\varphi_m}\right)^4}},$$

kde použijeme substituci

$$\begin{aligned}\frac{\varphi}{\varphi_m} &= \sin \psi, \\ d\varphi &= \varphi_m \cos \psi d\psi.\end{aligned}$$

Pro periodu tak platí

$$T = \frac{4}{\varphi_m} \sqrt{\frac{8m}{9k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \sin^2 \psi}}.$$

Integrál nemá analytické řešení, ale to nevadí. Jedná se jen o číselnou konstantu, takže ho můžeme řešit numericky, což vychází

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \sin^2 \psi}} \doteq 1,311.$$

Výsledný vztah pro periodu malých kmitů je

$$T \approx \frac{4,944}{\varphi_m} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Úloha II.P ... Země vzplála

Odhadněte, o kolik by stoupl obsah CO₂ v atmosféře, pokud by shořela veškerá vegetace na zemském povrchu.

Pri procese horenia vzniká z uhlíku a kyslíku oxid uhličitý (budeme uvažovať dokonalé horenie, kedy vzniká iba oxid uhličitý, a nie oxid uhoľnatý). Teda na vznik 1 molu CO₂ potrebujeme 1 mol C a 1 mol molekúl O₂. Aby sme zistili, koľko CO₂ sa spálením vegetácie vytvorí, potrebujeme zistiť, koľko uhlíka sa v nej nachádza. Na to potrebujeme najprv zistiť celkovú hmotnosť vegetácie na Zemi. Keďže chceme získať odhad, predpokladajme, že všetok uhlík nachádzajúci sa vo vegetácii zreaguje s kyslíkom z atmosféry a vytvorí oxid uhličitý.

Vegetácia na Zemi

Najprv sa pokúsime odhadnúť, koľko vegetácie sa nachádza na zemskom povrchu, presnejšie, jej celkovú hmotnosť.

Nízka vegetácia sa nachádza takmer na celom zemskom povrchu. Avšak jej celková hmotnosť na určitej ploche je oveľa menšia ako hmotnosť lesa na rovnakej ploche. Preto budeme v našich odhadoch uvažovať iba lesy a nízku vegetáciu zanedbáme. To je vzhľadom na veľkosť plochy, na ktorej počítame, a nepresnosť nášho odhadu dobré priblíženie.

Lesy na Zemi pokrývajú podľa¹² plochu $S_1 = 39 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$.

¹²<https://cs.wikipedia.org/wiki/Les>

Môžeme však skúsiť urobiť presnejší odhad. Z webovej stránky¹³ si stiahneme dáta, ktoré hovoria o tom, aký podiel α povrchu konkrétnych krajín tvoria lesy. Zo získaného tabuľkového súboru vyberieme dáta pre rok 2015 (najnovšie). Potom si nájdeme rozlohy jednotlivých krajín sveta¹⁴ a vynásobíme ich príslušnými α . Dostaneme tak plochu lesov v jednotlivých krajinách sveta, ktoré môžeme jednoducho sčítať a získať výslednú hodnotu $S_2 = 32 \cdot 10^{12} \text{ m}^2$.

Celkový objem a hmotnosť stromov

Následne potrebujeme odhadnúť výšku týchto lesov. Tá sa prirodzene líši v závislosti na type lesa, klimatických podmienkach, veku stromov a mnohých ďalších faktorov. Podľa¹⁵ odhadneme strednú výšku lesov sveta na $h_s = 25 \text{ m}$.

Použitím stránky¹⁶ môžeme odhadnúť objem stromu na základe jeho výšky, šírky a druhu. Ak zadáme výšku stromu 25 m, priemer $d_1 = 150 \text{ cm}$, postupným nastavovaním rôznych drevín odhadneme priemerný objem takto vysokého stromu na $V_1 = 15 \text{ m}^3$. Ak by sme uvažovali strom s priemerom $d_2 = 180 \text{ cm}$, priemerný objem odhadneme na $V_2 = 20 \text{ m}^3$. Teraz je otázkou, na akej ploche sa rozprestiera takto veľký strom. Musíme brať do úvahy, že lesy majú rôznu hustotu a stromy nie sú vždy tesne pri sebe. Odhadnime teda, že takýto strom bude zaberat zaberat plochu o polomere $r = 5 \text{ m}$ a veľkosti asi $S_0 = 100 \text{ m}^2$ z plochy lesa.

Potrebujeme ešte zistiť hustotu stromov. Tá sa opäť líši pre jednotlivé druhy lesov, aj pre jednotlivé druhy rastlín. Predpokladajme, že hustota materiálu stromov je približne rovná nejakej strednej hustote dreva, ktorú si na základe dát¹⁷ zvolíme ako $\rho_1 = 700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Potom hmotnosť všetkých stromov na Zemi spočítame ako

$$m_s = \frac{S}{S_0} V \rho.$$

Pre odhady plôch S_1 a S_2 dostávame postupne pre odhady objemov stromu V_1 a V_2 hodnoty hmotnosti stromov

$$m_{s11} \doteq 4,1 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$m_{s12} \doteq 5,5 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$m_{s21} \doteq 3,4 \cdot 10^{15} \text{ kg},$$

$$m_{s22} \doteq 4,5 \cdot 10^{15} \text{ kg}.$$

Pre rádoový odhad nám stačí jeden údaj, tak budeme ďalej počítať s hodnotou m_{s11} . Uhlík tvorí¹⁸ približne $\beta \doteq 19,4\%$ živej hmoty. Použitím týchto údajov vieme odhadnúť hmotnosť uhlíka obsiahnutého vo vegetácii $m_{C1} \doteq 8,0 \cdot 10^{14} \text{ kg}$.

¹³<https://ourworldindata.org/forests#forest-cover-by-country>

¹⁴<https://www.worldometers.info/geography/largest-countries-in-the-world/>

¹⁵<https://earthobservatory.nasa.gov/features/ForestCarbon>

¹⁶<https://www.drevari.cz/calc-standing-tree-volume.php#Objem-stojiciho-stromu-Kalkulacka>

¹⁷<https://cs.wikipedia.org/wiki/DC599evo>

¹⁸<https://www.sci.muni.cz/ptacek/Chemie-bar.htm>

Můžeme tiež použiť údaj,¹⁹ podľa ktorého je v rastlinách a živých organizmoch uložených $m_{C_2} = 5 \cdot 10^{14}$ kg uhlíka.

Uvoľnené množstvo oxidu uhličitého

Aby sme spočítali, koľko molov uhlíka sa v stromoch nachádza, potrebujeme vedieť jeho molárnu hmotnosť M_C . Z periodickej tabuľky prvkov²⁰ máme

$$M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1},$$

$$M_O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Zapísali sme si rovno aj molárnu hmotnosť kyslíka, ktorú ešte využijeme pri našich výpočtoch.

Potom počet molov uhlíka, ktoré sa nachádzajú vo všetkých stromoch lesov na Zemi, bude

$$n_C = \frac{m_C}{M_C}.$$

Pre odhadnuté m_{C_1} a nájdené m_{C_2} postupne dostaneme

$$n_{C_1} \doteq 6,7 \cdot 10^{16} \text{ mol},$$

$$n_{C_2} \doteq 4,2 \cdot 10^{16} \text{ mol}.$$

Vidíme, že tento rozdiel nie je vôbec veľký, nám ide o rádový odhad. Zamyslime sa nad možnými zdrojmi chýb vo výpočte n_C . Objemstromu sme v princípe odhadli, ale rádovo bude tento odhad zrejme správny, teda veľký rozdiel to vo výsledku nespôsobí. Podobne, aj hustotu dreva sa odhadli zhruba, ale tam sa nebudeme od skutočnosti pravdepodobne líšiť ani rádovo. Najväčším problémom je určenie plochy, ktorú jeden strom v lese zaberá.

Ďalšou otázkou je, či sa v atmosfére nachádza dostatok molekúl kyslíka na to, aby sa všetky atómy uhlíka spotrebovali na tvorbu CO_2 . Hmotnosť zemskej atmosféry je²¹ $m_a = 5 \cdot 10^{18}$ kg (za hranicu atmosféry sa považuje tzv. Karmanova hranica, ktorá sa nachádza vo výške 100 km nad hladinou mora), pričom $p_O = 21\%$ z nej tvorí kyslík a len $p_{\text{CO}_2} = 0,04\%$ oxid uhličitý. Teda v atmosfére sa nachádza asi

$$n_{O_2} = \frac{m_a p_O}{2M_O} \doteq 3,3 \cdot 10^{19} \text{ mol},$$

molekúl kyslíka. Vidíme, že ich je viac ako spočítané látkové množstvo uhlíka nachádzajúce sa v stromoch. Nemusíme sa teda báť, že by nám kyslík pri horení došiel. Látkové množstvo oxidu uhličitého získané horením lesov bude približne $n_{\text{CO}_2} = n_C \doteq 5 \cdot 10^{16}$ mol.

Teraz sa v atmosfére nachádza

$$n_{C_0} = \frac{m_a p_{\text{CO}_2}}{M_C + 2M_O} \doteq 4,5 \cdot 10^{16} \text{ mol}$$

oxidu uhličitého. Vidíme, že spálením všetkej vegetácie Zeme, by sa množstvo oxidu uhličitého v atmosfére zvýšilo asi na dvojnásobok.

¹⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Carbon_cycle#Terrestrial_biosphere

²⁰<http://galerie2.sweb.cz/prvky.htm>

²¹https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth

Ďalšie možnosti

Ak by sme chceli spraviť ešte konkrétnejší výpočet, mohli by sme zistiť alebo odhadnúť na základe podnebia priemernú výšku lesov v jednotlivých krajinách. Potom by sme mohli ešte vyhľadať, priemerne aké druhy porastu sa v ktorej krajine nachádzajú, zistiť ich výšku a hustotu, a dostať tak konkrétnejšie hmotnosti lesov jednotlivých krajín.

Možností, ako spočítať množstvo vegetácie na Zemi, je veľa, vzhľadom na prístupnosť množstva rozličných dát o lesoch na Zemi. Napríklad na stránke²² sú mapy vegetačného indexu,²³ pričom dáta je možné na tomto webe priamo analyzovať. Na stránke²⁴ môžeme vidieť napríklad percentuálne pokrytie jednotlivých miest na Zemi lesmi, prípadne vývoj tejto veličiny v čase. Podrobná analýza takýchto dát však môže trvať celé dni, preto sme sa pri našom výpočte obmedzili na jednoduchší model.

Diskusia

Zamyslime sa teraz nad vypočítaným výsledkom. V skutočnosti by získané množstvo oxidu uhličitého bolo zrejme nižšie. V úvode sme si totiž zvolili predpoklad, že prebieha iba dokonalé horenie – s dostatočným prísunom kyslíka. V realite to však takto nefunguje, a pri horení vzniká aj oxid uhoľnatý. Tiež predpokladáme, že uhlík v ľubovoľných zlúčeninách nachádzajúcich sa v telách rastlín môže a bude reagovať s kyslíkom, čo opäť nie je úplne splnené. Zároveň pri odhade množstva kyslíka v atmosfére uvažujeme, že všetok tento kyslík má možnosť reagovať pri horení pri povrchu Zeme. Kyslík je ale dispergovaný v celom objeme atmosféry, takže pri prudkom horení bude môcť kyslíku pri povrchu byť nedostatok.

Dôsledky pre život na Zemi

Ak horenie bude trvať dlho a bude masívne, vzniknutý popol zacloní atmosféru a spôsobí ochladenie, pretože zacloní teplo prichádzajúce zo Slnka. Z dlhodobého hľadiska ale naopak popol teplotu zvýši, jednotlivé častičky popola sa totiž budú ohrievať viac ako sa normálne ohrieva zemský povrch (majú nižšie albedo) a je len otázkou času, kedy toto teplo prenikne až k zemskému povrchu.

Zvýšenie množstva oxidu uhličitého v atmosfére spôsobí ohrev atmosféry, keďže oxid uhličitý je skleníkový plyn. Nárast teploty spôsobí intenzívnejšie odparovanie oceánov a zvýšenie ich teploty, čím sa z nich uvoľnia rozpustené plyny, okrem iného aj kyslík (čo bude mať nepriaznivý vplyv na morský život), metán, či potenciálne ďalší oxid uhličitý. Vplyv týchto javov na finálny obsah oxidu uhličitého v atmosfére by sme museli spočítať.

Keď však zhorí všetka vegetácia, nebude možné fotosyntézou späť z oxidu uhličitého získať kyslík, čo by malo katastrofálne následky pre život na Zemi. V najhoršom prípade, ak by sekundárne javy neprežili ani morské rastliny (najmä riasy nachádzajúce sa v morskej vode), by jedinou možnosťou ako kyslík späť naviazať, bolo jeho ukladanie do hornín na geologickej časovej škále.

²²https://neo.sci.gsfc.nasa.gov/view.php?datasetId=MOD_NDVI_M

²³https://en.wikipedia.org/wiki/Vegetation_Index

²⁴<http://earthenginepartners.appspot.com/science-2013-global-forest>

Úloha III.1 ... fontána s vodotryskem

Mějme fontánu s N tryskami stejného průřezu, které jsou napájeny jediným čerpadlem. Z trysky tryská voda do výšky h . Do jaké výšky bude voda tryskat, pokud zakryjeme všechny trysky kromě jedné? Čerpadlo má konstantní průtok.

Vodu můžeme považovat za nestlačitelnou kapalinu. Dále víme, že je čerpadlo schopno dodávat konstantní průtok. Pak musí být průtok tryskami v obou případech stejný, a tedy platí

$$NSv_N = Sv_1,$$

kde S je průřez jedné trysky, v_N je rychlost průtoku tryskou při všech tryskách odkrytých a v_1 je rychlost průtoku tryskou při jedné odkryté trysce.

Ze zákona zachování energie získáme vztah mezi rychlostí průtoku tryskou a výškou, do které voda tryská

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mu v_N^2 &= \mu gh, \\ v_N &= \sqrt{2gh}, \\ v_1 &= \sqrt{2gh_1},\end{aligned}$$

kde μ je hmotnost zvoleného elementu vodního paprsku.

Hledaný vztah pro výšku výtrysku při jedné odkryté trysce tedy je $h_1 = N^2 h$.

Úloha III.2 ... boom

Nad hlavou nám přeletěla stíhačka letící rovnoměrným pohybem vodorovně se zemským povrchem. Za $t = 1,50$ s na to jsme uslyšeli sonický třesk v okamžiku, kdy měla stíhačka zenitovou vzdálenost $\vartheta = 30,0^\circ$. Zjistěte, jak vysoko nad námi stíhačka přeletěla.

Bonus Z jakého směru jsme třesk slyšeli a jak daleko se toto místo nachází od místa, kde stíhačku vidíme?

Za tělesom pohybujícím sa nadzvukovou rychlostou v vzniká kuželovitá rázová vlna s vrcholovým uhlom $\sin \alpha = \frac{c}{v}$, kde c je rychlost zvuku v prostředí. Zo znalosti zenitovej vzdialenosti v okamihu začatia tresku máme

$$v = \frac{c}{\sin \alpha} = \frac{c}{\cos \vartheta}.$$

Lietadlo preletelo vzdialenosť $d = vt$, teda pre jeho výšku h nad zemou máme z pravouhlého trojuholníka

$$h = \frac{d}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{vt}{\operatorname{tg} \vartheta} = \frac{ct}{\sin \vartheta} = 1,02 \text{ km},$$

kde sme použili rýchlosť zvuku $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Tá sa však medzi lietadlom a pozorovateľom mení, preto je presná analýza problému náročnejšia.

Bonus Zvuková vlna sa šíri kolmo na vlnoplochy, preto sme zvuk začuli zo smeru o 90° pred miestom, kde vidíme lietadlo, v momente, keď k nám dorazil sonický tresk. Toto miesto sa teda nachádza v zenitovej vzdialenosti 60° na opačnej strane, ako vidíme stíhačku. Vzdialenosť týchto dvoch miest je približne $s = h(\operatorname{tg} \vartheta + \operatorname{tg}(90^\circ - \vartheta)) \doteq 2,4 \text{ km}$.

Úloha III.3 ... paraplíčko

Určite jste si již všimli, že když umístíte lžičku pod proud vody (například při mytí nádobí), vytvoří jakýsi vodní hříbek. Pro zjednodušení uvažujte, že lžička je rovná a má kruhový tvar malého poloměru. Po umístění kolmo do středu proudu vody (jehož poloměr je ještě menší) padající z klidu z výšky h nad dnem umyvadla vytvoří krásný rotační paraboloid. Spočítejte, do jaké výšky musíme lžičku dát, aby voda dopadala co nejdále od osy původního proudu (dno umyvadla je vodorovné). Uvažujte, že voda je ideální kapalina (nestlačitelná, neviskózní, bez vnitřního tření).

Bonus Najděte výšku umístění lžičky, při které voda vytvoří „přístřešek“ s co největším objemem.

Zásadním faktem, který je třeba si uvědomit, je, že voda při dopadu mění pouze směr a neztrácí přitom žádnou energii (tedy rychlost). To platí pouze v idealizovaném případě dokonalé kapaliny. Ve skutečnosti by dopad vody na lžičku nemusel být dokonale pružný a nějaká energie bude přeměněna na teplo. Jelikož neuvažujeme zakřivení lžičky, bude voda opouštět lžičku pouze s horizontální složkou rychlosti (voda proudí rovnoměrně do všech směrů rovnoběžných s povrchem lžičky).

Výšku lžičky nad dnem umyvadla si označíme proměnnou x . Voda pak dopadá na lžičku z výšky $h - x$ rychlostí

$$v = \sqrt{2g(h - x)},$$

což vyplývá ze vztahů pro volný pád. Jelikož při dopadu není ztracena žádná energie, bude se voda po dopadu pohybovat stále rychlostí v , přičemž pouze změní směr ze svislého na vodorovný. Po opuštění lžičky začne konat vodorovný vrh z výšky x počáteční rychlostí v . Na dno dopadne za čas

$$t = \sqrt{\frac{2x}{g}}$$

a dopadne tedy do horizontální vzdálenosti

$$y = vt = 2\sqrt{x(h - x)}$$

od místa, kam dopadá voda před umístěním lžičky. Hledáme tedy taková x , při kterém nabývá výraz pod odmocninou maximální velikosti a voda tedy dopadne nejdále. Výraz $x(h - x)$ je kvadratická funkce s nulovými body x a h , proto je její maximum v bodě $x = h/2$. Lžičku tedy musíme umístit přesně do poloviny výšky mezi dnem a kohoutkem.

Bonus

Bonus řešíme podobným způsobem jako předchozí příklad, akorát je potřeba spočítat objem pod rotačním paraboloidem. Zanedbáme přitom poloměr lžičky, abychom mohli paraboloid jednodušeji parametrizovat. Paraboloid popíšeme tak, že najdeme funkci, která popisuje horizontální vzdálenost od jeho osy (tedy od přímky, která prochází původním proudem vody tekoucím z kohoutku) v závislosti na výšce od dna. Proměnnou označující výšku od dna označíme z .²⁵ Funkci udávající horizontální vzdálenost y od kohoutku můžeme psát jako $y(z) = 2\sqrt{(h-x)(x-z)}$. Objem pod paraboloidem vypočítáme podle vzorce pro výpočet objemu rotačních křivek. Využijeme větu, která říká, že objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu spojité funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ kolem osy x , je dán vztahem

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

V našem případě po dosazení dostáváme

$$V = \pi \int_0^x (y(z))^2 dz = 4\pi \int_0^x (h-x)(x-z) dz = 2\pi(h-x)x^2.$$

Nyní jsme se zbavili proměnné z . Dále hledáme maximum $V = 2\pi(h-x)x^2$ na intervalu od 0 do h . K tomu využijeme derivaci podle x

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(h-x)x^2 &= 0, \\ -x^2 + 2(h-x)x &= 0, \\ x &= 2(h-x), \\ x &= \frac{2}{3}h. \end{aligned}$$

Při úpravách jsme vypustili řešení $x = 0$, které zřejmě neodpovídá maximu. Maximální objem dostaneme při zdvihnutí lžičky do výšky $\frac{2}{3}h$.

Zde jsme se setkali s trochu neintuitivní idealizací. Předpokládáme totiž, že lžička je hodně malá, abychom při výpočtu objemu paraboloidu mohli uvažovat, že lžička je pouhým bodem v jeho vrcholu. Kdybychom zanedbávali rozměr paraboloidu, museli bychom počítat objem komplikovanějšího geometrického tělesa - jakéhosi pseudoparaboloidu s plošinkou namísto špičky.

Zároveň však předpokládáme, že dopadající proud vody má mnohem menší poloměr než lžička, aby voda ze lžičky vycházela vodorovně. Kdyby byl proud vody srovnatelný se lžičkou, mohlo by se stát, že by ho lžička dokonale nerozptýlila do horizontálního směru a vycházel by od lžičky směrem k zemi pod jistým úhlem.

²⁵Proměnná x označuje výšku lžičky, kterou jsme již určili, z značí výšku, ve které měříme vzdálenost vodní stěny od osy.

Zajímavé je, že něco je velmi malé a něco jiného (v našem případě proud vody) může být ještě velmi menší v porovnání s tou velmi malou věcí (lžičkou). S takovými idealizacemi se ve fyzice setkáváte ještě často.

Úloha III.4 . . . beruška na gumě

Beruška leze rychlostí $4 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Když ji postavíme na gumu 40 cm dlouhou, přeleze ji za 10 s . Co když ale v okamžiku, kdy beruška začne lézt, začneme gumu natahovat tak, že se její délka bude zvětšovat rychlostí $5 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$? Může dolézt na konec? Pokud ano, jak dlouho jí to bude trvat? Guma se roztahuje rovnoměrně a nikdy se nepřetrhne.

Na první pohled se beruščina cesta může zdát nekonečná. Jak by se mohla dostat na druhý konec, když se tento konec pohybuje vyšší rychlostí? Zkusme to spočítat.

Rychlost pohybu berušky vůči gumě si označíme v' a rychlost natahování gumy si označíme u . Počáteční délka gumy je l . V čase t bude délka gumy $l' = l + ut$. Guma se tím jakoby „zředí“ v poměru l'/l – pokud v tomto okamžiku beruška urazí vzdálenost x' , v tomto úseku bude obsažena pouze vzdálenost

$$x = \frac{l}{l'} x' = \frac{l}{l + ut} x'$$

z původní gumy. Rychlost je přímo úměrná uražené dráze, takže rychlost berušky vůči původní gumě bude podobně

$$v = \frac{l}{l + ut} v'.$$

Hodnota v' je konstantní, zatímco v konstanta není. To vede na jednoduchou diferenciální rovnici

$$\frac{dx}{dt} = \frac{l}{l + ut} v'.$$

Rovnici lze řešit například separací proměnných. Stačí zintegrovat pravou stranu podle času a dostaneme

$$x = \int_0^t \frac{l}{l + ut} v' dt = \left[\frac{lv'}{u} \ln \left(\frac{l}{u} + t \right) \right]_0^t = \frac{lv'}{u} \ln \left(1 + \frac{ut}{l} \right).$$

O přirozeném logaritmu víme, že je to rostoucí funkce a že jde v limitě do nekonečna. Proto vidíme, že ať si na gumě zvolíme jakoukoli konečnou vzdálenost, beruška jí vždy urazí v konečném čase.

Hledáme okamžik, ve kterém beruška doleze na konec gumy, tedy kdy bude platit $x = l$. Z rovnice pro vzdálenost výše si vyjádříme čas

$$t = \frac{l}{u} \left(e^{\frac{u}{lv'}} - 1 \right).$$

Řešení zřejmě existuje pro libovolné kladné hodnoty l , v a u . Pro ty ze zadání vychází $t \doteq 20 \text{ s}$. Fyzikální analogii k tomuto příkladu můžeme najít například

v rozpínání vesmíru, ve kterém fotony cestují konstantní rychlostí. Kdyby se vesmír rozpínal také stále stejnou rychlostí, tak by k nám teoreticky v konečném čase doletěly fotony z libovolné vzdálenosti a my bychom tak jednou mohli vidět celý vesmír (pokud je konečný). Problém je ale v tom, že rozpínání vesmíru konstantní není, a tak existuje hranice, za kterou vůbec nikdy nedohlédneme.

Úloha III.5 ... hustota pravděpodobnosti vody

Představme si nádrž, ze které neustále vodorovně vytéká proud vody s konstantním obsahem průřezu. Rychlost proudu však náhodně kolísá s rovnoměrným rozdělením od v_1 do v_2 . Po vytečení z nádrže voda volně padá na vodorovnou podlahu níže. Najděte libovolnou oblast podlahy, do které dopadne přesně 90 % vody.

Ze zadání je zřejmé, že oblast dopadu vody je úsečka. Zaveďme proto souřadnici x , měřenou od bodu přímo pod výtokem vody z nádrže. Výšku výtoku nad zemí označme h . Nechť funkce $x(v)$ popisuje souřadnici bodu, do kterého dopadnou částice vody s rychlostí výtoku v . Potom platí

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \\ x(v) = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

kde jsme čas pádu vody označili t . Vidíme, že x je rostoucí funkce, takže krajními body úsečky, na kterou dopadá voda, jsou $x_1 = x(v_1)$ a $x_2 = x(v_2)$.

Nyní si zadefinujeme funkci $f(x)$ tak, aby platilo, že mezi body x a $x + dx$ dopadne přesně $f(x)dx$ z celkového množství vody. Je nasnadě, že platí

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = 1. \quad (9)$$

Označme $v(x)$ inverzní funkci k $x(v)$. Potom do intervalu souřadnic $\langle x, x + dx \rangle$ dopadne voda z intervalu rychlostí $\langle v(x), v(x + dx) \rangle$. To představuje část

$$\frac{v(x + dx) - v(x)}{v_2 - v_1} = \frac{(x + dx)\sqrt{\frac{g}{2h}} - x\sqrt{\frac{g}{2h}}}{v_2 - v_1} = \frac{dx}{v_2 - v_1} \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

z celého intervalu rychlostí. Musíme však vzít v úvahu, že množství vody, které z nádrže za nějaký okamžik vyteče, je přímo úměrné rychlosti vody. Podíl vody v intervalu rychlostí tak ještě musíme vynásobit rychlostí vody $v(x)$ (kterou pro dostatečně malé dx můžeme pro tento účel považovat za konstantní v celém intervalu), čímž získáme poměrnou část množství vody, které dopadá do intervalu dx , neboli

$$f(x)dx \propto \frac{v(x)(v(x + dx) - v(x))}{v_2 - v_1} = \frac{xdx}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h}.$$

Musí být splněna podmínka (9), takže hledáme normovací konstantu

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x)(v(x + dx) - v(x))}{v_2 - v_1} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{xdx}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h} = \frac{g(x_2^2 - x_1^2)}{4h(v_2 - v_1)}.$$

Po dosažení za x_1 a x_2 máme

$$A = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2(v_2 - v_1)}.$$

Funkce f je ve tvaru

$$f = \frac{1}{A} \frac{xdx}{v_2 - v_1} \frac{g}{2h} = \frac{gx}{h(v_2^2 - v_1^2)}.$$

Hledaný interval už nyní snadno zkonstruujeme. Označme $n = 0,9$. Potom hledáme takové x_0 , pro které platí

$$\int_{x_1}^{x_0} f(x) dx = n.$$

Řešení integrálu vede na rovnici

$$n = \int_{x_1}^{x_0} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_0} \frac{gxdx}{h(v_2^2 - v_1^2)} = \frac{g(x_0^2 - x_1^2)}{2h(v_2^2 - v_1^2)}$$

a pro x_0 platí

$$x_0 = \sqrt{\frac{2nh(v_2^2 - v_1^2)}{g} + x_1^2} = \sqrt{\frac{2h}{g}(nv_2^2 + (1-n)v_1^2)}.$$

Do intervalu od x_1 do x_0 dopadne 90% vody. Pro úplnost dodejme, že toto řešení je samozřejmě pouze jedno z nekonečně mnoha možných.

Úloha III.P . . . roj meteoritů

Je možné, aby se kapka deště vypařila dříve, než dopadne na zem? Vymyslete vhodný model odpařování dešťových kapek během jejich pádu a ukažte, za jakých podmínek (mezi relevantní parametry patří například počáteční poloměr, průběh okolní teploty v závislosti na nadmořské výšce) se může kapka zcela odpařit. Můžete přitom předpokládat, že kapka vznikne náhle v určité výšce h_0 s počátečním poloměrem r_0 a v první aproximaci padá suchou atmosférou. A kdy je možné, aby kapka zamrzla?

Odpařování dešťových kapek není tak jednoduché, jak se na první (a možná i na druhý) pohled může zdát. Kombinuje se tu totiž několik různých problémů, které jsou samy o sobě jen těžko řešitelné. Předně se jedná o pád tělesa v atmosféře, kde vzorec pro odporovou sílu závisí na tom, jestli je proudění vzduchu laminární, turbulentní či něco mezi tím. Dále řešíme vypařování vody do vzduchu, které samozřejmě závisí na teplotách obou prostředí, tlaku, vzdušné vlhkosti, rychlosti proudění vzduchu a velikosti povrchu kapky. K vypařování je potřeba dodávat kapce teplo, přičemž v úvahu připadají dvě možnosti, vedení a proudění. Přenos tepla prouděním přitom kombinuje vedení tepla s mechanikou kontinua, jednou

z dosud stále nevyřešených částí klasické fyziky. Proudění vzduchu se ale podílí i na tvaru kapky, kde dále hraje roli povrchové napětí, které samozřejmě závisí na teplotě.

Nejdůležitější částí této úlohy tak bude najít vhodné aproximace výše uvedených fyzikálních jevů, což nám umožní nahradit složité závislosti jednoduchými. Ze všeho nejdříve budeme předpokládat, že kapka má tvar koule. Ve skutečnosti není vůbec zásadní, jaký je tvar kapky. Dokud objem roste s třetí mocninou nějakého rozměru a povrch s druhou, nezáleží na tom. Přesný tvar hraje roli pouze při určení hodnot několika konstant. Brzy si ukážeme, že chyba, kterou se nahrazením kapky koulí dopustíme, bude zanedbatelná ve srovnání s ostatními aproximacemi, které teprve přijdou.

Pokud neuvedeme jinak, pracujeme s atmosférou s parametry $T_a = 20\text{ }^\circ\text{C}$ a $p_a = 10^5\text{ Pa}$ za bezvětří s nulovou rychlostí vzduchu.

K tématu sice existuje odborná literatura, ale bohužel se nezabývá přesně tím, co bychom potřebovali. Každý z těchto problémů je totiž velmi obecný, navíc obtížnost úlohy vychází z jejich kombinace. Literatura se většinou věnuje konkrétním situacím, které mají praktické využití. Jedním z takových případů je vypařování velmi drobných kapiček z rozprašovačů a sprejů, což se využívá v mnoha odvětvích průmyslu od zalévání a hnojení rostlin přes nanášení barev a laků po vstřikování paliva do spalovacích motorů.

Při řešení úlohy jsme primárně vycházeli z práce²⁶ a dále ze článků a knih, které daná práce uvádí v seznamu literatury. Přímo dešťovými kapkami se pak zabývá článek,²⁷ který využíváme především pro srovnání výsledků.

Pohyb kapky v odporovém prostředí

Začneme vzorcem pro Reynoldsovo číslo

$$\text{Re} = \frac{2rv}{\eta_a},$$

kde r je v tomto případě poloměr kapky, v je její rychlost a $\eta_a = 1,8 \cdot 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}$ je dynamická viskozita vzduchu. Pro malé hodnoty Re je proudění okolo kapky laminární a odporová síla se řídí Stokesovou rovnicí

$$F_S = 6\pi\eta_a r v.$$

Pro velké hodnoty Re je proudění turbulentní a musíme použít Newtonův vztah

$$F_N = \frac{1}{2} C \varrho_a S_x v^2, \quad (10)$$

kde $\varrho_a = 1,2\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota vzduchu, $S_x = \pi r^2$ je plocha průřezu tělesa ve směru pádu a C je součinitel odporu, který má pro kouli hodnotu 0,5.

²⁶<https://holsoft.nl/idefics/pdf/kinevap.pdf>

²⁷<https://tinyurl.com/y9g8scl2>

Co ale znamenají malé a velké hodnoty Re ? To je právě ten problém. Proudění kolem koule je zcela laminární pro $Re < 0,25$, což odpovídá (za normálních podmínek) kapkám s poloměrem do $25\ \mu\text{m}$. Běžné dešťové kapky ale mají poloměr kolem $1\ \text{mm}$, největší mohou mít i přes $5\ \text{mm}$, ale pak jsou již nestabilní. Naopak turbulentní proudění nastává od Reynoldsova čísla v řádu jednotek tisíců.

Při situaci mezi laminárním a turbulentním prouděním se postupuje tak, že se předpokládá platnost vztahu (10) s tím, že C není konstanta, ale závisí na Re . Pro výpočet Re ale potřebujeme znát rychlost. Bez podrobnějšího důkazu si řekneme, že volně padající kapky brzy dosáhnou své terminální rychlosti, neboli stavu, kde se odporová síla vyrovná tíhové. S touto rychlostí se pak pohybují dál. Tíhová síla $F_g = mg$ je při pohybu terminální rychlostí rovna Newtonově odporové síle, odkud pro terminální rychlost dostáváme

$$v_t = \sqrt{\frac{2mg}{C\varrho_a S_x}} = \sqrt{\frac{8\varrho g r}{3C\varrho_a}}. \quad (11)$$

Závislost $C(Re)$ je pouze empirická, ale je možné ji proložit nějakou rozumnou funkcí. Pomocí v_t , kterou označíme jako v_1 , bychom spočítali Re_1 , odtud bychom zjistili C_1 a z něj znovu spočítali rychlost, tentokrát v_2 . Po několika iteracích bychom dospěli do stavu, kdy už by se veličiny příliš neměnily, neboli by platilo $v_{i+1} \approx v_i$.

Tento obecný postup je ale extrémně nepraktický například z toho důvodu, že chceme počítat závislost rychlosti kapky na čase a podobné věci. Proto si vztah $C(Re)$ uvádět nebudeme a místo toho si řekneme, že koeficient C má při $Re = 100$ hodnotu přibližně 1 a dále s rostoucím Re pozvolna klesá na výše zmíněných 0,5. Hodnota $Re = 100$ přitom odpovídá kapce s poloměrem zhruba $0,3\ \text{mm}$, pro větší kapky Re už jenom roste.

Můžeme tak říct, že pro všechny velikosti kapek, které nás zajímají, je hodnota konstanty C v intervalu $(0,5, 1)$, což není zase takové rozpětí. Zároveň si uvědomme, že s klesajícím poloměrem kapky výrazně klesá její rychlost, čili se zvyšuje čas, po který se může odpařovat. Později si to odvodíme podrobněji, ale nyní budeme předpokládat, že poloměr kapky se bude zmenšovat čím dál, tím rychleji. Dostaneme se tak kapka z počátečního poloměru $r_0 = 1\ \text{mm}$ pod hodnotu $0,3\ \text{mm}$ po uražení vzdálenosti x , k úplnému vypaření dojde na vzdálenosti řádově shodné s x .

Vypařování budeme studovat pouze tam, kde je poloměr kapky dostatečně velký. Při výpočtu rychlosti použijeme vztah (11) s aproximací $C \approx 0,5$, přičemž všechny parametry schováme do konstanty α . Dostáváme

$$v = \alpha\sqrt{r}, \quad (12)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{8\varrho g}{3C\varrho_a}}.$$

Vypařování vody

Označme teplotu kapky T , potom je k vypaření hmotnosti $-dm$ potřeba dodat teplo

$$dQ = -c(T_v - T)dm - l_v dm = -K(T)dm, \quad (13)$$

kde $c = 4,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ je měrná tepelná kapacita, $T_v = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ je teplota varu a $l_v = 2,3 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ je měrné skupenské teplo vypařování. Ačkoli je T výrazně nižší než T_v , energie jednotlivých molekul vody se řídí něčím podobným Maxwellovu-Boltzmannovu rozdělení. To znamená, že ve vodě stále existují molekuly s dostatečnou energií na to, aby se uvolnily ve formě páry. Tím se ale kapka ochlazuje, čímž podíl těchto částic klesá. Zároveň se kolem kapky vytvoří slupka vzduchu, která je díky tření unášena spolu s kapkou. V této slupce stoupá koncentrace páry, čímž se zvyšuje počet částic, které se mohou vrátit zpět do kapky.

Pokud by se kapka nacházela v uzavřeném prostoru, časem by se dostala do rovnováhy, ve které by se v každém okamžiku uvolnil a zpětně vstřebal stejný počet molekul vody. Naše situace se liší jednak tím, že kolem kapky proudí vzduch, což způsobuje, že mnohé uvolněné částice opouští okolí kapky natrvalo. Zadruhé pak tím, že do kapky proudí teplo z okolí. Oba jevy se vykompenzují v tom smyslu, že se ustanoví nová rovnováha, ve které se všechno teplo dodané kapce přemění na energii přesně těch částic, které kapku navždy opustí.

Podmínka rovnováhy stanoví pro každý poloměr kapky jinou teplotu T , nicméně máme dobrý důvod předpokládat, že závislost $T(r)$ nebude nijak dramatická. Dokonce půjdeme tak daleko, že ji prohlásíme za konstantní během celého pádu kapky. Potom rovnici (13) vydělíme malým časovým úsekem dt a dostaneme

$$\dot{m} = -\frac{1}{K}P,$$

kde $P = \frac{dQ}{dt}$ je tepelný příkon kapky. Změna hmotnosti souvisí se změnou poloměru podle vztahu

$$dm = 4\pi r^2 \rho dr,$$

což vede na

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\beta r^{-2} P, \\ \beta &= \frac{1}{4\pi \rho K} = \frac{1}{4\pi \rho (c(T_v - T) + l_v)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Tepelná výměna s okolím

Teplota kapky je díky vypařování menší než teplota vzduchu. Chtěli bychom použít rovnici vedení tepla ve tvaru

$$P = \frac{\lambda_a S}{l} (T_a - T),$$

kde $S = 4\pi r^2$ je obsah povrchu kapky, $\lambda_a = 0,025 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ je tepelná vodivost vzduchu a l vzdálenost mezi povrchem kapky a bodem s teplotou T_a . Z této rovnice nutně vyplývá, že l nemůže být nulová, protože jinak by se teploty okamžitě vyrovnaly. Jak již jsme zmínili, při pádu se kolem kapky vytvoří slupka vzduchu, která je spolu s kapkou unášena díky třecí síle. Tím se kapka izoluje od okolí a vznikne teplotní gradient.

Problém tohoto přístupu je v tom, že proudící vzduch s teplotou T tuto slupku neustále narušuje, přičemž vznikají různé víry, které dále urychlují předávání tepla.

Zároveň, slupka zřejmě nebude na všech místech okolo kapky stejně tlustá, stejně jako se bude lišit rozložení teploty.

Aproximací už bylo dost, je tedy na čase přejít k odhadům. Uvažujme, že l je jakási efektivní šířka slupky, při které by bylo za ideálních podmínek dosaženo stejného tepelného toku P jako v případě padající kapky se slupkou o skutečné šířce l' . Například, pokud by proudění vzduchu zmenšilo izolační účinnost vrstvy na polovinu, výsledek bude stejný, jako kdyby šířka této vrstvy byla poloviční. Tomu by odpovídala rovnice $l = l'/2$ – slupka s šířkou l' v prostředí s proudícím vzduchem propustí stejný tepelný příkon jako slupka s šířkou $l = l'/2$ v ideálních podmínkách. Stejně tak vrstvu s nehomogenní tloušťkou můžeme modelovat vrstvou s jakousi průměrnou tloušťkou.

Podstatné je, že budeme předpokládat, že vliv výše uvedených jevů nebude záviset na tloušťce vrstvy. Čili pokud turbulentní proudění efektivně zmenší vrstvu l' na $l'/2$, obdobně zmenší vrstvu $2l'$ na l' . Poslední, co musíme zjistit, je tvar závislosti $l(r, v)$, protože všechny ostatní veličiny považujeme za konstantní. Odvážně odhadneme, že by mohlo platit $l = \varepsilon v$, kde ε je nějaká konstanta.

To, že by l neměla přímo záviset na velikosti tělesa, se zdá logické. Je pravda, že by mohla záviset na jeho zakřivení, ale vzhledem k tomu, že r se pohybuje v relativně malém rozmezí možných hodnot, tuto možnost zanedbáme. Důvodem lineární závislosti l na v je pak to, že tření mezi vrstvami vzduchu závisí lineárně na rychlosti.

Z těchto úvah vyplývá

$$P = \gamma r^2 v^{-1}, \quad (15)$$

$$\gamma = \frac{4\pi\lambda_a}{\varepsilon} (T_a - T).$$

Výsledný model

V předchozích částech jsme s větší či menší mírou představivosti odvodili rovnice (12), (14) a (15), které teď dáme dohromady a dostaneme skvostný vztah

$$\frac{dr}{dx} = \frac{\dot{r}}{v} = -\beta\gamma v^{-2} = -\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} r^{-1},$$

kde x je vzdálenost, kterou kapka urazila. Rovnici separujeme na tvar

$$rdr = -\frac{\mu}{2} dx,$$

kde μ je vhodně zvolená konstanta

$$\mu = \frac{2\beta\gamma}{\alpha^2} = \frac{3\lambda_a C_{\varrho_a} (T_a - T)}{4\varepsilon g \varrho^2 (c(T_v - T) + l_v)}.$$

Integrací dostaneme

$$r^2 - r_0^2 = -\mu x,$$

odkud si vyjádříme hledanou závislost poloměru kapky na uražené vzdálenosti

$$r(x) = \sqrt{r_0^2 - \mu x}.$$

Podle tohoto vzorce klesne poloměr na nulu za

$$x_0 = \frac{r_0^2}{\mu} = \frac{4\varepsilon g \varrho^2 r_0^2 (c(T_v - T) + l_v)}{3\lambda_a C_{\varrho_a} (T_a - T)}.$$

Jak jsme již zmínili dříve, náš model platí pouze dokud se poloměr příliš nezmenší, čili kapka se ve skutečnosti nevypaří po uražení vzdálenosti x_0 . Na druhou stranu, výška, ze které musíme kapku vypustit, aby se stihla před dopadem celá vypařit, bude hodnotě x_0 přinejmenším řádově podobná.

Diskuze

Ve výsledku k výpočtu x_0 nepotřebujeme zase tolik parametrů, jediné neznámé veličiny jsou ε a T . Vzhledem k tomu, že hledáme odpověď na otázku, jestli se může kapka zcela vypařit, zvolme zpočátku velmi optimistické hodnoty. Zřejmě čím menší bude T , tím více tepla bude do kapky proudit a tím rychleji se (paradoxně) vypaří. Na druhou stranu, T určitě nebude pod bodem mrazu vody, protože ze zkušenosti víme, že déšť zase tak studený není. Takže odhadněme $T = 0^\circ\text{C}$ a pokračujme dále.

Tloušťka vzduchové vrstvy obalující kapku je řádově srovnatelná s jejím poloměrem. Použitím vztahu (12) dostaneme, že rychlost kapky s poloměrem $r = 1\text{ mm}$ je zhruba $v \doteq 6,6\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Minimální šířka vrstvy tak bude něco jako $l \approx 0,1\text{ mm}$, pro kterou vychází $\varepsilon \approx 1,5 \cdot 10^{-5}\text{ s}$. Ano, je to velmi hrubý odhad, doufejme, že je alespoň řádově správně. Dosazením dostáváme $x_0 \approx 1,7\text{ km}$.

To je srovnatelné s výškou, z jaké padají dešťové kapky. Parametr ε jsme zřejmě podhodnotili, ale zase jsme neuvažovali vliv proudění a další jevy, které by tloušťku vrstvy efektivně zmenšily. Rozdíl teplot je sice příliš veliký, ale opět, snažili jsme se o optimistický odhad.

Na závěr si uvědomme, že x_0 závisí na druhé mocnině r_0 , čili každé zmenšení poloměru potřebnou vzdálenost výrazně zkrátí. Pokud by se tak kapky s poloměrem 1 mm nevypařily, těm jen o něco menším by se to už jistě podařilo.

Srovnání s výše uvedeným článkem docházíme k závěru, že naše výsledky jsou řádově správné a že i kapky s poloměrem kolem jednoho milimetru se vypaří při pádu z několika jednotek kilometrů. V případě skutečného deště by situace byla složitější, protože bychom nemohli předpokládat suchou atmosféru. Vodní páry obsažené ve vzduchu by ztěžovaly další vypařování, zatímco drobné vodní kapičky by se nabalovaly na padající kapku, díky čemuž by mohla v čase naopak růst. Náš výsledek je tak skutečně jen dolním odhadem dostatečné výšky pro vypaření kapky.

Úloha IV.1 ... čibonaut

Máme kosmonauta s hmotností M , který se v beztížném stavu vznáší ve vzdálenosti l od stěny vesmírné stanice. Najednou se rozhodne, že těžké nářadí s hmotností m , které dosud držel v ruce, hodí po stanici ve směru kolmém na její stěnu. V jaké vzdálenosti od stěny kosmonaut bude, až do ní nářadí narazí?

Vyjdeme ze zákona zachování hybnosti. Původně byla hybnost kosmonauta společně s jeho nářadím nulová. Taková musí zůstat i po odhození náradí. Označíme rychlost kosmonauta v a rychlost náradí u . Zvolíme-li, že u míří směrem ke stanici, zatímco v má přesně opačný směr, bude platit $Mv = mu$. Doba, kterou poletí náradí, bude $t = l/u$. Za stejný čas urazí kosmonaut vzdálenost

$$l' = vt = \frac{v}{u}l = \frac{m}{M}l.$$

Celková vzdálenost kosmonauta od stěny bude součtem jím uražené dráhy a jeho počáteční pozice, neboli

$$L = l + l' = \left(1 + \frac{m}{M}\right)l.$$

Odpověď je, že náradí dopadne na stěnu v okamžik, kdy bude kosmonaut ve vzdálenosti $\left(1 + \frac{m}{M}\right)l$ od stanice.

Úloha IV.2 ... Machovo číslo

Letadla jsou ve vysokých hladinách letu řízena pomocí Machova čísla. Tato veličina vyjadřuje rychlost v násobku rychlosti zvuku c v daném prostředí. Rychlost zvuku ve vzduchu se ovšem s výškou mění. Jaký je rozdíl mezi rychlostí letu letadla letícího při Machově čísle 0,85 ve dvou různých letových hladinách FL 250 (7 600 m) a FL 430 (13 100 m)? V jaké hladině je rychlost vyšší a o kolik kilometrů za hodinu? Závislost rychlosti zvuku ve vzduchu na teplotě můžeme s dostatečnou přesností popsat vztahem $c = (331,57 + 0,607 \{t\}) \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, kde t je teplota ve stupních Celsia. Uvažujte standardní atmosféru, ve které klesá teplota s výškou od 0 do 11 km od 15°C o $0,65^\circ\text{C}$ na každých 100 m až k teplotě $-56,5^\circ\text{C}$, která je pak konstantní až do 20 km nad střední hladinou moře.

Úloha je založená na relativně jednoduchém dosazování. Složitější může být neztratit se v postupu. Nejprve určíme teplotu v jednotlivých letových hladinách. Pro letovou hladinu FL 430 je přímo napsaná v zadání, tedy $t_{\text{FL430}} = -56,5^\circ\text{C}$. Pro letovou hladinu FL 250 nám vychází $t_{\text{FL250}} = -34,4^\circ\text{C}$. Zvolený pokles teploty s výškou odpovídá, jak je zmíněno v zadání, tzv. standardní atmosféře. Jde o idealizovaný profil pro přibližné rychlé výpočty a využívá se hojně v letectví. Standardní atmosféra zhruba odpovídá tomu, jaké jsou střední hodnoty veličin v reálné atmosféře.

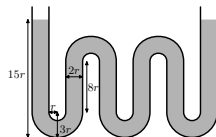
Z teplot můžeme dosazením do vzorce dostat rychlosti zvuku pro jednotlivé letové hladiny, které jsou $c_{\text{FL250}} = 311 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $c_{\text{FL430}} = 297 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vynásobením Machovým číslem dostáváme rychlosti letadla $v_{\text{FL250}} = 264 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a $v_{\text{FL430}} = 253 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Vidíme tedy, že rychlejší je letadlo, které letí níže. Rozdíl jejich rychlostí je $\Delta v \doteq 11 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 41 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Tedy letadlo je zhruba o 4,2 % pomalejší, když za konstantního Machova čísla vystoupá na cestovní letovou hladinu 430.

Zvolená cestovní hladina odpovídá dostupu (nejvyšší možné cestovní hladině) některých běžných dopravních letadel. Konkrétní hodnoty dostupu a rychlosti jsou pro Airbus A380, ale prakticky stejné jsou i u Boeingu 777. Přesná hodnota optimální cestovní rychlosti je pak dána například i aktuálním naložením letadla.

Obecně se také dá říci, že většina letadel létá do Machova čísla 0,9, protože přiblížování se rychlosti zvuku a její mírné překročení vede k vysokému nárůstu odporové síly. Nižší cestovní hladina FL 250 pak odpovídá nejnižší cestovní hladině, od které jsou letadla řízená prostřednictvím Machova čísla. Pod touto hladinou se využívá řízení prostřednictvím indikované vzdušné rychlosti.²⁸

Úloha IV.3 ... uuu-trubice

Jakou periodu malých kmitů bude mít voda ve skleněné trubici na obrázku? Uvažujte pokojovou teplotu a normální tlak a předpokládejte, že voda je dokonale nestlačitelná.



Harmonické kmity nastanou tehdy, když síly v systému působí proti výchylce (neboli vrací jej zpět do rovnovážné polohy) a zároveň je jejich velikost přímo úměrná velikosti výchylky. Tuto podmínku můžeme zapsat rovnicí $F = -kx$, kde k je tuhost systému. Ukážeme-li, že pohyb v uuu-trubici se řídí touto rovnicí, máme vyhráno, protože periodu kmitů harmonického systému lze snadno spočítat jako

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (16)$$

kde m je hmotnost, na kterou síla F působí.

Pokud v jednom rameni zvedneme hladinu vody o x , ve druhém rameni hladina klesne o x . Zvýšená hladina bude působit svou tíhou na celý vodní sloupec a bude se jej snažit navrátit do rovnovážné polohy. Můžeme si to představit tak, že nad sníženou hladinou se teď nachází sloupec vody o výšce $2x$, má hmotnost $m_x = = 2\pi r^2 \rho x$. Tomu odpovídá síla

$$F = -m_x g = -2\pi r^2 \rho g x = -kx.$$

Teď před námi stojí těžší úkol, musíme spočítat celkový objem vody. Výpočet nám trochu komplikuje tvar uuu-trubice. Rozdělme ji na celkem 6 přímých úseků a 5 půltorů (polovin toru). Bez odvození uvedeme vztah pro objem toru²⁹

$$V_{\text{torus}} = 2\pi^2 r^2 R,$$

kde v našem případě je hlavní poloměr kolen v trubici $R = 2r$. Objem jednoho kolena tak bude $V_k = 2\pi^2 r^3$. Přímé úseky uuu-trubice mají celkovou délku $56r$. Celkový objem vody potom vychází

$$V = 56r \cdot \pi r^2 + 5 \cdot 2\pi^2 r^3 = 2\pi(28 + 5\pi)r^3.$$

²⁸Ano, není to ani ta rychlost, kterou se pohybuje letadlo vůči vzduchu, ani ta, kterou se pohybuje vůči zemi. Ale o tom možná někdy jindy.

²⁹Vztah pro objem toru lze odvodit například z Guldinovy věty https://cs.wikipedia.org/wiki/Guldinovy_věty. Jiné odvození využívající Cavalieriho princip naleznete zde <http://whistleralley.com/torus/torus.htm>, nebo si jej můžete odvodit sami jako cvičení na integrály.

Hmotnost bude jednoduše $m = \rho V$. Po dosazení do rovnice (16) dostaneme pro periodu malých kmitů vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(28 + 5\pi) r}{g}}.$$

Úloha IV.4 ... optický fykosák

Pták Fykosák našel na Matfyzu nehlídanou optickou lavici, která umožňuje rozmístit různé pomůcky podél optické osy, a začal si s ní hrát. Na osu umístil postupně bodový zdroj světla, první čočku, druhou čočku a stínítko se stejnými rozestupy (vzdálenost stínítka od zdroje je tedy třikrát větší než vzdálenost jakýchkoli dvou sousedních pomůcek). Na stínítku se vytvořil ostrý obraz zdroje. Fykosák potom celou soustavu ponořil do neznámé kapaliny, kterou našel v podivném kanystru. K jeho úžasu zůstal obraz na stínítku stále ostrý. Určete index lomu této kapaliny, jenž je určitě jiný než index lomu vzduchu, který můžete považovat za jednotkový. Jedna z čoček má desetkrát větší ohniskovou vzdálenost než druhá a obě jsou tenké a vyrobené z materiálu o indexu lomu 2.

Obraz vytvořený na stínítku je skutečný (jinak by nemohl být zachycen na stínítku). To znamená, že můžeme zdroj a stínítko prohodit a dostaneme ostrý obraz (světlo se šíří stejně oběma směry). Bez újmy na obecnosti tedy předpokládáme, že první čočka má ohniskovou vzdálenost f desetkrát menší než druhá ($10f$). Vzdálenost jednotlivých součástí budeme značit h . Vzdálenost místa, kam zobrazí zdroj první čočka, od první čočky označme s_1 a vzdálenost tohoto „meziobrazu“ od druhé čočky s_2 . Znaménková konvence bude taková, aby s_1 bylo kladné, pokud obraz vznikne za první čočkou, zatímco s_2 bude kladné pro obraz před druhou čočkou. Musí platit

$$s_1 + s_2 = h. \quad (17)$$

Zároveň si můžeme napsat obě zobrazovací rovnice. První čočka zobrazí zdroj ze vzdálenosti h před čočkou do vzdálenosti s_1 . Druhá čočka zobrazí obraz zdroje ze vzdálenosti s_2 do vzdálenosti h za čočkou. To zapíšeme jako

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{h} + \frac{1}{s_1}, \quad (18)$$

$$\frac{1}{10f} = \frac{1}{h} + \frac{1}{s_2}. \quad (19)$$

Máme celkem tři rovnice (17), (18) a (19), ze kterých po několika algebraických úpravách dostaneme kvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= 30f^2 - 22hf + h^2, \\ f &= \frac{11 \pm \sqrt{91}}{30} h. \end{aligned} \quad (20)$$

Dvě možná řešení pro velikost ohniskových vzdáleností čoček odpovídají dvěma možným indexům lomu vzduchu a neznámé kapaliny. Rovnice tenké čočky je

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_c}{n_p} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right),$$

kde $n_c = 2$ je index lomu čočky, n_p je index lomu okolního prostředí a r_1 a r_2 jsou poloměry křivosti čočky. Jelikož n_c , r_1 a r_2 jsou pro obě čočky v průběhu experimentu konstantní, můžeme psát

$$f = \frac{K}{\frac{n_c}{n_p} - 1}, \quad (21)$$

kde K je nějaká konstanta. Dále označíme indexy lomu hledané kapaliny n_k a vzduchu $n_v \approx 1$. Teď si můžeme uvědomit, že poměr ohniskových vzdáleností je 10 i v kapalině, protože čočky mají stejné indexy lomu. K rovnici (20) jsme došli pouze pomocí tohoto předpokladu, proto jedno řešení pro f musí odpovídat ohniskové vzdálenosti první čočky v kapalině a druhé řešení její ohniskové vzdálenosti ve vzduchu – označme je f_k a f_v . Jelikož ohniskové vzdálenosti obou čoček mají stejné znaménko, musí se jednat o spojky, a nikoliv o rozptylky (jinak by nemohly vytvořit skutečný obraz za soustavou). Ohnisková vzdálenost spojky je kladná, takže z rovnice (21) vyplývá $f_k > f_v$. K hodnotám f_k a f_v tak můžeme přiřadit jednotlivé kořeny z (20)

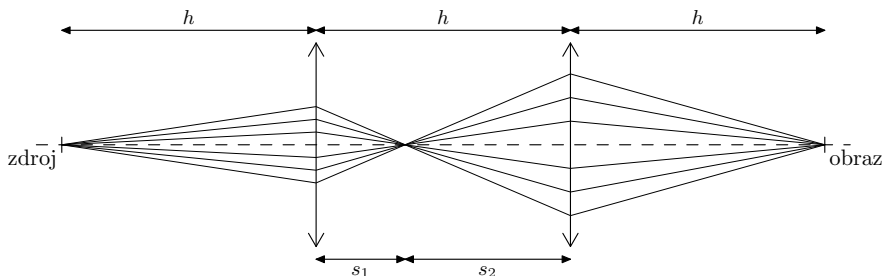
$$f_k = \frac{11 + \sqrt{91}}{30}h, \quad f_v = \frac{11 - \sqrt{91}}{30}h.$$

Z rovnice (21) pro f_k si vyjádříme konstantu K , kterou dosadíme do vztahu pro f_v . Odtud si vyjádříme poměr f_k/f_v , za který dosadíme z předchozí rovnice. Po několika drobných úpravách dostáváme

$$\frac{\frac{n_c}{n_v} - 1}{\frac{n_c}{n_k} - 1} = \frac{f_k}{f_v} = \frac{11 + \sqrt{91}}{11 - \sqrt{91}}.$$

Nyní už stačí jen vyjádřit hledaný index lomu neznámé kapaliny

$$n_k = \left(\frac{11 - \sqrt{91}}{11 + \sqrt{91}} \left(\frac{n_c}{n_v} - 1 \right) + 1 \right)^{-1} n_c \doteq 1,87.$$



Obr. 2: Schéma optické soustavy.

Úloha IV.5 ... zkratka napříč časem

Jáchym se nachází v dvoudimenzionálním kartézském prostoru v bodě $J = (-2a, 0)$. Chce se co nejrychleji dostat do bodu $T = (2a, 0)$, který se (naštěstí) nachází ve stejném prostoru. Jáchym se zásadně pohybuje rychlostí o velikosti v . Aby to nebylo tak jednoduché, prostorem vede pojízdný pás ve tvaru přímky, procházející body $(-3a, 0)$ a $(0, a)$, po kterém se Jáchym pohybuje celkovou rychlostí kv . Pro jaké minimální $k \geq 1$ se Jáchymovi vyplatí jít po pásu?

Nejdříve spočítáme čas, za který Jáchym přejde přes pás. Nejrychlejší cesta bude mít zřejmě tři části – z bodu J na pás (průsečík prvního úseku dráhy a pásu označíme J'), kousek po pásu (až do bodu T') a nakonec z pásu do bodu T .

Označme $x_0 = -3a$ a $y_0 = a$, což jsou body, ve kterých pás protíná osu x , resp. y . Pro úhel mezi pásem a osou x platí

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{y_0}{x_0}. \quad (22)$$

Z bodů J a T povedeme na přímku danou pásem kolmice, jejich délka necht' je po řadě d_1 a d_2 . Od místa průsečíků kolmic a přímky vyznačíme vzdálenosti l_1 , resp. l_2 do bodů J' , resp. T' , viz obrázek 3. Spojnici J a J' nazveme dráha s_1 , stejně tak spojnici T a T' označíme s_2 . Z Pythagorovy věty máme $s_{1,2}^2 = d_{1,2}^2 + l_{1,2}^2$.

Nyní odvodíme podmínku pro nejkratší čas. Představme si, že Jáchym jde z bodu J do bodu P na pásu, který se nachází ve vzdálenosti p průsečíku kolmice d_1 a pásu. Nejdříve tedy ujde vzdálenost s_1 rychlostí v , potom ujde vzdálenost $p - l_1$ rychlostí kv . Celkový čas bude

$$t = \frac{s_1}{v} + \frac{p - l_1}{kv} = \frac{1}{v} \left(s_1 + \frac{p - l_1}{k} \right).$$

Za s_1 si dosadíme z Pythagorovy věty výše, čímž dostaneme závislost času na l_1 . Zbylé parametry (d_1 a p) jsou konstanty. Minimum času najdeme položením derivace rovné nule

$$\frac{dt}{dl_1} = \frac{d}{dl_1} \left(\frac{1}{v} \left(\sqrt{d_1^2 + l_1^2} + \frac{p - l_1}{k} \right) \right) = \frac{1}{v} \left(\frac{l_1}{\sqrt{d_1^2 + l_1^2}} - \frac{1}{k} \right) = 0.$$

Řešením této rovnice dostaneme podmínku $d_1 = l_1\sqrt{k^2 - 1}$, která zřejmě bude platit i pro d_2 a l_2 . Všimněme si, že konstanta p může být libovolná za předpokladu, že l_1 vyjde menší. Opětovným dosazením do Pythagorovy věty odvodíme vztah $s_{1,2} = kl_{1,2}$.

Celkový čas cesty je

$$t = \frac{s_1 + s_2}{v} + \frac{l - (l_1 + l_2)}{kv} = \frac{1}{kv} \left((d_1 + d_2) \sqrt{k^2 - 1} + l \right),$$

kde l je vzdálenost na přímce od jedné kolmice k druhé, tedy $l = 4a \cos \varphi$. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá

$$\begin{aligned} d_2 - d_1 &= l \operatorname{tg} \varphi, \\ d_1 &= -\frac{x_0 + 2a}{4a} l \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned}$$

což vede na

$$d_1 + d_2 = -\frac{x_0}{2a} l \operatorname{tg} \varphi.$$

Dosazením do rovnice výše dostáváme

$$t = \frac{4a \cos \varphi}{v} \frac{1}{k} \left(1 - \frac{x_0}{2a} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{k^2 - 1} \right).$$

Podíl $4a$ a v je zřejmě čas, který by Jáchymovi trvala cesta bez pásu. Pro mezní čas, při kterém se mu ještě vyplatí jít přes pás, platí

$$1 = \frac{\cos \varphi}{k} \left(1 - \frac{x_0}{2a} \operatorname{tg} \varphi \sqrt{k^2 - 1} \right).$$

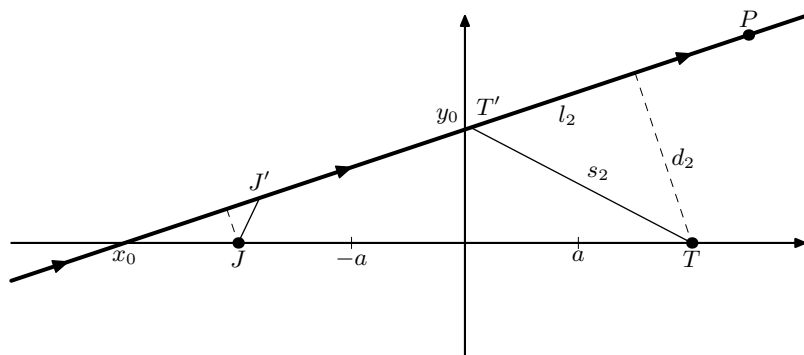
Ještě použijeme identitu $\cos x = (\operatorname{tg}^2 x + 1)^{-\frac{1}{2}}$, za $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3}$ dosadíme z rovnice (22), kde $x_0 = -3$ a $y_0 = 1$, čímž získáme kvadratickou rovnici

$$31k^2 - 24k\sqrt{10} + 45 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení, konkrétně

$$k = \frac{12\sqrt{10} \pm 3\sqrt{5}}{31}.$$

Ještě musíme ověřit, že dráhy budou skutečně vypadat tak, jak jsme předpokládali. Zpětným dosazením zjistíme, že vyhovuje pouze kořen s +, tedy $k \doteq 1,44$.

Obr. 3: Jáchymova cesta pro $k = 1,44$

Úloha IV.P ... klimatické změny feat. letadla

Létání letadlem ovlivňuje atmosféru nejen dobře známými emisemi uhlíku. Diskutujte, jaký vliv má letecký průmysl na oteplování atmosféry Země.

Letecká doprava patří medzi významné antropogénne činitele vplývajúce na klímu Zeme. Komerčné lety sú čoraz populárnejším spôsobom prepravy aj napriek ich výraznejšej uhlíkovej stope v porovnaní s ostatnými spôsobmi prepravy.

Priame zohrievanie

Letecký priemysel za rok 2008 spotreboval 56 TWh energie,³⁰ teda $2,02 \cdot 10^{17}$ J. Pri hmotnosti atmosféry³¹ $5,148 \cdot 10^{18}$ kg a mernej tepelnej kapacite vzduchu³² $1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ sa atmosféra za daný rok iba vplyvom leteckej dopravy ohriala o

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} \doteq 4 \cdot 10^{-5} \text{ K}.$$

Efekty ako ohrev runway-e trením pri vzlete a brzdení sú rádovo ešte menšie. Teda na ohrev klímy od lietadiel samotných nie je táto energia dostatočná. Pôvod ohrevu preto musíme hľadať mimo Zeme.

Skleníkový efekt

Konkrétne ide o slnečné žiarenie dopadajúce na Zem. Mnohé štúdie naznačujú, že dlhodobé otepľovanie klímy Zeme je spôsobené najmä skleníkovým efektom predovšetkým ľudského pôvodu. Podstatou vplyvu je práve emisia skleníkových plynov, aerosólov a zmena oblačnosti v hornej časti troposféry. Pri prelete lietadla

³⁰<https://cs.wikipedia.org/wiki/Letectví>

³¹https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth

³²https://www.ohio.edu/mechanical/thermo/property_tables/air/air_Cp_Cv.html, merná tepelná kapacita vzduchu sa v skutočnosti mení s výškou, nám ide však len o odhad

dochádza k tvorbe kondenzačných stôp a následnému vzniku cirrových oblakov. Tie taktiež prispievajú k zmienenému javu.³³

Vďaka dominancii oxidu uhličitého ako produkovaného skleníkového plynu, je jeho vplyv na zvyšovanie teploty atmosféry najlepšie preskúmaný. Preto je pre nás výhodne využiť koncept CO₂ ekvivalentu. Myšlienka je jednoduchá - namiesto toho, aby sme počítali efekt každého plynu či zmeny oblačnosti na atmosféru osobitne, nahradíme ich objemom oxidu uhličitého, ktorý by mal pri vypustení do atmosféry rovnaký efekt. Z podstaty myšlienky vyplýva linearita riešenia. Ak vieme, v akom pomere sú jednotlivé emisie, vieme nájsť multiplikatívny koeficient objemu vypusteného CO₂, ktorý bude reprezentovať všetky vplyvy. V prípade, že započítavame tvorbu cirrových oblakov, je multiplikatívny koeficient produkovaného oxidu uhličitého približne 1,7.³⁴ Dopad tvorby cirrov je znateľný – ak by sme vylúčili takéto zmeny oblačnosti, koeficient poklense na úroveň asi 1,3.

V roku 2019 z objemu vyprodukovaného oxidu uhličitého patrili 2 %, teda $9,15 \cdot 10^{11}$ kg, práve leteckému priemyslu. Z celkového objemu emisií CO₂ z dopravy to tvorí 12 %.³⁵ Pre porovnanie, množstvo uvoľneného CO₂ na osobu na kilometer je pre vnútroštátne lety (133 g) nižšie ako pre auto s jedným pasažierom (171 g). Lety medzištátne (102 g) sú porovnateľné s autobusovou dopravou (104 g). Auto so štyrmi cestujúcimi či vlak sú výrazne efektívnejšie, a to na úrovni 40 g.³⁶ Nesmieme však zabúdať, že osobná preprava nie je jediným druhom prepravy. V bežný deň je v Spojených štátoch amerických realizovaných viac ako 87 000 letov. Z toho je približne 28 500 komerčných letov (veľkých a regionálnych leteckých spoločností), 27 200 letov všeobecného letectva (súkromné lietadlá), 24 600 letov leteckých taxíkov (lietadlá na prenájom), 5 300 vojenských letov a 2 100 nákladných letov (Federal Express, UPS atď.).³⁷ Využitím ekvivalentu CO₂ dostávame efektívne množstvo emisií oxidu uhličitého $1,7 \cdot 9,15 \cdot 10^{11} \text{ kg} \cdot \text{y}^{-1} = 1,55 \cdot 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{y}^{-1}$.

Citlivosť atmosféry na zmeny jej zloženia je *horúcou* témou fyziky atmosféry. V súčasnosti sú tu tri hlavné ukazovatele, ktoré vedci využívajú. Rovnovážna citlivosť klímy (ECS - equilibrium climate sensitivity) sa vzťahuje k rovnovážnym zmenám globálnej priemernej teploty vzduchu v blízkosti zemského povrchu, ktorá by zodpovedala trvalému zdvojnásobeniu atmosférickej koncentrácie oxidu uhličitého oproti pre-industriálnej ére (280 ppm). Vyplýva to z faktu, že zmeny klímy v závislosti na zmenách koncentrácie CO₂ vyžadujú čas. Oceán funguje ako veľký zásobník tepla a navyše sa vo vode oxid uhličitý rozpúšťa, preto by pri zdvojnásobení jeho objemu nastali rovnovážne podmienky až za niekoľko desiatok rokov. Postupná klimatická odozva (TCR - transient climate response) zodpovedá zmene teploty, opäť pri zdvojnásobení koncentrácie, avšak pri postupnom zvyšovaní o 1 % za rok. Od ECS sa líši práve tým, že ešte nedošlo k termodynamickému rovnováhe. Senzitivita zemského systému (ESS - earth system sensitivity) zahŕňa dlhodobé reakcie systému, ako zmeny hrúbky ľadovej pokrývky, distribúcie vegetácie

³³<https://www.nature.com/articles/nclimate1068>

³⁴<https://doi.org/10.1007/s10584-011-0168-8>

³⁵<https://www.atag.org/facts-figures.html>

³⁶<https://www.bbc.com/news/science-environment-49349566>

³⁷<https://sos.noaa.gov/datasets/air-traffic/>

a mnoho ďalšieho. Medzivládny panel o zmene klímy (The Intergovernmental Panel on Climate Change) pri Organizácii spojených národov vo svojej piatej (šiesta je na programe roku 2022) hodnotiacej správe predpovedá ECS v rozmedzí $1,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $4,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ a TCR $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$.³⁸

Ak poznáme hmotnosť Zemskej atmosféry m_{atm} , jej molárnu hmotnosť M_{atm} a počet molekúl CO_2 na milión častíc k_{CO_2} , dokážeme zistiť počet častíc oxidu uhličitého v atmosfére ako

$$n_{\text{CO}_2} = \frac{k_{\text{CO}_2} m_{\text{atm}}}{1 \cdot 10^6 M_{\text{atm}}}.$$

Hmotnosť oxidu uhličitého v atmosfére potom dostaneme ako

$$m_{\text{CO}_2} = n_{\text{CO}_2} M_{\text{CO}_2},$$

kde M_{CO_2} je molárna hmotnosť CO_2 . Zemská atmosféra má hmotnosť približne $m_{\text{atm}} = 5,15 \cdot 10^{18}$ kg, molárnu hmotnosť³⁹ $M_{\text{atm}} = 28,96$ g·mol⁻¹ a $M_{\text{CO}_2} = 44,01$ g·mol⁻¹ je molárna hmotnosť oxidu uhličitého.⁴⁰ V súčasnosti je v atmosfére $k_{\text{CO}_2} = 413,31$ ppm. Dostávame teda, že v atmosfére je približne $3,23 \cdot 10^{15}$ kg CO_2 . Táto koncentrácia dosiahne dvojnásobok pre-industriálnej hodnoty $m_{\text{CO}_2} = 2,19 \cdot 10^{15}$ kg CO_2 , ak vypustíme ešte ďalších $1,15 \cdot 10^{15}$ kg. Súčas-

nou ročnou produkciou $3,62 \cdot 10^{13}$ kg·y⁻¹ takúto koncentráciu dosiahneme za 31,8 rokov.⁴¹ V prípade, že by sme prestali využívať letecký priemysel, rovnaký efekt docielime za 32,6 rokov. Táto predpoveď ale nezahŕňa prirodzený cyklus koncentrácie CO_2 , nárast či naopak možnú sprísnenú redukciu emisií a ani iné skleníkové efekty. Vidíme však, že letectvo má síce malý, ale nezanedbateľný vplyv na klímu Zeme.

Úloha V.1 ... vlak na mostě

Na mostě dlouhém 300 m stojí nákladní vlak, jehož váha je rovnoměrně rozložena na plochu všech devíti ocelových pilířů mostu. Každý pilíř má podstavu tvaru čtverce se stranou $a = 2,0$ m a je vysoký $h = 10$ m. O kolik sa vlivem tíhy vlaku stlačí ocelové pilíře? Modul pružnosti oceli v tlaku je $E = 200$ GPa, celková hmotnosť vlaku je $m = 574$ t.

Nech Δh je zmena výšky každého piliera. Podľa Hookovho zákona platí

$$\sigma = E\varepsilon,$$

kde $\sigma = \frac{F}{S}$ je napätie v tlaku a $\varepsilon = \frac{\Delta h}{h}$ je relatívne skrátene.

Plocha jedného piliera je jednoducho $S_0 = a^2$. Počet pilierov označíme n , celkovo teda stlačáme materiál o kolmom priereze $S = nS_0$. Celková tiažová sila,

³⁸<https://www.ipcc.ch/report/ar5/syr/>

³⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Atmosphere_of_Earth

⁴⁰https://cs.wikipedia.org/wiki/Oxid_uhličitý

⁴¹<https://ourworldindata.org/co2-and-other-greenhouse-gas-emissions#annual-co2-emissions>

ktorou vlak pôsobí rovnomerne na všetky piliere, je $F = mg$. Z Hookovho zákona vyjadríme hľadanú zmenu výšky

$$\Delta h = \frac{Fh}{SE} = \frac{mgh}{na^2E} \doteq 7,8 \mu\text{m}.$$

Dostávame teda, že každý pilier sa vplyvom tiaže vlaku stlačí asi o $7,8 \mu\text{m}$.

Úloha V.2 . . . pohne sa?

Jáchym chce doma nakladať zelí, a tak si kúpil válcový sud. Z obchodu ho však musí nejak dostať metrom domú. Sud i s víkcom si môžeme predstaviť ako dutý válec s vonjším polomerom r a s vonjšou výškou h . Šírka stien, podstavy i víka je t . Sud je vyrobený z materiálu s hustotou ρ . S jakým najväčším zrýchlením sa môže souprava metra pohybovať, aby sa voľne stojící sud vůči ní nijak nepohnul? Koeficient tření mezi podlahou vagonu a sudem je f .

Najprv si musíme rozmyslieť, ako sa môže sud uviesť do pohybu. Máme dve možnosti - buď sa začne šmýkať po podlahe, alebo sa prevrhne. Na sud pôsobia v neinerciálnej sústave vlaku tiažová sila $F_g = mg$ pôsobiaca v ťažisku zvislo nadol, sila zotrvačná $F_z = ma$, pôsobiaca v ťažisku vodorovne, a sila trecia F_t pôsobiaca v strede dotykovej plochy vo vodorovnom smere. Ťažisko dutého valca sa nachádza v jeho strede.

Aby sa sud nehýbal, musí byť výsledná sila vo vodorovnom smere nulová. Musí teda platiť

$$ma \leq F_t = fmg,$$

kde sme použili podmienku statického trenia. Po zjednodušení dostávame $a \leq fg$. Ak táto podmienka nie je splnená, sud sa začne šmýkať dozadu.

Aby sa sud neprevrhol, musí byť výsledný moment síl pôsobiaci na sud nulový. Ak výslednica zotrvačnej a tiažovej sily smeruje do podstavy, reakčná sila podložky tento moment vykompenzuje. Problém nastane v okamihu, keď začne výslednica pôsobiť smerom k okraju podstavy. Pre väčšiu zotrvačnú silu, a teda vyššie zrýchlenie metra, sa sud prevrhne. Pre tento hraničný stav máme z podobnosti trojuholníkov

$$\frac{a}{g} = \frac{2r}{h}.$$

Pro zachování stability sudu tak platí

$$a \leq \frac{2r}{h}g.$$

Sud sa teda prevrhne pri menšom z dvojice spočítaných zrýchlení. Všimnime si, že veľkosť tohto zrýchlenia nezávisí na hustote ani hrúbke stien sudu a bola by rovnaká aj pre sud plný kapusty.

Úloha V.3 ... Matějova vysněná koule

Přesně na hraně stolu leží homogenní koule o poloměru r . Jelikož je to „polovratká“ poloha, začne koule padat ze stolu. Na jakou úhlovou rychlost se roztočí? Předpokládejte, že koule neprokluzuje.

Jakmile koule začne padat, začne se roztáčet okolo bodu dotyku se stolem (tedy přesně na hraně stolu). V určitém okamžiku ale odstředivá síla převáží a koule se od stolu oddělí a dál se bude od stolu vzdalovat. To může nastat ještě předtím, než se otočí o 90° . Úhel, o který se koule pootočí kolem hrany stolu vůči původní poloze, označíme φ .

Budeme se zabývat situací před oddělením koule od stolu. Jelikož je tření dostatečně velké, můžeme vyjít ze zákona zachování energie.⁴² Změna potenciální energie při náklonu o úhel φ je

$$\Delta E = mgr(1 - \cos \varphi) .$$

Kinetická energie koule otáčející se kolem bodu na jejím povrchu je

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{7}{10} m r^2 \omega^2 ,$$

kde ω je úhlová rychlost a J je moment setrvačnosti vůči bodu otáčení, který jsme spočítali pomocí Steinerovy věty

$$J = \frac{2}{5} m r^2 + m r^2 = \frac{7}{5} m r^2 .$$

Z rovnosti energií můžeme vyjádřit vztah mezi úhlem náklonu φ a úhlovou rychlostí

$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{7r}(1 - \cos \varphi)} .$$

Koule se odpojí ve chvíli, kdy odstředivé zrychlení $r\omega^2$ překoná dostředivé zrychlení způsobené složkou tíhového zrychlení $g \cos \varphi$. Z rovnosti zrychlení dostáváme

$$g \cos \varphi = r\omega^2 = \frac{10g}{7}(1 - \cos \varphi) ,$$

$$\cos \varphi = \frac{10}{17} .$$

Dosazením do vztahu pro ω už snadno spočítáme úhlovou rychlost v okamžiku odpojení

$$\omega = \sqrt{\frac{10g}{17r}} .$$

Tato úhlová rychlost kouli zůstane po celou dobu pádu, protože na ní už nebude působit žádný další moment sil.

⁴²Energie se nikde neztrácí, nic neprokluzuje ani nedochází k žádným nepružným srážkám.

Úloha V.4 ... podivná smyčka

Kruhová kovová smyčka s poloměrem $r = 15$ cm má hmotnost $m = 18$ g. Pokud bychom ji rozstříhli, vznikl by drát s odporem $R = 3,5$ m Ω . Na počátku je smyčka v klidu. V čase $t = 0$ zapneme homogenní magnetické pole kolmé k rovině smyčky s časovým průběhem $B(t) = \alpha t$, kde $\alpha = 1$ mT \cdot s $^{-1}$ je konstanta. Smyčka se v důsledku přítomnosti nestacionárního magnetického pole začne nepatrně otáčet kolem své osy. Určete velikost úhlové rychlosti ω v čase $t = 0,1$ s. Deformaci smyčky neuvážíte.

Úloha je obtížná především tím, že není na první pohled zřejmý mechanismus roztažení smyčky. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se ve smyčce indukuje elektrický proud, který je realizován tokem elektronů nesoucích záporný náboj. Tok těchto elektronů má vůči ose smyčky nenulový moment hybnosti. Vzhledem k tomu, že výsledný moment síly elektromagnetického pole od zdroje působící na smyčku vůči její ose je nulový, zachovává se nulová hodnota celkového momentu hybnosti smyčky vůči její ose. Nenulový moment hybnosti vodivostních elektronů je proto kompenzován momentem hybnosti smyčky, což znamená, že se smyčka začne otáčet.

Přesvědčme se, že je výsledný moment síly elektromagnetického pole od zdroje působící na smyčku vůči její ose nulový. Nestacionární magnetické pole zdroje generuje elektrické pole, které se na smyčce projevuje jako indukované napětí, což vyplývá z Faradayova zákona elektromagnetické indukce. Toto elektrické pole má nenulovou tangenciální složku, a proto na nabitě částice smyčky bude působit nenulový moment síly. V elektricky neutrální smyčce je však stejné množství záporného a kladného náboje, které jsou makroskopicky stejně prostově rozloženy. Moment síly elektrického pole zdroje je nulový. Jakmile smyčkou začne protékat elektrický proud, působí na smyčku v daném místě magnetická síla kolmá na směr elektrického proudu a na směr magnetické pole. Magnetická síla je proto v daném místě radiální a dává nulový příspěvek k silovému momentu. Efekt magnetické síly se vyruší až pro celou smyčku, neboť na opačných stranách smyčky má magnetická síla opačnou orientaci. Poznamenejme na tomto místě, že magnetická síla, která je v daném místě smyčky radiální, má snahu smyčku deformovat, a to tak, že změní její poloměr. Tento efekt je i v naší úloze zanedbatelný.

Nyní provedeme výpočet. Podle Faradayova zákona elektromagnetické indukce se na smyčce indukuje elektrické napětí U dané časovou změnou toku Φ magnetického pole smyčkou o velikosti

$$U = \frac{d\Phi}{dt} = S \frac{dB}{dt}, \quad (23)$$

kde S je plocha části roviny ohraničené smyčkou. Tímto napětím U rozumíme změnu elektrického potenciálu při jednom oběhu smyčky. Podle Ohmova zákona bude smyčkou procházet elektrický proud

$$I = \frac{U}{R}. \quad (24)$$

Označme N počet volných (vodivostních) elektronů ve smyčce. Proud I je roven velikosti náboje, který proteče průřezem smyčky za jednotku času, neboli

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{Nev}{l}, \quad (25)$$

kde e je elementární náboj, v je driftová (střední) rychlost elektronů tvořících elektrický proud a l značí délku smyčky (její obvod). Dosazením elektrického proudu I (rovnice (25)) do Ohmova zákona (rovnice (24)) a úpravou dostaneme vztah pro napětí U ,

$$U = \frac{NRev}{l}. \quad (26)$$

Srovnáním napětí ze vztahu (23) se vztahem (26) a opět jednoduchou úpravou dostáváme rovnost

$$Nv = \frac{Sl}{Re} \frac{dB}{dt}. \quad (27)$$

Velikost momentu hybnosti L vodivostních elektronů ve smyčce je rovna

$$L = Nm_evr,$$

kde m_e je hmotnost elektronu. Po dosazení z rovnice (27) dostáváme

$$L = \frac{Slm_e r}{Re} \frac{dB}{dt}.$$

Na smyčku působí nulový výsledný moment síly, a proto se celkový moment hybnosti zachovává. Na počátku byl moment hybnosti smyčky vzhledem k ose smyčky nulový, a proto je moment hybnosti vodivostních elektronů kompenzován stejně velkým, opačně orientovaným momentem hybnosti otáčející se smyčky. Velikost momentu hybnosti L' smyčky je rovna

$$L' = m\omega r^2.$$

Srovnáním velikosti momentu hybnosti smyčky a vodivostních elektronů vzhledem k ose smyčky dostáváme rovnost

$$\frac{Slm_e r}{Re} \frac{dB}{dt} = m\omega r^2.$$

Odtud pro velikost úhlové rychlosti ω platí

$$\omega = \frac{Slm_e}{mRe r} \frac{dB}{dt}.$$

Časová změna proudu je v našem případě rovna

$$\frac{dB}{dt} = \frac{d(\alpha t)}{dt} = \alpha.$$

Plocha S je rovna $S = \pi r^2$ a délka l smyčky je rovna $l = 2\pi r$. Pro velikost úhlové rychlosti v libovolném čase (a tedy i v čase $t = 0,1$ s) dostáváme vztah

$$\omega = \frac{2\pi^2 r^2 \alpha m_e}{m R e}.$$

Po číselném dosazení hodnot ze zadání a fyzikálních konstant dostáváme číselný výsledek

$$\omega = 4,0 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}.$$

Uvědomme si ještě, že při výpočtu jsme zanedbali elektrický proud tvořený otáčením kladně nabitě smyčky. Tento proud je však vzhledem k poměru hmotnosti smyčky a vodivostních elektronů asi o 4 řády menší než proud elektronů.

Dodejme ještě poznámku pro pokročilé. Tvrzení na začátku řešení o zachování momentu hybnosti smyčky není správně odůvodněno. Vysvětlíme proč. Samotné elektromagnetické pole nese hybnost (v teorii elektromagnetismu se používá hustota hybnosti elektromagnetického pole v daném místě), a proto má také moment hybnosti vzhledem ke vztažné ose. Potom to, co se v naší úloze ve skutečnosti zachovává, je celkový moment hybnosti smyčky a elektromagnetického pole generovaného proudem ve smyčce. Z výpočtu výše plyne, že elektrický proud je v naší úloze konstantní. Tomu odpovídá stacionární magnetické pole, které negeneruje netriviální elektrické pole. A až fakt, že samotné magnetické pole bez pole elektrického má nulovou hybnost, nás ospravedlňuje tvrdit, že je moment hybnosti smyčky konstantní.

Úloha V.5 ... opticko-relativistická

Určete, jaký fázový posun $\Delta\Phi$ vznikne přechodem laserového svazku s vlnovou délkou λ_0 přes skleněnou desku s klidovou tloušťkou h a s indexem lomu n , která se pohybuje ve směru svazku rovnoměrně rychlostí v , oproti případu, kdy je deska vůči zdroji i pozorovateli v klidu. Zajímá nás především první nenulový člen rozvoje podle rychlosti desky.

Najprv si treba rozmysliet, akým spôsobom sa daný experiment na meranie fázového posuvu dá realizovať. Majme pevný zdroj laserového (tj. koherentného a monochromatického) svetla a voči nemu nepohyblivý detektor. Medzi ne vložíme sklenenú dosku. Keď s doskou začneme pohybovať, daná fáza vlnenia bude prichádzať do zdroja v o trochu posunutom čase. Tento posun označme $\Delta\tau$. Fázový posun potom určíme jednoducho ako

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi c \Delta\tau}{\lambda_0}.$$

Nech sa doska pohybuje od zdroja. V okamihu vzniku sledovanej fázy svetelnej vlny do dosky položíme

$$\begin{aligned} t_0 = t'_0 &= 0, \\ x_0 = x'_0 &= 0, \end{aligned}$$

kde čiarkované, resp. nečiarkované veličiny popisujú čas a polohu v inerciálnej sústave spojenjej s rovnomerne sa pohybujúcou doskou, resp. v inerciálnej sústave spojenjej so zdrojom.

V okamihu opustenia skla bude svetlo v sústave spojenjej so sklom mať súradnice

$$(t', x') = \left(\frac{nh}{c}, h \right),$$

keďže v skle sa svetlo pohybuje rýchlosťou $v = c/n$. Toto môžeme pomocou inverznej Lorentzovej transformácie previesť na čas a polohu v sústave spojenjej so zdrojom

$$\begin{aligned} t &= \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) = \gamma \left(\frac{nh}{c} + \frac{vh}{c^2} \right), \\ x &= \gamma (x' + vt') = \gamma \left(h + \frac{vnh}{c} \right), \end{aligned}$$

kde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ je Lorentzov faktor.

Určme najprv časový posun medzi lúčom, ktorý prechádza pohybujúcou sa doskou, a lúčom, ktorý doskou vôbec neprechádza (napr. realizujeme paralelne ďalší experiment). Je zrejme, že stačí tento posun určiť v mieste výstupu prvého lúča z dosky, keďže ďalej vo vákuu zostáva tento rozdiel stály. V mieste x bude druhý lúč v čase

$$t_2 = \frac{x}{c} = \frac{\gamma}{c} (x' + vt') = \gamma \left(\frac{h}{c} + \frac{vnh}{c^2} \right).$$

Rozdiel času prechodu detektorom bude

$$\begin{aligned} \Delta t(v) &= t - t_2 = \gamma \left(\frac{nh}{c} + \frac{vh}{c^2} \right) - \gamma \left(\frac{h}{c} + \frac{vnh}{c^2} \right) = \frac{\gamma h}{c} \left(n + \frac{v}{c} - 1 - \frac{vn}{c} \right) = \\ &= \frac{\gamma h}{c} (n - 1) \left(1 - \frac{v}{c} \right). \end{aligned}$$

Otázka sa pýta na rozdiel medzi pohybujúcou sa a statickou doskou, teda

$$\begin{aligned} \Delta \tau &= \Delta t(v) - \Delta t(0) = \frac{\gamma h}{c} (n - 1) \left(1 - \frac{v}{c} \right) - \frac{h}{c} (n - 1) = \\ &= \frac{h}{c} (n - 1) \left(\gamma \left(1 - \frac{v}{c} \right) - 1 \right) = \frac{h}{c} (n - 1) \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pre výsledný fázový rozdiel potom dostávame

$$\Delta \Phi = \frac{2\pi h (n - 1)}{\lambda_0} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} - 1 \right).$$

Můžeme vidieť, že splňa rozumné predpoklady, ktoré na výsledok kladieme – je úmerný hrúbke dosky a je nulový pre $v = 0$ (nepohyblivú dosku) a pre $n = 1$ (dosku z vákua). Na záver vykonáme rozvoj v premennej v/c . Pre funkciu

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

môžeme napísať Taylorov rad

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i = \\ &= 1 + \left. \frac{-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{1+x} \right|_{x=0} x + O(x^2) = \\ &= 1 - x + O(x^2) \approx 1 - x. \end{aligned}$$

Teraz už iba dosadíme do vzťahu pre fázový rozdiel

$$\Delta\Phi \approx -\frac{2\pi h\nu(n-1)}{\lambda_0 c}.$$

Jedná sa teda o efekt prvého rádu, ktorý by dokonca mohol byť pozorovateľný. Pre pohyb dosky s hrúbkou rádovo v decimetroch rýchlosťou v jednotkách metrov za sekundu a pre UV laser dostávame hodnotu fázového posunu v ráde 10^{-2} . V praktickej realizácii ale budú asi prevažovať ostatné vplyvy nedokonalosti dosky a disperzia jej indexu lomu. V doske má totiž svetlo vlnovú dĺžku posunutú Dopplerovým javom (v sústave spojenej s doskou, v ktorej sa popisuje interakcia svetla s látkou, ktorá dáva vznik indexu lomu) a na tejto inej vlnovej dĺžke teda môže byť o trochu iný index lomu.

Úloha V.P ... budiž svetlo

Odhadňte čas, ktorý uplyne medzi stlačením vypínača a rozsvícením svetelného zdroje. Zvlášť vyrešte pro žiarovku, zářivku, LED a neonovou trubici. Diskutujte co nejmíc faktorů, které tento čas ovlivňují.

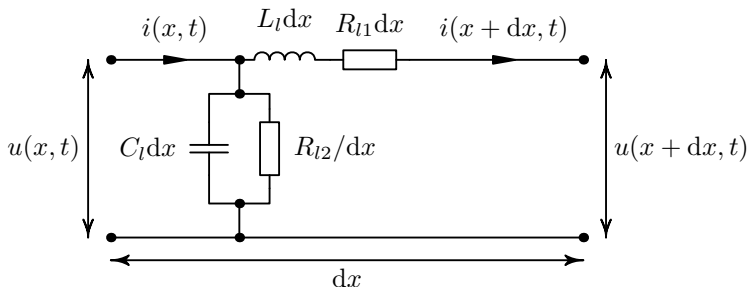
To, ako rýchlo sa rozsvieti svetelný zdroj od stlačenia vypínača, závisí na dvoch základných dejoch

- ako rýchlo sa preniesie informácia o zopnutí obvodu do svetelného zdroja,
- ako rýchlo je svetelný zdroj schopný premeniť elektrickú energiu na svetlo.

Pri prenose informácie je dôležité uvedomiť si, čo to je a ako sa to šíri. Svetelný zdroj potrebuje pre svoju činnosť energiu, ktorú sme do teraz nazývali informáciou o zopnutí. Energia sa v elektrických obvodoch šíri prostredníctvom elektromagnetického poľa. Nesprávnou úvahou by bolo skúmať rýchlosť šírenia samotných elektrónov, musíme skúmať rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny vo vedení.

Prenosová sústava

Uvažujme, že vypínač je spojený so svetelným zdrojom prostredníctvom homogénneho vedenia. Takéto vedenie má rovnaké vlastnosti po celej svojej dĺžke a jednotlivé druhy energie elektromagnetického poľa sú spojito rozprestreté pozdĺž jeho vodičov. Elementárny úsek jeho náhradného zapojenia je znázornený na obrázku 4. Ide o element celkovej dĺžky vedenia dx , kde C_l je merná kapacita, L_l je merná indukcia a R_{l1}, R_{l2} je merný odpor vedenia. Veličiny L_l a R_{l1} sú merané pozdĺž vedenia a sú vzťahované na jednotkovú dĺžku, zatiaľ čo C_l a R_{l2} sú merané priečne a tiež sú vzťahované na jednotkovú dĺžku vodiča. Avšak odpor R_{l2} je potrebné deliť dĺžkou elementu (pri nulovej dĺžke by bol zrejme priečný odpor nekonečný, jednotka R_{l2} je $\Omega \cdot \text{m}$ narozdiel od klasického dĺžkového odporu).



Obr. 4: Schéma obvodu.

Obvodové veličiny vo vedení sú funkciami času t a pozdĺžnej vzdialenosti x . Pomocou Kirchhoffových zákonov dostávame pre element vedenia nasledujúce vzťahy

$$u(x, t) = i(x + dx, t)R_{l1}dx + \frac{\partial i(x + dx, t)}{\partial t}L_l dx + u(x + dx, t),$$

$$i(x, t) = i(x + dx, t) + \frac{u(x, t)}{R_{l2}}dx + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}C_l dx.$$

Uvažovaním limity

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

a analogicky pre prúd, dostávame základné rovnice vedenia

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial x} &= R_{l1}i + L_l \frac{\partial i}{\partial t}, \\ -\frac{\partial i}{\partial x} &= \frac{u}{R_{l2}} + C_l \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ich deriváciou a vzájomnou elimináciou premenných získavame vlnovú rovnicu napätia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{L_l}{R_{l2}} + C_l R_{l1} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R_{l1}}{R_{l2}} u.$$

Keďže skúmame vlastnosti vedenia z časového hľadiska, zaujímajú nás predovšetkým časovo zotrvačné vlastnosti ako sú kapacita a indukčnosť (prvky C_l a L_l). Pre zjednodušenie preto môžeme uvažovať bezstratové vedenie a rezistivitu v pozdĺžnom smere vodiča položiť rovnú nule ($R_{l1} = 0$). Ďalej uvažujeme, že priečna rezistivita je veľmi veľká ($R_{l2} \rightarrow \infty$), inak by si priečna kapacita v rovniach nezahrála. Potom dostávame vzťah

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_l C_l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &\Rightarrow \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} = \frac{1}{L_l C_l}, \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{L_l C_l}} &= v, \end{aligned}$$

kde v je rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny vodičom. Zaujímá nás, aký odpor kladie vedenie (vodič) pohybu elektromagnetickej vlny. Môžeme preto písať $L = \tilde{\mu}_r \mu_0$ a $C = \tilde{\epsilon}_r \epsilon_0$, kde $\tilde{\mu}_r$ je relatívna permeabilita a $\tilde{\epsilon}_r$ je relatívna permitivita vedenia. Sú to číselné faktory závislé na geometrii a materiáli konkrétneho vedenia. Dosadením získame

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}_r \mu_0 \cdot \tilde{\epsilon}_r \epsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\tilde{\mu}_r \tilde{\epsilon}_r}}.$$

Zistili sme, že rýchlosť v závisí iba na relatívnej permeabilite a permitivite vodiča a platí $v \leq c$. Z elektrotechnickej praxe je známe, že v dobrých vodičoch sa signál šíri rýchlosťou 0,9c a v horších vodičoch 0,8c.⁴³ Taktiež platí, že pri dostatočne vysokých frekvenciách sa kapacitory začínajú správať ako rozpojené obvody a induktory ako skraty. V takýchto prípadoch sa so zvyšujúcou frekvenciou bude rýchlosť v limitne blížiť c .

Uvažujme bežný vodič s rýchlosťou šírenia $v = 0,85c$ a typické sieťové napätie o frekvencii 50 Hz. Pri takto malej frekvencii môžeme jej účinky na rýchlosť šírenia elektromagnetickej vlny zanedbať. Čas potrebný pre prenos informácie o zopnutí obvodu do svetelného zdroja je $t = \frac{l}{0,85c}$, kde l je dĺžka vedenia a c je rýchlosť svetla vo vákuu. Pre dĺžku vodiča 10 m dostávame odchýlku $t = 3,9 \cdot 10^{-9}$ s, teda rádovo nanosekundy.

Svetelné zdroje

Žiarovka je jednoduchý svetelný zdroj, ktorý emituje svetlo rozžeravením odporovej špirály umiestnenej vo vákuu alebo inertnom plyne. V tomto prípade má skutočne zmysel hovoriť o čase ohrevu (angl. heating-time). Ten závisí na konkrétnej technológii výroby žiarovky, menovite na realizácii tvaru a materiálu odporovej

⁴³ William D. Walker: *Superluminal Propagation Speed of Longitudinally Oscillating Electrical Fields*, Causality and Locality in Modern Physics, Springer Netherlands, 1998

špirály. Keďže žiarovka sa v čase rozsvetuje plynulo, za rozsvietený stav sa bežne považuje dosiahnutie 90 % svietivosti. Z technickej dokumentácie rôznych výrobcov je možné dohľadať, že žiarovky rôznych typov dosahujú 90 % svojej svietivosti v časovom intervale 0,05 s až 0,7 s.⁴⁴ Žiarovky vyšších výkonov majú tendenciu potrebovať dlhší čas ohrevu.

Žiarivka patrí medzi nízkotlaké výbojky a funguje na princípe fluorescence. Elektrický prúd tečie vnútri žiarivky vzácnym plynom s parami ortute. Dochádza pritom k ich excitácii a vyžarovaniu krátkovlnného ultrafialového žiarenia. To dopadá na fosforový plášť, na ktorom dochádza k emitácii viditeľného svetla. Tieto zdroje svetla potrebujú pre svoju funkčnosť štartér, ktorý je priamou súčasťou zariadenia. Jeho úlohou je po zopnutí napájania žiarivky zabezpečiť vznik a udržanie toku elektrického prúdu plynom. Práve táto súčiastka spôsobuje skúmané časové zdržanie. Na základe jeho veľkosti môžeme štartéry rozdeliť do troch skupín:

1. Mechanické štartéry často využívajú bimetalový pásik, ktorý pre štart žiarovky potrebuje niekoľko cyklov. Tie môžeme pozorovať po zopnutí ako po sebe nasledujúcu sériu zábleskov doprevádzanú autentickým zvukovým efektom. Tento druh štartéra sa v súčasnosti používa len zriedka a pre štart potrebuje rádovo jednotky sekúnd. Tento čas závisí na druhu bimetalu, veku štartéra a celkovej technickej kondícii žiarivky.
2. Elektronické predradníky sú rôzne druhy zapojení aktívnej elektroniky zabezpečujúce funkčnosť žiariviek. Medzi najpoužívanejšie patria polo-rezonančný predradník, quick-start predradník alebo rapid-start predradník. Ich spoločnou vlastnosťou je dĺžka štartu blízko (no stále pod) hranicou jednej sekundy.
3. Instant-start predradník patrí medzi štandardné elektronické predradníky, no odlišuje sa od nich veľmi rýchlym štartom. Elektrický prúd žiarivkou je stabilizovaný už po prvých desatinách sekundy.

Neónová trubica je druh nízkotlakej výbojky, ktorý používa ako vzácnny plyn neón. So žiarivkou zdieľa spôsob štartu a platia pre ňu vyššie diskutované časové vlastnosti žiariviek. Dôležité je nesplieť si neónovú trubicu s neónovou lampou - tlejivkou. Tá nepotrebuje štartovací obvod a pracuje na inom princípe.

LED svietidlá sú moderným zdrojom svetla. Jedná sa o polovodičové súčiastky využívajúce jav elektroluminiscencie. Kvalitné LED sú veľmi rýchle a dokážu operovať vo frekvenciách až 50 MHz. Čipy používané vo väčšine bežných svietidiel sú ale pomalšie a dokážu pracovať v oblasti 1 MHz až 5 MHz. Ich reakčný čas sú preto jednotky mikrosekúnd. V praxi sa však LED nepripájajú na rozvodnú sieť priamo, ale prostredníctvom ovládača. Na trhu existuje množstvo variánt tejto elektroniky od jednoduchých zapojení pasívnych súčiastok až po integrované čipy. Čas potrebný pre inicializáciu takéhoto obvodu sa môže pohybovať od stotín až po desatiny sekundy.

Vo všetkých vyššie uvedených zdrojoch svetla je rozumné uvažovať aj priebeh sieťového napätia v čase ich zopnutia. To má sínusový priebeh o frekvencii 50 Hz, no vyššie popísané zdroje svetla a ich ovládače nerozlišujú svojou technickou reali-

⁴⁴ Dulli Agrawal: *Heating-times of tungsten filament incandescent lamps*, World News of Natural Sciences, Vol. 15 11/2017 dostupné online https://www.researchgate.net/publication/320835572_Heating-times_of_tungsten_filament_incandescent_lamps

záciou kladnú a zápornú polvlnu. Môžeme preto uvažovať sieťové napätie zložené z kladných polvln o frekvencii 100 Hz. Ak zopneme vypínač v momente, kedy je priebeh napätia mimo blízkeho okolia amplitúdy, prejaví sa to na svetelnom zdroji ako časové zdržanie. Vlákno žiaroviek sa nestihne dostatočne rozžhaviť a radiaca elektronika štartérov nedobije kapacitory na potrebnú úroveň. Tieto chyby sa však napravia hneď na ďalšej polvlně. Ak uvažujeme funkčnú oblasť okolo amplitúdy ako $\frac{1}{3}$ z dĺžky periódy, môžeme hovoriť o časovom oneskorení až $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{100 \text{ Hz}} \doteq 6,7 \text{ ms}$.

Záver

Elektromagnetická vlna je nosičom energie pre svetelný zdroj a vedením sa pohybuje rýchlosťou blízkou rýchlosti svetla. Takto spôsobené oneskorenie je typicky v nanosekundách. Pridáva sa k nemu oneskorenie spôsobené priebehom sieťového napätia v momente zopnutia intervale $0 - 0,006 \text{ s}$. Napokon prichádza v úvahu rýchlosť samotného svetelného zdroja. Tu to veľmi závisí na jeho druhu a technickej realizácii. Oneskorenie môže byť v rozsahu od pár milisekúnd (LED) až po niekoľko sekúnd (žiarivka).

Úloha VI.1 ... gravitační urychlovač

Jakou energií v elektronvoltech by získal proton při pádu z nekonečna na povrch Země? Neuvažujte vliv jiných vesmírných těles.

Pri páde sa potenciálna energia gravitačného poľa zmení na kinetickú energiu protónu. Gravitačná potenciálna energia má tvar

$$E(r) = -G \frac{Mm}{r},$$

kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitačná konštanta, $M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je hmotnosť Zeme, $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ je hmotnosť protónu a r je vzdialenosť protónu od stredu Zeme. Získanú kinetickú energiu určíme ako

$$E_k = E(\infty) - E(R) = G \frac{Mm}{R},$$

kde $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$ je polomer Zeme. Po dosadení vyjde $E_k = 1,04 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,65 \text{ eV}$. Takáto energia je bežná pre vibračné prechody molekúl alebo elektrónové prechody medzi rôznymi excitovanými elektrónovými stavmi. Podobnú energiu nesie aj fotón infračerveného svetla s vlnovou dĺžkou $\lambda \approx 2 \mu\text{m}$.

Úloha VI.2 ... pod tlakem

Ve vaně je napuštěna voda do výšky 15,0 cm. Špunt má tvar komolého kužele, který dokonale padne do otvoru ve dně (čili výška špuntu je stejná, jako tloušťka dna). Poloměry jeho podstav jsou 16,0 mm a 15,0 mm a jeho hmotnost je 11,0 g. Jakou silou působí dno vany na špunt? Předpokládejte, že v trubce pod ním je vzduch s atmosférickým tlakem.

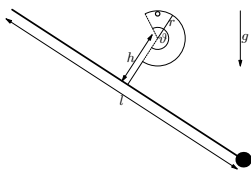
Na špunt působí svrchu tíha atmosféry, tíha vodního sloupce a jeho vlastní váha. Zespodu působí atmosférický tlak a síla ode dna vany. Její hodnotu hledáme. Pozor! Působení atmosférického tlaku na horní a dolní podstavu špuntu se nevyruší, protože podstavy nemají stejnou plochu. Tekutina (kapalina i plyn) může působit vztlakovou silou pouze tam, kde je v přímém kontaktu s tělesem. Označme r_1 poloměr horní podstavy a r_2 poloměr spodní podstavy, h výšku vody ve vaně, m hmotnost špuntu, $p_a = 101325$ Pa atmosférický tlak, $g = 9,81$ m·s⁻² tíhové zrychlení a $\rho = 1000$ kg·m⁻³ hustotu vody. Potom z rovnováhy sil

$$p_a \pi r_1^2 + \rho g h \pi r_1^2 + mg = p_a \pi r_2^2 + F_{\text{vana}},$$

$$F_{\text{vana}} = mg + p_a \pi (r_1^2 - r_2^2) + \rho g h \pi r_1^2.$$

Po dosazení dostáváme sílu $F_{\text{vana}} = 11,2$ N, přičemž její velkou část tvoří právě příspěvek atmosférického tlaku.

Úloha VI.3 ... ověšená



Jak těžké závaží můžeme zavěsit na konec ramínka věšáku bez toho, aby se převrhnul? Věšák je tvořen háčkem z velmi lehkého drátu, který je připevněn ke středu rovné dřevěné tyčky o délce $l = 30$ cm a o hmotnosti $m = 200$ g. Háček má tvar kružnicového oblouku s poloměrem $r = 2,5$ cm a s úhlovým rozpětím $\vartheta = 240^\circ$. Vzdálenost středu oblouku a středu tyčky je $h = 5$ cm. Veškeré tření zanedbejte.

Věšáček se bude naklánět vlivem momentů tíhových sil působících na ramínko a závaží. Označme tyto momenty po řadě τ_m a τ_M , přičemž M je hledaná hmotnost závaží. Velikost momentu τ_M pak lze vypočítat jako

$$\tau_M = F_M r_M = M g r_M,$$

kde F_M je velikost tíhové síly působící na závaží o hmotnosti M a r_M je rameno této síly (neboli kolmá vzdálenost vektorové příčky síly od osy otáčení).

Analogicky pro druhý moment $\tau_m = F_m r_m = m g r_m$.

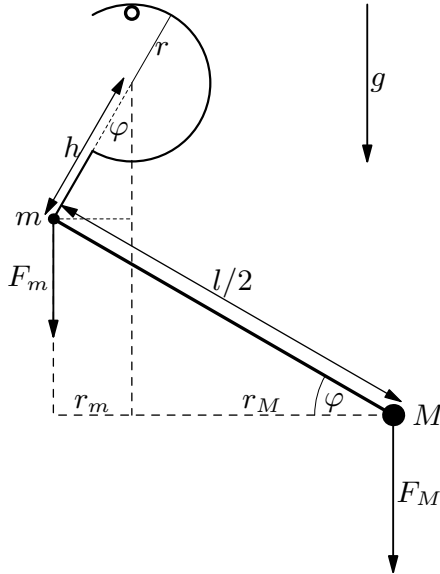
V úloze neuvažujeme tření. Proto tíhovou sílu působící nahoru musí kompenzovat pouze normálová síla v bodě dotyku. Háček věšáčku je proto v bodě dotyku vodorovný a vždy orientovaný tak, že střed kružnicového oblouku, který jej tvoří, je přímo pod bodem dotyku. Při náklonu o libovolný úhel φ musí pro ramena r_m a r_M platit (viz obrázek)

$$r_m = h \sin \varphi,$$

$$r_m + r_M = \frac{l}{2} \cos \varphi.$$

Z čehož vyplývá

$$r_M = \frac{l}{2} \cos \varphi - h \sin \varphi.$$


 Obr. 5: Věšáček nakloněný o úhel φ .

Ve statické situaci se musí momenty sil vyrovnat, čili

$$\begin{aligned}\tau_m &= \tau_M, \\ mgr_m &= Mgr_M.\end{aligned}$$

Odtud můžeme vyjádřit hledanou hmotnost závaží jakožto funkci úhlu φ

$$M = \frac{r_m}{r_M} m = \frac{h \sin \varphi}{\frac{l}{2} \cos \varphi - h \sin \varphi} m = \frac{m}{\frac{l}{2h \operatorname{tg} \varphi} - 1}. \quad (28)$$

Intuitivně bychom čekali, že maximální hmotnost věšáček udrží právě pro maximální úhel náklonu, tedy v našem případě $\varphi_{\max} = \vartheta - 180^\circ = 60^\circ$. Pro tento úhel je maximální hmotnost závaží

$$M(\varphi_{\max}) = \frac{m}{\frac{l}{2h \operatorname{tg} \varphi_{\max}} - 1} \approx 0,27 \text{ kg},$$

což je opravdu i správný výsledek. Důkaz, že věšáček udrží největší hmotnost právě pro maximální úhel ale není až tak přímočarý. Na pomoc budeme potřebovat trochu matematické analýzy.

Hledáme maximum funkce $M(\varphi)$ na intervalu $\langle \varphi_{\min}, \varphi_{\max} \rangle = \langle -180^\circ, 60^\circ \rangle$ (věšáček se zřejmě přetočí a spadne pro úhel $\varphi_{\min} = -180^\circ$). Maximum obecné funkce se může nacházet ve třech typech bodů, a to tam,

1. kde je derivace nulová,

2. kde derivace neexistuje a

3. na krajích intervalu, na kterém problém řešíme.

Derivace naší funkce je (za použití řetízkového pravidla pro derivaci složené funkce)

$$\begin{aligned} \frac{dM}{d\varphi}(\varphi) &= -m \left(\frac{l}{2h \operatorname{tg} \varphi} - 1 \right)^{-2} \frac{l}{2h} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \\ &= \frac{\frac{l}{2h} m}{\sin^2 \varphi \left(\frac{l}{2h \operatorname{tg} \varphi} - 1 \right)^2} = \frac{\frac{l}{2h} m}{\left(\frac{l \cos \varphi}{2h} - \sin \varphi \right)^2}. \end{aligned}$$

Derivace zřejmě nikde není nulová, takže první možnost nám zde nepomůže. Derivace nebude existovat, pokud je jmenovatel roven nule, což nastává právě když

$$\frac{l \cos \varphi}{2h} = \sin \varphi \quad \implies \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2h}. \quad (29)$$

Theoreticky bychom měli zkontrolovat, jestli nedělíme nulou, ale pokud $\cos \varphi = 0$, tak jistě $\sin \varphi \neq 0$, takže se výrazy nerovnají a zkoumaný jmenovatel není roven nule, takže tento případ nás nezajímá.

Dosadíme-li do poslední rovnice naše hodnoty l a h , máme

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{l}{2h} = \frac{0,3}{2 \cdot 0,05} = 3,$$

což nastává pro $\varphi \approx 71,6^\circ > \varphi_{\max}$. Tento úhel je větší než maximální uvažovaný úhel, takže pro nás tento výsledek nehraje roli. Nutno ovšem podotknout, že funkce tangens je π -periodická, takže se rovná třem i pro úhel $\varphi \approx 71,6 - 180 = -108,4^\circ$ (a nekonečně mnoho dalších, ale ty už jsou mimo uvažovaný interval).

Pro názornost si zde pomůžeme grafem 6.

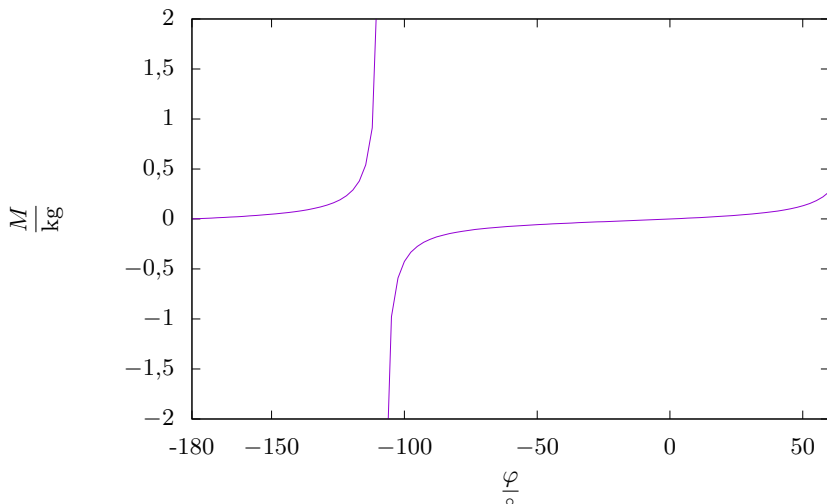
Oblast $(-108,4, 0)$ odpovídá situaci, kdy jsou hmotný střed ramínka m i závaží M ve stejné polorovině od středu háčku (a ramínko je vzhůru nohama). V takovém případě je pro vyrovnání momentů potřeba záporná hmotnost, protože pro kladnou hmotnost oba momenty míří na stejnou stranu.

Vidíme, že pokud $\varphi \rightarrow -108,4^\circ$ (čteme φ jde k $-108,4^\circ$) zprava, pak $M \rightarrow -\infty$.

Pokud $\varphi \rightarrow -108,4^\circ$ zleva, pak $M \rightarrow \infty$. To odpovídá případu, kdy je ramínko opět vzhůru nohama, ale tentokrát jsou hmotné středy v různých polorovinách. Pokud se pak bod M blíží do bodu přesně nad středem háčku, jde maximální hmotnost k nekonečnu. Správně je tedy i odpověď, že ramínko udrží libovolně velkou hmotnost.

Tato rovnováha je ovšem nestabilní a při malém vychýlení se ramínko přetočí. Pokud chceme stabilní rovnováhu, musíme se podívat na třetí možnost – kraje intervalu. Hodnotu $M(\varphi_{\max})$ už jsme vypočítali. Z grafu je zřejmé, že když $\varphi \rightarrow -180^\circ$, pak $M \rightarrow 0$ (samí si můžete ověřit, že přímo pro -180° hodnota M není definována).

Jedinou nadějí na stabilní maximum je tedy dříve vypočítaná hmotnost $M(\varphi_{\max}) \approx 0,27$ kg.



Obr. 6: Závislost hmotnosti na úhlu otočení ramínka

Abychom vyšetřili (ne)stabilitu rovnováhy, budeme potřebovat zjistit, jak se mění celkový moment síly působící na systém τ_c v bodě φ_{\max} . Označme $M_{\max} = M(\varphi_{\max})$ pevně zvolenou hmotnost závaží, dále označme směr momentu τ_M za kladný, pak

$$\tau_c = \tau_M - \tau_m = gM_{\max}r_M - gmr_m = g \left(M_{\max} \frac{l}{2} \cos \varphi - (M_{\max} + m)h \sin \varphi \right),$$

kde jsme využili dříve získané vzorce pro r_m a r_M .

Připomeňme, že pro φ_{\max} je celkový moment nulový. Změnu celkového momentu vyšetříme pomocí derivace

$$\frac{d\tau_c}{d\varphi} = g \left(-M \frac{l}{2} \sin \varphi - (M + m)h \cos \varphi \right),$$

pro φ_{\max} je $\frac{d}{d\varphi}\tau_c \approx -0,46$. Derivace je tedy záporná. To znamená, že pokud věšáček malinko vychýlíme z rovnovážné polohy záporným směrem, pak výsledný moment síly bude působit kladným směrem a věšáček se bude vracet do rovnovážné polohy. Obdobně by to platilo pro vychýlení v kladném směru, ale v našem případě by samozřejmě věšáček při takovém vychýlení spadl. Zdá se tedy, že rovnovážná poloha je stabilní z jedné strany. Bohužel při vychýlení v záporném směru se věšáček sice bude vracet do rovnovážné polohy, ale překmitne a stejně spadne. Zdá se, že stabilní rovnovážná poloha zde tedy neexistuje.

Poznámka na konec: Všimněme si ze vztahů (29), že pokud by se věšáček mohl otočit na úhel větší než 60° nebo bychom zvětšili h či zmenšili l , pak by mohla

nastat situace, kdy φ , které by tento vztah splňovalo, by spadalo do uvažovaného intervalu, a pak by se maximum nutně nemuselo nacházet na kraji intervalu. V takovém případě by pro náš systém mohla existovat stabilní rovnovážná poloha. Pro obecný věšáček tedy náš výsledek neplatí.

Úloha VI.4 . . . zděšené vlasy

Z radosti nad koncem zkouškového začaly Dance přibývat vlasy konstantní rychlostí. Po nějaké době si všimla, že jí jeden vypadl, a zděsila se. Čím více vlasů jí vypadlo, tím větší cítí stres a o to rychleji jí vypadávají další. Přesněji, rychlost vypadávání vlasů je přímo úměrná počtu již vypadnutých vlasů. Rychlost přibývání vlasů zůstává stejná. Opět nás zajímá, kdy Dance vypadne poslední vlas?

Počet vlasů, které Dance přibyly od počátku v čase t_0 do nějakého času t , označíme $n_p(t)$. Počet vypadnutých vlasů za stejné časové období bude $n_v(t)$. Označíme-li počáteční počet vlasů jako N_0 , v čase t jich Danka bude mít

$$N(t) = N_0 + n_p(t) - n_v(t).$$

Pro další řešení úlohy je velmi podstatné, že funkce $n_p(t)$ a $n_v(t)$ na sobě nijak nezávisí, čili je můžeme spočítat zvlášť. Pokud by tomu tak nebylo, postup by se značně zkomplikoval. Z tohoto příkladu je vidět, že je často výhodné zamyslet se nejdříve nad tím, do jakých nezávislých funkcí by se dalo řešení rozložit. Počet vlasů je poměrně velké číslo, v našich úvahách proto přejdeme od diskrétního počítání vlasů po jednom k spojitým veličinám. Samotný výsledek by to mělo ovlivnit jen zanedbatelně.⁴⁵

Ze zadání víme, že vlasy přibývají konstantní rychlostí, kterou označíme a . Potom zřejmě

$$n_p(t) = a(t - t_0).$$

Dále máme zadáno, že rychlost vypadávání je přímo úměrná počtu již vypadlých vlasů. Označíme-li konstantu úměrnosti b , bude platit

$$\frac{dn_v}{dt}(t) = bn_v(t).$$

Separací proměnných a následnou integrací snadno zjistíme, že řešením této jednoduché diferenciální rovnice je exponenciála

$$n_v(t) = e^{b(t-t_0)}.$$

Všimněme si, že $n_v(t_0) = 1$, čili jsme jako t_0 zvolili okamžik, ve kterém Dance vypadl první vlas. Nyní už můžeme napsat výslednou funkci

$$N(t) = N_0 + a(t - t_0) - e^{b(t-t_0)}.$$

Nás samozřejmě zajímá, pro jaký čas t platí $N(t) = 0$. Tento čas není možné obecně vyjádřit bez použití speciálních funkcí, ale se znalostí konstant a a b bychom

⁴⁵ Samozřejmě za předpokladu, že Danka není Děd Vševěd.

jej snadno dokázali určit numericky. Můžeme se alespoň pokusit o dolní odhad – pokud by byla konstanta a nulová, řešením by bylo

$$t_{\min} = t_0 + \frac{1}{b} \ln N_0.$$

Pro jakékoli jiné a (předpokládáme $a > 0$) bude hledaný čas t pouze větší než t_{\min} . Dále také víme, že exponenciála roste výrazně rychleji než lineární funkce. Proto lze předpokládat, že pro jakékoli „rozumné“ hodnoty a a b se výsledný čas t nebude od dolního odhadu t_{\min} tolik lišit, minimálně se bude řádově shodovat.

Úloha VI.5 . . . nazlátlý sirup

Magické pole Zeměplochy je natolik silné, že v něm světlo úplně ztratí smysl pro rychlost. To ovšem platí pouze v blízkosti povrchu, kde má index lomu magického pole hodnotu $n_0 = 2,00 \cdot 10^6$. S rostoucí výškou h index lomu klesá podle vztahu $n(h) = n_0 e^{-kh}$, kde $k = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ m}^{-1}$. Určete, pod jakým úhlem vůči svislému směru musíme z jednoho konce Zeměplochy vyslat světelný signál, aby na druhý konec dorazil v co nejkratším čase. Průměr disku Zeměplochy je $d = 15\,000 \text{ km}$ a rychlost světla ve vakuu je $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Jistě jste přišli na to, že náš požadavek, aby vyslaný signál dorazil v co nejkratším čase, je v podstatě samozřejmý. Světlo se vždy mezi dvěma body šíří po dráze nejkratšího času (Fermatův princip). Označíme-li úhel sklonu paprsku vzhledem ke svislici jako α , potom ze Snellova zákona vyplývá $n \sin \alpha = \text{konst.}$ Hodnotu této konstanty určíme z počátečního úhlu α_0 , čili dostáváme

$$n_0 e^{-kh} \sin \alpha = n_0 \sin \alpha_0 \quad (30)$$

Nyní si představme, že paprsek po nějaký velmi krátký úsek letí po přímce. Přitom urazí vzdálenost dx ve vodorovném směru a dh ve svislém směru. Zřejmě platí

$$\frac{dx}{dh} = \text{tg } \alpha. \quad (31)$$

Zderivujeme-li⁴⁶ rovnici (30), dostaneme

$$-kn_0 e^{-kh} \sin \alpha dh + n_0 e^{-kh} \cos \alpha d\alpha = 0,$$

odkud si snadno vyjádříme vztah mezi změnou h a α

$$dh = \frac{1}{k \text{tg } \alpha} d\alpha.$$

⁴⁶Derivací se v tomto případě myslí nalezení totálního diferenciálu, který má pro funkci dvou proměnných $f(h, \alpha)$ tvar

$$df = \frac{\partial f}{\partial h} dh + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha.$$

Stejného výsledku (pouze komplikovanější cestou) bychom dosáhli například vyjádřením a následnou derivací závislosti $\alpha(h)$ podle h , nebo obráceně.

Dosadíme do rovnice (31) a máme

$$dx = \frac{1}{k} d\alpha. \quad (32)$$

Teď se podíváme na to, jaké vztahy budou platit pro trajektorii světelného paprsku $h = h(x)$. Z povahy magického pole musí být tato trajektorie symetrická. Paprsek vyšleme v bodě $x = 0$ pod úhlem α_0 . Úhel se bude s rostoucím x podle rovnice (32) neustále zvětšovat, ale v jistém bodě dosáhne paprsek maximální výšky a bude svírat se svislicí úhel $\alpha_{\max} = \pi/2$. K tomu díky symetrii dojde přesně v polovině dráhy. Následně úhel překročí hodnotu α_{\max} , což se projeví tím, že se paprsek skloní zpět k Zeměploše. Odtud bude výška klesat až do bodu ve vzdálenosti d , kde paprsek dorazí na zem pod úhlem $\pi - \alpha_0$. Integrací rovnice (32) dostáváme

$$\int_0^d dx = \frac{1}{k} \int_{\alpha_0}^{\pi - \alpha_0} d\alpha,$$

$$d = \frac{1}{k} (\pi - 2\alpha_0).$$

Hledaný počáteční úhel, pod kterým musíme paprsek vyslat, je

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} (\pi - kd) \doteq 0,821 \doteq 47,0^\circ.$$

Pokud by nás zajímal přímo tvar trajektorie světelného paprsku, závislost úhlu α na souřadnici x vyplývající ze vztahu (32) je $\alpha = kx + \alpha_0 = k(x - d/2) + \pi/2$. Stačí jen vyjádřit výšku podle (30) a dosadit

$$h = \frac{1}{k} \ln \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{1}{k} \ln \frac{\cos \left(k \left(x - \frac{d}{2} \right) \right)}{\sin \alpha_0}.$$

Pro zajímavost, z výsledné rovnice vyplývá, že není možné poslat světelný signál mezi místy, která jsou od sebe vzdálena více než $\pi/k \doteq 3,14 \cdot 10^7$ km.

Úloha VI.P . . . vesmír ve 4D

Pravděpodobně už jste slyšeli, že planety i libovolná jiná tělesa se v centrálním gravitačním poli pohybují po kuželosečkách (v případě Sluneční soustavy jsou to elipsy s malou výstředností). Prozkoumejte, jak by vypadaly trajektorie planet ve vesmíru, kde by gravitační síla závisela na převrácené třetí mocnině vzdálenosti místo na druhé.

Nápověda Může se vám hodit Binetův vzorec.

Najprv sa zamyslime, ako by sa teleso pod vplyvom centrálnej sily pohybovalo v 4D vesmíre. Vzhľadom na to, že sila pôsobí do centra, pôsobí na planétu zrýchlením od centra a teleso pri pohybe ostáva v 2D rovine danej vektorom okamžitej rýchlosti telesa a polohovým vektorom. Na popis nám teda stačia dve súradnice, vzdialenosť od stredu r a jedna uhlová súradnica θ , popisujúce pohyb v tejto rovine.

Vo vesmíre s o jedna vyššou dimenziou by bola gravitačná sila pôsobiaca ako inverzná tretia mocnina vzdialenosti prirodzená. Dôležité je totiž, že by spĺňala Gaussov zákon.⁴⁷ Teda napríklad by súčin 3D plochy pre body s $r = \text{konst}$ (tj. hyperguľové plochy) a gravitačného zrýchlenia okolo bodového zdroja nezávisel na polomere. V našom 3D vesmíre je však aj práve kvôli tomu problém nájsť silu, ktorá by pôsobila ako $F \propto r^{-3}$.

Už bez výpočtov vieme vďaka Bertrandovmu teorému⁴⁸ povedať, že dostaneme aspoň nejaké viazané riešenie (teda také, že častica neunikne do nekonečna), ktoré ale všeobecne nemusí tvoriť uzavretá trajektória. Uzavreté trajektórie pre všetky viazané orbity dáva totiž len Newtonský/Coloumbovský potenciál a radiálny harmonický oscilátor, teda $F \propto r^{-2}$ a $F \propto r$.

Pohyb telesa v centrálnom poli, presnejšie jeho trajektóriu, popisuje Binetov vzorec⁴⁹

$$F(u^{-1}) = -mh^2u^2 \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right),$$

kde $u = 1/r$, m je hmotnosť hmotného bodu, ktorého pohyb vyšetrujeme, a $h = L/m$ je špecifický moment hybnosti, teda moment hybnosti na 1 kg hmotnosti telesa. Moment hybnosti je konštantný, pretože na teleso pôsobí sila iba v radiálnom smere. Ak dosadíme za silu

$$F(r) = -\frac{K}{r^3} = -Ku^3,$$

dostávame po úprave finálnu rovnicu pre trajektóriu telesa

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{K}{mh^2}\right)u = 0.$$

Konštanta K určuje veľkosť príťažlivej sily, teda zodpovedá hmote hypotetického centrálného telesa v 4D vesmíre. Riešením tejto rovnice sú tzv. Cotesove špirály⁵⁰ a triviálne prípady kružnica a priamka cez počiatok (alebo jej časť).

Označme $1 - \frac{K}{mh^2} = p^2$, kde parameter p môže byť všeobecne komplexné číslo. Potom vyššie uvedený vzťah prejde do tvaru

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + p^2u = 0,$$

čo je lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu. Jej riešenia majú rôzny tvar v závislosti na veľkosti parametra p^2 .

- Pre $p^2 > 0$ dostávame $u = A \sin(p\theta) + B \cos(p\theta) = C \cos(p\theta + \varepsilon)$, čo je epišpirála.
- Pre $p^2 = 0$ dostávame $u = A\theta + B = C(\theta + \varepsilon)$, teda hyperbolickú špirálu.

⁴⁷https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss's_law_for_gravity

⁴⁸https://en.wikipedia.org/wiki/Bertrand's_theorem

⁴⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Binet_equation

⁵⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Cotes's_spiral

- Pre $p^2 < 0$ dostávame $u = A \sinh(p'\theta) + B \cosh(p'\theta)$, kde $p' = ip$, čomu sa hovorí Poinsovotove špirály. V závislosti na veľkosti A , B sa dá vzťah upraviť na jednu z troch možností

$$u = C \sinh(p'\theta + \varepsilon) ,$$

$$u = C \cosh(p'\theta + \varepsilon) ,$$

$$u = C \exp(p'\theta) .$$

Konštanty A , B , C , ε sa určia z počiatočných podmienok. Konštanta C škáluje veľkosť, konštanta ε mení natočenie v rovine obehu.

Zostáva vyšetriť, ako sa jednotlivé funkcie správajú. Pre $u = 0$ je objekt v nekonečne, pre $u = \infty$ je v centrálnom bode. Epišpirála teda prichádza z nekonečna do vzdialenosti $r = 1/C$ a vracia sa naspäť, pričom v uhlovej súradici opíše uhol $\varphi = \pi/p$. Poinsovotove špirály majú charakter špirály, odvíjajú sa okolo počiatku. Pre nás podstatným rozdielom je, že sínusová ide do nekonečna takmer priamo, exponenciálna sa aj vo veľkej vzdialenosti stále otáča a kosínusová ide len k hodnote $r = 1/C$, kde sa začne opäť navíjať a padať späť do stredu. Hyperbolická špirála sa podobá sínusovej.

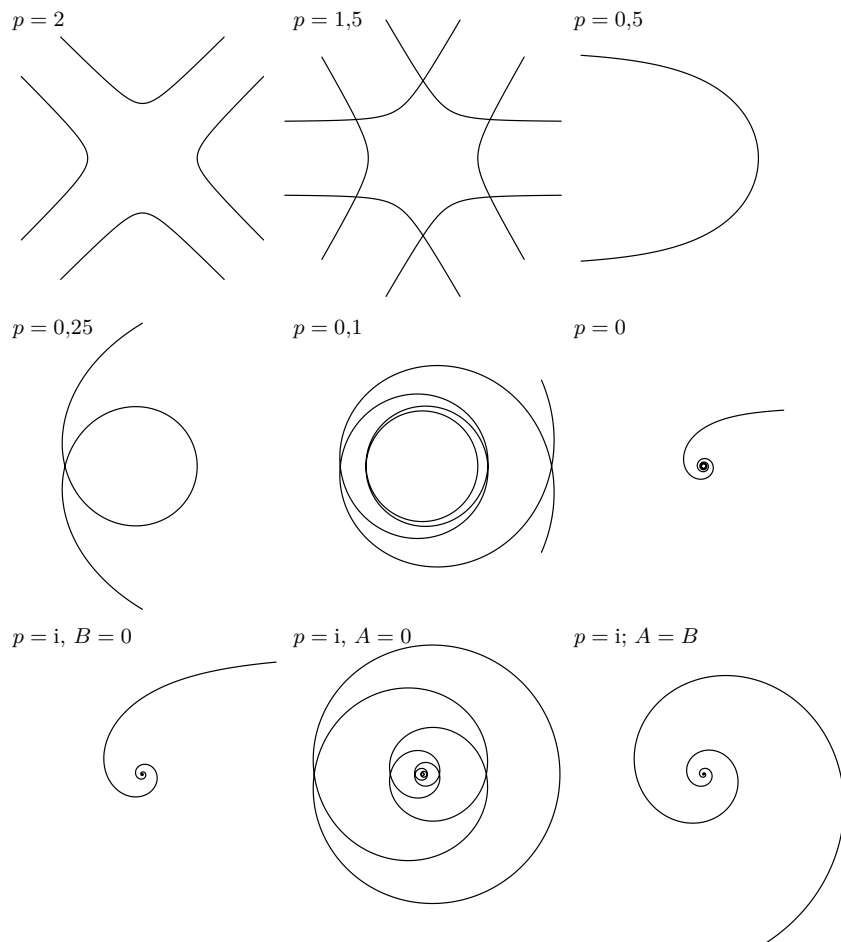
Pozrime sa na špeciálne prípady. Pre úzku epišpirálu (pre veľké $p^2 \gg 1$) prebieha pohyb limitne po polpriamke z nekonečna smerom k počiatku a naspäť. To zodpovedá zápornej hodnote A , čiže odpudivej sile.

Prípád s $p = 1$ popisuje situáciu s nulovou silou, a preto vyjde pohyb po priamke.

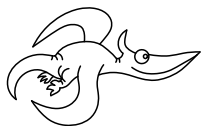
Pre Poinsovotove špirály a veľkú zápornú hodnotu $p^2 \ll -1$ (čo zodpovedá veľkej príťažlivej sile) dostaneme nasledujúce limitné prípady. Pre kosínovú Poinsovotovu špirálu ide o pohyb po úsečke priamo do centrálného telesa, pre sínusovú o pohyb po polpriamke medzi nekonečnom a stredom. Exponenciálny prípad je sebedobný.

Špeciálnym prípadom možnosti, ktorá viedla k hyperbolickej špirále, je pre $A = 0$ kružnicová trajektória. Môžeme teda zhodnotiť, že kružnice sú jediné uzavreté trajektórie, a navyše sú nestabilné (pri malej výchylke počiatočných podmienok prejdú na jednu zo špirál). Ostatné trajektórie vedú buď z centra alebo nekonečna, resp. opačným smerom.

Záverom môžeme konštatovať, že keby mal vesmír štyri rozmery a fundamentálne fyzikálne sily by záviseli na r^{-3} , nemohol by vzniknúť život v takej podobe, ako ho poznáme. Kvôli neexistencii stabilných uzavretých trajektórií by nebol možný vznik ekvivalentu slnečnej sústavy, pretože všetko by buď do seba navzájom spadlo alebo by odletelo do nekonečna. Vyvstáva otázka, či by bolo možné, aby sa v 4D svete sformovali atómy. Avšak pre odpoveď by sme už museli použiť kvantovú mechaniku.



Obr. 7: Schéma trajektorií pre vybrané hodnoty p .



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... lahvová

12 bodů

Jak závisí frekvence zvuku, který vydáváte foukáním do skleněné lahve, na objemu kapaliny v lahvi? Diskutujte, jaký vliv na tuto závislost má tvar lahve.

(řešení str. 83)

Úloha II.E ... potřebuji obejmout

13 bodů

Změřte svůj objem několika různými způsoby.

(řešení str. 87)

Úloha III.E ... husté měření

12 bodů

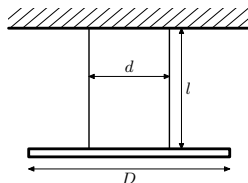
Sestavte si hustoměr, např. pomocí brčka a plastelíny, a změřte pomocí něj, jak závisí hustota vody na koncentraci rozpuštěné soli.

(řešení str. 92)

Úloha IV.E ... torzní kyvadlo

12 bodů

Vezměte si alespoň 40 cm dlouhou homogenní tyčku. Ve dvou bodech symetricky vůči jejímu středu k ní přidejte dva závěsy ze stejného materiálu (například nit nebo vlasec), které dále upevníte k nějakému pevnému stativu tak, aby měly stejnou délku a aby byly rovnoběžné. Změřte periodu torzních kmitů tyčky v závislosti na vzdálenosti závěsů d pro různé délky závěsů l a určete, o jakou závislost na těchto dvou parametrech se jedná. Torzní kmity vypadají tak, že se tyčka otáčí ve vodorovné rovině, přičemž její střed zůstává v klidu.



(řešení str. 98)

Úloha V.E ... nenaolejuje-li Jáchym, naolejuje Matěj

12 bodů

Změřte závislost teploty kapaliny v otevřeném hrnku na čase. Jako kapalinu použijte nejdříve vodu, potom olej a nakonec vodu s malou vrstvou oleje na povrchu. Vrstva by měla být co nejtenčí, ale zároveň musí pokrývat celý povrch vody. Měřte v rozsahu od 90 °C do 50 °C. Dávejte pozor na to, aby veškeré podmínky byly při všech experimentech stejné (použijte stejný hrnek se stejnou počáteční teplotou, teploměr ponechte celou dobu v kapalině pokaždé na stejném místě atd.). Popište co nejlépe experimentální aparaturu, srovnajte chladnutí v jednotlivých případech a výsledky diskutujte.

(řešení str. 102)

Úloha VI.E ... viskozita

12 bodů

Změřte dynamickou viskozitu dvou různých olejů Stokesovou metodou.

(řešení str. 105)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... lahvová

Jak závisí frekvence zvuku, který vydáváte foukáním do skleněné lahve, na objemu kapaliny v lahvi? Diskutujte, jaký vliv na tuto závislost má tvar lahve.

Teória

Tón je vlastne chvenie vzduchu, a teda vzniká, keď niečo (napr. struna, alebo aj priamo vzduchový stĺpec) kmitá. V našom prípade tón vzniká v hrdle fľaše, kde sa v dôsledku správneho fúkania rozkmitá vzduch a od neho sa už potom vlnenie šíri ďalej.

Frekvenciu, ktorú by sme mali namerať, môžeme odhadnúť tak, že vzduch z hrdla fľaše aproximujeme piestom s rovnakou hustotou ako vzduch.

Označme si okolitý tlak ako p_A a objem hrdla V_h . Potom molárne množstvo vzduchu v hrdle fľaše bude zo stavovej rovnice

$$n_h = \frac{p_A V_h}{RT},$$

kde T je teplota a R je univerzálna plynová konštanta $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Hmotnosť piestu m_h potom dostaneme jednoducho, keď molárne množstvo vzduchu vynásobíme jeho molárnou hmotnosťou, ktorú označíme M_m

$$m_h = M_m n_h = M_m \frac{p_A V_h}{RT}.$$

Zostáva zistiť tuhosť systému.

Na začiatku je vo fľaši atmosférický tlak. Následné fúkanie spôsobí, že piest sa pohne o dx dole, čím vo fľaši tlak určite vzrastie. Keďže kmitanie je príliš rýchle na to, aby si vzduch vo fľaši stíhal vymieňať teplo s okolím, uvažujme adiabatický dej.¹

Pre adiabatický dej platí, že $pV^\kappa = \text{konst}$, kde κ je Poissonova konštanta charakteristická pre daný plyn.

Tlak teda po posunutí piestu o dx vzrastie na

$$p_x = p_A \left(\frac{V}{V - S_h dx} \right)^\kappa,$$

kde V je pôvodný objem vzduchu vo fľaši a S_h je prierez hrdla.

¹Ak by sme ale namiesto neho zvolili dej izotermický, veľkej chyby by sme sa nedopustili.

Na píst bude pôsobiť sila

$$\begin{aligned} dF &= S_h(p_A - p_x), \\ dF &= S_h p_A \left(1 - \left(\frac{V - S_h dx + S_h dx}{V - S_h dx} \right)^\kappa \right), \\ dF &= S_h p_A \left(1 - \left(1 + \frac{S_h dx}{V - S_h dx} \right)^\kappa \right). \end{aligned}$$

Teraz využijeme to, že posun pístu dx je veľmi malý, takže $V - S_h dx \approx V$. Tiež môžeme použiť Bernoulliho vzťah, ktorý hovorí, že $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Premyslite si sami, že z toho vyplýva, že ak je x veľmi malé (oproti 1), máme dobrý odhad $(1 + x)^k \approx 1 + kx$.

Postupnou aplikáciou týchto dvoch aproximácií dostávame

$$\left(1 + \frac{S_h dx}{V - S_h dx} \right)^\kappa \approx \left(1 + \frac{S_h dx}{V} \right)^\kappa \approx 1 + \kappa \frac{S_h dx}{V}.$$

Dosadením do vzťahu pre silu máme

$$\begin{aligned} dF &\approx \frac{\kappa S_h^2 p_A}{V} dx, \\ k &\approx \frac{\kappa S_h^2 p_A}{V}, \end{aligned}$$

kde k je hľadaná tuhosť systému.

Môžeme teda dosadiť do vzorca pre periódu lineárneho harmonického oscilátora

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

pričom pri úpravách využijeme $V_h = S_h h$, kde h je výška hrdla, a $S_h = \frac{\pi}{4} D^2$, kde D je priemer hrdla. Po úpravách dostaneme

$$T = \frac{4}{D} \sqrt{\frac{\pi M_m V h}{RT \kappa}}.$$

Nie je ťažké všimnúť si, že jediná z týchto veličín, ktorá sa bude meniť prilievaním vody, je objem vzduchu vo fľaši V .

Frekvencia je prevrátená perióda

$$f = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{D}{4} \sqrt{\frac{RT \kappa}{\pi M_m h}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{V}} C, \quad (33)$$

kde C je konštanta úmernosti.

Pomôcky

fľaša, voda, váha, odmerka, počítateľ, posuvné meradlo, teplomer

Meranie

Odvážili sme prázdnu fľašu a potom fľašu plnú vody, rozdiel bol $m_{in} = (630 \pm 10)$ g. Ak uvážime hustotu vody $\rho = 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ (väčšia presnosť nie je potrebná, keďže tak či tak máme chybu už na druhej platnej cifre), dostávame, že vnútorný objem fľaše je

$$V_0 = (630 \pm 10) \text{ cm}^3 = (6,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 .$$

Na meranie frekvencie sme používali počítač s programom Audacity, vhodných softwarov ale existuje obrovské množstvo a použiť sa dá aj mobil, ladička... Dôležité je ale uviesť presnosť, s ktorou bola frekvencia zmeraná, v našom prípade to boli desatiny hertza.

Experiment potom prebiehal tak, že sme fúkli do fľaše, poznamenali si frekvenciu, odmerkou (ktorej najmenší dielik je 5 ml) doplnili niekoľko desiatok mililitrov vody a opakovali postup, kým nebola fľaša plná. Namerané hodnoty môžeme vidieť v tabuľke 1.

Tab. 1: Namerané frekvencie zvuku

V 10^{-4} m^3	f Hz
6,3	185,5
6,1	186,6
5,7	192,5
5,3	206,0
4,9	216,7
4,5	222,6
4,1	228,5
3,3	257,7
2,9	280,3
2,1	316,2
1,7	368,9
1,3	403,8
0,9	479,0
0,7	597,8

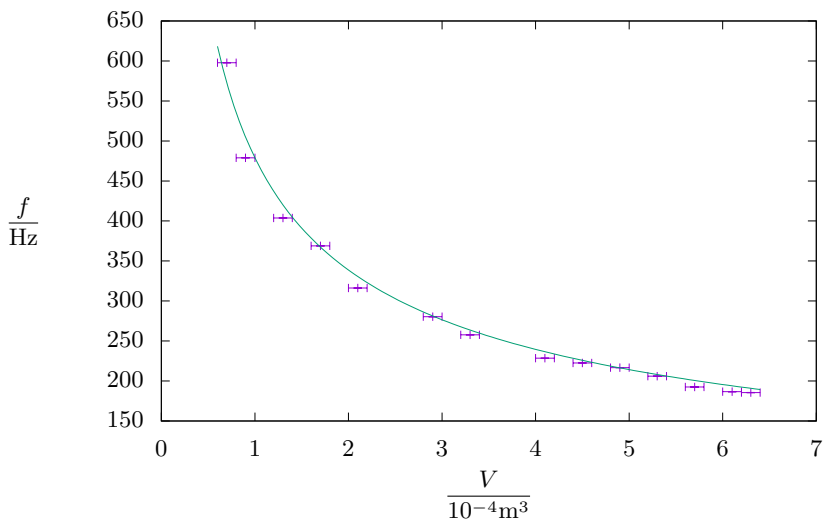
Pomocou GNU PLOTU dáta fitujeme závislosťou podľa (33)

$$f(V) = \frac{C}{\sqrt{V}} ,$$

pričom sme dostali, že konštanta $C = (4,73 \pm 0,05) \text{ m}^{\frac{3}{2}}\cdot\text{s}^{-1}$. Body s preloženou závislosťou sú vynesené v grafe 8.

Konštantu C by sme mali byť podľa (33) schopní spočítať ako

$$\frac{D}{4} \sqrt{\frac{RT\kappa}{\pi M_m h}} = C .$$



Obr. 8: Závislosť frekvencie zvuku f na objeme vzduchu vo vnútri fľaše V

Posuvným meradlom odmeriame vnútorný priemer hrdla $D = (2,15 \pm 0,01)$ cm a výšku hrdla $h = (2,04 \pm 0,01)$ cm.

Chemické konštanty pre vzduch nájdeme na internete² ako $M_m = 28,96 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ a $\kappa = 1,40$. Izbová teplota vzduchu pri meraní bola $(25 \pm 1) \text{ }^\circ\text{C} = (298 \pm 1) \text{ K}$.

Chyby konštanty oproti nameraným veličinám môžeme považovať za zanedbateľné. Potom dostávame $C = (7,35 \pm 0,06) \text{ m}^{\frac{3}{2}}\cdot\text{s}^{-1}$, čo rádovo sedí s experimentálnou hodnotou.

Diskusia

Teoretická predpoveď nám dáva, že nameraná frekvencia by mala byť úmerná objemu vzduchu vo fľaši na mínus jednu polovicu. Namerané dáta tejto závislosti dobre zodpovedajú.

Hodnota C určená experimentálne (z fitu) sa od tej teoretickej dost líši, aj keď majú rovnaký rád. Dôvod bude zrejme ten, že aj keď náš teoretický model správne odhaduje závislosti na jednotlivých veličinách, v konstante sa môže líšiť, pretože celkový dej je zrejme výrazne zložitejší, než sme uvažovali. Ako príklad môžeme uviesť to, že náš model vôbec neuvažuje kmitanie vzduchu inde než v hrdle, čiže efektívna „hmotnosť piestu“, bude zrejme o niečo vyššia než tá, ktorú sme vo svojich výpočtoch použili. Toto dokonca zodpovedá tomu, že experimentálne sme dostali nižšie C (a teda aj nižšie frekvencie) než predpovedala teória.

Ak by sme namiesto fľaše mali napríklad tenkú trubicu s konštantným prierezom, potom by prvá rezonancia nastala, keď by dĺžka trubice (resp. tej časti

²https://cs.wikipedia.org/wiki/Vzduch_code-4-band

v ktorej sa voda nenachádza) l bola rovná štvrtine vlnovej dĺžky. Úpravami dostávame, že v tomto prípade by frekvencia bola nepriamo úmerná objemu vzduchu v trubici. Z toho jasne vyplýva, že na tvare fľaše záleží.

Záver

Dolievaním vody do fľaše znižujeme objem vzduchu, ktorý sa v nej nachádza. Podľa teoretickej predpovede by mala výsledná frekvencia závisieť priamo úmerne na $V^{-\frac{1}{2}}$. Ak teda označíme objem vody vo fľaši V_v , dostávame

$$f = C(V_0 - V_v)^{-\frac{1}{2}}.$$

Konštantu úmernosti C sme pre našu fľašu získali experimentálne ako

$$C = (4,73 \pm 0,05) \text{ m}^{\frac{3}{2}} \cdot \text{s}^{-1}$$

s relatívnou chybou asi 1 %. Táto hodnota však nie je v zhode s našim teoretickým modelom.

Úloha II.E . . . potrebujú obejmout

Změřte svůj objem několika různými způsoby.

Nejdříve si ujasněme, co vlastně budeme měřit. Objem našeho těla není konstantní dlouhodobě (rosteme, přibíráme, hubneme, . . .) ani krátkodobě (dýchání). Dlouhodobé změny objemu eliminujeme tak, že budeme měření provádět v dostatečně krátkém časovém úseku. Konkrétně toto měření bylo provedeno v srpnu 2019. Objem je také značně ovlivněn tím, zda jsme nadechnutí nebo vydechnutí. Proto si nyní stanovíme, že budeme měřit pouze objem nadechnutého těla. Objem při vydechnutí by bylo možné měřit následujícími metodami zcela analogicky.

Geometrická aproximace těla

Na lidské tělo se můžeme dívat jako na velmi komplexní geometrický objekt, jehož objem by bylo velmi obtížné spočítat. V této metodě měření budeme lidské tělo aproximovat vhodnou kombinací geometrických těles, jejichž objem dokážeme spočítat snadno. Samozřejmě toto měření nebude moc přesné, proto se musíme dobře zamyslet nad volbou geometrických těles.

Není jednoznačný způsob, jak lidské tělo aproximovat. My zvolíme takovou aproximaci, ve které si tělo rozdělíme na končetiny, trup a hlavu. Objem těchto částí spočítáme zvlášť. Nejjednodušší by bylo aproximovat člověka jako minecraftovou figurku, kde je těchto šest částí reprezentováno obyčejnými kvádry. Lidské tělo ale není takto hranaté, proto zkusíme vymyslet přesnější aproximaci.

Ruka

Chceme-li být přesnější než minecraftový kvádr, můžeme zvolit místo toho tvar válce. Jenže to taky není dokonalé, protože ruka³ nemá ve všech místech stejný

³Jako ruku zde označujeme celou horní končetinu.

průřez. U ramena je nejširší a u zápěstí je užší. Zároveň nemá rovnoměrný průběh, aby ji bylo možné nahradit komolým kuzelem. Ve skutečnosti ani nemá kruhový průřez. Pokusíme se ji aproximovat jakousi soustavou komolých kuželů postavených na sebe tak, že sousední komolé kužely sdílejí stejnou podstavu. První podstava bude odpovídat průměru natažené ruky těsně pod ramenem, druhou podstavu zvolíme nad loketním kloubem, třetí pod loketním kloubem a čtvrtou u zápěstí. Náš model ruky se tedy bude sestávat ze tří komolých kuželů. Využijeme vzorec pro objem komolého kuželu

$$V_k = \frac{\pi v}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{v}{12\pi} (o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2),$$

kde v je jeho výška, $r_{1,2}$ jsou poloměry jeho podstav a $o_{1,2} = 2\pi r_{1,2}$ jsou obvody jeho podstav. Zobecněním tohoto vzorečku najdeme vztah pro objem našeho modelu ruky.

$$V_r = \frac{v}{12\pi(N-1)} \left(o_1^2 - o_N^2 + \sum_{i=2}^N (2o_i^2 + o_{i-1}o_i) \right), \quad (34)$$

kde v je délka celé ruky a využili jsme předpokladu, že měřené obvody ruky jsou rovnoměrně rozložené po délce ruky, takže výška jednoho komolého kuželu je $\frac{v}{N-1}$, kde N je počet měření obvodů.

Všechna měření byla provedena krejčovským metrem. Výsledky měření jsou v tabulce 2. Po dosazení těchto hodnot do (34) dostáváme

$$V_r = (2\,100 \pm 100) \text{ cm}^3 = (2,1 \pm 0,1) \text{ l}.$$

Délka ruky byla měřena od ramene k počátku prstů. Jejich objem zanedbáváme.

Tab. 2: Objem ruky

délka ruky	v	$(72 \pm 2) \text{ cm}$
obvod pod ramenem	o_1	$(31 \pm 1) \text{ cm}$
obvod nad loketním kloubem	o_2	$(24 \pm 1) \text{ cm}$
obvod pod loketním kloubem	o_3	$(26 \pm 1) \text{ cm}$
obvod u zápěstí	o_4	$(17 \pm 1) \text{ cm}$

Noha

Pro nohu použijeme zcela analogický model jako pro ruku. Dalo by se argumentovat, že například koleno docela porušuje „kuželovitost“ nohy, ale pro rozumný odhad to stačí. Po dosazení dostáváme

$$V_n = (6\,100 \pm 200) \text{ cm}^3 = (6,1 \pm 0,2) \text{ l}.$$

Tab. 3: Objem nohy

délka nohy	v	(93 ± 2) cm
obvod pod pánví	o_1	(53 ± 1) cm
obvod nad kolenem	o_2	(38 ± 1) cm
obvod pod kolenem	o_3	(34 ± 1) cm
obvod u kotníku	o_4	(22 ± 1) cm

Hlava

Hlava bude komplikovaná na aproximaci. Mohli bychom ji aproximovat elipsoidem. Ale v tom případě by bylo složité změřit jeho poloosy a není jasné, jak bychom tam zakomponovali bradu. Vzhledem k tomu, že hlava je oproti ostatním částem těla relativně malá, můžeme zde užít hrubší aproximaci. Aproximujme ji prostě koulí. Objem koule (hlavy) lze vypočítat, když známe její obvod

$$V_h = \frac{1}{6\pi^2} o^3.$$

Obvod změříme několikrát v různých místech. Po dosazení dostaneme

$$V_h = (4,2 \pm 0,6) \text{ l.}$$

Tab. 4: Obvod hlavy

v horizontální rovině	(58 ± 1) cm
ve vertikální rovině (pod bradou)	(65 ± 1) cm
šikmo (přes bradu)	(69 ± 1) cm
šikmo (přes čelo)	(60 ± 1) cm
průměr	(63 ± 3) cm

Trup

Toto je asi nejkomplikovanější část, její průřez se špatně modeluje nějakým geometrickým objektem. Použijeme modifikaci aproximace rukou a nohou s tím že místo kruhového průřezu budeme předpokládat elipsoidální průřez. Jelikož však je to velmi hrubá aproximace, nebudeme se zabývat tím, jak přesně vypočítat objem takového komolého objektu, jehož podstavy jsou různé elipsy s různou excentricitou. Použijeme jednodušší model, kdy si trup rozdělíme rovnoměrně svisle na určitý počet řezů a každému řezu bude příslušet eliptický válec, jehož podstavou je daná elipsa. Objem tedy vypočteme jako

$$V_T = \frac{\pi v}{4(N-1)} \sum_{i=1}^N 2a_i 2b_i,$$

kde N je počet řezů, v je výška trupu, $2a_i$ je hlavní osa (tedy největší průměr, nikoliv poloosa) a $2b_i$ je vedlejší poloosa i -té elipsy.⁴

Výška $v = (74 \pm 2)$ cm byla změřena od konce nohou po ramena. Poloosa průřezu trupu se neměří tak snadno, protože nemůžeme jednoduše natáhnout metr skrze tělo. Pro tento účel bylo vyrobeno velké posuvné měřidlo (šuplera) ze stavebnice LEGO, která umožňuje dobře postavit pravé úhly. Dvojnásobek poloosy byl změřen sevřením trupu mezi čelisti měřidla a následným přepočítáním počtu LEGO dílků na centimetry. Nejistota této metody byla odhadnuta na 1 cm. V tabulce 5 jsou vypočteny i dílčí průřezy a excentricity.

Tab. 5: Průměr trupu

kde?	$\frac{2a_i}{\text{cm}}$	$\frac{2b_i}{\text{cm}}$	$\frac{S_i}{\text{cm}^2}$	ε
boky/zadek	33 ± 1	23 ± 1	610 ± 30	0,71
pupík	27 ± 1	20 ± 1	430 ± 30	0,69
mezi pup a prs	29 ± 1	23 ± 1	510 ± 30	0,64
prsa	32 ± 1	25 ± 1	630 ± 30	0,64
ramena	45 ± 1	18 ± 1	630 ± 40	0,92

Průměrný obsah průřezu je⁵ $S = (560 \pm 30)$ cm². Pro objem trupu pak dostáváme

$$V_T = (41,4 \pm 2,2) \text{ l.}$$

Zbytek

Některé části těla jsme zcela zanedbali, jako například chodidla, dlaně s prsty, krk a samozřejmě pohlavní orgány. Tyto části nejsou však v porovnání s trupem a končetinami dost velké a geometricky příliš komplikované, než aby se nám vyplatilo vytvářet jejich modely. Místo toho odhadneme, že dohromady bude jejich objem

$$V_Z = (3,0 \pm 0,5) \text{ l.}$$

Shrnutí

Po sečtení dostáváme celkový objem

$$V = (66 \pm 3) \text{ l.}$$

⁴Trochu neintuitivně zde pracujeme s průměry elipsy místo jejich poloos, protože poloosy nemůžeme snadno měřit přímo.

⁵Do toho nebyla započtena směrodatná odchylka aritmetického průměru, jelikož to je součást chyby našeho modelu.

Tab. 6: Části těla

část těla	geometrické těleso	objem
ruka	komolý kužele	$(2,4 \pm 0,1) \text{ l}$
noha	komolý kužele	$(6,1 \pm 0,2) \text{ l}$
hlava	koule	$(4,2 \pm 0,6) \text{ l}$
trup	eliptický válec	$(41,4 \pm 2,2) \text{ l}$
zbytek	odhad	$(3,0 \pm 0,5) \text{ l}$

Měření přes lidskou hustotu

Nejsnáze by se nám asi objem těla měřil, pokud bychom znali hustotu. Pak by stačilo zjistit pouze hmotnost. Naštěstí je možné na Wikipedii⁶ tuto hustotu dohledat. Podle této stránky je průměrná hustota lidského těla po vydechnutí $1\,025 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Toto číslo musíme však brát s rezervou, protože by to měl být průměr a individuální hustota se bude u různých lidí lišit v závislosti na poměru objemu kostí (jejichž hustota je podle stejné stránky $1\,700$ až $2\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$), tuku ($940 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$) a jiných částí těla, které mají různou hustotu. Vzhledem k těmto variacím odhadneme nejistotu této hustoty na $4,0\%$

$$\rho = (945 \pm 38) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$

Nyní se stačí zvážit na klasické lidské váze. Podle ní je naše hmotnost

$$m = (69,1 \pm 0,3) \text{ kg},$$

kde byla nejistota odhadnuta jako $0,3 \text{ kg}$. Displej sice zobrazuje hmotnost s přesností na desetiny kg, ale byla zvolena větší nejistota vzhledem k tomu, že to je obyčejná osobní váha, jejíž výrobci ani nespécifikovali třídu přesnosti.

Z těchto údajů již lze dopočítat objem

$$V = \frac{m}{\rho} = (73,1 \pm 2,9) \text{ l},$$

kde jsme m^3 rovnou převedli na litry a nejistotu jsme vypočítali podle Gaussova zákona šíření nejistot jako

$$\sigma_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial m} \sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \rho} \sigma_\rho\right)^2} = V \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2}.$$

Měření ponořením do kapaliny

Klasická a asi i poměrně snadná metoda měření objemu pevných těles je pomocí ponoření do kapaliny a změření objemu kapaliny, kterou těleso vytlačí. V případě, kdy tělesem je lidské tělo, je však problém najít dostatečně velký odměrný válec. Proto byla použita vana. Ta však nemá stupnici, na které by bylo možné odečíst,

⁶<http://www.wikina.cz/a/Hustota#.C4.8C1ov.C4.9Bk>

kolik je ve vaně vody. Místo toho je možné použít jako referenční výšku hladiny polohu horní výpusti, která bývá ve vanách, aby zabraňovala přetečení. To však umožňuje měřit pouze jednu výšku, a tak měření bylo provedeno následujícím způsobem:

1. napustíme vanu dostatečným množstvím vody,
2. postupně ponořujeme tělo, přebytečná voda začne odtékat horní výpustí a stabilizuje tak výšku hladiny při dalším ponořování,
3. když je celé tělo⁷ pod hladinou, počkáme chvíli, než všechna přebytečná voda oteče,
4. vyjmeme tělo z vany a dopustíme tolik vody, abychom hladinu dostali přesně na úroveň výpusti,
5. při dolévání měříme objem dolité vody.

Voda byla dolévána 5l konví s ryskami, díky čemuž se dal snadno změřit objem dolité vody. Když se hladina blížila k výpusti, byl pro přesnější dolévání použit odměrný válec. Správnost rysek konve byla ověřena pomocí odměrného válce a při tomto hrubém ověření byla odhadnuta její nejistota na 5%. Celkem bylo potřeba do vany vylít 14 konví a následně ještě 1,5l vody pomocí odměrného válce. Celkový objem naměřený touto metodou tedy je

$$V = (72 \pm 4) \text{ l.}$$

Kapičky vody, které zůstaly na těle po výlezu z vany, zanedbáváme.

Diskuze výsledků

Výsledky z posledních dvou měření se v rámci nejistoty dobře shodují, zatímco výsledek získaný geometrickým postupem se od nich liší. Lze tedy usuzovat, že náš geometrický model těla není příliš přesný. A zároveň, že průměrná hustota lidského těla je v rámci nejistot dostatečně podobná té naší.

Tab. 7: Porovnání výsledků

postup	výsledek
geometricky	$(66 \pm 3) \text{ l}$
hmotnostně	$(73 \pm 3) \text{ l}$
ponořením	$(72 \pm 4) \text{ l}$

Úloha III.E . . . husté měření

Sestavte si hustoměr, např. pomocí brčka a plastelíny, a změřte pomocí něj, jak závisí hustota vody na koncentraci rozpuštěné soli.

⁷Až na nos kvůli dýchání.

Úvod

Předmětem úlohy bylo vyrobit v domácích podmínkách hustoměr a změřit hustoty vodných roztoků kuchyňské soli v závislosti na jejich koncentraci. Hustoměr je měřicí přístroj fungující na základě Archimedova zákona, v hustějších kapalinách se ponoří méně. Běžný hustoměr vypadá tak, že vespod se nachází závaží a nahoru vybíhá dlouhá dutá trubice se stupnicí. Po vhození do kapaliny se zorientuje svisle a tam, kde rovina hladiny protíná stupnici, odečteme hustotu kapaliny. Aby hustoměr fungoval správně, musí splňovat dva protichůdné požadavky:

- Spodní část hustoměru musí být co nejtěžší, aby se těžiště nacházelo co nejnižše. Čím níže je položeno těžiště, tím větší rozpětí hustot jsme schopni měřit.
- Průměrná hustota hustoměru nesmí překročit hustotu měřené kapaliny.

Zastavme se u prvního bodu. Představme si, že jsme hustoměr ponořili do kapaliny s vysokou hustotou. Větší část hustoměru vyčnívá nad hladinu. Působíště vztlakové síly se nachází v geometrickém středu ponořené části. Pokud by měl hustoměr vysoko položené těžiště, pak by se těžiště ocitlo nad působíštěm vztlakové síly a svislá poloha by pravděpodobně⁸ nebyla stabilní.

Výroba hustoměru

Pro výrobu hustoměru jsme použili brčko s velkým průměrem. Je totiž vhodné, abychom získali co největší „dutý“ objem. Jako závaží jsme použili šroubek. Parametry použitého hustoměru jsou v tabulce 8. Při výpočtu průměrné hustoty jsme tvar hustoměru aproximovali válcem.

Tab. 8: Vlastnosti hustoměru.

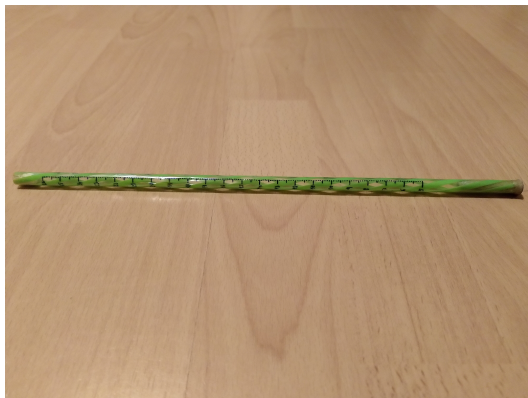
hmotnost	$m_h = (8,845 \pm 0,005) \text{ g}$
vnější průměr brčka	$r = (3,71 \pm 0,06) \text{ mm}$
výška	$l = (28,3 \pm 0,1) \text{ cm}$
průměrná hustota	$\rho_h = (723 \pm 24) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Nejobtížnější částí bylo nalezení lepidla, které pevně spojí kov s plastem a vydrží ve vodě. Použili jsme Chemoprén. Šroubek jsme přilepili na spodek hustoměru a také jsme zalepili otevřený vršek brčka, aby do něj náhodou nezatekla kapalina.

Na brčko jsme lihovým fixem nanесли stupnici v centimetrech. Stupnici jsme přelepili průhlednou izolepou kvůli ochraně⁹ před setřením.

⁸Vyhleďte si pojem „metacentrum“. I v případě, že se působíště vztlakové síly nachází pod těžištěm, může být hustoměr/plavidlo stabilní. Záleží, jak se posouvá působíště vztlakové síly při naklánění tělesa. V závislosti na konstrukci může mít vzniklý moment sil tendenci vracet plavidlo do původní polohy. Troufáme si ale tvrdit, že vysoká štíhlá konstrukce hustoměru bude nestabilní.

⁹Později se projevil i jeden nezamýšlený pozitivní efekt. Jednou ze dvou kalibračních kapalin byl totiž líh a nápisy psané lihovým fixem jsou samozřejmě rozpustné v lihu. Izolepa tak uchránila stupnici před smytím.



Obr. 9: Námí zkonstruovaný hustoměr.

Teorie

Měřicí stupnici nejdříve zkalibrujeme pomocí dvou kapalin se známou hustotou a poté u neznámých kapalin přepočítáme údaje odečtené v centimetrech na hustotu. Díky tomu, že brčko má po celé délce konstantní plochu průřezu S , bude existovat jednoduchý přepočet polohy na hustotu. Předpokládejme, že jsme hustoměr ponořili do dvou kapalin se známými hustotami ϱ_1 a ϱ_2 , přičemž na stupnici jsme odečetli polohy h_1 a h_2 . Z Archimédova zákona vyplývá

$$\varrho_1 V_0 g + \varrho_1 S h_1 g = \varrho_2 V_0 g + \varrho_2 S h_2 g = m_h g, \quad (35)$$

kde V_0 je objem části hustoměru pod začátkem stupnice. Z rovnice (35) můžeme vyjádřit poměr

$$\frac{V_0}{S} = \frac{\varrho_1 h_1 - \varrho_2 h_2}{\varrho_2 - \varrho_1}. \quad (36)$$

Se znalostí poměru V_0/S už snadno dopočítáme hustotu ϱ každé kapaliny

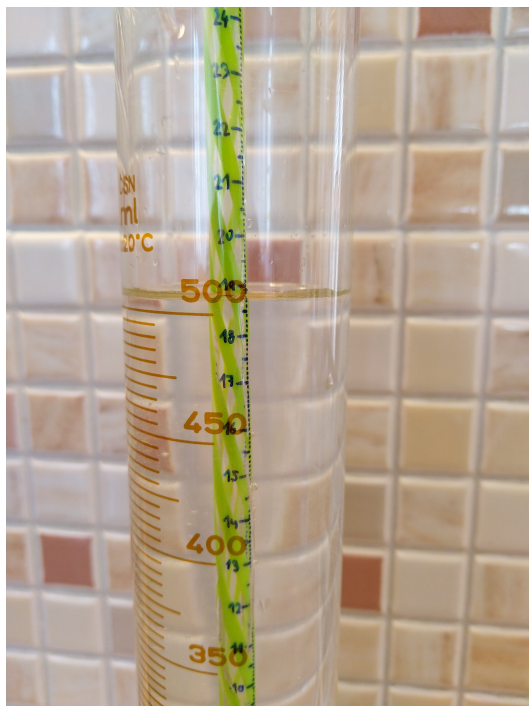
$$\begin{aligned} \varrho V_0 g + \varrho S h g &= \varrho_1 V_0 g + \varrho_1 S h_1 g = \varrho_2 V_0 g + \varrho_2 S h_2 g, \\ \varrho &= \frac{\frac{V_0}{S} + h_1}{\frac{V_0}{S} + h} \varrho_1 = \frac{\frac{V_0}{S} + h_2}{\frac{V_0}{S} + h} \varrho_2. \end{aligned}$$

Po dosazení za V_0/S ze vztahu (36) vychází

$$\varrho = \frac{\varrho_1 \varrho_2 (h_1 - h_2)}{\varrho_1 (h_1 - h) + \varrho_2 (h - h_2)}. \quad (37)$$

Koncentraci solného roztoku určíme jako

$$w = \frac{m_s}{m_s + m_v}, \quad (38)$$



Obr. 10: Použití hustoměru.

kde m_s resp. m_v jsou hmotnosti soli resp. vody v roztoku. Při teplotě 20°C je rozpustnost kuchyňské soli 35,86 g na 100 g vody, nasycený roztok má tedy koncentraci 26,39%.¹⁰

Závislost hustoty roztoku na koncentraci se nedá teoreticky spočítat, musí se určit experimentálně. Tabulková data¹¹ ukazují, že růst hustoty s koncentrací je přibližně lineární (viz graf 11).

Měření

Měření hustoty kapalin jsme prováděli v odměrném válci. Potřebovali jsme totiž dostatečně hlubokou nádobu, aby se hustoměr neopíral o dno, která přitom musela mít co nejmenší objem, abychom omezili spotřebu soli.

Nejdříve jsme pomocí dvou kapalin se známou hustotou zkalibrovali hustoměr. Konkrétně se jednalo o vodu s hustotou $\rho_v = (996,5 \pm 0,5) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a denaturova-

¹⁰Možná jste si vzpomenli na Mrtvé moře, které má salinitu 30 až 35 % v závislosti na období. Tak vysoká salinita je umožněna tím, že v Mrtvém moři jsou rozpuštěny i jiné soli než chlorid sodný.

¹¹http://old.pglbc.cz/files/chemie/hustoty_roztoku.pdf

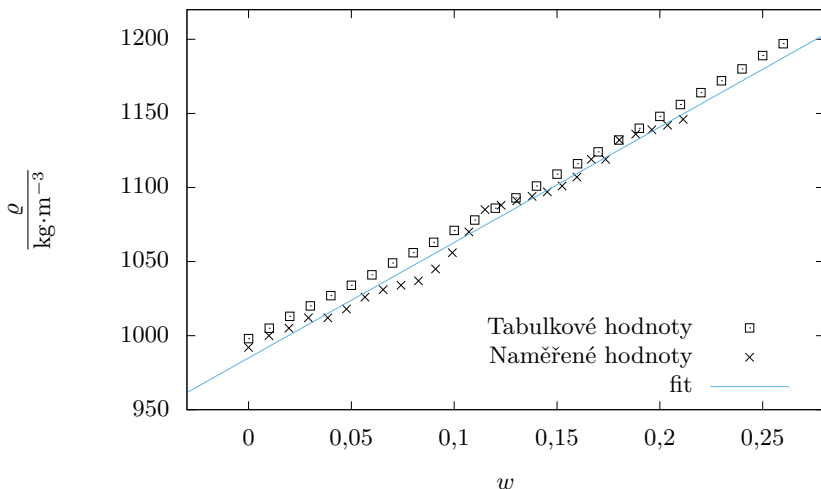
ný líc s hustotou $\rho_1 = (801,5 \pm 0,4) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Hladiny kapalin protly na stupnici polohy $h_v = (18,66 \pm 0,06) \text{ cm}$ a $h_1 = (23,45 \pm 0,07) \text{ cm}$.

Poté jsme měřili hustoty solných roztoků. Do vody o hmotnosti $(500 \pm 1) \text{ g}$ jsme přisypávali sůl po pětigramových dávkách. Když množství soli překročilo 110 g , začali jsme přisypávat sůl po šesti gramech. Kvůli rychlejšímu rozpouštění jsme krystalky kuchyňské soli nadrtili v hmoždíři. Po vysypání soli do vody jsme roztok zamíchali. Když se hladina ustálila, vložili jsme do roztoku hustoměr a odečetli jsme polohu na stupnici. Poté jsme přisypali další dávku soli. Většina soli se díky drcení na jemné krystalky rozpustila okamžitě, avšak na dně odměrného válce se v průběhu experimentu navršila hromádka, která se nerozpustila ani po mnoha hodinách.

Hodnoty v centimetrech ze stupnice hustoměru jsme přepočítali na hustoty podle vztahu (37). Naměřené hodnoty jsou v tabulce 9. Závislost hustoty na koncentraci soli jsme vynesli do grafu 11. Proložili jsme ji lineární funkcí $\rho = aw + b$ a vyšlo nám

$$a = (780 \pm 20) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3},$$

$$b = (985 \pm 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}.$$



Obr. 11: Naměřená závislost hustoty roztoku na koncentraci soli v porovnání s tabulkovými hodnotami.

Tab. 9: Naměřené hodnoty h na stupnici hustoměru pro různé hmotnosti rozpuštěné soli m_s . Z nich jsme spočítali hustoty roztoků ρ a jejich koncentrace w pomocí vztahů (37) a (38).

$\frac{m_s}{\text{g}}$	$\frac{h}{\text{cm}}$	$\frac{w}{\%}$	$\frac{\rho}{\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}}$
0	18,75	0,0	992
5	18,60	1,0	1 000
10	18,50	2,0	1 005
15	18,35	2,9	1 012
20	18,35	3,8	1 012
25	18,25	4,8	1 018
30	18,10	5,7	1 026
35	18,00	6,5	1 031
40	17,95	7,4	1 034
45	17,90	8,3	1 037
50	17,75	9,1	1 045
55	17,55	9,9	1 056
60	17,30	10,7	1 070
65	17,05	11,5	1 085
70	17,00	12,3	1 088
75	16,95	13,0	1 091
80	16,90	13,8	1 094
85	16,85	14,5	1 097
90	16,80	15,3	1 101
95	16,70	16,0	1 107
100	16,50	16,7	1 119
105	16,50	17,4	1 119
110	16,30	18,0	1 132
116	16,25	18,8	1 136
122	16,20	19,6	1 139
128	16,15	20,4	1 142
134	16,10	21,1	1 146
140	16,00	21,9	1 152

Diskuze

V grafu 11 můžeme porovnat tabulková data s naměřenými hodnotami. Vidíme, že námi naměřené hodnoty netvoří krásnou přímkou, avšak závislost proložená pomocí metody nejmenších čtverců se podobá teoretické předpovědi.

Vidíme, že hustoty solných roztoků vypočtené z naměřených dat jsou obecně nižší než teoretické hodnoty. To může být způsobeno tím, že ne všechna sůl se rozpustila (hromádka na dně zmíněná v sekci *Měření*). Malé množství nerozpuštěné soli by mohlo vysvětlit rozdíl mezi referenčními hodnotami a naším experimentem.

Tento vliv však nemůžeme kvantifikovat, protože jsme neměřili velikost hromádky nerozpuštěné soli (bylo by to velmi obtížné).

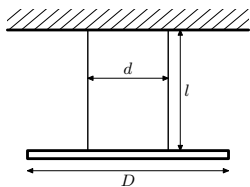
Další z možných jevů, které mohly způsobit podhodnocení experimentálních výsledků vzhledem k tabulkovým, je závislost hustoty na teplotě. Tabulkové hodnoty totiž platí pro solné roztoky při teplotě 20°C. Teplotu jsme sice neměřili, odhadujeme však, že byla vyšší než 20°C, přibližně mezi 20 a 25°C. Vyšší teplota vyústí v nižší hustotu roztoku. Malá změna teploty sice nemůže vysvětlit celý pozorovaný rozdíl, může být však jedním z vlivů, které jej způsobily. Teplota roztoku se při rozpouštění soli sama zvyšuje, protože se přitom uvolňuje energie¹² asi $H = 3,88 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Odchytky naměřených hodnot od lineární závislosti přičítáme hlavně nedokonalosti hustoměru a nepřesnostem v odečítání ze stupnice. Toto odečítání navíc komplikovalo povrchové napětí, které okolo hustoměru vytvářelo meniskus, jehož výška navíc závisela na koncentraci soli. Při ponoření hustoměru na něj působil tlak vody, což mohlo dutou trubici a vzduch v ní stlačit a tím zmenšit její objem. Náš hustoměr byl ale z poměrně tvrdého plastu, proto nepředpokládáme, že by tento efekt měl výraznější vliv na výsledky našeho měření.

Závěr

Hustotu solného roztoku ρ v závislosti na koncentraci soli w jsme v intervalu $w \in \langle 0, 0, 22 \rangle$ určili jako $\rho = ((779 \pm 20)w + (985 \pm 2)) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Úloha IV.E ... torzní kyvadlo



Veźměte si alespoň 40 cm dlouhou homogenní tyčku. Ve dvou bodech symetricky vůči jejímu středu k nř přidělejte dva závěsy ze stejného materiálu (napřříklad nit nebo vlasec), které dále upevněte k nějakému pevnému stativu tak, aby měly stejnou délku a aby byly rovnoběžné. Změřte periodu torzních kmitů tyčky v závislosti na vzdálenosti závěsů d pro různé délky závěsů l a určete, o jakou závislost na těchto dvou parametrech se jedná. Torzní kmity vypadají tak, že se tyčka otáčí ve vodorovné rovině, přičemž její střed zůstává v klidu.

Teória

Zaujímame sa o malé kmity zavesenej tyče vo vodorovnej rovine pri jej otáčaní okolo zvislej osi prechádzajúcej ťažiskom. Moment zotrvačnosti I tyče voči tejto osi je

$$I = \frac{mD^2}{12}$$

a príslušná kinetická energia E_k pri pohybe uhlovou rýchlosťou ω bude

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{mD^2}{24}\omega^2.$$

¹²Jde o tzv. solvatační entalpii <https://www.toppr.com/bytes/hydration-energy/>

Potenciální energii E_p určíme z nadvihnutí soustavy ako pri obyčajnom kyvadielku ako

$$E_p = mg\Delta h = mgl(1 - \cos \beta) \approx \frac{1}{2}mgl\beta^2,$$

kde β je uhol, o ktorý sa vychýlilo vlákno zo zvislého smeru. My však potrebujeme túto energiu vyjadriť vo veličine asociovanej s rýchlosťou ω , teda prostredníctvom uhla α , o ktorý sa pri pohybe pootočila tyč. Tieto dve veličiny sú prepojené vzťahom

$$\beta = \alpha \frac{d}{2l},$$

získaným z rovnosti dĺžky oblúkov opísaných bodom závesu pri otáčaní okolo stredu tyče a závesu. Po dosadení dostávame

$$E_p = mg \frac{d^2}{8l} \alpha^2.$$

Dobu kmitu určíme analógiou s harmonickým oscilátorom ako 2π násobok odmocniny podielu členov v energiách pred ω^2 a α^2 dostávajúc

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

Postup merania

Ako tyč sme použili drevený hranol s rozmermi $D = 89$ cm, šírkou $t = 1,5$ cm a výškou $h = 3,5$ cm. Chybu merania týchto dĺžok odhadujeme na $D = 0,1$ cm. Hmotnosť tyče sme určili ako $m = (240 \pm 2)$ g. Na tyči sme vyznačili miesta na zavesenie, chybu vzdialenosti závesov odhadujeme ako $\sigma_d = 0,2$ cm. Vzdialenosť d sme menili s krokom 10 cm. Záves tvoril motúz s dĺžkovou hustotou $\lambda = 2,0$ g·m⁻¹ uviazaný na pevnú ocelovú trubku. Merali sme pri štyroch rôznych dĺžkach závesu, chybu určenia dĺžky závesu odhadujeme na $\sigma_l = 1$ cm. Po uvoľnení tyče sme po ustálení kmitov stopkami merali dobu dvadsiatich kmitov $20T$.

Spracovanie merania

Namerané hodnoty, z nich vypočítané periódy kmitov a ich neistoty sú uvedené v tabuľke 10. Slovom „priečne“ sú označené klasické kmity, pre ktorých periódu platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l + h/2}{g}}.$$

Tu je dôležité si uvedomiť, že priečne kmity sa dejú s dĺžkou závesu až po ťažisko, zatiaľ čo torzné kmity len po záves.

Závislosti periódy kmitov od rozostupu závesov $T(d)$ sú vynesené v grafe 12 a preložené závislosťou $T = a/d$. Pre jednotlivé dĺžky závesu sme dostali konštanty a uvedené v tabuľke 11. Porovnaním so vzťahom pre periódu dostávame referenčné

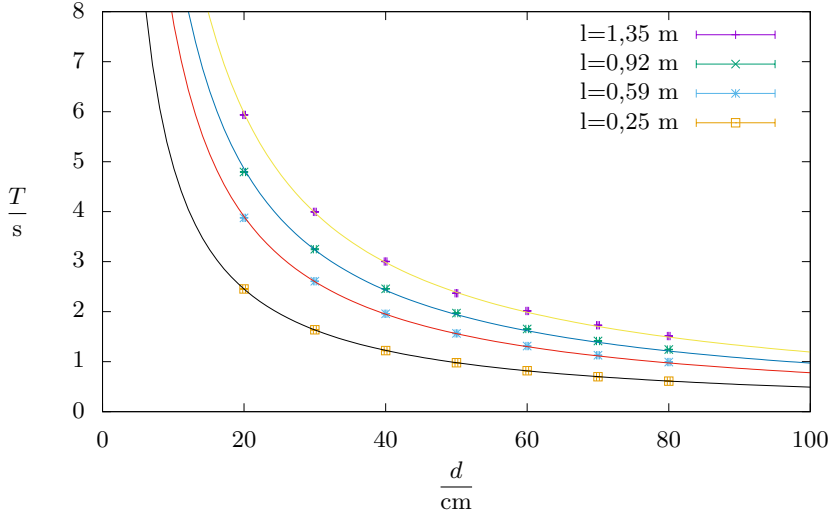
$$a_t = 2\pi D \sqrt{\frac{l}{3g}}.$$

Tab. 10: Namerané periódy torzných kmitov.

$\frac{l}{\text{m}}$	$\frac{d}{\text{cm}}$	$\frac{20T}{\text{s}}$			$\frac{T}{\text{s}}$	$\frac{\sigma_T}{\text{ms}}$
1,35	80	30,3	30,3	30,2	1,513	5
1,35	70	34,6	34,6	34,5	1,728	5
1,35	60	40,3	40,4	40,2	2,015	6
1,35	50	47,4	47,4	47,4	2,370	5
1,35	40	60,1	60,1	60,0	3,003	5
1,35	30	79,7	80,1	79,9	3,995	8
1,35	20	118,8	118,6	118,7	5,935	6
1,37	priečne	47,4	47,2	47,2	2,363	6
0,92	80	24,9	24,8	24,9	1,243	5
0,92	70	28,3	28,2	28,3	1,413	5
0,92	60	33,0	33,2	33,0	1,653	6
0,92	50	39,4	39,4	39,5	1,972	5
0,92	40	49,1	49,2	49,1	2,457	5
0,92	30	64,6	65,2	65,2	3,250	11
0,92	20	90,9	95,8	95,9	4,793	6
0,94	priečne	39,0	38,6	38,7	1,938	8
0,59	80	19,9	19,9	19,8	0,993	5
0,59	70	22,6	22,6	22,5	1,128	5
0,59	60	26,1	26,4	26,2	1,312	7
0,59	50	31,3	31,2	31,4	1,565	6
0,59	40	39,2	39,1	39,2	1,958	5
0,59	30	52,1	52,1	52,3	2,608	6
0,59	20	77,7	77,4	77,5	3,877	7
0,61	priečne	31,2	30,9	31,2	1,555	7
0,25	80	12,2	12,2	12,2	0,610	5
0,25	70	14,0	13,9	14,0	0,698	5
0,25	60	16,3	16,4	16,4	0,818	5
0,25	50	19,5	19,6	19,6	0,978	5
0,25	40	24,5	24,5	24,4	1,223	5
0,25	30	32,9	32,6	32,7	1,637	7
0,25	20	49,2	49,2	48,8	2,453	8
0,27	priečne	20,3	20,0	19,8	1,002	9

Chybu výpočtu a_t určíme ako

$$\sigma_{a_t} = a_t \sqrt{\left(\frac{\sigma_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{2l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_g}{2g}\right)^2}.$$



Obr. 12: Závislost periody torzných kmitov T na šírke závesu d .

Tab. 11: Výsledné koeficienty fitu.

$\frac{l}{m}$	$\frac{a}{cm \cdot s}$	$\frac{\sigma_a}{cm \cdot s}$	$\frac{a_t}{cm \cdot s}$	$\frac{\sigma_{a_t}}{cm \cdot s}$
1,35	119,4	0,3	119,8	0,5
0,92	97,1	0,5	98,9	0,6
0,59	78,0	0,2	79,2	0,7
0,25	49,03	0,04	51,5	1,0

Diskusia

Z grafu a z malých chýb regresných parametrov a môžeme vidieť, že náš model závislosti periody kmitov na šírke závesu je správny. Porovnaním experimentálnych hodnôt s vypočítanými vidíme ďalej aj to, že model je správny aj ako závislosť na dĺžke závesu a má aj správne určenú multiplikatívnu konštantu.

Malý rozdiel medzi nameranými a vypočítanými hodnotami môže byť spôsobený vplyvom iných kmitov ako torzných, no najmä nepresnosťou merania dĺžky závesu. V úvahách sme zanedbali možné nehomogenity hranola, ktorý sme navyše aproximovali tyčou. Táto aproximácia je však oprávnená, keďže moment zotrvačnosti hranola je v plnom tvare $I = \frac{1}{12}m(D^2 + t^2) \approx \frac{1}{12}mD^2$ v rámci chyby merania D . Ťažisko hranola sa nenachádzalo presne v strede, bolo odchýlené asi 0,5 cm na stranu, stred závesov sme umiestnili práve do tohto bodu.

Pozoruhodné je rozpätie meraných periód od takmer pol sekundy po skoro desať (pôvodne sme chceli merať aj pre $d = 10$ cm, kde by jedno meranie trvalo asi 4 minúty).

Na meranie samotné malo vplyv aj tlmenie kmitov. Na začiatku sme prebytočný povrázok nechali voľne visieť, čo spôsobovalo silné tlmenie pri rýchlych kmitoch. To sme odstránili namotáním prebytočného povrázku okolo hranola v mieste závesu. Táto malá prebytočná hmotnosť povrázku mohla ovplyvniť dobu kmitu, veľkosť tohto vplyvu odhadujeme do 1 %.

Záver

Zostavili sme teoretický model kmitov, ktorý sme následne experimentálne overili. Perióda torzných kmitov tyče na dvoch závesoch dĺžky l upevnených d od seba symetricky okolo ťažiska tyče je popísaná vzťahom

$$T = 2\pi \frac{D}{d} \sqrt{\frac{l}{3g}},$$

kde D je dĺžka tyče a g je tiažové zrýchlenie.

Úloha V.E . . . nenaolejuje-li Jáchym, naolejuje Matěj

Změřte závislost teploty kapaliny v otevřeném hrnku na čase. Jako kapalinu použijte nejdříve vodu, potom olej a nakonec vodu s malou vrstvou oleje na povrchu. Vrstva by měla být co nejtenčí, ale zároveň musí pokrývat celý povrch vody. Měřte v rozsahu od 90 °C do 50 °C. Dávejte pozor na to, aby veškeré podmínky byly při všech experimentech stejné (použijte stejný hrnek se stejnou počáteční teplotou, teploměr ponechte celou dobu v kapalině pokaždé na stejném místě atd.). Popište co nejlépe experimentální aparaturu, srovnajte chladnutí v jednotlivých případech a výsledky diskutujte.

Teoretický úvod

Teplotu môžeme pre bežné telesá v našom okolí charakterizovať ako istú mieru pohybu častíc v látke. Čím vyššia teplota, tým viac sa častice v látke pohybujú. Chladnutie telesa môže mať niekoľko príčin. Teplo sa vo všeobecnosti šíri vedením, žiarením alebo prúdením. Pri vedení sa povrchy s rozdielnou teplotou navzájom dotýkajú, a tak si častice postupne vymieňajú kinetickú energiu, čo pozorujeme ako ohrievanie chladnejšieho materiálu a chladnutie teplejšieho. Táto tepelná energia sa šíri látkou ďalej. Pri žiarení sa pri bežných teplotách uvoľňuje tepelná energia

hlavne ako infračervené žiarenie, ktoré odnáša zo systému energiu pomocou fotónov. Pri prúdení sa oblasti kvapaliny alebo plynnej látky navzájom miešajú a tým postupne dochádza k rovnomernému rozptýleniu tepelnej energie.

Ďalším javom, ktorý sa podieľa na zmene teploty telesa, je aj skupenská premena. Pri vyparovaní sa spotrebuje veľké množstvo energie na premenu kvapaliny na plyn. Tým sa daná kvapalina ochladí.

Najpomalší pokles teploty tak očakávame pri vode s vrstvou oleja. Odparovanie vody spôsobí, že voda samotná sa kvôli efektu vyparovania svojou krivkou viac priblíži chladnutia oleja, ktorý obsahuje najmenej tepelnej energie.

Popis experimentu

Našou úlohou bolo sledovanie teploty sústavy hrnčeka spolu s určitou kvapalinou. Zo zadania sme pre náš experiment použili keramický hrnček s valcovým tvarom. Hrnček sme mali umiestnený na kuchynskej doske, materiálové vlastnosti podložky môžeme odhadovať ako blízke drevu. Hmotnosť a rozmery hrnčeka sme zmerali pomocou digitálnych váh, resp. šuplery. Teplotu sme merali pomocou aplikácie Logger Lite a pomocou senzora STS-BTA Vernier s presnosťou (v nami sledovanom rozsahu) $0,4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Períodu jedného merania sme nastavili na 5 sekúnd. Keďže samotný hrnček má pomerne vysokú tepelnú kapacitu, zohriali sme ho najprv naliatím kvapaliny, až potom sme kvapaliny vymenili a prebehlo meranie. Vodu sme zohrievali v rýchlovarnej kanvici. Použitý bol repkový olej, ktorý sme zohrievali na plynovom sporáku, jeho teplotu sme kontrolovali pomocou teplotného senzora počas zahrievania. Použili sme približne rovnaké množstvo jednotlivých tekutín (teda nalievali sme plný hrnček).

Výsledky merania

V tabuľke 12 máme dôležité údaje k meraniu, tabuľka 13 obsahuje parametre hrnčeka. Všimnime si, že kým hustoty vody a oleja sú si relatívne podobné, tak merné tepelné kapacity sa značne líšia. Preto istý objem oleja obsahuje ani nie polovicu tepelnej energie rovnakého objemu vody. Výsledná závislosť teploty od času je znázornená v grafe 13

Tab. 12: Laboratórne podmienky a konštanty. Vlastnosti vody resp. oleja sa vzťahujú k teplote $70\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Teplota vzduchu	$(21,1 \pm 0,2)\text{ }^{\circ}\text{C}$
Tlak vzduchu	$(930 \pm 2)\text{ hPa}$
Vlhkosť vzduchu	$(41 \pm 1)\%$
Hustota vody	$(998 \pm 1)\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Hustota repkového oleja	$(916 \pm 1)\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Merná tepelná kapacita vody	$4\,190\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Merná tepelná kapacita oleja	$2\,050\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Tab. 13: Parametre hrnčeka.

	Výška	(97 ± 1) mm
	Hrúbka steny v strede hrnčeka	$(7,4 \pm 0,1)$ mm
	Vonkajší priemer podstavy hrnčeka	(83 ± 1) mm
	Hmotnosť	$(414,10 \pm 0,02)$ g
	Merná tepelná kapacita keramiky ($70\text{ }^{\circ}\text{C}$)	$850\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
	Objem použitých tekutín	(300 ± 5) cm ³
	Kapacita vody s hrnčekom	$1\ 609\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
	Kapacita oleja s hrnčekom	$915\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

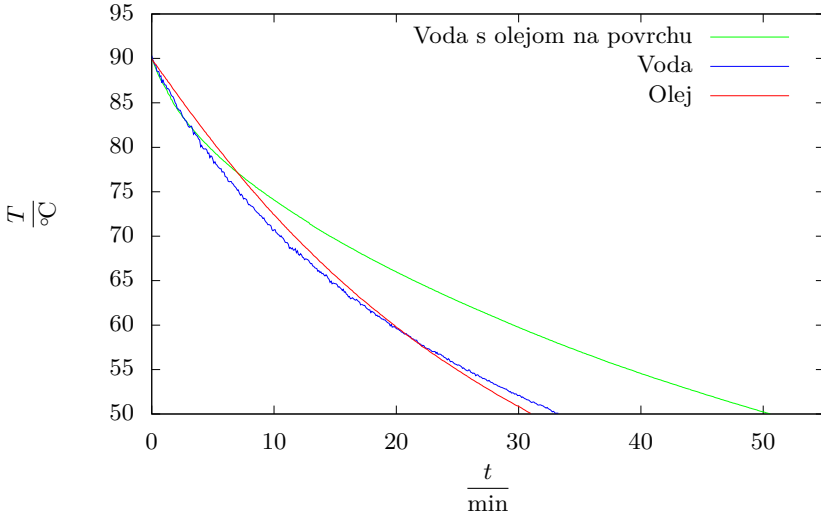
Diskusia

Samotné tabuľky s hodnotami nám vedia povedať zopár zaujímavých údajov. Celková kapacita sústav (tekutina a hrnček) sa v prípade oleja od sústav s vodou výrazne líši. Kapacita sústavy oleja je približne o 40 % nižšia oproti ostatným dvom.

Keď sa pozrieme na priebeh funkcií jednotlivých teplôt, môžeme si všimnúť, že samotná voda a voda s olejom sa správajú na začiatku merania relatívne podobne, čo je dosť neintuitívne. Pri nezávislom pozorovaní správania sa tekutín sme si všimli, že rozdiel teploty medzi povrchom a dolnou časťou tekutiny v hrnčeku pri vyšších, ale aj nižších teplotách, dosahoval niekoľko stupňov, čo skreslovalo celkový obraz o množstve tepelnej energie v sústave. Aj preto bola nutná podmienka jedného statického miesta merania. Pri položení na studenú dosku tekutina vie rýchlejšie strácať teplo v počiatkovej fáze práve cez veľký rozdiel teplôt vedením. V tomto prípade sú podstatné vlastnosti väčšiny tekutiny v hrnčeku, teda vody. Táto podobnosť kriviek chladnutia trvala približne prvých 5 minút merania, pravdepodobne kým sa ustanovil stacionárny stav rozloženia teplôt v blízkom okolí hrnčeka. V sústave s čistým olejom bol rozdiel medzi dnom a vrchom hrnčeka veľký, a teda počiatkové odoberanie tepla bolo menšie. Faktor, ktorý pravdepodobne tiež zohral rolu, bolo aj nie úplne dokonalé zahriatie hrnčeka, ktorý sám mohol odoberať teplo inak v rôznych prípadoch.

Ak si pozrieme bližšie krivku vody, tak môžeme vidieť, že jednotlivé merania, ktoré sú pri sebe, majú často rozdielne hodnoty. Tieto odchýlky sú síce v rámci systematickej chyby prístroja a môžeme ich pokojne zanedbať, avšak pravdepodobne za nimi stojí buď nedokonalý kontakt v meriacom zariadení pri danom meraní, alebo istý typ mikroprúdenia v tekutine vytvorený rôznymi teplotami v tekutine. Preto pozorujeme isté rozdiely po 5 sekundách nášho vzorkovania. Je potrebné mať ďalej na pamäti aj znižovanie objemu vody v hrnčeku odparovaním. Pri vode s olejom sme to nepozorovali, keďže z povrchu sa významne neodparovalo.

Počas väčšiny času merania sa však sústava s vodou správala podobne ako sústava s olejom. To môžeme vysvetliť tým, že olej má síce menšiu tepelnú kapacitu, ale zase, ako už bolo spomenuté, stráca menej energie vyparovaním. Najpomalšie chladla voda s olejom na povrchu, ktorá kombinuje veľkú tepelnú kapacitu vody



Obr. 13: Závislosť teploty jednotlivých tekutín na čase

s malými stratami vypracovaním vďaka oleju.

Nutnou pripomienkou je ešte aj to, že jednotlivé hodnoty uvedené v tabuľkách sú poväčšine stredné hodnoty, keďže veličiny ako napríklad merná teplotná kapacita oleja sa s teplotou výrazne menia. To platí aj pre kermické materiály.

Záver

Z pozorovaných vzoriek najpomalšie chladne voda s olejom na povrchu. Voda a olej v tomto rozmedzí chladnú približne rovnako rýchlo, avšak pre iný hrnček a iné podmienky merania sa môžu líšiť. V našom meraní sa tak teploty zmenili z 90 °C na 50 °C pre olej za 31 minút, vodu za 33 minút a vodu s olejom na povrchu za 51 minút.

Úloha VI.E ... viskozita

Změřte dynamickou viskozitu dvou různých olejů Stokesovou metodou.

Teorie

Tato úloha je založena na měření doby pádu kuličky ve válci naplněném olejem. Pro úspěšné změření úlohy je stěžejní Stokesova rovnice, která popisuje vztah mezi odporovou hydrodynamickou silou F_d a dynamickou viskozitou kapaliny η

$$F_d = 6\pi\eta rv,$$

kde r je poloměr kulovitých částic pohybujících se v daném prostředí a v je jejich rychlost. Rovnice však platí pouze za předpokladu, že proudění okolo kuličky je laminární. To ověříme výpočtem Reynoldsova čísla

$$\text{Re} = \frac{2r\rho v}{\eta}, \quad (39)$$

kde ρ je hustota prostředí. Čím je Reynoldsovo číslo menší, tím spíše je proudění laminární. Konkrétní hodnota, při které se mění charakter proudění, neexistuje, přechod obecně nastává někde v rozsahu hodnot od desítek do tisíců. V našem případě je tedy vhodné volit $\text{Re} < 1$.

Předpokládáme, že kulička v oleji velmi rychle dosáhne terminální rychlosti a dále už nebude zrychlovat. Potom je výslednice sil nulová, neboli $F_d = F_g - F_{vz}$. Dosazením dostáváme

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_k - \rho) g,$$

kde ρ_k je hustota kuličky. Odtud si už můžeme vyjádřit dynamickou viskozitu

$$\eta = \frac{2r^2 (\rho_k - \rho) g}{9v} = \frac{2r^2 (\rho_k - \rho) g t}{9l},$$

kde rychlost v vypočítáme z doby pádu kuličky t mezi dvěma značkami, jejichž vzdálenost je l .

V našem případě jsme pracovali s kapalinou v odměrném válci. Musíme tedy do Stokesova zákona ještě započítat tzv. Wall effect,¹³ který zohledňuje poměr (r/R), kde r je poloměr kuličky a R je vnitřní poloměr odměrného válce. Upravený Stokesův vzorec potom vypadá následovně

$$F_x = 6\pi\eta r v \left(1 - 2,4 \frac{r}{R}\right)$$

a výsledný vztah pro dynamickou viskozitu, do kterého budeme dosazovat, se změní na

$$\eta = \frac{2r^2 (\rho_k - \rho) g t}{9 \left(1 - 2,4 \frac{r}{R}\right) l}. \quad (40)$$

Měření Reynoldsova čísla

Při měření jsme měli k dispozici dva druhy kuliček (označené barvami – žlutá a bílá) a dva oleje – ricinový a olivový olej. Hodnoty Reynoldsova čísla jsme zjišťovali pro každou kombinaci barva-olej. V tabulkách jsme našli hodnoty hustoty a dynamické viskozity pro oba oleje:

- ricinový olej: $\rho_R = (962 \pm 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\eta_R = 0,986 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$,
- olivový olej: $\rho_O = (913 \pm 2) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\eta_O = 84 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$.

¹³<https://tinyurl.com/y6588rc6>

Stanovili jsme vzdálenosti l pro oba oleje, měřené pásovým měřidlem s nejistotou měření $\sigma_l = 1$ mm, a vyšlo nám $l_R = (69 \pm 1)$ mm a $l_O = (174 \pm 1)$ mm. Tyto vzdálenosti jsou různé z důvodu odlišných rychlostí kuliček v jednotlivých olejích.

Následně jsme měřili průměr d kuliček pomocí mikroskopu s hodnotou nejmenšího dílku $\sigma_d = 0,01$ mm. Časový interval t pádu kuličky v oleji byl měřen ručně stopkami, reakční dobu při měření času jsme odhadli na $\sigma_t = 0,1$ s. Výsledky z těchto měření jsou v tabulkách 14 a 15.

kulička i	žlutá	bílá
	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$
1	3,03	1,59
2	2,93	1,59
3	2,95	1,57
4	3,03	1,56
5	3,05	1,56
\bar{d}	3,00	1,57
σ_d	0,02	0,01

Tab. 14: Naměřené hodnoty průměrů kuliček d .

olej kulička i	ricinový		olivový	
	žlutá $\frac{t}{\text{s}}$	bílá $\frac{t}{\text{s}}$	žlutá $\frac{t}{\text{s}}$	bílá $\frac{t}{\text{s}}$
1	9,16	29,72	2,67	6,61
2	8,82	29,51	2,36	6,65
3	9,22	29,22	2,56	6,36
\bar{t}	9,1	29,5	2,5	6,5
σ_t	0,2	0,2	0,1	0,1

Tab. 15: Naměřené hodnoty času t pro všechny kombinace kuliček a olejů.

Dosazením za rychlost do rovnice (39) jsme dostali výraz

$$\text{Re} = \frac{d\rho l}{\eta t},$$

odkud jsme spočítali hodnoty Reynoldsova čísla pro všechny čtyři kombinace, viz tabulka 16. Vzhledem k tomu, že se jedná jen o orientační hodnoty, výpočet chyby jsme zanedbali.

	ricinový olej	olivový olej
žlutá kulička	$2,22 \cdot 10^{-2}$	2,27
bílá kulička	$0,36 \cdot 10^{-2}$	0,46

Tab. 16: Orientační hodnoty Reynoldsova čísla.

Měření dynamické viskozity

Z hodnot Reynoldsova čísla jsme usoudili, že bude nejlepší použít žlutou kuličku v ricinovém oleji a bílou kuličku v olivovém oleji. Pro každou kombinaci barva-olej jsme měřili dynamickou viskozitu pětkrát a jejich hodnoty zprůměrovali.

Ještě předtím jsme pomocí posuvného měřidla změřili poloměry nádob odměrných válců $R_R = (29,71 \pm 0,01)$ mm a $R_O = (28,86 \pm 0,06)$ mm. Rovněž jsme stanovili hustoty kuliček pyknometrickou metodou.¹⁴ Za použití dvou různých pyknometrů o objemu 10 ml, digitálních vah s přesností $\sigma_m = 0,0005$ g a destilované vody o hustotě $\varrho = 996,8$ kg·m⁻³ jsme naměřili hodnoty $\varrho_z = (2390 \pm 80)$ kg·m⁻³ a $\varrho_b = (2440 \pm 80)$ kg·m⁻³.

Při měření času t jsme ponechali stejné vzdálenosti l , neboli $l_R = (69 \pm 1)$ mm a pro olivový olej $l_O = (174 \pm 1)$ mm. Abychom dosazovali přímo námi naměřené hodnoty, upravili jsme vzorec (40) na

$$\eta = \frac{d^2 (\varrho_k - \varrho) g t}{18 \left(1 - 1,2 \frac{d}{R}\right) l},$$

kde jsme za tíhové zrychlení dosadili $g = 9,81373$ m·s⁻², což odpovídá hodnotě v Praze. Výsledky měření průměru d a času t jsou v tabulce 17. Z jejich průměrných hodnot jsme spočítali dynamickou viskozitu

$$\begin{aligned} \eta_R &= (1,00 \pm 0,11) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}, \\ \eta_O &= (82 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}. \end{aligned}$$

Nejistota měření dynamické viskozity byla určena ze vzorce pro šíření nejistot. Zde jsme použili aproximaci $\sigma_{e_k} \gg \sigma_e$, čili jsme zanedbali chybu hustoty olejů, a dostali jsme

$$\begin{aligned} \sigma_\eta \approx \eta \left(\left(\frac{R - 0,6d}{R - 1,2d} \frac{2\sigma_d}{d} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{e_k}}{\varrho_k - \varrho} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\sigma_l}{l} \right)^2 + \left(\frac{R}{1,2d} - 1 \right)^{-2} \left(\frac{\sigma_R}{R} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (41)$$

¹⁴https://cs.wikibooks.org/wiki/Laboratorní_tehnika/Pyknometrické_stanovení_hustoty

kulička i	žlutá		bílá	
	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{t}{\text{s}}$
1	3,00	8,97	1,58	6,28
2	2,76	9,75	1,58	6,38
3	3,02	8,76	1,59	6,50
4	2,98	8,74	1,57	6,59
5	2,95	8,94	1,58	6,44
\bar{x}	2,94	9,0	1,580	6,44
σ_x	0,10	0,4	0,007	0,12

Tab. 17: Měření dynamické viskozity.

Diskuze

Při výpočtu Reynoldsova čísla nám šlo zejména o řádový odhad, abychom věděli, zda je splněna podmínka laminárního proudění. Proto jsme si mohli dovolit zanedbat nepatrnou odchylku v tabulkových hodnotách hustoty a dynamické viskozity u obou druhů olejů.

Tabulková hodnota viskozity ricinového oleje je $\eta = 0,986 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, což se v rámci chyby měření shoduje s vypočítanou hodnotou viskozity při měření se žlutými kuličkami. Hodnota viskozity olivového oleje nalezena v tabulkách je $\eta = 84 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$, což je rovněž v rozmezí naší naměřené chyby.

Podíváme-li se na vzorec pro výpočet celkové nejistoty měření dynamické viskozity (41), na první pohled má největší podíl na výsledné chybě průměr d a hustota ρ , což může být za užití nelaboratorního náčiní kritické pro zhodnocení přesnosti celého měření. Při měření v laboratoři jsme dosáhli celkové relativní chyby v rozmezí 5 % až 6 %. Je tedy pochopitelné, že relativní chyby při měření doma mohou dosahovat i desítek procent. V takovýchto podmínkách je nutné volit kompromis a raději použít větší kuličky za cenu zvýšení Reynoldsova čísla. Vhodné je taktéž volit kuličky s relativně malou hustotou ze známého materiálu. Nezanedbatelný efekt na měření má i hladkost povrchu a kulatost kuliček, což také není snadné zajistit v domácích podmínkách. Důležitější než výsledná hodnota chyb je především jejich řádné zdokumentování a zdůvodnění vlivu okolních podmínek na celkové chybě měření.

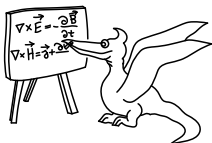
Závěr

Změřili jsme dynamickou viskozitu dvou různých olejů. Pro ricinový olej nám vyšlo

$$\eta_{\text{R}} = (1,00 \pm 0,11) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1},$$

pro olivový olej jsme dostali

$$\eta_{\text{O}} = (82 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}.$$



Tipy a triky v řešení fyzikálních úloh

Kapitola 1: Tipy a triky v řešení fyzikálních úloh

Úvod

Letošní seriál se bude od většiny minulých seriálů FYKOSu lišit jak svým pojetím, tak i obtížností. Tentokrát chceme začít od úplných základů tak, aby byl seriál přístupný pro všechny řešitele. Věříme ale, že se i ti pokročilejší naučí něco nového. Některá z letošních témat se sice probírají i v hodinách fyziky či fyzikálních seminářů na školách, ale většinou se moc nestíhá a tak se z nich obvykle dozvíte jenom část. Cítíme proto povinnost vytvořit studijní materiály pokrývající tyto informace, které považujeme za základní pro další studium fyziky. Taktéž vycházíme ze zkušeností s opravováním účastnických řešení a v nich vytrvale se opakujících typů chyb¹.

Typickými chybami se budeme zabývat zejména v prvním díle seriálu, a to společně s různými aspekty fyzikálních jednotek a veličin. V dalších dílech se budeme věnovat symetriím, zákonům zachování, trikům s nekonečnem či hledání extrémů a kvalifikovaných odhadů. Seriál se bude tedy lišit i tím, že nebude popisovat jeden obor fyziky (či matematické/informatické fyziky), ale budeme se pohybovat napříč různými oblastmi. Cílem bude předložit různé typy „triků“, či možná přesněji rychlých typů řešení, které se můžou hodit při řešení fyzikálních úloh.

Co se týče složitosti, pokusíme se vystačit si co nejvíce se středoškolskou matematikou. Myslíme tím znalost základních funkcí (sin, cos, tg, exponenciála, logaritmus) a operací (sčítání, násobení, mocnění a příslušné inverzní operace). Časem budeme potřebovat i derivace². Seriál se dále bude snažit citovat historické úlohy FYKOSu související s probíranými tématy a také další externí zdroje. Ty budou sloužit pro procvičení, vyjasnění tématu či pro nastudování dalších zajímavostí. Některé tipy vám pak můžou získat alespoň „body za snahu“ či přesněji body za nějaké fyzikální uvažování, například že daná veličina nemůže nabývat méně než něco, více než něco nebo že se musí jednat o vztah v nějakém tvaru.

Přestože se může zdát, že jde o „stará“ témata, která nemají co nabídnout, tak jste si jistě všimli, že i v dnešní době dochází k pokrokům v rámci základních kamenů fyziky, jako například v definici základních jednotek. Toto je stále aktuální

¹Samozřejmě, že nepokryjeme všechno i vzhledem k rozsahu. Ale snad se nám podaří vybrat co největší množství co nejužitečnějších témat.

²Pokud byste se chtěli rovnou vrhnout na derivace, které se vám určitě mohou pro další studium fyziky hodit, tak si můžete projít text o derivacích https://fykos.cz/_media/akce/rseminar/derivace_1_.pdf či nějakou středoškolskou učebnici.

téma, protože změny definic byly schváleny na 26. Generální konferenci pro míry a váhy 16. listopadu 2018 s účinností od 20. května 2019.

Závěrem úvodu – v rámci tohoto seriálu budeme hodnotit i „úpravu“ řešení, od čehož se snažíme u jiných úloh odhlédnout (byť v některých případech to nelze). Tedy snažte se, aby řešení byla čitelná a postup byl dostatečně dobře popsán. Dále dodržujte správný zápis jednotek popsáný v prvním díle seriálu.³ Na druhou stranu – **můžete se snažit nalézt chyby v autorských řešeních** organizátorů. Nikdo není dokonalý a pokud naleznete závažné chyby či více drobných chyb a pošlete je v řešení seriálové úlohy, můžete dostat bonusové body.

Základní kameny fyziky

V prvním dílu se budeme zabývat tím, jak správně přistupovat k řešení úloh a to zejména z hlediska jednotek, které vážně nejsou jenom na ozdobu. Seznámíte se také s metodami, které se ve fyzice používají k některým užitečným odhadům, a to s rozměrovou analýzou a s podobnostními čísly. Pokusíme se o stručnost – tedy počítejte s tím, že nějaké zajímavé informace vynecháme a úplný seznam bude pouze u základních jednotek. Další jednotky můžete nalézt např. v matematicko-fyzikálních a chemických tabulkách.

Fyzikální jednotky

Základem fyziky je správné používání jednotek. Když se nám podaří dostat k nějakému výsledku, tak hraje velkou roli v jakých jednotkách výsledek dostaneme. Je snad zřejmé, že je opravdu velký rozdíl, jestli máme 10 metrů, kilometrů, úhlových stupňů, radiánů, mikroampérů, grayů či třeba brambor.

Rovnou si uvedme to, že pokud máme nějakou fyzikální veličinu X , pak tím, že ji dáme do hranatých závorek $[X]$ dostaneme její jednotku. Pokud ji dáme do složených závorek $\{X\}$, pak získáme její hodnotu v základních jednotkách. Platí tedy $X = \{X\} [X]$. Například, pokud máme změřenou dráhu s o délce 5,00 metrů s přesností na centimetry, tak můžeme psát $s = 5,00 \text{ m}$, respektive $\{s\} = 5,00$ a $[s] = \text{m}$. Více k zápisu a přesnosti se dozvíte v části o formálních částech řešení.

Základní jednotky

V České republice, Slovensku a ve velké části světa se primárně používají jednotky SI.⁴ Je sice pár států, kde svezepě používají jiné systémy (např. USA), což může působit problémy,⁵ ale těm se nebudeme věnovat.⁶ Více o historii jednotek se můžete

³Pokud máme zadané veličiny na dvě, tři platné cifry, opravdu nemá smysl psát výsledek na čtyři a více platných cifer. Jak by se na jedinou mohla přesnost zvýšit? Tohle je jedna z hlavních point tohoto dílu a ještě ji, pro jistotu, zopakujeme.

⁴Zkratka pochází z francouzského „Le Système International d’Unités“.

⁵Například pokud stavíte v kolaboraci nějakou družici a někdo ji vyrobí ve velikostech odpovídající centimetrům a někdo v palcích.

⁶V některých oblastech fyziky či v technické praxi se používají i jiné základní jednotky, ale vždycky musí být jasná domluva, jaké jednotky jsou používány, aby nedošlo ke zmatení. Docela známá varianta je systém CGS (centimetr, gram, sekunda), který má vůči SI relativně jednoduché převodní vztahy. Zajímavým příkladem je letectví, jehož specifikem, a to i v ČR, je určování výšky letadla ve stopách, horizontální vzdálenosti v mílich a rychlosti letadel v uzlech.

dočíst např. na Wikipedii.⁷ V rámci stručnosti se budeme věnovat pouze aktuální verzi, resp. poslední změně z května 2019.

Přehled základních jednotek Základních jednotek SI je 7 a jejich přehled se značkami najdete v tabulce 18.

Tab. 18: Základní jednotky SI; Dop. zn. = doporučená značka veličiny, Jd. = Jednotka, Zn. = Závazná značka jednotky; * u délky je více doporučených značek v závislosti na tom, o jakou délkovou veličinu se jedná.

Veličina	Dop. zn.	Jd.	Zn.
Délka	l, x, \dots *	metr	m
Hmotnost	m	kilogram	kg
Čas	t	sekunda	s
Elektrický proud	I, i	ampér	A
Termodynamická teplota	T	kelvin	K
Látkové množství	n	mol	mol
Svítivost	I_v	kandela	cd

Kilogram je jedinou základní jednotkou, která má ve svém názvu předponu (kilo) – pozor na to při výpočtech a používání odvozených jednotek!

Doporučené značky je vhodné používat, aby z vašeho zápisu někdo další⁸ snadněji pochopil postup vašeho řešení. Pokud si ale definujete veličiny jinak, pak to ničemu nevádí – nicméně v tom případě je nutné každou veličinu popsat.

Jednotky píšeme s malým písmenem na začátku – např. kelvin je jednotka, lord Kelvin of Largs je osoba.

Definice základních jednotek Od letošního roku jsou konečně všechny fyzikální jednotky definované na základě nějakých fyzikálních konstant, jimž byla zafixována přesná hodnota, či vztahem k nějakému fyzikálně měřitelnému ději. Mohli bychom si klást otázku, jestli jsou tyto „konstanty“ opravu konstantní v čase, v prostoru a v celém vesmíru. Odpovědí je, že se zdá, že snad ano. Respektive zatím nebyly naměřeny žádné změny a minimálně pro praxi v běžném životě je vhodné je považovat za konstantní.⁹

Nicméně se zde používají i metry např. pro určování dohlednosti. Základním předpisem pro jednotky v letectví je ICAO Annex 5, respektive jeho český ekvivalent letecký předpis L 5. Letecké předpisy v ČR se přejímají z ICAO a dále jsou upraveny nařízením EU a zákony ČR. Je další zajímavostí, že předpisy ICAO jsou obvykle placené, ale jejich české ekvivalenty jsou volně ke stažení na <https://aim.rlp.cz/predpisy/predpisy/index.htm>.

⁷Doporučujeme anglickou verzi: https://en.wikipedia.org/wiki/International_System_of_Units.

⁸Například organizátor hodnotící úlohu.

⁹Ve FYKOSu jsme již několikrát zadávali úlohy, které se zabývaly často dost drastickými změnami fyzikálních konstant a úkolem bylo snažit se domyslet, co by to znamenalo pro experimenty, pro život a pro vesmír. Ukázkou může být zdvojnásobení gravitační konstanty v úloze 26-II-P (https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_2_p.pdf), výrazné snížení rych-

Sekunda je definována fixací číselné hodnoty cesiové frekvence $\Delta\nu_{Cs}$, tedy frekvence přechodu mezi hladinami velmi jemného rozštěpení neporušeného základního stavu atomu ^{133}Cs , aby byla rovna $9\,192\,631\,770$, je-li vyjádřena jednotkou $Hz = s^{-1}$.

Jinak řečeno, sekundu máme přesně definovanou pomocí atomových hodin s cesiem. Sekunda je právě definovaná sice přes relativně dobře objektivně měřitelnou veličinu, ale stále zatím závisí na nějakém konkrétním atomu a na měření blízko absolutní nule, respektive na korekcích měření na reálnou teplotu. Definice se od roku 1967 výrazně nezměnila, ale do budoucna se uvažuje například o změně atomu, aby byla určena ještě přesněji. To pravděpodobně nebude mít žádný znatelný vliv na lidský život, ale bude to vhodné pro vědecké účely a možná nějaké technické aplikace.

Metr je definován fixací číselné hodnoty rychlosti světla ve vakuu c tak, aby byla rovna $299\,792\,458$, je-li vyjádřena jednotkou $m\cdot s^{-1}$, kde sekunda je definována pomocí cesiové frekvence $\Delta\nu_{Cs}$.

Jinak řečeno, metr je vzdálenost, kterou urazí světlo za $(299\,792\,458)^{-1}$ s ve vakuu.

Kilogram je definován fixací číselné hodnoty Planckovy konstanty h tak, aby byla rovna $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$, je-li vyjádřena jednotkou $J\cdot s = kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$, kde metr a sekunda jsou definovány pomocí c a $\Delta\nu_{Cs}$.

Jinak řečeno, zafixovali jsme hodnotu rychlosti světla a přechodů v chladných atomech cesia. Když doplníme fixaci Planckovy konstanty, máme určenou hmotnost.

Kilogram je jednotka, která byla až do letošní změny definice poslední závislou na prototypu, který je uložen v Sèvres u Paříže. To bylo nepraktické z mnoha důvodů. Představte si, že někdo přijde s hadříkem, setře vrstvu atomů a hmotnost Slunce „najednou naroste“ o miliony kilogramů.¹⁰ Uvažovalo se o více možnostech fixace. Přímočará by byla fixace gravitační konstanty. Bohužel, tu v současnosti nedokážeme měřit dostatečně přesně. Může se to zdát trochu zvláštní, ale když už dokážeme měřit něco rozumně, tak je to spíše součin hmotnosti konkrétního tělesa jako Země či Slunce s gravitační konstantou, ale ne ji samotnou.¹¹ Proto nakonec padla volba na Planckovu konstantu, kterou dokážeme měřit s vysokou přesností a tím pádem víme, že hodnota, kterou jsme zafixovali co nejlépe dle současného poznání, odpovídá kilogramu, který jsme měli doposud.

losti světla v 27-I-P (https://fykos.cz/_media/rocnik27/ulohy/pdf/uloha27_1_p.pdf) nebo třeba opačný přístup, ve kterém jsme chtěli, aby se zachovávala velikost vesmíru na úkor změny konstant v 31-VI-P (https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/pdf/uloha31_6_p.pdf).

¹⁰Kulturní vložka: Hadříky jsou obecně nebezpečným nástrojem v rukou neerudovaných osob, vizte ukázkou restaurace obrazu např. [https://en.wikipedia.org/wiki/ECce_Homo_\(Martínez_and_Giménez,_Borja\)](https://en.wikipedia.org/wiki/ECce_Homo_(Martínez_and_Giménez,_Borja)).

¹¹Například v tabulce na <https://ssd.jpl.nasa.gov/?constants> můžete srovnat nepřesnost určení „gravitational constant“, která je zhruba 0,005 %, s nepřesností určení „mass ratio: sun/(Earth+Moon)“, která je zhruba 0,000006 %.

Možná bychom mohli k této jednotce poznamenat, že na otázku: *Je těžší kilogram železa, nebo kilogram peří?* je správná odpověď: to záleží. Kilogram železa na podložce je těžší, pokud je v atmosféře a ve stejně silném tíhovém poli jako peří (a pokud dokonale nepřiléhá na podložku). Železo má totiž vyšší hustotu a tedy i nižší objem. Vztaková síla je přímo úměrná objemu, takže větší vztaková síla bude působit na peří a to tak bude na váze lehčí. Pokud bychom ovšem umístili oba předměty do prostoru bez atmosféry, pak by měly být stejně těžké. Pokud bychom je umístili na různá místa s různou tíhovou silou, pak bude rozhodující intenzita tíhového pole.

Jako nehodnocenou úlohu si můžete rozmyslet, jak je to s kilogramem v obecné teorii relativity a jak se může změnit jeden kilogram, který byl původně v klidu, když se začne pohybovat, a jak se změní intenzita gravitačního pole v místě, kde se vyskytuje.

Ampér je definován fixací číselné hodnoty elementárního náboje tak, aby byla rovna $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$, je-li vyjádřena jednotkou $C = A \cdot s$, kde sekunda je definována pomocí $\Delta\nu_{Cs}$.

Jinak řečeno, když máme sekundu, tak zafixováním hodnoty elementárního náboje dostaneme elektrický proud.

Tato jednotka se letos změnila. Předcházející definice byla závislá na existenci nekonečně dlouhých vodičů ve vakuu umístěných přesně 1 m od sebe.¹² Současná definice je přirozenější.

Kelvin je definován fixací číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty tak, aby byla rovna $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$, je-li vyjádřena jednotkou $J \cdot K^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí h , c a $\Delta\nu_{Cs}$.

Jinak řečeno, pokud máme sekundu, metr a kilogram, můžeme zafixovat Boltzmannovu konstantu a dostaneme teplotu. Tato jednotka se nyní také změnila. V minulých verzích jednotek SI byla definovaná pomocí fázových změn vody. Poslední definice byla spojena s trojným bodem vody a absolutní nulou.

Mol je definován fixací číselné hodnoty Avogadrovy konstanty, aby byla rovna $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$, je-li vyjádřena jednotkou mol^{-1} .

Jinak řečeno, řekli jsme si, kolik částic je jeden mol a tím jsme zafixovali jednotku látkového množství. Jak jistě tušíte, mol vlastně není skutečnou fyzikální jednotkou. Je to spíše jen předpona, tedy něco jako „kilo-“ nebo „mili-“.

Kandela je definována fixací číselné hodnoty světelné účinnosti K_{cd} monochromatického záření o frekvenci $540 \cdot 10^{12}$ Hz, aby byla rovna 683, je-li vyjádřena jednotkou $lm \cdot W^{-1} = cd \cdot sr \cdot W^{-1} = cd \cdot sr \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány pomocí h , c a $\Delta\nu_{Cs}$.

¹²Jak vidíte, nejenom ve FYKOSu se potkáte s takovými praktickými záležitostmi jako je sféricky symetrické kuře ve vakuu – vizte 28-III-5 (https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_3_5.pdf).

Kandela je asi nejméně používanou základní jednotkou. Úplně původně se vycházelo ze svítivosti svíčky a i proto má jednotka takový název.

Odvozené jednotky

Odvozené jednotky jsou ty, které vzniknou součinem či podílem základních jednotek. Mohou být v různých mocninách, ale nesmí být násobené nějakým číslem. Můžeme místo nich obecně používat zápis pomocí základních jednotek. Existuje jich velké množství, podíváme se na některé z nich. Některé byly už zmíněné v předchozích definicích, vybrané pojmenované ukázky jsou v tabulce 19. Některé používáme ve formě zápisu základních jednotek, jako je například rychlost v $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Tab. 19: Vybrané odvozené jednotky SI; Dop. zn. = doporučená značka veličiny a ukázka vztahu základním jednotkám, Jd. = Jednotka, Zn. = Značka jednotky; * energie má mnoho forem značení a vztahů v rámci fyziky, rozměrově odpovídá práci W .

	Veličina	Dop. zn.	Jd.	Zn.
	Elektrický náboj	$Q = It$	coulomb	$C = A\cdot s$
	Frekvence	$\nu = \frac{1}{t}$	hertz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$
	Intenzita záření radioak. zdroje	$A = \frac{1}{t}$	becquerel	$\text{Bq} = \text{s}^{-1}$
	Energie	např. $E = mgh, \dots^*$	joule	$\text{J} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
	Výkon	$P = \frac{W}{t}$	watt	$\text{W} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$

Důležitými odvozenými jednotkami jsou radián – bezrozměrná veličina odpovídající rovinnému úhlu od 0 do 2π (plný úhel), a steradián – bezrozměrná veličina odpovídající prostorovému úhlu od 0 do 4π (plný prostorový úhel). Obě můžeme určit tak, že vezmeme délku jednotkové kružnice, resp. plochu povrchu jednotkové koule, a to je právě hledaná hodnota.

Násobné jednotky

Pro zkrácení zápisu se používají násobné jednotky. Jistě z nich některé známe, v tabulce 20 jsou připomenuté ty, co se používají častěji a doporučujeme naučit se je z paměti. Jinde můžete nalézt předpony od 10^{-24} po 10^{24} .

Tab. 20: Předpony pro násobné jednotky.

piko	nano	mikro	mili	centi	deci
p	n	μ	m	c	d
10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
deka	hekto	kilo	mega	giga	tera
da	h	k	M	G	T
10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}

Vedlejší jednotky

Jedná se o jednotky, které nejsou přímo odvozené jako součiny či podíly několika základních jednotek, ale je mezi nimi a základními jednotkami nějaký složitější vztah. V současnosti se nepovažují za jednotky soustavy SI, ale některé z nich jsou používány napříč světem. Typickými příklady, které často používáme, jsou minuta, hodina, den, rok, úhlový stupeň, hektar, litr či tuna. Mohli bychom sem řadit i jednotky, které v SI světě už obvykle nepoužíváme, jako jsou stopa, míle, loket, uzel, bušl, galon, libra atd.

Formální stránka řešení úloh

Jak jste si jistě všimli, správně se píše číslo, mezera, jednotka. Značky veličin píšeme kurzívou (skloněným písmem), značky jednotek pak normálním písmem (stojetým, neskloněným). V ČR používáme desetinnou čárku, v anglicky psané literatuře se pak obvykle setkáte s desetinnou tečkou. Pro oddělení tisíců můžeme použít mezeru, vhodnou násobnou jednotku, nebo tisíce oddělovat nemusíme. Pokud je jednotka naší veličiny tvořena více základními jednotkami, používáme tečku · pro zdůraznění násobení. Je ale i možné mezi jednotkami napsat pouze mezeru. Pro násobení (jak skalárních veličin, tak jednotek) nepoužíváme křížek ×, který je vyhrazený pro vektorový součin. Přijatelné formy zápisu jsou například

$$W = 1\,230\text{ J} = 1,23\text{ kJ} = 1\,230\text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2} = 1\,230\text{ kg m}^2\text{ s}^{-2}.$$

Dále pro vyšší či nižší řády často používáme zápis s mocninou desítky, tedy např.

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ kg}^{-1}\cdot\text{m}^3\cdot\text{s}^{-2}, \quad M_{\text{Slunce}} = 1,98 \cdot 10^{30}\text{ kg}.$$

Jednotka se nemusí uvádět u bezrozměrných veličin. Mnohdy ale uvádíme procenta % či části z milionu ppm, kde $1 = 100\% = 1\,000\,000\text{ ppm}$. Někdy ovšem používáme bezrozměrnou jednotku, protože nechceme splést například u úhlových veličin

$$\pi\text{ rad} = 180^\circ.$$

Ve specifických případech, kdy je zápis jednotky dlouhý a zajímá nás pouze srovnání hodnot (zpravidla v grafu), se využívá označení „arbitrary unit“, resp. různé zkratky jako arb. unit, arb. u., AU či a.u. – vzhledem k tomu, že poslední dvě jsou často používány pro astronomickou jednotku (příčemž au je nyní doporučené označení astronomické jednotky). V případě řešení úloh FYKOSu se doporučujeme tomuto způsobu označení jednotky zcela vyhnout. Jinde bychom pak doporučili používat spíše označení „procedure defined unit“ se zkratkou p.d.u. dle IUPAC.¹³

Vyjádření neznámé z rovnice

Pokud řešíte nějakou fyzikální úlohu, téměř vždy je lepší pracovat s „písmenky“ než s „čísly“. Má to několik důvodů:

¹³International Union of Pure and Applied Chemistry = Mezinárodní unie pro čistou a užitou chemii

- Obecný zápis je kratší. Srovnejte $mc(t_1 - t_0)$ a

$$0,206 \text{ kg} \cdot 4\,180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (303 \text{ K} - 273 \text{ K}) .$$

- Hybridní zápis ve výpočtu bez jednotky je nekorektní, protože 10 brambor není to samé jako 10 ampérů. I tak se stává, že se objevují zápisy jako

$$mc(t_1 - t_0) = 0,206 \cdot 4\,180 \cdot (303 - 273) = 861 \cdot 30 = 25,8 \text{ kJ} .$$

Jak jste si asi všimli, tak ani jedna rovnost dokonale neplatí. První a třetí nám říkají, že jouly jsou rovny bezrozměrné jednotce, což je závažná chyba, a u druhé a třetí jsme zaokrouhlovali, což není taková chyba, ale ztrácíme přesnost.

- Pokud dosadíte až na konec, zmenšíte zaokrouhlovací chyby v průběhu.
- Může se stát, že vám někdo řekne: „A co kdyby se teplota v chladnější lázni snížila o 10 K?“ Pak vám stačí jenom dosadit do výsledného vztahu jedno číslo jiné a nemusíte počítat celou úlohu od začátku.
- Můžete provést rozměrovou zkoušku (vizte dále). V případě, že rovnou dosazujete čísla, tak se obvykle stane, že si rovnou napíšete $mc(t_1 - t_0) = 0,206 \cdot 4\,180 \cdot (303 - 273) \cdot \text{J}$ a pak už rozměrová zkouška nedává smysl.

Poučení do života tedy zní: **Pokud to jde, počítejte obecně a vyjádřete neznámou z rovnice!** Pokud to nejde, tak je opět vhodné upravovat rovnici co nejdéle do nějakého co nejjednoduššího tvaru a až ten využít pro numerické výpočty.¹⁴

Zaokrouhlování, přibližné rovnosti a úměrnosti

Důležitým závěrem výpočtu je závěrečné zaokrouhlení. Buď pouze vhodně zaokrouhlíme na vhodný počet platných cifer nebo i vypočteme chybu měření a tu u svého výsledku uvedeme. Zpravidla druhou a složitější variantu s určením chyby vyžadujeme u experimentální úlohy, kdežto u teoretických úloh nám stačí vhodné zaokrouhlení na správný počet platných cifer.

Platné cifry Je potřeba přesně chápat, co znamenají platné cifry. Pokusme si to vysvětlit názorně na příkladech. Pokud víme, že něco měří 12,5 cm a měřili jsme to pravítkem s přesností na milimetry, tak je to správný zápis a námi naměřená veličina má tři platné cifry. Pokud bychom měřili s přesností na centimetry a dospěli k výsledku 13 cm, pak se jedná o dvě platné cifry. I pokud zapíšeme svoje měření jako 1,3 dm, pak jsou to stále dvě platné cifry. Z formátu zápisu 130 mm si tím už ale nemusíme být jisti, zejména pokud vidíme pouze tento zápis a nikdo nám neřekl, jak měření probíhalo a jak moc si tedy můžeme výsledku „vážit“. Obecně ale bychom tento zápis také měli považovat za dvě platné cifry, pokud nemáme další informaci. Stejně tak zápis 130 000 μm budeme považovat za zápis se dvěma

¹⁴O numerických metodách řešení různých problémů pojednávají seriály FYKOSu v 31. ročníku (o numerických metodách a počítačových simulacích), v 21. ročníku (o počítačové fyzice) a 8. ročníku (o numerických metodách). Odkaz na ročenky s texty a řešenými úlohami naleznete na stránce <https://fykos.cz/ulohy/serial>.

platnými ciframi. Pokud bychom chtěli jasně vyjádřit, že jsme něco změřili s přesností na čtyři platné cifry a na konci jsou dvě nuly, pak musíme číslo převést do desetinné formy, např. 1,300 dm či $1,300 \cdot 10^{-2}$ m nebo 130,0 mm.

Snad je i z ukázek názorné to, že nemá smysl mluvit o desetinných místech, protože převodem jednotek se nám počet desetinných míst změní, ale fyzikálně zajímavý je právě počet platných cifer.

Jak se chovat při zaokrouhlování? Jednak se moc nesnažte zaokrouhlovat mezivýpočty, které byste dosazovali dále. Jak je uvedené u zdůvodnění důležitosti vyjadřování neznámé z rovnice, tak tím byste se mohli dopustit akumulované nepřesnosti.¹⁵ Na druhou stranu je vhodné si dosazovat do některých mezikroků a ověřit, že vám vychází rozumné hodnoty pro tyto fyzikální veličiny a pak třeba i tyto hodnoty do postupu napsat – lépe tím zdokumentujete svůj postup.

Závěrečné zaokrouhlení se provádí podle nejhůře zadané veličiny. Tedy té, která byla zadána na nejmenší počet platných cifer. V případě, že ve výpočtu vystupují nějaké věci jako počet kusů apod., pak tyto veličiny bereme jako zadané přesně a ne např. jako jednu platnou cifru. Zaokrouhlíme na počet platných cifer odpovídající nejhůře zadané veličině či maximálně o jednu platnou cifru více. Při zaokrouhlování dle těchto pravidel používáme standardní způsob zaokrouhlování (méně než 5 dolů; 5 a více nahoru).

Příklad Perdita X běžela rychlostí $v = 3,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Jak všichni jistě víte, má a měla hmotnost zhruba metrák. Jakou měla kinetickou energii?

Kinetickou energii určíme ze vztahu $E_k = mv^2/2$. Jaká je nejhůře zadaná veličina? Zjevně jde o hmotnost, kde víme, že jde asi o metrák, takže nevíme ani jak moc přesně to víme. Jde o praktickou ukázkou toho, že ne vždy je počet platných cifer hned jasný. Pravděpodobně bude přesnost tak na desítky kilogramů, tedy budeme předpokládat, že hmotnost je $m = 1,0 \cdot 10^2$ kg. Zaokrouhlíme proto na dvě platné cifry. Výsledek je $E_k = 490$ J, když zaokrouhlíme na dvě platné cifry. Samozřejmě by byl lepší explicitnější zápis $E_k = 4,9 \cdot 10^2$ J či $E_k = 0,49$ kJ.

Co u výsledků s chybou měření V případě, že máte vypočítanou chybu měření, zaokrouhluje se právě podle této chyby. Chybu obvykle zaokrouhlíme na jednu platnou cifru. Výjimkou je, pokud je první cifra 1 nebo 2, pak lze zaokrouhlit na dvě platné cifry.¹⁶ Chybu často zaokrouhluje nahoru, aby byla vyšší jistota, že se v intervalu vytyčeném střední hodnotou a touto chybou nalézá skutečná hod-

¹⁵Když už byste opravdu potřebovali počítat s vyjádřeními hodnotami a ne proměnnými, pak je vhodné zaokrouhlovat mezivýpočty tak, že používáte o dvě platné cifry více, než budete potřebovat přesnost výsledku. Tím pádem budou chyby v několikanásobném zaokrouhlení mezivýpočtu skoro jistě dostatečně malé, aby výsledek nezměnily. Ale tento postup nedoporučujeme.

¹⁶V některých specifických případech se zaokrouhluje vždy na dvě platné cifry.

nota. To, jakým způsobem lze vypočítat chybu měření, se můžete dočíst v mnoha zdrojích.¹⁷

Samotnou veličinu pak zaokrouhlíme na stejné desetinné místo, na které jsme zaokrouhlili chybu. Tedy pozor, zde se poprvé něco řídí podle desetinného místa. Zaokrouhlení provádíme jinak standardním postupem (méně než 5 dolů; 5 a více nahoru). Nezapomeneme výsledek zapsat tak, aby jak samotná veličina, tak chyba měly jednotku. V tabulce 21 je několik ukázek korektních zápisů.

Tab. 21: Příklady korektního zápisu výsledků s chybou měření.

$a_g = (9,81 \pm 0,02) \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$	$h = (162 \pm 2) \text{ cm}$	$A_{\text{Bq}} = (1\,430 \pm 40) \text{ Bq}$
$l = (4,242 \pm 0,008) \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$I = (0,132 \pm 0,017) \mu\text{m}$	$U = (630 \pm 30) \text{ kV}$

Typy rovností Máme několik forem rovnosti. Základní rozdělení je uvedeno v tabulce 22.

Tab. 22: Formy rovnosti a úměrnosti.

Forma rovnosti	Význam
=	Rovná se, přesně.
\doteq	Rovná se, ale přibližně. Používáte, když běžně zaokrouhlujete.
\equiv	Rovná se ve smyslu „je identické“. Na rozdíl od běžného = platí rovnost pro všechny možné hodnoty. Například rovnice $f(x) = 1$ znamená, že hledáme takové x , pro které je funkční hodnota jedna. Oproti tomu vztah $f(x) \equiv 1$ nám říká to, že hodnota funkce f je pro všechna x rovna jedné.
\approx	Rovná se přibližně. Obvykle by mělo jít o řádový odhad na jednu, maximálně dvě platné cifry. Typicky se používá u aproximací, například $\sin x \approx x$ pro malé hodnoty x .
\propto	Vyjadřuje, že veličina vlevo je přímo úměrná veličině vpravo.
\sim	Má více významů, například úměrnost nebo podobnost. Občas se používá pro hodně divoké odhady (slabší verze \approx).

Užitečnost fyzikálních jednotek

Rozměrová zkouška

Rozměrová zkouška je základním nástrojem pro kontrolu výsledků. I když vůbec nechápete postup, jak někdo něco spočítal, pokud nevychází rozměrová zkouška,

¹⁷Například knihovnička Fyzikální olympiády ČR obsahuje text Zpracování dat fyzikálních měření <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>. FYKOSí seriál 30. ročníku se také věnoval zpracování dat fyzikálních měření <https://fykos.cz/rocnik30/serial/start>.

musí být nutně ve výpočtu chyba. Tato metoda je velice rychlá a hodí se mimo jiné i pro kontrolu vlastních výsledků.

Rozměrová zkouška spočívá v tom, že si porovnáte jednotku veličiny, kterou jste chtěli vypočítat s jednotkou vztahu, která vám vyšla. Pokud se rovnají, výsledek má naději na to být správný. Pokud se nerovnají, máte jistotu, že je to špatně (pokud jste neudělali chybu v rozměrové zkoušce).

Například, co by se nemělo nikdy stát, je, že bychom měli do funkce sinus, kosinus, tangens, exponenciála či logaritmus dosazovat veličinu s jednotkou, která není bezrozměrná. Další evidentní chybou je, pokud sčítáme či odečítáme dvě různé jednotky. Také bychom nikdy neměli nic mocnit na nějakou veličinu s fyzikálním rozměrem.

Rozměrová analýza

Jde o užitečnou metodu, s jejíž pomocí můžeme získat velice zajímavé vztahy pouze na základě znalosti veličin (a jejich jednotek), které by měly hrát roli v daném fyzikálním jevu. Jednotky se musí rovnat. Proto převedeme všechny jednotky na základní s neznámými exponenty a sestavíme rovnice pro tyto exponenty.

Tento postup dobře ilustruje následující úlohy FYKOSu:

- 24-IV-1 (1. část) – napnutá struna¹⁸ – rozměrová analýza je zde docela podrobně vysvětlena,
- 28-V-1 – tuhost pana Plancka¹⁹ – pomocí rozměrové analýzy se hledá jedna z Planckových veličin,
- 32-V-2 – hloubka vniku do koule²⁰ – pomocí rozměrové analýzy se nalezne řešení jinak velice náročného problému vedení tepla,
- 7. FYKOSího Fyziklání²¹ – úloha AB – písky času – další jednoduchá aplikace u jinak složitějšího problému.

Další úlohy využívající rozměrovou analýzu:

- 28-II-E – vodní rozpad²² – rozměrová analýza je využita v teorii k experimentu,
- 20-II-E – vlny na vodě²³ – opět aplikace rozměrové analýzy v teorii k experimentu s vodou.

Podobnostní čísla

Podobnostní čísla jsou výpočetně velmi podobná rozměrové analýze. Motivací pro sestavování takových čísel je v tom, že některé fyzikální jevy probíhají obdobně při stejných hodnotách daných podobnostních čísel. Často se využívají v hydromechanice, protože jde často o příliš složité problémy na to, aby měly analytické řešení. Pokud ale nalezneme vhodné podobnostní číslo, pak můžeme provést simulace či

¹⁸https://fykos.cz/_media/rocnik24/ulohy/pdf/uloha24_4_1.pdf

¹⁹https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_5_1.pdf

²⁰https://fykos.cz/_media/rocnik32/ulohy/pdf/uloha32_5_2.pdf

²¹https://fykos.cz/_media/rocnik26/fyziklani/reseni.pdf

²²https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_2_e.pdf

²³https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20_2_e.pdf

experimenty pro mnohem menší rozměry, což bude pravděpodobně daleko levnější, než kdybychom museli např. stavět různá celá křídla letadel jako prototypy.

Ve srovnání s rozměrovou analýzou se nám situace komplikuje (či zjednodušuje, záleží na úhlu pohledu) tím, že chceme, aby výsledná veličina byla bezrozměrná. Tím pádem, pokud nalezneme jeden výsledek, nalezneme jich nekonečně mnoho. Stačí naše podobnostní číslo umocnit na (nenulovou) mocninu a dostáváme další řešení. Nejhezčí je obvykle sestavit podobnostní číslo tak, aby bylo co nejvíce veličin v čitateli a aby exponenty všech veličin byly celá čísla. Mnoho podobnostních čísel můžete nalézt na internetu.²⁴

Nejznámějším podobnostním číslem je pravděpodobně Reynoldsovo číslo, které je definované vztahem

$$\text{Re} = \frac{v_s d}{\nu},$$

kde v_s je střední hodnota rychlosti proudění kapaliny v daném průřezu (tu můžeme vypočítat z průtoku kapaliny), d je „hydraulický průměr“ trubice (tedy efektivní průměr) a ν je kinematická viskozita kapaliny. Případně vztah mezi kinematickou viskozitou kapaliny, její dynamickou viskozitou η a hustotou ρ je $\eta = \nu \rho$.

Vysoké hodnoty Reynoldsova čísla znamenají turbulentní proudění kapaliny, při nízkých pak dochází k laminárnímu proudění. O hranici mezi těmito oblastmi se hovoří jako o kritické hodnotě, byť jde spíš o interval, kde není proudění ani trvale turbulentní ani zcela laminární. Často se mluví o kritické hodnotě kolem 2000, ale záleží na konkrétním uspořádání toku kapaliny.

Jak správně zapsat řešení

Ještě si na závěr zdůrazněme, jaký je správný postup pro zápis řešení. Nejde jenom o to, jak psát řešení FYKOSu, podobná struktura je obvykle požadována i u jiných soutěžích, protokolů z měření, závěrečných prací a dalších textů.

Předně je potřeba slovně popsat, alespoň stručně, svůj **postup řešení**. Je sice pěkné, pokud se matematicky dostaneme ke správnému výsledku, ale hodnotí se i to, jak své výsledky dokážeme interpretovat a také odkud a jak jsme se k danému matematickému řešení dostali. V některých případech se to může zdát zjevné, ale i tak je lepší popsat postup slovně. Uvedení podrobného postupu je důležité i proto, že pokud se hned na začátku řešení dopustíme malé chyby, může být zbytek řešení stále uznán jako správný. Napíšeme-li ale pouze chybný výsledek bez dostatečného postupu, bude špatně celá úloha.

Nesmíme zapomínat na všechna **pravidla o zaokrouhlování a jednotkách**, která jsme uvedli výše. Je vhodné si výsledek zkontrolovat jak z hlediska správnosti jednotek, tak z hlediska reálnosti hodnot veličin, které nám vyšly. Typický příklad, kdy by nás mělo trknout, že něco nevyšlo dobře, je, pokud nám vyjde rychlost vyšší než rychlost světla. Ale i když se budeme bavit o tom, jak rychle jede auto, tak už tisíce metrů za sekundu by také měly vyvolávat silné podezření, že je něco špatně. Pokud ovšem chybu nedokážete najít a jste přesvědčeni o správnosti svého

²⁴ Abychom vám usnadnili hledání, tak na anglické Wikipedii je naleznete na stránce https://en.wikipedia.org/wiki/Dimensionless_numbers_in_fluid_mechanics.

postupu, tak je určitě rozumné řešení odeslat. Každopádně je potřeba v rámci diskuze napsat, že výsledek není moc pravděpodobný a že nejspíše bylo zanedbáno ještě něco, co hraje velkou roli. I za takovou diskuzi je často možné získat body. Určitě je to lepší šance na větší bodový zisk, než když budete nereálný výsledek ignorovat.

Všechny úlohy, které jsou zadány ve FYKOSu, jsou slovní úlohy. Stejně tak když píšete nějakou vědeckou práci, zadání problému je slovní. Proto je potřeba na závěr **napsat slovní odpověď** - či ještě lépe doplnit ji diskuzí. Diskuze by se měla zabývat obvykle tím, co jsme zanedbali a jaký vliv by mohlo mít uvážení těchto veličin, pokud to dokážete odhadnout. Tím myslíme třeba i jen kvalitativní popis toho, že na základě jevu X bude výsledek Y větší či menší. Například pokud otázkou bylo, jaký výkon musí mít motor auta na to, aby dojelo za určitý čas z místa A do místa B a explicitně nebylo v zadání napsáno, že se má zanedbat odpor prostředí, ale nikde nebyly ani popsány parametry auta, které s odporovými silami souvisí, tak je vhodná odpověď typu: „Aby se auto dostalo z bodu A do bodu B za 20 minut, muselo by mít v průběhu cesty minimálně konstantní výkon 40 kW. Jedná se o minimální výkon, protože jsme neuvažovali odporové síly prostředí, které by způsobily ještě další energetické ztráty.“

Závěr a upoutávka na příště

Co jsme se dozvěděli a co jsme si zopakovali? Zejména to, že je potřeba používat jednotky. Připomněli jsme si základní jednotky SI s jejich novými definicemi. Rozměrová analýza nám může pomoci odhalit zajímavé vztahy mezi fyzikálními veličinami. Nezapomínejte psát správné jednotky a správně zaokrouhlovat.

Pokud byste měli zájem se procvičit v počítání v nestandardních jednotkách, můžeme doporučit, abyste se podívali na 4. sérii 19. ročníku FYKOSu.²⁵ Celá série je o planetě Balónků, kteří používají jednotky, které jsou „jim přirozené“, stejně jako třeba dvojkovou soustavu.

Příště se budeme zabývat grafickým řešením úloh a využíváním symetrie. Dále zmíníme vhodnost některých souřadnic pro řešení vybraných fyzikálních problémů.

Úloha I.S ... pomalý rozjezd

10 bodů

- Vyjádřete následující veličiny²⁶ pomocí základních jednotek SI.
 - $F \cdot \Omega$, kde F je farad a Ω je ohm
 - $N \cdot \text{Pa}$, kde N je newton a Pa je pascal
 - $\frac{C \cdot V}{J}$, kde C je coulomb, V je volt a J je joule
 - $\frac{T \cdot \text{Wb}}{H \cdot \text{Sv}}$, kde H je henry, Sv sievert, T tesla a Wb weber
- V následujících tvrzeních nalezněte všechny chyby a popište, proč jde o chyby.
 - $s = vt^2/2 = 5,2 \cdot 1,2^2/2 = 3,744 \text{ m}$.
 - $y_m \sin(2\pi\omega) = 15\text{cm} \cdot \sin(2 \cdot 3,141 \cdot 50\text{Hz}) \doteq 0\text{cm}$

²⁵<https://fykos.cz/rocnik19/ulohy/serie4>

²⁶Bez ohledu na to, že dané součiny možná nedávají žádný rozumný fyzikální smysl.

- (c) Pro experimenty jsme použili úspěšně sadu gamabeta. Na základě měření radioaktivního rozpadu Uranu ve smolinci jsme zjistily, že náš vzorek má aktivitu přesně 532,24 bequerelů.
- (d) $s = 1,23 \text{ m}$, $t = 2,7 \text{ s} \Rightarrow v = s/t \doteq 0,46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $m = 240 \text{ g}$, $E = mv^2/2 \doteq 25 \text{ J}$, $P = E/t \doteq 9,3 \text{ W}$
3. Jakou silou působí vítr na korunu stromu? Víme, že to má souvislost s rychlostí větru v , průřezem stromu vystaveného větru S a hustotou vzduchu ρ . Proveďte rozměrovou analýzu a na jejím základě určete vztah pro sílu.
4. Sestavte podobnostní číslo odpovídající situaci, ve které protlačujeme kapalinu skrz charakteristickou délku l pomocí gradientu tlaku $\frac{dp}{dx}$ (případně si tuto veličinu představte jednoduše jako změnu tlaku se vzdáleností $\frac{\Delta p}{\Delta x}$). Kapalina má hustotu ρ a kinematickou viskozitu ν . Určete, jaké všechny varianty tohoto podobnostního čísla existují. Jednu z nich si vyberte a pokuste se ji interpretovat.

Bonus Vymyslete co nejoriginálnější Planckovu jednotku (veličinu sestavenou z kombinace redukované Planckovy konstanty \hbar , gravitační konstanty G , rychlosti světla c , Boltzmannovy konstanty k_B a Coulombovy konstanty k_e , přičemž nemusí obsahovat všechny). Popište její odvození a okomentujte její hodnotu. Nejzajímavější zmíníme v brožurce s řešeními. (řešení str. 164)

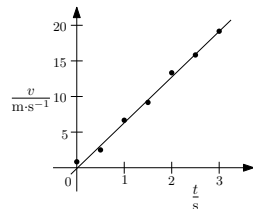
Kapitola 2: Grafy, symetrie a souřadnice

Úvod

Minule jsme si probrali nějaké záležitosti kolem jednotek, formálních stránek řešení fyzikálních úloh a jejich zápisu. Věříme, že se budete snažit mít na paměti to, že i formální stránka řešení je důležitá a někdy i díky ní můžete snadněji odhalit chyby. V tomto díle se zmíníme o nějakých tématech, která se týkají grafických řešení úloh, symetrií a souřadnic. Každé z těchto témat je samo o sobě velice obsáhlé, a proto zde naleznete pouze spíše takové ochutnávky.

Grafy a grafická řešení

U grafů bychom mohli pokračovat s formální stránkou řešení. Ve stručnosti jenom poznamenejme, že do grafů chceme vynášet hodnoty na číselnou osu. Musíme tedy hodnotu veličiny vydělit vhodnou jednotkou, abychom mohli do grafu uvést bezrozměrnou veličinu. Další pravidla se pak týkají spíše experimentů. Naměřené hodnoty obvykle nespojujeme čarou, ale prokládáme fitem, který co nejlépe odpovídá datům. V případě výrazných chyb měření jednotlivých bodů bychom neměli zapomínat na chybové úsečky. Pokud jsou chyby měření srovnatelné s rozměrem znázornění bodu v grafu či dokonce men-



Obr. 14: Ukázka jednoduchého grafu, který má nejnutnější prvky.

ší, pak je uvádět nutně nemusíme. Ukázku co nejjednoduššího, ale ještě rozumně vypadajícího grafu vidíte na obrázku 14.

Plocha pod grafem funkce

Pokročilejší z vás jistě vědí, že plochu pod funkcí můžeme počítat pomocí integrálu. Nicméně integrování je často těžké a není od věci si připomenout (nebo naučit se) i jiné základní postupy. Zmíňme ty, které můžeme používat, pokud máme zadanou funkci nebo k dispozici její graf.

Barvení

První ze základních možností, jak určit plochu, je ji prostě nějak přímočaře změřit. Můžeme si pod či přes graf dát čtvercovou síť a spočítat čtverečky pod plochou grafu k celkovému počtu čtverečků. Téměř jistě budou nějaké čtverečky proťaté, a tak se musíme rozhodnout, jak budeme „zaokrouhlovat“ čtverečky. Přesnější bývá odhadovat, jaká plocha je obarvená v částečně obarveném čtverečku, a kombinovat čtverečky mezi sebou tak, aby vytvořily celé jednotkové čtverečky. Pro větší přesnost je vhodnější brát menší čtverečky, ale „ručně“ je počítat je pak pracné. Pokud můžeme využít počítač, je vhodné počítat jednotlivé pixely pomocí nějakého programu. Pokud je černobílý obrázek v nějaké kompresi dat a má dovolenou celou barevnou paletu, tak na rozhraních černé a bílé se setkáte s různými odstíny šedi. Pak musíte zvolit, podobně jako u ručního počítání čtverečků, postup, který vám dá plochu rozumně přesně. U této metody navíc není nutné mít funkce, můžeme určovat i pokrytí obrázku vybranou barvou, jak si vyzkoušíte v řešení části seriálové úlohy.

Sčítání sloupců až k integraci

Plochu si můžeme rozdělit i jiným způsobem. Interval, na kterém chceme spočítat plochu pod grafem funkce, si můžeme rozdělit na menší intervaly. V těchto intervalech pak můžeme považovat funkci za konstantní a počítat plochy obdélníků pod funkcí, nad funkcí nebo můžeme spočítat obě varianty a vzít průměr. Alternativně můžeme uvažovat lichoběžníky, tedy předpokládat, že funkce je na malých intervalech po částech lineární. Zjevně se zmenšováním intervalů (jemnější dělení) budeme dostávat přesnější a přesnější výsledek. Pokud nám stačí přibližný výsledek a nepřilíší divoké funkce, pak je často dostatečné i hrubé dělení. Když se funkce více mění v nějaké části a v jiných částech je téměř konstantní, pak je vhodné zjemnit dělení oblasti s proměnlivějším průběhem funkce a pro zbylé intervaly ponechat hrubé dělení. Pokud s dělením pokračujeme dále a dále a intervaly stále zmenšujeme, dostáváme se k integraci.

Pravděpodobnostní řešení, numerické metody

Těm, kdo to slyší poprvé, se to může zdát trochu nedůvěryhodné, možná až bláznivé. Vědci však velice často u velmi složitých výpočtů komplikovaných integrálů (tedy stále myslíme plochy pod grafem) využívají pravděpodobnostní metody. Známou metodou je Monte Carlo, kde, podobně jako v kasinu, náhodně sázíme na kombinaci čísel v prostoru (N čísel v N -dimenzionálním prostoru) a díváme se, jestli je hodnota pod nebo nad grafem.

Numerickým metodám se podrobně věnovaly seriály FYKOSu v 21. ročníku (o počítačové fyzice) a 31. ročníku (o numerických metodách a počítačových simulacích).

Tip k řešení soutěží

Představme si situaci, že máte vyřešit úlohu FO s kruhovým dějem v plynu a z nějakého důvodu jste se totálně zasekli – nemůžete přijít na parametry jednoho bodu z daného cyklu. Pak není nic lepšího, než si tyto parametry pomocí pravítka odhadnout z grafu (pokud jste ho dostali se zadáním). S největší pravděpodobností nedostanete plný počet bodů, ale lepší něco nežli nic.

Statika

Pokud řešíme například zatížení jednotlivých částí mostních konstrukcí, pak využíváme statiku. Tedy víme, že aby se most nezačal někam pohybovat či lámat, musí být výslednice sil nulová. Graficky si nulovost výslednice sil v bodě můžeme znázornit tak, že poskládáme za sebe vektory jednotlivých sil působících v daném bodě tak, že vytvoří uzavřenou křivku. Někdy se může hodit, že i momenty sil se musí vyrošit, aby se nám most nezačal otáčet. Obě pravidla navíc platí pro každé místo konstrukce a obvykle sestavujeme rovnice pro jednotlivé body upevnění. Ukázkou úlohy, ve které se řeší stabilita mostní konstrukce, je 26-IV-5 – stavme mosty.²⁷ Další úloha, která se řešila pomocí statiky, je například 20-VI-I – tři válce děda vševěda,²⁸ kde byly dva válce položené na podložce a na nich umístěn třetí válec. Příkladem toho, kde se ukázalo, že za zadaných podmínek nemůže být soustava nikdy stabilní, jsou koule a válec z úlohy 19-III-1 – dotyk koule a válce.²⁹

Optické zobrazování

Grafické zpracování se často využívá při úlohách o zobrazování pomocí optických soustav. Tímto tématem se podrobněji zabývá text z knihovničky FO.³⁰ Podobná pravidla platí jak pro zrcadla, tak pro tenké čočky. Rozdíl mezi spojkami (dutými zrcadly) a rozptylkami (vypuklými zrcadly) je v umístění reálného ohniska. Popíšme význačné paprsky u dutého zrcadla:

- Paprsek směřující na vrchol zrcadla³¹ se odrazí pod stejným úhlem (jako dopadl) na opačnou stranu optické osy.
- Paprsek, který jde rovnoběžně s optickou osou, se od zrcadla odráží do ohniska.
- Paprsek, který prošel skrz ohnisko, se odrazí od zrcadla tak, že jde rovnoběžně s optickou osou.

Pro sestavení pozice obrazu nám však stačí vždy dva paprsky a dostatečně pečlivě rýsování. Samozřejmě bychom mohli rýsovat i jiné, za dodržení zákona odrazu. Zmíněné význačné paprsky se ale rýsují asi nejjednodušeji. Dobrým trikem pro

²⁷https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf

²⁸https://fykos.cz/_media/rocnik20/ulohy/pdf/uloha20_6_1.pdf

²⁹https://fykos.cz/_media/rocnik19/ulohy/pdf/uloha19_3_1.pdf

³⁰Trnka, J.: Zobrazení čočkami, dostupné na <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/cocky.pdf>

³¹tedy na místo, kde se protíná profil zrcadla s optickou osou

malé vzory, které máte zobrazit, může být zvětšit si vzor. Pozor ale na to, že zvětšení³² musíte provést směrem kolmo na optickou osu. Pokud jste původní výšku vzoru zvětšili N -krát, musíte výsledek zmenšit na $1/N$ -tinu. Někdy se také může při rýsování hodit, že chod paprsků můžete obrátit. Při řešení soutěží, kde se požaduje jen výsledek, je často dokonce rychlejší si danou situaci narýsovat v nějakém dynamickém geometrickém programu.

Symetrie

Symetrie je to, co při řešení fyzikálního problému obvykle chceme najít, protože nám to značně zjednoduší jeho řešení. Někdy dostaneme výsledek ve srovnání s jiným postupem skoro okamžitě a výrazně méně pracně. Některé fyzikální úlohy mají analytické řešení jenom díky symetrii.

Vztah symetrie a zákonů zachování

Každá symetrie se pojí s nějakým zákonem zachování. To plyne z teoremu Emmy Noetherové. Jeho matematická formulace je složitá, nicméně tato poučka se nám může hodit i na SŠ úrovni. Vztahy mezi základními symetriemi a zákony zachování jsou:

- Symetrie v posunutí v prostoru je spojena se zákonem zachování hybnosti.
- Symetrie v otočení se pojí se zákonem zachování momentu hybnosti.
- Symetrie v posunutí v čase se pojí se zákonem zachování energie.

Princip superpozice

Princip superpozice můžeme využít v mnoha fyzikálních situacích, kdy celkové působení více „zdrojů“ na nějakou testovací částici³³ můžeme jednoduše sečíst. To platí například u gravitačního pole. Celkové zrychlení asteroidu je dáno zrychleními od jednotlivých hmotných těles.³⁴ Stejně tak platí, že intenzita elektromagnetického pole v daném místě je dána součtem intenzit od jednotlivých zdrojů. Tento princip můžeme využít i opačně. Příkladem může být otázka, jakou intenzitu elektrického pole naměříme uprostřed kruhu, na kterém je rovnoměrně rozmístěno N kladných nábojů, kde $N \geq 2$. Je zřejmé, že v případě sudého počtu nábojů se intenzity protilehlých nábojů vyruší. Stejný výsledek bychom obdrželi při součtu lichého počtu nábojů. Intenzita z takového rozložení nábojů bude tedy vždy nulová. Pokud jeden kladný náboj odebereme, pak je to pro střed stejné, jako kdybychom v prázdném prostoru umístili jeden záporný náboj do místa, odkud jsme náboj odebrali.

Další metody založené na symetrii

Dalšími metodami, které využívají vysoké symetrie nějakých fyzikálních úloh, jsou zrcadlový náboj a Gaussův zákon. Obě se uplatňují v elektrostatice a zmíníme je alespoň trochu v čtvrtém dílu seriálu.

³²Přesněji řečeno byste měli aplikovat pravoúhlou afinitu.

³³Testovací částice je taková, která nám nenaruší původní rozložení zdrojů.

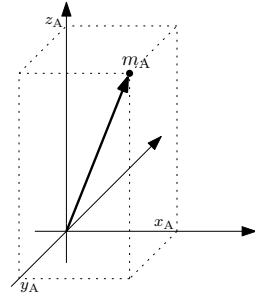
³⁴Za předpokladu, že můžeme zanedbat negravitační vlivy. Což by například u malých částic uvolňujících se z komet vedlo k velice nepřesným výsledkům. Ty jsou totiž výrazně ovlivněny jak slunečním větrem, tak následně odpařováním materiálu z jejich povrchu.

Souřadnice

Souřadnice, které jsou vhodné pro řešení fyzikálních problémů, se často pojí právě se symetrií našeho problému. Abychom byli co nejefektivnější v řešení, měli bychom si zvolit soustavu souřadnic, která nám vyhovuje.

Základním pravidlem, které souřadnice musí splňovat, je, že jich musí být právě tolik, kolik dimenzí má prostor, v němž se pohybujeme. Nejčastěji se tedy jedná o dvou- či třídimenzionální souřadnice. Aby mohla být určena poloha všech bodů z našeho prostoru jednoznačně,³⁵ musí být souřadnice na sebe kolmé

Nejznámějšími souřadnicemi využívanými pro lepší představení situace jsou **kartézské souřadnice**. Ty jsou obvykle jedno- až třídimenzionální a jde o udání pozice pomocí souřadnic, které obvykle označujeme x , y a z . Ukázka jejich znázornění je na obrázku 15. Vzdálenost dvou bodů³⁶ A a B pak můžeme určit jako $D = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.



Obr. 15: Ukázka kartézských souřadnic v 3D.

Těžišťová soustava

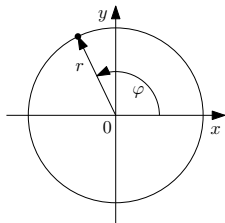
Těžišťová soustava je kartézská soustava souřadná, která je spojená s těžištěm všech (či vybraných) bodů umístěných v naší soustavě. Často ji využíváme, aby nám zbytečně hmotné body „neulétávaly“ společně nějakým preferovaným směrem. Zajímavá fyzika se obvykle děje až v rámci interakce bodů mezi sebou.

Pokud řešíme centrální srážku dvou těles v těžišťové soustavě, tak je zde jejich celková hybnost stále nulová. Obě mají opačné hybnosti stejných velikostí a po srážce se akorát otočí jejich rychlosti. Jediný drobný problém je, že pokud chceme výsledek v laboratorní soustavě, je potřeba provést transformaci z jedné soustavy do druhé.

³⁵ Podmínku jednoznačnosti umíme za jistých předpokladů splnit i bez potřeby kolmých souřadnic. Má to však za následek značnou komplikaci všech výpočtů a my se tomu věnovat nebudeme.

³⁶ Označení bodů budeme vkládat do indexů a podle toho poznáme, o souřadnici jakého bodu jde.

Polární souřadnice



Obr. 16: Grafické znázornění polárních souřadnic.

Polární souřadnice jsou 2D a jsou určeny vzdáleností od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a orientovaným úhlem $\varphi = \arctg \cdot (y; x)$ měřeným od kladné části osy x v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček, viz obr. 16).³⁷ Výhodou těchto souřadnic může být to, že je můžeme využít i pro tvorbu grafů, které nejsou funkce, ale jde například o postupně se odvíjející spirály. Pokud jde ale například o kružnici, pak úhel obvykle uvažujeme v intervalu $\varphi \in [0; 2\pi)$. Kružnici o poloměru r v počátku soustavy souřadnic můžeme výhodně popsat pomocí transformačních vztahů $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$, což je i transformační vztah mezi souřadnicemi. Vzdálenost mezi dvěma body

A a B za pomoci těchto souřadnic určíme jako

$$D = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_A - \varphi_B)}.$$

Válcové souřadnice

Válcové souřadnice jsou vlastně polární souřadnice, které rozšíříme do prostoru tak, že je doplníme o třetí kartézskou souřadnici z . Transformační vztahy jsou stejné jako u polárních souřadnic. Vzdálenost dvou bodů je

$$D = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_A - \varphi_B) + (z_B - z_A)^2}.$$

Sférické souřadnice

Pokud chceme popisovat pohyb po kouli, je vhodné využít souřadnice sférické dané vzdáleností od počátku $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a dvěma úhly. Úhel φ měříme stejným způsobem jako v polárních souřadnicích a to v rovině xy . Druhý úhel³⁸ $\vartheta \in [0; \pi]$ pak měříme od kladného směru osy z . Transformace mají tvar $\varphi = \arctg(y/x)$, $\vartheta = \arccos(z/r)$. V opačném směru pak

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Vzdálenost dvou bodů se stává už docela komplikovaným výrazem, ale můžeme si ho napsat, abychom se přesvědčili, že na vzdálenosti bodů se docela hodí kartézská soustava souřadná

$$D = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B (\cos \vartheta_A \cos \vartheta_B + \cos(\varphi_B - \varphi_A) \sin \vartheta_A \sin \vartheta_B)}.$$

³⁷ $\varphi = \arctg \cdot (y; x)$ definujeme jako $\arctg(y/x)$ pro $x > 0$ a $y \geq 0$, $\arctg(y/x) + \pi$ pro $x < 0$, resp. $\arctg(y/x) + 2\pi$ pro $x < 0$ a $y < 0$.

³⁸ Toto je jeden z možných způsobů, jak popsat sférické souřadnice. Existuje více variant, se kterými se můžete setkat v literatuře. Mohou se lišit tím odkud kam měříme který úhel.

Inerciální vs. neinerciální soustavy

Často se omezuje na inerciální soustavy souřadné. To jsou takové, kde platí Newtonovy zákony bez úprav. Nicméně někdy může být vhodné přejít do neinerciální soustavy souřadné. Musíme však vždy mít na paměti, že na tělesa v neinerciálních soustavách působí setrvačné síly.

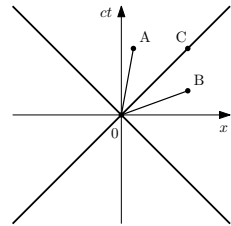
Prvním příkladem úlohy, kde můžeme zvolit neinerciální souřadnice, může být soustava spojená se zrychleně se rozjíždějícím vlakem na vodorovné rovině v jedné přímce. Když se na tento vlak díváme ze soustavy spojené se Zemí (považujeme ji pro tento myšlenkový experiment za dostatečně dobře inerciální), pak vidíme, že osoby, co sedí na sedáčkách, jsou urychlovány stejně jako zbytek vlaku. Pokud někdo položí kvádr na dokonale hladkou zem a pak se vlak začne rozjíždět, zůstane kvádr na stejném místě. Podívejme se na tuto situaci z jiného pohledu – z neinerciální soustavy spojené s vlakem. V tom případě vidíme, že jsou cestující víceméně v klidu. Ale oni sami pocítují, že jsou tlačeni do sedaček se zrychlením velikostně stejným se zrychlením vlaku. Pokud se podíváme na kvádr na podlaze, tak se nám může zdát, že se bezdůvodně rozjíždí do zadní části vlaku (pokud se vlak rozjíždí dopředu) se zrychlením odpovídajícím zrychlení vlaku.

Stejně tak můžeme přejít do rotující soustavy. Zde bude situace složitější než u lineárně zrychlující soustavy, protože se nám zde objeví členy odpovídající odstředivé a Coriolisově síle. Tato transformace se používá často například u problému tří těles, kde jsou dvě obíhající se tělesa, která jsou značně hmotná a třetí, které má vůči nim zanedbatelnou hmotnost. Pak se využije korotující systém, kde na hlavní ose jsou umístěna dvě hlavní tělesa. Pokud se obíhají po kruhových trajektoriích, pak jsou v této soustavě nehybná. Pokud se obíhají po eliptické trajektorii, pak se přechází ještě k o něco složitější soustavě, kde jsou opět nehybná a ve stejné vzdálenosti, ale mění se převod a síla, která na třetí těleso působí v jednotlivých bodech v závislosti na čase.

Minkowského prostoročas

Nakousněme alespoň letmo i něco ze speciální teorie relativity. Zde reprezentujeme pozici v prostoročase³⁹ pomocí tří prostorových souřadnic a jedné časové. Časová souřadnice má ale speciální postavení. Jednak ji uvažujeme pro násobenou rychlostí světla, tedy ct . Druhým faktorem je, že ji můžeme brát buď jako imaginární nebo alespoň při určování prostoročasové vzdálenosti uvažujeme vzdálenost uraženou v tomto směru za zápornou. Místo prostorových bodů zde uvažujeme události – polohu v souřadnicích v určitém čase. Tedy vzdálenost je

$$D = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - (ct_B - ct_A)^2}.$$



Obr. 17: Schematické znázornění Minkowského prostoročasu.

³⁹Prý fyzikové říkají prostoročas a sci-fi autoři používají časoprostor. I když těžko říci, co na to jazyková logika, když se správně říká světočára.

Když se podíváme na obrázek 17, tak vidíme události A, B a C. Velice zajímavá je událost C, která leží na ose kvadrantů – na tzv. světelném kuželu. Ten je tvořen událostmi, které jsou přesně v té vzdálenosti, kam se může dostat světlo či odkud k nám světlo mohlo dojít. Tato vzdálenost je zajímavá tím, že je v této metrice nulová. Tedy vzdálenost mezi počátkem a C je nula. Interval mezi počátkem soustavy souřadné, tedy tady a teď, s událostí A je záporný a tedy časupodobný. Hypoteticky se můžeme dostat do události A někdy v budoucnosti. Bod B je pak prostorupodobný. Kdybychom se transformovali do jiné soustavy souřadnic, tak by tato událost mohla proběhnout ve stejném čase jako má počátek souřadnic. Naopak událost A by mohla proběhnout v jiné soustavě souřadné na stejném místě, jako je počátek. Tyto záležitosti se nazývají relativitou současnosti a soumístnosti.

Závěr a upoutávka na příště

Snad seriál dostatečně naznačil, že výběr souřadné soustavy je důležitý a někdy nám může usnadnit práci. Pro jejich správnou volbu je potřeba se vždy zamyslet nad symetriemi našeho problému a ty co nejvíce využít.

V příštím díle se chceme dále věnovat zákonům zachování, na které jsme už v tomto dílu trochu narazili. Zákony zachování se nám hodí prakticky vždy a často vedou na rychlé řešení problémů.

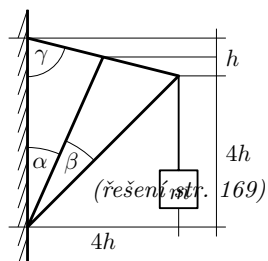
Úloha II.S ... směs souřadnic a grafiky

10 bodů

1. Určete, kolik procent první stránky vzorového řešení úlohy 26-IV-5 zabírá černá barva. Řešení této úlohy najdete na https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf.
2. Představte si, že máte tužku, jejíž tuha má poloměr $r = 0,8 \text{ mm}$. Tuha je vyrobena z grafitu v šesterečné soustavě, kde vzdálenost atomů uhlíku v jedné vrstvě je rovna $a = 2,46 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a jednotlivé vrstvy jsou od sebe vzdáleny $c = 6,71 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Jakou délku tuhy spotřebujete na pomalování celé čtvrtky A4, pokud se papír při barvení pokryje průměrně 100 vrstvami tuhy?
3. Na obrázku 18 je zobrazena stabilní tyčová soustava, která se nachází v tíhovém poli se zrychlením g . Nejtlustší linka znázorňuje dokonale tuhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Na konci těchto tyčí je na nehmotném provázku upevněno závaží o hmotnosti m (na obrázku zobrazeno středně tlustou linkou). Tenké čáry symbolizují délky tyčí. Platí, že $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tyč mezi úhly α a β půlí horní tyč. Tyče mohou působit silou pouze ve svém směru (žádná složka není kolmá na tyč). Tyče jsou v místech dotyku s levou stěnou pevně upevněny. Určete, které tyče jsou namáhány v tlaku a které v tahu a spočítejte velikosti sil, které na ně působí.
4. Uvažujme spirálu, která začíná v počátku soustavy souřadné a odvíjí se rovnoměrně. Vzdálenost mezi jednotlivými závity a je konstantní. Popište pohyb po této spirále ve vhodných souřadnicích.
5. Mějme šroubovici, která se odvíjí rovnoměrně. Šroubovice má konstantní poloměr R a konstantní vzdálenost mezi závity h . Popište pohyb po šroubovici

ve vhodných souřadnicích a určete, jaká je délka jednoho závitu této šroubovice.

Bonus Vymyslete nebo najděte (a citujte) souřadnice, které nejsou v knihovničce FO a byly by vhodné pro popis nějakého fyzikálního problému (uvedte jakého). Souřadnice popište převodem z kartézských souřadnic na vámi vybrané a zpět. Dále ukažte, jak lze ve vašich souřadnicích obecně určit vzdálenost dvou bodů.



Obr. 18: Soustava.

Kapitola 3: Zákony zachování

Ústřední koncept zákonů zachování

Jak jsme si v minulém díle řekli, díky symetriím platí zákony zachování (dále ZZ), které můžeme využít pro řešení úloh. Nicméně některé „ZZ“ nemusí platit vždy. Přičemž tím nutně nemyslíme to, že se fyzikální zákony mohou měnit v průběhu existence vesmíru, což zatím nebylo ani pozorováno ani vyvráceno. Máme ZZ, které se zatím pevně drží vůči všem možným testům (např. ZZ hybnosti, náboje, energie), ale pak je kategorie ZZ, které mají jen omezenou škálu platnosti (např. ZZ hmotnosti).

Velice důležité u ZZ je uvědomění si jeho vztahu ke zkoumanému systému. První zákonitostí je, že pokud máme uzavřený systém, tak nám celková hodnota zachovávací se veličiny nemůže klesnout či stoupnout a musí být stále stejná ve všech okamžicích.⁴⁰ Pokud si vybereme pouze část toho systému nebo je náš systém obklopen nějakým dalším, se kterým může interagovat, pak pokud nějaké množství veličiny do zvoleného podsystemu vstoupí, musí z něj i vystoupit nebo se v něm musí uložit.

Z jiného úhlu pohledu se na to můžeme dívat tak, že z daného podsystemu nemůžeme donekonečna čerpat veličinu zachovávací se v rámci většího uzavřeného systému. Tento obecný princip pak rovnou zakazuje perpetuum mobile prvního druhu. Když se s těmito obecnými principy sžijeme, hned se nám bude jednodušeji pracovat se všemi typy úloh.

Zákon zachování hmotnosti

ZZ hmotnosti je jedním z těch starších. Byl objeven v druhé polovině 18. století nezávisle na sobě nejdříve M. V. Lomonosovem a později A. L. Lavoisierem. Jak jsme

⁴⁰Je tu ovšem kvantová teorie, takže pokud zkoumáme malé škály, tak musíme uvažovat střední hodnoty. Například přesnou hybnost či energii systému nedokážeme a ani nemůžeme změřit. Změření přesné hybnosti systému by totiž znamenalo, že vůbec neznáme jeho polohu či polohy jeho součástí, a to kvůli Heisenbergově principu neurčitosti. V klasické fyzice ale můžeme předpokládat znalost přesných hodnot všech veličin v každém okamžiku.

zmínili v úvodu, je jedním ze slabších ZZ. Platí totiž přesně v klasické mechanice, dostatečně dobře v termodynamice za rozumných teplot a dokonce i u chemických reakcí, pokud započítáme všechny produkty. Až u jaderných reakcí začíná být měřitelnější nezachovávání hmotnosti, která se přemění na energii. Jedním z největších rozdílů hmotnosti mezi vstupní a výstupní hmotností je v proton-protonovém cyklu ve Slunci, kdy ze 4 protonů postupně vznikne jádro ${}^4_2\text{He}$. Vodík má relativní atomovou hmotnost $A({}^1_1\text{H}) = 1,007\,825$, helium pak $A({}^4_2\text{He}) = 4,002\,603$. Rozdíl na jeden atom helia je pak 0,028 70 v atomových hmotnostních jednotkách, což je pokles o 0,71 %. Hmotnostní schodek se uvolní ve formě energie a neutrin. Dalo by se říct, že pokud by nám stačilo, aby zákon zachování platil až na $\pm 1\%$, tak u většiny dějů, které pozorujeme kolem nás, dostatečně dobře platí.

Výjimkami jsou pouze hodně drastické situace. Například pokud dojde k anihilaci hmota-antihmota, pak se všechna hmotnost přemění na energii. Nebo také při pádu hmoty do černé díry může nastat vyzáření větší části z celkové hmoty látky. Podobně zachování hmotnosti neplatí při srážkách těles relativistickými rychlostmi. Mnohem obecnější je ZZ energie, o kterém bude řeč dále, a který platí i ve výše zmíněných situacích. Hmotnost je ale veličinou, kterou si přeci jen dokážeme snadněji představit, a i proto se stále využívá ZZ hmotnosti.

Zákon zachování hybnosti

ZZ hybnosti nám říká, že hybnost se v inerciální souřadnicové soustavě zachovává. Pro celkovou hybnost platí

$$\mathbf{p} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n m_i\mathbf{v}_i = \text{konst},$$

kde je m_i je hmotnost a \mathbf{v}_i je rychlost i -té částice v systému a n je celkový počet částic.

Můžeme se transformovat i do takové inerciální souřadnicové soustavy, kde je celková hybnost všech částic nulová. To je přesně těžišťová soustava, kterou jsme zmínili již v minulém díle. Někdy bývá tento důsledek nazýván jako ZZ těžiště.

Typickým příkladem je úloha známá z českých železnic, kdy na kolejích zaparkuje nějaký dopravní prostředek. Pohyb kolmo ke kolejím zanedbáme. Předpokládejme, že dopravním prostředkem je auto celkově naložené na $m = 1,0\text{ t}$. Vlak má zhruba $M = 500\text{ t}$. O kolik se zpomalí vlak nárazem, resp. se urychlí auto? Předpokládáme nepružnou srážku, po které se oba dopravní prostředky spojí. Budeme předpokládat, že vlak nebrzdí, protože tam stejně asi zaparkovali na poslední chvíli. Ani nemusíme znát počáteční rychlost v_0 , pokud se zajímáme pouze o poměr nové rychlosti v_1 a té původní. Platí ZZ hybnosti

$$p = Mv_0 = (m + M)v_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_1}{v_0} = \frac{M}{m + M} \doteq 99,8\%.$$

Vidíme, že nabrání jednoho auta vlak významně nezpomalí – pouze o 0,2 %. Zato automobil je urychlen prakticky okamžitě na rychlost vlaku. Možná jste to už někdy na videích ve zprávkách viděli. Opravdu to tak bývá. Důvod, proč vlak následně

zastaví, je, že velice prudce brzdí. Má ale opravdu velkou hybnost, a tedy musí na koleje působit velkou silou po dostatečně dlouhou dobu, aby se zastavil.

Pokud bychom řešili úlohu s vozíčky na vzduchové dráze, které se od sebe odráží, tak by se jednalo o pružné srážky. Taková vozidla se nespojí a platí jak zákon ZZ hybnosti, tak ZZ mechanické energie.

Zákon zachování momentu hybnosti

Podobně jako ZZ hybnosti platí i ZZ momentu hybnosti. Můžeme si zvolit libovolný bod v inerciální souřadnicové soustavě a vůči němu spočítáme následující veličinu

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{p}_n = \text{konst.},$$

kde \mathbf{r}_i je průvodič, tedy polohový vektor vycházející z námi vybraného bodu k i -tému hmotnému bodu, \times je vektorový součin a \mathbf{p}_i je hybnost i -tého hmotného bodu. Tato veličina se nám v uzavřeném systému bude opět zachovávat, ať se děje, co se děje.

Druhý Keplerův zákon

Druhý Keplerův zákon (II. KZ) je de facto ZZ momentu hybnosti pro planety obíhající Slunce, respektive tak byl původně definován. My si jej můžeme rozšířit na jakoukoliv soustavu, kde je jedno ústřední těleso obíhané nějakým počtem dalších těles, která vůči němu mají zanedbatelnou hmotnost a která se navzájem výrazně neovlivňují.⁴¹ Hodí se pro rychlé výpočty právě v úlohách o oběhu planet ve slunečních soustavách či o oběhu měsíců kolem planet.

Vzorec, který je dobré mít na paměti, je, že plocha opsaná průvodičem za jednotku času je co do velikosti rovna velikosti vektoru \mathbf{w} , který je na ni kolmý

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{konst.},$$

kde \mathbf{r}_i je průvodič tělesa (vektor z ohniska elipsy do daného tělesa) a \mathbf{v}_i je jeho rychlost. Speciálně ve vrcholech elipsy (pericentru a apocentru) pak závislost přejde na jednoduché násobení. Navíc, pokud nás zajímá pouze porovnání rychlostí pohybu oběžnice v pericentru a apocentru, můžeme psát

$$r_p v_p = r_a v_a.$$

⁴¹ Pokud toto není splněno, pak II. KZ zákon je buď pouze přibližný nebo není vůbec použitelný. Zajímavou soustavou jsou dva měsíce Saturnu – Epimetheus a Janus. Tyto si totiž v průběhu oběhu kolem Saturnu vyměňují své dráhy. Menší část momentu hybnosti soustavy si tak předávají. V tomto případě by platil zákon obvykle dostatečně přesně pro jejich střední hodnoty rychlosti a vzdálenosti. Situace, kdy se již přestává II. KZ používat, je například soustava, ve které máme jedno velmi hmotné těleso, druhé středně hmotné a jedno lehké, které je umístěno do Lagrangeova bodu L_1 či L_2 . Oběh lehkého tělesa je pak řízen oběhem toho středně hmotného kolem centrálního velmi hmotného tělesa.

Zákon zachování energie

Na ZZ energie se můžeme dívat také jako na zobecnění ZZ hmotnosti. Energie, na rozdíl od hybnosti či momentu hybnosti, může být i nějakým způsobem skrytá. Tím myslíme to, že existuje potenciální energie, která je „schovaná“ v mikroskopických měřících hmoty. Vyjmenujme si alespoň základní typy, se kterými se často setkáváme:

- Kinetická energie translačního pohybu $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, kde m je hmotnost tělesa a v jeho rychlost.
- Kinetická energie rotačního pohybu $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vůči nějaké ose a ω je úhlová rychlost vůči dané ose.
- Práce $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, kde \mathbf{F} je síla působící po dráze \mathbf{s} a \cdot značí skalární součin. Pokud úhel mezi \mathbf{F} a \mathbf{s} označíme α , platí $W = Fs \cos \alpha$.
- Polohová potenciální energie v homogenním tíhovém poli $E_g = mgh$, kde g je tíhové zrychlení a h je výška měřená nad nějakou dohodnutou hladinou, vzhledem ke které tuto energii počítáme.
- Polohová potenciální energie v radiálním gravitačním poli $E_G = -G\frac{mM}{r}$, kde m je hmotnost jednoho tělesa v gravitačním poli toho druhého s hmotností M a r je vzdálenost jejich těžišť. Může se jednat o hmotné body či objekty se sféricky symetricky rozloženou hustotou. V tomto případě je jako nulová hladina zvolena nekonečná vzdálenost středů r .
- Polohová potenciální energie v elektrickém poli $E_{\text{el}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{qQ}{r}$, kde q je náboj jednoho tělesa v elektrostatickém poli toho druhého s nábojem Q a r je opět vzdálenost jejich středů. Opět musí jít o hmotné body nebo o sféricky symetricky rozložené náboje, které se nesmí měnit.⁴² Tato potenciální energie je kladná, protože náboje stejného znaménka se odpuzují. Nulová hladina je opět pro nekonečné r .
- Potenciální energie pružnosti $E_p = \frac{1}{2}k\Delta u^2$, kde k je tuhost pružiny a $\Delta u = u - u_0$ je její prodloužení, resp. aktuální délka u bez klidové délky u_0 .
- Klidová energie hmotného tělesa $E_0 = m_0c^2$, kde m_0 je klidová hmotnost tělesa a c je rychlost světla ve vakuu.
- Energie magnetického pole cívky $E_m = \frac{1}{2}LI^2$, kde L je indukčnost cívky a I je elektrický proud jí procházející.
- Energie kondenzátoru $E_e = \frac{1}{2}CU^2$, kde C je kapacita kondenzátoru a U je elektrické napětí.
- Teplo $Q = mc\Delta T$, kde m je hmotnost látky, c její měrná tepelná kapacita a ΔT je změna teploty. Také můžeme psát $C = mc$, kde C je tepelná kapacita tělesa.
- Vnitřní energie látky, například pro jednoatomový ideální plyn platí $U = \frac{3}{2}nRT$, kde n je látkové množství, R je molární plynová konstanta a T je termodynamická teplota. U dvouatomového ideálního plynu se pak konstanta

⁴²Pokud by nebyly rozmístěny pevně, tak se kvůli přitahování/odpuzování na svých koulích přerozdělí a koule budou následně polarizované. Navíc má smysl mluvit pouze o koulích či o kulových slupkách, protože pokud je náboj pohyblivý a je na jednom tělese, pak se rozmístí po jeho povrchu. Aby byla splněna sférická symetrie, pak musí jít o kouli či kulovou slupku. Navíc se náboje nesmí pohybovat, pak by to nebyla elektrostatika.

- $\frac{3}{2}$ změni na $\frac{5}{2}$.
- Energie kvanta záření $E_p = h\nu$, kde h je Planckova konstanta a ν je frekvence fotonu.
- Energie elektrického a magnetického pole, energie elektromagnetického záření.
- Chemická energie vazeb v molekulách, ionizační energie prvků či excitační a deexcitační energie elektronů.
- Jaderná energie vazeb protonů a neutronů v jádrech, kvarků ve složitějších částicích a další formy energie.

U potenciální energie navíc platí, že její hodnota závisí na předem zvolené konstantě, které říkáme nulová hladina. Důležité je, že tato konstanta nijak neovlivňuje pohybové rovnice. Proto se ji snažíme zvolit tak, aby výsledný výraz byl co nejjednodušší.

ZZ mechanické energie pro ideální kapaliny má podobu Bernoulliho rovnice

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konst},$$

kde p je tlak v kapalině, ρ je její hustota a v je rychlost jejího proudění.

Opět je potřeba si připomenout, že ZZ energie platí pouze pro uzavřené soustavy a že musíme uvažovat všechny formy energie. Při dokonale pružné srážce se energie zachovává. Nejprve se přemění na deformaci tělesa a pak se opět uvolní jako kinetická. Také v případě nepružné srážky se celková energie zachová. Část mechanické energie se však ztratí ve formě nevratné deformace obou těles nebo třeba ve formě zvuku.

Kinetická energie se často v průběhu pohybu disipuje, neboli se přeměňuje na zvuk, teplo apod. Ale v základních výpočtech je vhodné uvažovat, že se mechanická energie zachovává, protože tomu tak v rámci přesnosti výpočtu většinou je. To platí i pro většinu úloh na střední i vysoké škole.

Maximální účinnost

Tématem, které s energií úzce souvisí, je, že nemůžeme mít stroj, který by měl vyšší jak 100 % účinnost. Důležitým výsledkem termodynamiky je, že pokud je teplota ohřívače T_{\max} a teplota chladiče je T_{\min} , pak tepelným strojem nemůžeme přesáhnout účinnost tzv. Carnotova cyklu skládajícího se ze dvou adiabatických a dvou izotermických procesů, která je

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Zákon zachování celkové pravděpodobnosti

Zajímavým ZZ, který se může zdát významně odlišným od ostatních, je ZZ celkové pravděpodobnosti. Současně se může zdát triviální, protože je to něco, co se dá

považovat za logické a tak nějak zřejmé. Celkový součet pravděpodobností všech možností, které mohou nastat, je vždy roven 1. ZZ pravděpodobnosti využíváme v kvantové fyzice, ve statistické fyzice nebo v teorii her.

Zákon zachování elektrického náboje

Pokud je nám dobře známo, zatím nebylo nikdy pozorováno narušení ZZ elektrického náboje. Ten se zachovává při všech reakcích. Navíc jediné násobky, které má smysl používat, jsou třetiny elementárního náboje $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-16}$ C, protože kvarky mají náboje o velikosti právě třetiny či dvou třetin této hodnoty.

Neexistence magnetického náboje

Tento ZZ jsme zařadili možná trochu netradičně. Ale doposavad je to jeden z těch nejpevnějších a platí bez jakýchkoliv omezení. Oproti ZZ náboje je ještě silnější – nejenom, že se zachovává celkový magnetický náboj, ale dokonce je jeho hodnota nulová. Všechny siločáry magnetického pole jsou buď uzavřené, nebo směřují od nekonečna do nekonečna.

V literatuře je možné najít tzv. „magnetické množství“. Magnetismus je pak modelován pomocí rozmístění tohoto „magnetického množství“, které je ovšem ve formě dipólů – tedy vždy je kladná hodnota množství rozmístěna v blízkosti stejného záporného množství. Pro vybrané aplikace to může být vhodná aproximace, i když to není přesné řešení.

Zákony zachování a symetrie v mikrosvětě

Ve většině fyzikální dějů můžeme uvažovat, že probíhají stejně, pokud zaměníme znaménko náboje (C), tedy nahradíme částice za antičástice nebo zaměníme vývoj systému za jeho zrcadlový obraz (P), tedy otočíme paritu a nebo otočíme směr toku času (T). Při částicových experimentech se ale ukázalo, že tyto symetrie neplatí vždy. Konkrétně slabá interakce narušuje každou z těchto symetrií, když je uvažujeme jednotlivě. Kombinovaná symetrie CPT⁴³ se však, jak se zdá, zachovává vždy. To by mělo souviset s tím, že máme právě tři rodiny kvarků a leptonů.

V mikrosvětě pozorujeme zachovávání dalších typů „nábojů“ jako ZZ baryonového čísla, leptonového čísla, podivnosti, půvabu atd. Ale slabá interakce může některé z těchto „zákonů“ narušovat.

Co entropie?

Entropie je veličina, která bývá nepřesně označována za míru neuspořádanosti systému. Možná o něco přesnější je považovat ji za určitou míru rozmazanosti systému. Protože čím jsou v systému ostřejší rozhraní, tím je vlastně uspořádanější, a tedy s nižší entropií. Tato veličina je zajímavá tím, že s časem v uzavřeném systému neklesá. Sice jsme na začátku zmiňovali, že „rozumné“ veličiny se zachovávají, ale pro entropii to neplatí. Další populární tvrzení je, že právě směr růstu entropie nám ukazuje šipku času.

⁴³Tedy tím myslíme, že provedeme všechny tři záměny najednou – náboje, parity i času.

Jaká je budoucnost zákonů zachování?

Mohlo by se zdát, že všechny základní ZZ známe. Ale těžko říct, jestli je to pravda. Už před časem si vědci mysleli, že většina fyziky je hotová věc a že je potřeba dořešit jenom pár detailů. Těchto pár detailů vedlo k rozvoji kvantové fyziky a teorie relativity. Jedním z hlavních cílů dnešní vědy je spojit tyto dvě teorie dohromady, abychom dostali co neúplnější popis vesmíru. Ale kdo ví, co nám další roky základního výzkumu přinesou?

V současnosti pokračují debaty nad tím, jestli platí ZZ informace. Už vůbec definice toho, co přesně informace je, jak může vzniknout a jak bychom si mohli představit její zničení, je zdaleka nad úroveň tohoto seriálu. Ale určitě je to zajímavé téma pro další výzkum. Populární verze jednoho pohledu na informaci je taková, že i když nějaké těleso „spadne“ do černé díry, tak se informace, kterou neslo, zachová na povrchu černé díry. Současně zvětšení plochy povrchu horizontu událostí černé díry má právě takovou velikost, která odpovídá dané informaci. Otázkou je, jestli se díky Hawkingově záření informace opět uvolní nebo jestli dojde k jejímu „smazání“.

Tipy pro řešení úloh

Fyzikální úloha je zpravidla systém o n neznámých. K jejich určení potřebujete právě n nezávislých rovnic. Pokud víme, že se nějaká fyzikální veličina zachovává, získali jsme tím jednu rovnici. Pokud zároveň dokážeme všechny zachovávající se veličiny vyjádřit bez přidání nové neznámé, jsme o krok blíže k vyřešení úlohy.

Například, uvažujme dokonale pružnou srážku dvou těles o známých hmotnostech a známých počátečních rychlostech. Zbývá určit výsledné rychlosti obou těles, což jsou dvě proměnné. Potřebujeme tak dvě rovnice – ZZ hybnosti a ZZ mechanické energie.

Užitečnost ZZ spočívá v tom, že se díky nim nemusíme zabývat průběhem děje. Stačí nám zajistit, aby daná veličina měla na začátku a na konci stejnou hodnotu – složité výpočty popisující, co se děje uprostřed, pak můžeme zcela vynechat.

Do této kategorie spadají úlohy typu určení, do jaké výšky vystoupá těleso, necháme-li ho bez tření klouzat po rampě ve tvaru dolního kopečku funkce sinus. Mohli bychom složitě počítat výslednice sil a řešit pohybové rovnice, ale jestliže nás zajímá pouze výsledná poloha tělesa, stačí použít ZZ potenciální tíhové energie.

V úvodu bylo zmíněno, že pokud se veličina v nezachovává, musí se buď ztrácet, nebo se hromadit. Dokážeme-li vyjádřit míru této změny za čas \dot{v} (tečka označuje derivaci podle času), můžeme ZZ zobecnit do podoby

$$v_2 = v_1 + \int_1^2 \dot{v} dt,$$

kde v_1 , resp. v_2 je počáteční, resp. koncové množství dané veličiny. Předchozí příklad bychom mohli modifikovat o tření. To však závisí pouze na skalárním součinu

tíhové síly, kterou těleso působí na podložku, a normály na podložku. Žádná z těchto veličin však nezávisí na čase, čili můžeme zavést zobecněnou potenciální energii, která bude brát v úvahu ztráty způsobené třením. V tomto případě se už nevyhneme integrování, ale stále nemusíme řešit pohybové rovnice.

V některých případech veličina zůstává konstantní proto, že co ze systému za nějaký čas zmizí, musí se v něm během stejné doby vytvořit. Tento princip je známý jako rovnice kontinuity a má široké uplatnění v úlohách z hydromechaniky a elektrostatiky. Typickým příkladem je odvození Coulombova zákona z Gaussova elektrostatičkého zákona – zachovávající se veličinou je intenzita elektrického pole, zdrojem je elektrický náboj a úbytkem je myšlen „tok“ siločar přes okraje zvolené oblasti.

V informatických a matematických úlohách bývají ZZ označovány jako invarianty. Chytře zvolený invariant často vede k překvapivě snadnému řešení, jak ukazuje známá úloha se šachovnicí, ze které vyřízneme dva protější rohy. Přitom se ptáme, jestli je možné zbytek šachovnice dokonale pokrýt pomocí obdélníkových dlaždic, které zabírají vždy dvě sousední políčka. Invariantem je v tomto případě rozdíl zakrytých černých a bílých polí – snadno nahlédneme, že položení dlaždice tuto veličinu nezmění. Na počátku však má však hodnotu 0, protože ještě není nic zakryto. Stejnou hodnotu musí mít i na konci, jenže na naší upravené šachovnici je o dvě políčka jedné barvy méně než té druhé. Tím jsme dokázali, že hledané pokrytí neexistuje.

Závěr a upoutávka na příště

V tomto dílu seriálu jsme prošli základní zákony zachování v přírodě. Obecně bývají dobrým způsobem řešení úloh v uzavřených soustavách a díky nim můžeme vybrané parametry dopočítat velice rychle. Příští díl bude věnovaný elektrickým obvodům, sítím a také elektrostatičce. Zabrousíme ale i do nekonečných problémů, jejichž řešení může být daleko přímočařejší a rychlejší než u těch konečných.

Úloha III.S ... vzduchová pistole podrobně

10 bodů

Máme vzduchovou pistoli o hmotnosti $M = 1,3$ kg. Vystřelíme z ní diabolku (náboj), která má hmotnost $m = 0,50$ g a průměr $d = 4,5$ mm.

1. Jakou kinetickou energii bude mít náboj po výstřelu, když podle technické specifikace dosáhne rychlosti $v = 250$ fps (tedy 250 stop za sekundu)?
2. Jaký bude zpětný ráz pistole? Zajímá nás jak rychlost, kterou by se zbraň pohybovala, kdyby nebyla upevněná, tak její hybnost.
3. Jak se změní moment hybnosti Země, pokud vystřelíme ze zbraně rovnoběžně se zemským povrchem? Zajímají nás okamžiky, kdy měla maximální hybnost a potom, když dopadla a zcela se zastavila. Pro jednoduchost uvažujte, že zbraň je pevně spojená se Zemí (která je zcela kulatá) a že zbraň při výstřelu nezačala rotovat. Jakou úhlovou rychlost Země získá či ztratí?

4. Jaký je spodní odhad maximálního zrychlení střely, pokud se náboj v první čtvrtině hlavně urychlí na 90 % maximální rychlosti? Vnitřní délka hlavně je $D = 18$ cm.
5. Náboj jsme vstřelili do kousku plastelíny o hmotnosti $m_p = 42$ g, který je zavěšený na tenkém provázku délky $l = 48$ cm. Pokud by náboj v plastelině uvízl, jaká by byla maximální úhlová výchylka tohoto kyvadla?
6. Může náboj při nárazu na lidskou pokožku překročit hodnotu plošné dopadové energie $Q_{\max} = 50 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$?

Bonus Nakonec se nám experiment s kyvadlem nepodařil a plastelínu jsme prostřelili. Naměřili jsme poloviční výchylku kyvadla, než jsme původně očekávali. Jaká byla výstupní rychlost náboje z plastelíny? Předpokládejte, že při průchodu plastelínou náboj nezmění směr a ani nic z plastelíny neodnese s sebou.

(řešení str. 175)

Kapitola 4: Elektro-triky

Úvod

Tento díl seriálu je zaměřený na tipy a triky pro řešení elektrických obvodů a některých úloh v elektrostatice. Začneme ale s obecným řešením nekonečných problémů, které se může hodit i jinde. Ukážeme si, že je možné využít Gaussův zákon i v gravitačním poli, pouze s jinými konstantami. Ačkoli je ústředním tématem tohoto dílu elektřina, rozhodně to není jediné téma.

Pro další čtení doporučujeme knihovničku Fyzikální olympiády. Těchto témat se týkají zejména M. Jarešová: *Elektrické obvody (Stejnoseměrný proud)*⁴⁴ a P. Šedivý: *Obvody střídavého proudu s lineárními jednobranými a dvojbřanými*.⁴⁵

Matematické hrátky s nekonečnem

Než se vrhneme na samotné nekonečné obvody, mohli bychom se podívat na matematickou stránku věci. Uvědomme si základní princip, který se v těchto úlohách uplatňuje a díky kterému jsou tyto úlohy daleko jednodušší než stejné úlohy s konečným počtem prvků. Když už se vám něco „stejně zopakuje“ třikrát či čtyřikrát, začnete si snad sami časem říkat: „Proč to tam raději není nekonečněkrát?“

O jaký princip jde? Pokud máme něco nekonečněkrát, tak je to to samé, jako když to máme nekonečněkrát a ještě jednou.⁴⁶ Možná to stále zní docela divně. Proto se podívejme na nějaké matematické příklady. Jakou hodnotu má například tato nekonečná soustava odmocnin?

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

⁴⁴<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>

⁴⁵<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>

⁴⁶Případně ještě dvakrát. Nebo znovu konečně-krát. Dokonce i nekonečně-krát. Ale při výpočtech si to nebudeme zbytečně komplikovat, většinou je nejrychlejší přidat si právě jeden prvek.

Na první pohled těžko říct. Mohli bychom zkoušet postupně čím dál tím více konečných prvků. Tedy můžeme začít

$$x_1 = \sqrt{1} = 1, \quad x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}} = \sqrt{2} \doteq 1,414,$$

$$x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} \doteq 1,554.$$

Tato metoda může vést ke správnému výsledku, pokud řada konverguje. Jinak řečeno, pokud se limitně blíží k nějakému konkrétnímu číslu. Je ale vidět, že jde o hodně pracný způsob. Také jen těžko odhadneme, jaké by mělo být přesné řešení úlohy pro nekonečné množství prvků. Pokud bychom pokračovali dále, po osmém kroku bychom zjistili, že při zaokrouhlení na čtyři platné cifry nám už výsledek zůstává stejný. Ale těžko ověříme, zda to bude platit pro nekonečně mnoho dalších prvků této řady. Můžeme použít kalkulačku, ale ta také brzy přestane stačit.

Trikové řešení spočívá v tom, že si uvědomíme, že můžeme psát

$$x = \sqrt{1 + x},$$

což je skrytá kvadratická rovnice. Tu briskně vyřešíme

$$x^2 = 1 + x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Protože odmocnina je definována jako kladné číslo, správným řešením bude kořen $s +$ (v případě opačné definice by řešením byl kořen $s -$). Výsledkem je tedy $x = (1 + \sqrt{5})/2 \doteq 1,618$. Toto číslo se nazývá *zlatý řez*, obvykle se značí φ a najdeme jej na mnoha místech v přírodě.

Stejný postup můžeme použít například u nekonečných řetězových zlomků

$$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}},$$

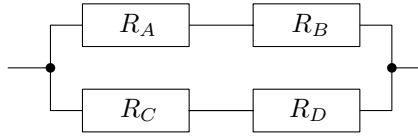
$$y^2 + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

V tomto případě vyhovují obě řešení. Nicméně, pouze to $s +$ je stabilní. Sami si vyzkoušejte, že při malé výchylce se řešení $s +$ po několika iteracích opět vrátí k původní hodnotě, zatímco řešení $s -$ bude čím dál tím víc kolísat. Správné řešení je podmíněno tím, že k němu výraz konverguje, když jde počet zlomků do nekonečna. To splňuje pouze $y = (\sqrt{5} - 1)/2 \doteq 0,618$. Shodou okolností je to opět číslo se vztahem ke zlatému řezu, konkrétně $y = \varphi - 1$ či $y = 1/\varphi$.

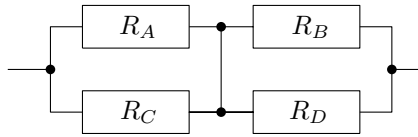
Shodnost potenciálů

Jedním z nejdůležitějších principů pro řešení elektrických obvodů je, že pokud vodičem spojíme dvě místa v obvodu, která mají stejný potenciál, nepoteče mezi nimi žádný proud.

Podívejme se, co to znamená pro podmínku na jedno z nejjednodušších možných uspořádání rezistorů, kterou můžeme mít. Máme dvě varianty zapojení, a to zapojení po dvojicích paralelně (obrázek 19) a druhé, kde přidáme ještě příčku, která nemá odpor (obrázek 20).



Obr. 19: První zapojení.



Obr. 20: Druhé zapojení.

V prvním případě určíme odpor snadno jako

$$R_{\alpha} = \frac{(R_A + R_B)(R_C + R_D)}{R_A + R_B + R_C + R_D}.$$

V druhém případě je to

$$R_{\beta} = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_D}{R_B + R_D}.$$

Jak vidíme, obecně nám mohou vyjít různé velikosti celkových odporů. Pokud bychom si ale s výrazem chvíli hráli, tak si uvědomíme, že pokud platí

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{R_C}{R_D},$$

pak budou výrazy shodné. Tedy například, pokud vyjádříme $R_D = R_B R_C / R_A$ a dosadíme, dostaneme

$$\begin{aligned} R_{\alpha} &= \frac{(R_A + R_B) \left(R_C + R_C \frac{R_B}{R_A} \right)}{R_A + R_B + R_C + R_C \frac{R_B}{R_A}} = \frac{\frac{R_C}{R_A} (R_A^2 + R_A R_B + R_A R_B + R_B^2)}{\frac{1}{R_A} (R_A^2 + R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C)} = \\ &= \frac{R_C (R_A + R_B)^2}{(R_A + R_C) (R_A + R_B)} = \frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_C} = \frac{R_A + R_B}{1 + \frac{R_A}{R_C}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_\beta &= \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_C \frac{R_B}{R_A}}{R_B + R_C \frac{R_B}{R_A}} = \frac{R_A R_C}{R_A + R_C} + \frac{R_B R_C}{R_A + R_C} = \\
 &= \frac{R_C (R_A + R_B)}{R_A + R_C} = \frac{R_A + R_B}{1 + \frac{R_A}{R_C}}.
 \end{aligned}$$

Sice jsme podmínku nedostali analytickým postupem, ale pokud ji odhadneme a ověříme, že při ní platí to, co potřebujeme, tak nemusíme řešit, odkud se vzala.

Tuto záměnu, kde si přidáme či odebereme nějaká vodivá spojení, můžeme s výhodou použít především ve složitějších úlohách. Například si jde takto zjednodušit řešení úlohy FYKOSu 22-VI-1,⁴⁷ kde se určoval odpor n -dimenzionální drátěné krychle mezi nejvzdálenějšími vrcholy.

Převody zapojení trojúhelník – hvězda

V komplexnějších obvodech, kde si nevystačíme s pouhým jednoduchým sériovým a paralelním zapojením, se nám může hodit transformace trojúhelník – hvězda a zpět. O co jde? Pokud máme mezi nějakými třemi uzly v obvodu tři rezistory zapojené do hvězdy (viz obrázek 21), pak toto zapojení je ekvivalentní dobře zvoleným odporům zapojených do trojúhelníku (viz obrázek 22). Pokud si zvolíme označení, kde je rezistor ve straně trojúhelníku označen stejným indexem jako protilehlý paprsek hvězdy, pak se dají vztahy i snadněji zapamatovat.⁴⁸ Platí

$$\begin{aligned}
 R_A &= r_B + r_C + \frac{r_B r_C}{r_A}, \\
 r_A &= \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}.
 \end{aligned}$$

V obou vztazích samozřejmě platí cyklická záměna. Přičemž pro odpory mezi dvěma uzly (např. 1 a 2) máme

$$R_{12} = r_A + r_B = R_C \frac{R_A + R_B}{R_A + R_B + R_C},$$

kde opět platí cyklická záměna (s upgradem, že musíme cyklit i 123).

Princip superpozice

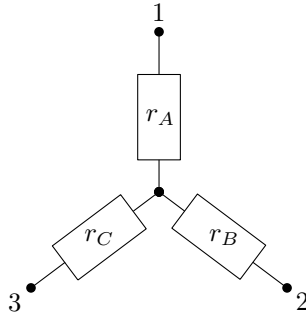
V elektrických obvodech i v elektrickém poli se uplatňuje princip superpozice, který jsme již zmiňovali. Konkrétní aplikací mohou být nekonečné elektrické sítě. Například čtvercová síť, kde má každý drátek odpor R . Pak je odpor mezi sousedními uzly $R/2$.⁴⁹ Pokud máme trojúhelníkovou síť, kde z každého uzlu jde šest hran do sousedních uzlů, odpor mezi sousedními uzly bude analogicky $R/3$.⁵⁰

⁴⁷https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/uloha22_6_1.pdf

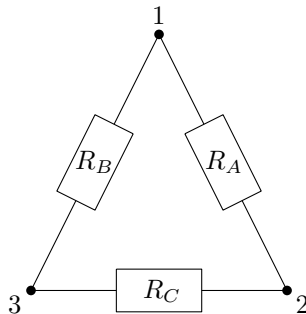
⁴⁸Například oproti srovnání se vztahy uvedenými v knihovničce FO.

⁴⁹Viz příklad 8 v Elektrických obvodech v knihovničce FO.

⁵⁰Viz úloha EG ve FYKOSím Fyziklání 2018.



Obr. 21: Zapojení ve tvaru hvězdy.



Obr. 22: Zapojení ve tvaru trojúhelníku.

Zrcadlový náboj

Zrcadlový náboj je metoda využívaná v elektrostatice. Použít ji můžeme, pokud umístíme elektrické náboje do blízkosti uzemněné desky. Uzemnění znamená, že je na ní nulový potenciál. Tím, že k ní přiblížíme náboj, způsobíme změnu potenciálu. Deska na to reaguje tak, že ze země přijme či do ní odevzdá elektrony, které na ní opět vynulují potenciál.

Tomuto jevu se říká elektrostatická indukce. Výsledné elektrické pole bude součtem pole původního náboje a pole od indukovaného náboje. Přesný výpočet vypadá velmi obtížně, ale naštěstí máme k dispozici trik. Využijeme toho, že elektrostatické pole je jednoznačně určeno svými okrajovými podmínkami. Jinak řečeno, pokud najdeme pole, které dává na okraji nějaké oblasti takový potenciál, jaký tam má být, našli jsme skutečné pole v dané oblasti.

Nyní si představme dva stejně velké opačné náboje. Snadno spočítáme potenciál výsledného pole. Pokud jeho hodnotu v nekonečnu položíme rovnou nule, zjistíme, že je nulový také v rovině dané body, které jsou od obou nábojů stejně daleko. Tím jsme ale našli pole, které přesně odpovídá nekonečně velké uzemněné desce, neboli rovině s nulovým potenciálem.

Z těchto úvah vyplývá, že když umístíme nad uzemněnou desku bodový náboj, výsledné pole bude součtem pole skutečného náboje a pole od jeho obrazu, tedy od stejně velkého opačného náboje, který se nachází na druhé straně desky, přičemž je od ní stejně daleko. Tento náboj je samozřejmě pouze imaginární, ve skutečnosti je pole generováno nábojem, který se indukuje přímo na desce.

Na základě tohoto můžeme velice jednoduše určit sílu, kterou je náboj přitahován k desce, jako sílu, kterou na sebe působí tyto náboje. Další ukázkou aplikace tohoto principu může být úloha FYKOSu 22-VI-2 – útěk z koule⁵¹

Oblast na druhé straně desky je ohraničená nekonečnou a deskou. Na celé hranici této oblasti je tak nulový potenciál a to dokážeme triviálně splnit nulovým elektrickým polem. Tím jsme došli k závěru, že nekonečná uzemněná deska dokonale stíní elektrické pole.

Gaussův zákon

Další metodou, kterou použijeme v elektrostatičce či v gravitačním poli, je Gaussův zákon. Ten nám dává vztah mezi intenzitou pole vycházející z povrchu nějaké oblasti a náboji uvnitř dané oblasti. Začneme s obecným vztahem pro elektrostatičce ve vakuu⁵²

$$\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

kde V je námi vybraný objem ohraničený dvourozměrnou plochou, kterou značíme ∂V – takto se obvykle značí hranice množiny.⁵³ Integrujeme intenzitu elektrického pole \mathbf{E} přes plošné elementy $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, kde \mathbf{n} je normálový vektor k ploše dS . Skalární součin má význam průmětu \mathbf{E} do směru \mathbf{n} . Uvedený vzoreček platí obecně pro libovolně komplikované plochy s tím, že nesmíte zapomenout na jejich orientaci, tedy že vektor \mathbf{n} míří směrem ven z dané oblasti. Dále Q je celkový elektrický náboj v oblasti a ϵ_0 je permitivita vakua.

Pro vysoce symetrické problémy si vzorec přepíšeme do zjednodušeného tvaru

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Co znamená ta vysoká symetrie? Potřebujeme vždy vybrat takovou plochu, na které má elektrická intenzita konstantní velikost a zároveň je v každém bodě na tuto plochu kolmá a míří směrem ven z oblasti. Pro názornější vysvětlení si ukážeme pár příkladů. Pokaždé budeme hledat intenzitu elektrického pole na základě známého rozložení nábojů, ale postup lze v případě potřeby samozřejmě otočit.

⁵¹https://fykos.cz/_media/rocnik22/ulohy/pdf/u1oha22_6_2.pdf

⁵²V obecném případě platí

$$\int_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

kde \mathbf{D} je elektrická indukce, což zohledňuje i nevakuum prostředí.

⁵³Tedy ∂X je hranice množiny X . Pro X interval to jsou hraniční body počátku a konce intervalu. Kdyby byla množina X čtyřrozměrná, tak by její hranice byla třírozměrná. Integrovat obecně můžeme přes libovolně-rozměrnou množinu, akorát je to ve více rozměrech trochu složitější.

Příklad – plná homogenně nabitá koule

Představme si, že máme kouli o poloměru R , do které někdo rovnoměrně nastřílel⁵⁴ elektrické náboje, které se nemohou hýbat. Koule je tak homogenně nabitá s hustotou náboje ρ . Hledáme intenzitu elektrického pole v celém prostoru.

Všimněme si, že situace je sféricky symetrická. Stejně tak musí být symetrické i elektrické pole. Vektory \mathbf{E} tak musí vždy mířit ve směru přímky procházející středem koule.

Nejdříve uvažujme, že jsme ve vzdálenosti r od středu, kde $r > R$. Představme si kouli s poloměrem r a se středem ve středu nabitě koule. Z předchozího pozorování vyplývá, že \mathbf{E} je kolmá na její povrch, zároveň má na něm díky symetrii všude stejnou velikost, označme ji E . Můžeme tak použít zjednodušující vzorec

$$ES = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Plochu počítáme jako povrch myšlené koule $S = 4\pi r^2$, dosazením dostáváme

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2},$$

což je Coulombův zákon pro bodový náboj. Vyšlo nám, že pole vně rovnoměrně nabitě koule s celkovým nábojem Q je stejné jako pole od bodového náboje Q . To je ale logické – Gaussův zákon říká, že integrál \mathbf{E} přes hranici nějaké oblasti je přímo úměrný náboji uvnitř. Pokud bude náboj sféricky symetrický, integrál se změní na pouhý součin velikosti intenzity a povrchu koule. Potom už nezávisí na konkrétním rozložení náboje – můžeme jej klidně zmenšit do libovolně malé oblasti, například do jednoho bodu.

Podívejme se na zajímavější situaci pod povrchem koule, neboli když $r < R$. V tom případě je sice vzorec pro plochu stále stejný, ale pod touto plochou je menší množství náboje, konkrétně

$$q = \frac{r^3}{R^3} Q.$$

Pro intenzitu tak dostáváme

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}.$$

S rostoucí vzdáleností od středu koule roste intenzita elektrického pole lineárně. Je rozumné očekávat, že s rostoucí vzdáleností musí intenzita růst z nulové hodnoty na tu, která odpovídá intenzitě na povrchu koule zvnějšku.⁵⁵ Dosazením $r = R$ do obou vzorců vidíme, že tento předpoklad je splněn.

Ještě jednou zdůrazněme to, že pokud máme sféricky symetricky nabitou kouli, tak do elektrického pole v libovolném bodě pod jejím povrchem nijak nezasahují vrstvy, které leží ve větší vzdálenosti od středu. Toto tvrzení se dá případně dokázat i pomocí prosté integrace intenzity, ale zdůvodnění na základě Gaussova zákona je mnohem jednodušší.

⁵⁴Technologicky je možné takto do plastu nastřílet relativně dobře definované náboje i do hloubky.

⁵⁵Intenzita elektrického pole obecně nemusí být spojitá. Každá nespojitost je však způsobena plošnými náboji, které v tomto případě nemáme.

Příklad – plný homogenně nabitý válec

Označme poloměr válce R a nábojovou hustotu ρ . Pro jednoduchost předpokládejme, že je náš válec nekonečně dlouhý. Potom ze symetrie vyplývá, že vektor \mathbf{E} bude v každém bodě kolmý na osu válce, a tedy i na jeho povrch.

Začneme opět vnějším řešením. Představíme si válec s poloměrem r a s výškou h , který je souosý s nabitým válcem. Opět můžeme použít jednodušší verzi Gaussova zákona, kde tentokrát za plochu dosadíme povrch pláště $S = 2\pi r h$. Náboj, který je uzavřen myšleným válcem, je $Q = \pi R^2 h \rho$. Dostáváme tak

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{R^2 \rho}{2r\varepsilon_0}.$$

Intenzita elektrického pole klesá přímo úměrně s rostoucí vzdáleností od středu nabitého válce. Analogicky můžeme prozkoumat vnitřní oblast

$$E = \frac{q}{S\varepsilon_0} = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}.$$

Intenzita uvnitř také roste lineárně se vzdáleností od středu, obdobně jako u plné koule. Možná, že se nekonečný válec může zdát jako sci-fi, ale v případě, že zkoumáme chování nabitě částice v blízkosti nabitého klasického drátěného vodiče, jde o dobré přiblížení.

V úloze I-3. tohoto ročníku – infrasauna⁵⁶ se řešil analogický problém. Gaussův zákon zde sice nebyl explicitně zmíněn, ale postup byl prakticky stejný. Lišily se pouze jednotky a fyzikální motivace úlohy.

Příklad – nekonečně rozlehlá rovnoměrně nabitá rovina

Představme si nekonečně rozlehlou a přitom velice tenkou nabitou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Zajímá nás, jaká bude intenzita elektrického pole v celém prostoru (kromě samotné tenké desky). Vzhledem k tomu, že jde o plošnou nábojovou hustotu, rovnou tušíme, že zde nastane skoková změna intenzity. Jako oblast pro Gaussovu větu si opět zvolíme váleček, který umístíme tak, že jeho hlavní osa bude kolmá k rovině (takže podstavy budou rovnoběžné s rovinou). Zároveň budeme chtít, aby váleček procházel deskou. Když si, obdobně jako u nekonečného válce, uvědomíme, že skrz plášť válečku nemůže téct žádná elektrická intenzita, pak je jasné, že záleží jenom na podstavách. Označíme-li plochu podstavy S , bude ve válci celkový náboj $Q = \sigma S$. Pro elektrickou intenzitu dostáváme

$$E = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Při výpočtu jsme si zvolili směr intenzity od desky, a to na obou stranách. Vzpomeňme si, že orientaci plochy (resp. vektoru \mathbf{n}) jsme si definovali jako kladnou, pokud mířila směrem ven z oblasti. Na každé straně je směr ven z válce stejný jako směr od desky, což je směr elektrické intenzity. Opět jsme tak mohli použít jednodušší verzi Gaussovy věty.

⁵⁶https://fykos.cz/_media/rocnik33/ulohy/pdf/uloha33_1_3.pdf

Vyšlo nám, že elektrické intenzity mají na obou stranách stejnou velikost, ale opačný směr. To je opět způsobeno symetrií – obě strany musí být vůči sobě zrcadlově převrácené. Celkový „skok“ v intenzitě tak bude

$$\Delta E = 2E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Pokud bychom desku umístili do prostoru s homogenním elektrickým polem \mathbf{E}_0 , výsledné pole bude součtem vnějšího pole \mathbf{E}_0 a pole desky. Tím se naruší symetrie a výsledná intenzita už nebude na obou stranách stejně velká. Důležité ale je, že skok v intenzitě zůstane zachován.

Dále si všimněme, že výsledek nezávisí na vzdálenosti od desky. To je dáno tím, že jde o 2D nekonečnou desku umístěnou v 3D prostoru. Tok se tedy se vzdáleností nemůže nijak zředit, na rozdíl od toku od bodového náboje či od nekonečného válce.

Pokud bychom chtěli, tenkou desku bychom mohli nahradit deskou konečné tloušťky s homogenním nábojem o hustotě ρ a tím odstranit skok v intenzitě. Získali bychom tím spojitou změnu intenzity uvnitř desky. Tato situace se dá použít jako aproximace pole v blízkém okolí nabitých vodivých těles, uvnitř vodiče se náboje můžou volně pohybovat, a tedy se náboj umístí jen na jeho povrchu. Navíc uvnitř vodivého tělesa je elektrické pole nulové, je právě odstíněné indukovanými náboji na svém povrchu. V blízkosti povrchu je tedy pole právě σ/ϵ_0 kolmé k povrchu vodiče.

Poznámka k analogiím

Elektrostatické pole je ekvivalentní⁵⁷ gravitačnímu poli. Vztahy pro sílu jsou analogické. Jediný podstatný rozdíl je v tom, že zatím každá známá látka má hmotnost, která se navzájem přitahuje, kdežto elektrický náboj může být kladný i záporný. Kvůli tomu také nelze odstínit gravitační pole, ale elektrické odstínit můžeme. Další rozdíly jsou pak už jenom v konstantách a v tom, že „gravitační náboj“ a konstanta úměrnosti mezi silou a zrychlením je ta samá veličina (hmotnost), zatímco u elektrického pole se jedná o dvě různé veličiny. Jinak můžeme používat všechno, co se naučíme pro jedno pole, také v druhém.

Gaussův zákon pro gravitační pole má tvar

$$\int_{\partial V} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM,$$

kde \mathbf{K} je intenzita gravitačního pole, G je gravitační konstanta a M je celková hmotnost uvnitř naší oblasti. Pracujeme s ním stejně jako s elektrostatickou verzí.

Analogie se nám pak mohou hodit k řešení úloh. Například mechanické kmitání a vlnění je analogické elektromagnetickému kmitání a vlnění.

⁵⁷Alespoň, co se klasické fyziky týká.

Závěr a upoutávka na příště

Probrali jsme několik vztahů, které lze použít při řešení úloh s elektrickými obvody či v elektrostatice. Také jsme si vysvětlili základní smysl Gaussova zákona. Při řešení úloh nezapomínejte dodržovat to, co jsme si řekli v prvním dílu seriálu – zaokrouhlovat správně, dávat odpovědi na otázky ze zadání, snažit se o grafickou úpravu. V příštím díle se podíváme na extrémny. Většinu fyzikálních problémů lze totiž převést na hledání extrémů. Například soustavy „chtějí“ zaujmout stav s nejnižší energií nebo světlo se vždy pohybuje po dráze s extrémním časem.

Úloha IV.S ... elektro todleto

10 bodů

1. Jak velký je odpor mezi sousedními vrcholy n -dimenzionálního drátěného „čtyřstěnu“? Každá hrana má odpor R . Začněte výpočtem pro $n = 1$ (úsečka), $n = 2$ (trojúhelník) a $n = 3$ (čtyřstěn) a následně najděte obecný vztah.
2. Jaké umístění a velikost bude mít zrcadlový elektrický náboj k přímce s homogenní délkovou hustotou náboje λ , která je umístěna ve vzdálenosti $r > R$ od středu uzemněného dutého nekonečně dlouhého válcového vodiče o poloměru R ? Válcový vodič a přímka jsou rovnoběžné.
3. Mějme nekonečnou rovinu s plošnou hustotou náboje σ_1 . Té se téměř dotýká kulová slupka s poloměrem R a s plošnou hustotou náboje σ_2 . Jaký musí být vztah mezi uvedenými veličinami, aby v místě, kde jsou k sobě deska se slupkou nejbližší, byla intenzita elektrického pole nulová?

Bonus Jaká je intenzita gravitačního pole uvnitř a vně planety o poloměru R , jejíž hustota záleží pouze na vzdálenosti od středu r podle vztahu $\rho = \rho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$?
(řešení str. 178)

Kapitola 5: Extrémy ve fyzice**Úvod**

Hledání extrémů je ve fyzice velice důležitou disciplínou. Řešení fyzikální úlohy můžeme často najít tak, že jednoduše maximalizujeme či minimalizujeme nějakou veličinu. Dalo by se říct, že příroda je často líná⁵⁸ a snaží se minimalizovat potenciální energii či dojít z bodu A do B tím nejrychlejším způsobem.

Jiný pohled na extremalizaci je takový, že nám v kombinaci se zákony zachování dává omezení na to, kam se nám může těleso dostat za libovolnou dobu (pokud nedojde k vnějšímu zásahu do systému). Například když tělesu na Zemi udělíme menší než první kosmickou rychlost,⁵⁹ tak víme, že časem zase spadne na Zem. Samozřejmě za předpokladu, že jej dál neurychlujeme, jako tomu je u raket. Ti, kteří znají kosmické rychlosti, si mohou říct, že jim na to stačí i méně omezující druhá kosmická rychlost,⁶⁰ ale u rychlostí o něco málo nižších než 2. kosmická se

⁵⁸Možná ještě více než autor tohoto seriálu či ti řešitelé, kteří si seriál stejně nečtou.

⁵⁹První kosmická rychlost odpovídá kruhové dráze kolem planety.

⁶⁰Minimální úniková rychlost z povrchu planety, která je $\sqrt{2}$ násobkem první kosmické rychlosti.

již můžeme docela snadno dostat do blízkosti dalších těles sluneční soustavy, kde se může pomoci gravitačního praku naše těleso urychlit či zpomalit.

V optice lze uvažovat, že světelné paprsky se pohybují po extrémálních drahách. V klasické optice se světlo pohybuje po drahách odpovídajících nejkratšímu času. Ve speciální teorii relativity se (ve vakuu) pohybuje po tzv. světelném kuželu a v obecné teorii relativity po potenciálně výrazně složitějších geodetikách. V obou teoriích relativity je pro pohyb světla ve vakuu specifické to, že prostoročasový interval mezi událostí vyzáření a událostí absorpce je nulový.

Nezapomínejme na zákony zachování

Podívejme se rovnou na konkrétní příklad. Jak nejlépe se může přiblížit nějaký asteroid k hvězdě o hmotnosti M , když přilétá z velké dálky s rychlostí v_0 a impaktním parametrem b ? Předpokládáme, že tuto rychlost má v „nekonečné vzdálenosti“. Impaktní parametr je odborný výraz pro vzdálenost od původní přímky pohybu našeho asteroidu a středu hvězdy. Jinak řečeno, je to vzdálenost jejich středů, kterou by tělesa měla v nejbližším bodě, pokud by gravitačně neinteragovala.

Pro jednoduchost budeme dále uvažovat, že můžeme obě tělesa považovat za hmotné body a že asteroid má zanedbatelně malou hmotnost oproti hvězdě. Dostáváme se k tomu, proč je tato úloha zařazena do zákonů zachování. Na počátku má totiž asteroid nenulový moment hybnosti vůči hvězdě a jeho velikost zůstává konstantní v průběhu celého pohybu, je dána jeho velikostí na počátku

$$L = mbv_0, \quad (42)$$

kde jsme hmotnost asteroidu označili m . Jaká bude situace v okamžiku největšího přiblížení? V tu chvíli bude vektor vzdálenosti r kolmý na vektor rychlosti tělesa. Můžeme opět psát vztah pro velikost momentu hybnosti

$$L = mrv, \quad (43)$$

kde v je rychlost při průchodu nejbližším bodem k hvězdě. Máme také zákon zachování energie, který využijeme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r}, \quad (44)$$

kde G je gravitační konstanta. Z dvou výrazů (42) a (43) pro moment hybnosti dostáváme

$$v = \frac{b}{r}v_0,$$

což dosadíme do vztahu pro energii (44). Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro r , kterou vyřešíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_0^2 &= \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2}v_0^2 - \frac{GM}{r}, \\ 0 &= r^2 + \frac{2GM}{v_0^2}r - b^2, \\ r_{1,2} &= -\frac{GM}{v_0^2} \pm \sqrt{\frac{G^2M^2}{v_0^4} + b^2}. \end{aligned}$$

Vybereme řešení s kladným znaménkem, protože to je jediné kladné. Nejbližší vzdálenost, do které se asteroid dostane, je

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{G^2 M^2}{v_0^4} + b^2} - \frac{GM}{v_0^2}.$$

Částečně si můžeme ověřit výsledek tak, že se podíváme na případ $b = 0$ m. Vzdálenost r_{\min} vyjde nulová, což bychom čekali. Zkusme do výsledku dosadit také nějaké potenciálně zajímavé hodnoty. Uvažujme hvězdu podobnou Slunci s hmotností $M = 2,0 \cdot 10^{30}$ kg a asteroid, který má impaktní parametr $b = 1,0$ au a rychlost v nekonečnu odpovídající třetí kosmické rychlosti $v_0 = 42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Potom vychází $r_{\min} = 0,62$ au. Pro tuto kombinaci parametrů tedy dávají použitá přiblížení dobrý smysl – asteroid neskončí ve hvězdě, předpokládáme-li že se na své cestě nesblíží s nějakou planetou.

Doplnění na čtverec

Pod heslem „pro jednoduché případy můžeme použít jednoduché metody“ se nejdříve podíváme na metodu, kterou najdeme extrém u polynomu druhého stupně, neboli u funkce

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

kde a , b a c jsou konstanty a x je proměnná. Doplnění na čtverec spočívá v tom, že funkci upravíme na tvar

$$f(x) = k (x - x_0)^2 + y_0. \quad (45)$$

Jak to uděláme? Ukažme si obecný postup

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\ &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + c \\ &= a \left(x + \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Získali jsme tak požadovaný tvar. Konstanty z rovnice (45) odvodíme snadno

$$\begin{aligned} k &= a, \\ x_0 &= -\frac{b}{a}, \\ y_0 &= c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Co ale náš výsledek znamená? Hledali jsme extrém. Parabola s kladným koeficientem a jde z $+\infty$ pro $x = -\infty$ do $+\infty$ pro $x = +\infty$. Mezi těmito limitními

hodnotami má právě jedno minimum, které najdeme v bodě $x = x_0$. Proč je to extrém? Pokud se podíváme na vztah (45), vidíme, že y_0 je konstanta a pro $x = x_0$ je $f(x)$ rovna právě y_0 , ale pro jiné hodnoty x je vždy vyšší. Současně v tomto tvaru snadno vidíme, jestli by měla kvadratická rovnice $f(x) = 0$ řešení. V případě, že $y_0 = 0$, má rovnice právě jedno řešení v x_0 . Pokud $y_0 < 0$, má rovnice dvě řešení. Pokud $y_0 > 0$, pak rovnice nemá žádné řešení. Sami si rozmyslete, co by se na těchto úvahách změnilo, pokud by byl koeficient k záporný.

Tato metoda je dobrá v tom, že nemusíte znát vysokoškolskou matematiku. Její nevýhodou je, že se nedá nějak snadno zobecnit ani na vyšší stupně polynomů, natož na další složitější funkce.

Derivace

Úvod k derivacím

Ti, kteří derivace znají, mohou přeskočit až k poslední části této podkapitoly.

Základní metodou hledání extrémů v matematice je derivování. Derivace funkce je vlastně jenom jiná funkce, která má hodnotu směrnice tečny k původní funkci v daném bodě. Jinak řečeno nám říká, jak moc se nějaká funkce mění. Pokud je derivace nulová, pak v daném bodě funkce neroste ani neklesá. Kladná derivace znamená, že funkce roste a to tím víc, čím je hodnota derivace vyšší. V oblasti, kde je derivace záporná, funkce klesá.

Podrobnější texty o derivacích naleznete například v archivu maturitního semináře,⁶¹ který pořádal FYKOS v minulosti, ve středoškolské učebnici Diferenciální a integrální počet (Dag Hrubý a Josef Kubát, Prometheus) či na různých dalších webech.⁶² Zde se v rámci stručnosti výkladu omezíme na polynomiální funkce, tedy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (46)$$

Silně však doporučujeme, pokud ještě derivace neovládáte, začněte se je učit, protože ve vysokoškolské fyzice (nebo v některých příkladech z FYKOSu) se jim nevyhnete. Navíc nám mohou výrazně usnadnit řešení úloh, kde bychom se k výsledku jinak dostávali velice pracně.

Rovnou si řekneme, že polynom ze vztahu (46) má derivaci

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + a_{n-1} (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Všimněte si, že derivace konstantního polynomu je všude identicky nulová. To je z logiky věci správně, protože konstantní funkce se nikde nemění.

Kde hledat extrémy?

Předně si vždy musíme uvědomit, na jakém intervalu je vůbec má smysl hledat. Například – má v úloze smysl záporná délka? Pokud jde o prodloužení tyče, třeba při změně teploty, tak to může dávat smysl. Ale pokud by vyšlo minimum pro zápornou délku tyče, pak to zjevně reálné minimum nebude. Kromě toho si musíme

⁶¹https://fykos.cz/_media/akce/rseminar/derivace_1_.pdf

⁶²Například <https://matematika.cz/derivace>.

Tab. 23: Příklady vztahů ve fyzice, ve kterých vystupují derivace.

Vztah	Popis
$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$	Rychlost v je derivace polohy x podle času t .
$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}$	Zrychlení a je derivací rychlosti v podle času t .
$\mathbf{j} = \dot{\mathbf{a}} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} = \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}$	Ryv j (anglicky <i>jerk</i>) je derivací zrychlení a podle času t .
$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$	Úhlová rychlost ω je derivací úhlu rotace φ podle času t .
$\varepsilon = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	Úhlové zrychlení ε je derivací úhlové rychlosti ω podle času t .
$\frac{dE_k}{dt} = -\frac{dE_p}{dt}$	V konzervativních systémech je změna potenciální energie E_p v čase stejně velká, ale opačného znaménka jako změna kinetické energie E_k . Na tento vztah se můžeme také dívat jako na diferenciálně zapsaný zákon zachování mechanické energie.
$P = \frac{dW}{dt}$	Výkon P je derivace práce W podle času t .
$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}} = m\mathbf{a}$	Pro situace s konstantní hmotností tělesa je síla F úměrná hmotnosti m a zrychlení tělesa a .
$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	Síla F je derivací hybnosti p podle času t .
$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	analogie předchozího pro otáčivý pohyb, moment síly M je derivací momentu hybnosti L .
$\mathbf{F} = -\nabla V$	Síla F je mínus gradient potenciálu V . Derivace jsou schované ve znaku ∇ nazývaném nabla, který je definovaný jako vektor $\nabla V = (\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z})$.
$I = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$	Elektrický proud I je změna elektrického náboje Q za čas t .
$U_i = -\dot{\Phi} = -\frac{d\Phi}{dt}$	Elektrické napětí U_i indukované ve smyčce vodiče je mínus derivace magnetického toku Φ .
$I(t) = C\dot{U}(t) = C\frac{dU(t)}{dt}$	Proud $I(t)$ kondenzátorem o kapacitě C určíme v případě jiného, než stejnosměrného proudu, pomocí derivace přivedeného napětí $U(t)$,
$U(t) = LI\dot{I} = L\frac{dI(t)}{dt}$	napětí $U(t)$ na cíve o indukčnosti L z derivace procházejícího proudu $I(t)$.

uvědomit samotný rozsah intervalu, na kterém jsou výsledky rozumné. Například těžiště tyče metr za jejím koncem by nás mělo upozornit na to, že je něco špatně.

Proto bychom měli vždy zvážit, jaké hodnoty nabývá funkce, jejíž extrém hledáme, na krajích intervalu. Pokud jde o funkci klesající na celém intervalu, její maximum bude na začátku a minimum na konci intervalu. U rostoucí funkce to bude právě naopak.

Když toto jednoduché pozorování nestačí, zkusíme hledat extrém pomocí deri-

vace. Pokud narazíme na bod, který nelze zderivovat, tak je podezřelý z extrému a musíme jej prozkoumat podrobněji.⁶³ Další podezřelé body budou ty, kde je derivace nulová. Nulovost derivace pro diferencovatelnou funkci je totiž nutným předpokladem pro extrém mimo okraj intervalu. Není to ale postačující podmínkou. Příkladem může být funkce $f(x) = x^3$, která má derivaci $f'(x) = 3x^2$, která je v $x = 0$ nulová. Přitom ale víme, že funkce je neklesající. V bodě $x = 0$ má pouze inflexní bod, kde dojde ke změně z konkávní funkce na konvexní.

Jedním způsobem, jak ověřit, jestli jde skutečně o minimum či maximum, je dosadit do funkce hodnotu v daném bodě a nějaké hodnoty v blízkosti potenciálního extrému. Například u $f(x) = x^3$ víme, že jediný nulový bod derivace ($3x^2$) je v $x = 0$. Dosadíme např. $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$. Ihned vidíme, že nepůjde o extrém – hodnoty se pro rostoucí x zvětšují. Jiným příkladem je funkce $g(x) = x^2$, která má derivaci $g'(x) = 2x$. Ta je opět nulová v nule, což je také jediný podezřelý bod, kromě okrajů intervalu. Dosazením stejných bodů jako předtím dostáváme $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$ a $g(1) = 1$. Vidíme, že před podezřelým bodem musela funkce klesat a potom zase růst, takže se jedná o minimum.

Pro ty, co se najdou v derivování, je vhodný alternativní postup. Ten se může hodit i u zobecnění na vícedimenzionální problémy, i když v tom případě se to také o něco zkomplikuje. Jde o to podívat se na druhou derivaci, například $g''(x) = 2$. Vidíme, že druhá derivace je v bodě $x = 0$ kladná a proto půjde o minimum. Pokud by byla druhá derivace záporná, šlo by o maximum. Pokud ale vyjde 0, jako například $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$, pak tento postup nerozhodne o tom, jestli jde o maximum, minimum, nebo inflexní bod a je potřeba použít něco jiného.

Měli bychom poznamenat, že důležité je řešit i to, jestli je extrém pouze lokální, například jeden vrcholek z mnoha vrcholků – nebo jestli je globální, tedy jde o zcela maximální (či minimální) hodnotu funkce na intervalu a nikde jinde vyšší (či nižší) nenajdeme.

Příklady derivací

Příklad 1: Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^3 - 12x$ na intervalu $\langle 0, 5 \rangle$.

Můžeme začít tím, že se podíváme na hodnoty na okraji intervalu, které jsou $f(0) = 0$ a $f(5) = 65$. Tím jsme získali dva body podezřelé z extrému. Funkce je definovaná na celém intervalu, a tak ji můžeme zderivovat a dostáváme $f'(x) = 3x^2 - 12$. Podezřelé body z extrému jsou nulové body derivace. Rovnice $3x^2 - 12 = 0$ má dvě řešení, z nichž -2 leží mimo interval. Zajímáme se tedy pouze o hodnotu v bodě 2, která je $f(2) = -16$.

Již v tuto chvíli bychom mohli říct, že maximum je $f(5) = 65$ a minimum je $f(2) = -16$, protože funkce f je spojitá (jinak řečeno, nejsou v ní přítomny žádné skoky). Z cvičných důvodů ale spočítáme druhou derivaci funkce $f''(x) = 6x$. Druhá derivace v podezřelém bodu, který jsme získali derivováním, je $f''(2) = 12$. Hodnota druhé derivace je kladná, a proto jde o lokální minimum. Protože je

⁶³Třeba v případě $1/x$ víme, že v nule funkce skočí z mínus nekonečna do plus nekonečna. Derivace tady není definována, stejně jako funkční hodnota. Tento případ je specifický tím, že v jednom bodě zleva dostáváme minimum a v tom samém bodě zprava maximum.

naše funkce omezená na zadaný interval $\langle 0, 5 \rangle$, můžeme prohlásit, že jde o globální minimum.

Pokud by byla funkce f definována na celých reálných číslech, pak by byl postup obdobný, ale prozkoumali bychom ještě $f(-2) = 16$, což by bylo lokální maximum. Globální extrémy by ovšem byly nevlastní⁶⁴ v nevlastních bodech,⁶⁵ totiž $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Příklad 2: Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^5 + x$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

Začneme tentokrát s derivací $f'(x) = 5x^4 + 1$. Rovnice $5x^4 + 1 = 0$ nemá v reálných číslech žádné řešení, proto není žádný bod podezřelý z extrému. Funkce by rostla na celých reálných číslech. My ji máme omezenou na interval $\langle 0, 2 \rangle$. Proto bude minimum v počátečním bodě a maximum v koncovém bodě intervalu, přičemž budou mít hodnoty $f(0) = 0$ a $f(2) = 34$.

Kde ve fyzice nalezneme derivace?

Jednoduše řečeno, všude. V tabulce 23 jsou nejznámější příklady i s ukázkou toho, jak derivace značíme ve fyzice. Pokud místo čárek použijeme tečky, dáváme tím najevo, že jde o úplnou derivaci podle času.

Znakem ∂ (místo d) značíme parciální derivace – tedy takové, kdy naše funkce závisí na více proměnných, ale my se zajímáme pouze o to, jak se mění podle jedné proměnné.

Opačnou, čili inverzní operaci k derivaci je integrace. S tou se také budete setkávat často. Derivace a integrály se uplatňují ve všech možných dalších vztazích, které pak mají formu diferenciálních rovnic.

Řešení pomocí počítače

Využití počítačového programu, který extremalizaci provede za vás, se může hodit v následujících případech:

- Sami neumíte derivovat.
- Funkce je příliš složitá na to, co umíte zderivovat.
- Chcete výsledek získat rychleji, zejména u komplexnějšího problému.
- Pokud si chcete ověřit výsledek.

Ačkoli v dnešní době už některé programy počítají derivace analyticky, i tak si vždy musíme dát pozor. U numerických metod může být kromě nižší přesnosti problémem to, že metoda nalezne pouze některý z lokálních extrémů, zatímco my hledáme globální extrém. Proto je vždy vhodné si například zobrazit graf funkce.

Nástroj, který můžeme nejvíce doporučit a který je pro jednodušší úlohy zdarma na internetu, je WolframAlpha.⁶⁶

⁶⁴ Jejich hodnoty jsou $\pm\infty$, což nejsou reálná čísla, čili jich funkce f nemůže nabývat.

⁶⁵ Opět, $\pm\infty$ nejsou reálná čísla a proto v nich funkce f není definována.

⁶⁶ <https://www.wolframalpha.com>

Příklad – výlet

Fykosák si vyšel na výlet, během kterého chtěl popsat nadmořskou výšku na základě uražené vzdálenosti. Výlet byl dlouhý 5,0 km a funkce, která dostatečně dobře popisuje nadmořskou výšku terénu, je

$$f(x) = -\frac{x^4}{6 \cdot 10^{13} \text{ m}^3} + \frac{x^3}{5,7 \cdot 10^9 \text{ m}^2} - \frac{x^2}{20\,000 \text{ m}} + \frac{10x}{42} + 260 \text{ m}.$$

Zajímalo by nás, jaké vertikální převýšení Fykosák musel překonat a kde byl nejvyšší a nejnižší bod jeho cesty.

Taková dlouhá čísla se nám určitě nechce přepisovat. Navíc bychom je stejně nemohli bezmyslenkovitě „vrazit do kalkulačky“, protože první člen má příliš mnoho cifer. Proto využijeme WolframAlpha. Zadáme-li do něj

```
-x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 on (0,5000)
```

vykreslí se nám funkce a získáme alespoň nějakou představu. Vidíme, že minimum bude na konci výletu a maximum někde po cestě. Mimochodem nám WolframAlpha vypíše i „Arc length of curve“, tedy délku křivky, což je i pěší délka výletu, která je přibližně 5 051 m.

Podívejme se na koncový bod – zadáme

```
-x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 for x=5000
```

a dostáváme $f(5,0 \text{ km}) \doteq 212 \text{ m}$. Obdobně můžeme zjistit, že $f(0,0 \text{ km}) = 260 \text{ m}$. Nadmořská výška místa, odkud Fykosák vyšel, je tedy 260 m a místo, kde výlet skončil, má nadmořskou výšku zhruba 212 m.

Funkci na našem intervalu zderivujeme

```
derivative -x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260 on (0,5000)
```

a zjistíme, že v celém intervalu derivace klesá a nulová je pro nějaký bod uvnitř intervalu. Tento bod určíme pomocí vyhledání řešení rovnice

```
(derivative -x^4/6e13+x^3/5.7e9-x^2/20000+10x/42+260) = 0 on (0,5000)
```

Jediný reálný kořen je pro $x \doteq 2\,402 \text{ m}$. Tuto hodnotu opět dosadíme do funkce a dostaneme $f(2,402 \text{ km}) \doteq 545 \text{ m}$.

Celkově můžeme shrnout, že Fykosák nejdříve vystoupal 285 m z nadmořské výšky 260 m do 545 m. Od vrcholu pak už stále klesal, celkem 333 m do nadmořské výšky 212 m.

Závěr a upoutávka na příště

V tomto dílu seriálu jsme se vás snažili přesvědčit o tom, jak je ve fyzice důležité hledání extrémů. Také doufáme, že se nám podařilo naučit vás některé metody, které se při extremalizaci používají. Nedá se ale říct, že by témata seriálu byla separovaná – opět jsme se vrátili například k zákonům zachování.

V příštím dílu čekatě odhady, odhady a odhady. Fyzika není vždycky o tom dokázat něco spočítat přesně. Často je důležité provést alespoň řádový odhad,

abychom zjistili, jestli se nějaký jev v našem experimentu projeví. Naopak nezbytné je umět odhadnout, zda může být naše řešení reálné či nikoli. Schopnost odhadovat se ale hodí i v ekonomii a v dalších vědách, kde pro nedostatek vstupních dat nebo díky příliš složitým modelům není možné počítat přesně.

Úloha V.S . . . mini a maxi

10 bodů

1. Máme PET lahev s vodou, která stojí na nekonečné rovině. V jaké výšce bychom měli vytvořit v lahvi malý otvor, aby voda dostříkla co nejdále od lahve? Lahev po celou dobu nehybně stojí na rovině a otvor prochází kolmo stěnou. Průřez otvoru je výrazně menší než průřez lahve.
2. Kam bychom měli umístit otvor (viz předchozí podúloha), pokud chceme, aby byl dostřík nejdleší po jedné minutě? Předpokládejte, že lahev má konstantní průřez S a otvor má výrazně menší průřez s . Pro numerické řešení odhadněte rozumné hodnoty konstant.
3. Jaký může mít baterie maximální výkon na spotřebiči, pokud má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i ? Pro jaký odpor spotřebiče to nastane? Popřípadě, pro jakou impedanci to nastane, pokud bude obvod tvořen rezistorem, cívkou a kondenzátorem?
4. Jak nejlépe se k sobě mohou dostat dvě jádra dusíku 14, která se pohybují se střední kvadratickou rychlostí odpovídající plynu za normálních podmínek?
5. Najděte maximální možnou teplotu, kterou by mohl mít plyn, ve kterém by probíhal děj $p = p_0 e^{-\alpha V}$, kde α je kladná konstanta a p_0 je tlak plynu v počátečním stavu.

(řešení str. 183)

Kapitola 6: Odhady

Úvod

Tento díl je věnován odhadům všeho druhu. Již jsme se s tímto tématem průběžně setkávali v předchozích dílech. Jde ale o důležitý základní princip ve fyzice. Proto jsme pro něj vyhradili speciální díl, abychom jej mohli probrat dostatečně podrobně.

Extremální odhady na základě zákonů zachování a jednoduchých úvah

Jak jsme zmiňovali již ve třetím dílu seriálu, můžeme využít zákony zachování k tomu, abychom provedli alespoň spodní či horní odhad hledané hodnoty. O zákonech zachování byl již jeden díl, proto se pouze stručně podíváme na jednu historickou úlohu.

Příklad – vody Zeměplochy jednoduše

Vybrali jsme problémovou úlohu 6. série 28. ročníku,⁶⁷ kterou nebudeme chtít řešit přesně, ale bude nám stačit alespoň hrubý spodní odhad. O co v úloze šlo? Na rovné

⁶⁷https://fykos.cz/_media/rocnik28/ulohy/pdf/uloha28_6_p.pdf

kruhové desce o průměru 10 000 km se nachází voda do výšky 5 m. Máme zjistit, za jak dlouho by všechna voda stekla, pokud by na celé desce bylo konstantní tíhové zrychlení g . Jedná se o velice náročnou úlohu, pokud chceme výsledek přesně.

V případě že nechceme používat nic tak složitějšího jako v autorském řešení a chceme provést alespoň, zjevně silně podhodnocený, spodní odhad, pak můžeme vyjít ze zákona zachování energie. Určíme, jakou rychlost by mohla nabrat voda po pádu z 5 m a jak dlouho by jí s touto rychlostí trvalo, než by dosáhla okraje plochy. Rychlost po pádu je $v = \sqrt{2gh} \doteq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nejvzdálenější místo od okraje je střed desky. Od středu k okraji je to 5 000 km, tedy zhruba 140 h. Úplně minimalistický odhad tedy je, že by odtok vody trval 6 dní. Zanedbali jsme ale to, že voda ani nemůže nejdříve o tolik poklesnout, právě protože může odtékat pouze z okraje. Tedy celková doba bude jistě řádově delší.

Pokud by nás zajímalo, jestli i po jednom dni zůstane na ploše dost vody na to, abyste si mohli nalít skleničku – víme jistě, že ano. Pokud by se někdo ptal na dobu za měsíc, tak na to už takto snadno odpovědět nedokážeme a museli bychom použít složitější metody. Pro dokonalé řešení by bylo potřeba uvážit viskozitu vody, povrchové napětí a další parametry. Museli bychom také určit, jakou výšku vody v jakém místě považujeme za to, že voda zde ještě neodtekla. Voda totiž v tomto modelu zcela neodteče nikdy, protože nějaké menší množství se udrží povrchovým napětím.

Fermiho úlohy

Stručně řečeno, Fermiho úlohy⁶⁸ jsou relativně komplexní odhady, ve kterých se obvykle nepoužívá složitá matematika, ale dospějeme k řádově rozumnému výsledku pomocí logických úvah a snadných výpočtů. Seriálové úlohy této série jsou zadané právě ve stylu Fermiho úloh.

Enrico Fermi byl vědcem z první poloviny 20. století, který se věnoval jadernému výzkumu. Úlohy se po něm nazývají právě proto, že byl tímto způsobem myšlení proslulý. Prý při jednom jaderném testu pustil na zem arch papíru a na základě toho, jak daleko dopadl, během pár okamžiků odhadl relativně přesně sílu jaderného výbuchu.

Asi nejznámějším příkladem úlohy tohoto typu je odhadnout počet ladičů pian v nějakém americkém městě (které se podle autora liší). Postup může být následující. Nejprve odhadneme počet osob v daném městě, třeba 10 milionů. Pak odhadneme, na kolik osob pravděpodobně připadá jedno piano. Například, že zhruba každá desátá rodina by mohla mít piano. Na rodinu mohou připadat průměrně 4 osoby. To by znamenalo, že se v daném městě vyskytuje 250 000 pian. Kolikrát pak může být průměrný počet ladění ročně? Opět mohou být rozdíly mezi jednotlivými případy. Někdo ladí každý měsíc a někdo nikdy. Předpokládejme, že průměrně to bude jednou ročně. Pokud pak jeden ladič naladí za pracovní den 4 piána a má průměrně 200 pracovních dnů ročně, pak zvládne obsloužit 800 pian. To odpovídá tomu, že by mělo být v tomto městě zhruba 300 ladičů pian. Přesněji řečeno

⁶⁸V České republice existuje stejnojmenná soutěž organizovaná pro středoškoláky Přírodovědeckou fakultou Univerzity Palackého v Olomouci – viz. <http://isouteze.upol.cz/fermi/>.

bychom asi měli říct, že považujeme za nejpravděpodobnější, že v desetimilionovém městě jsou řádově stovky ladičů pian. I když tato úloha postupně zastarává. Dnes už lidé spíš nakupují více elektronické klávesy, pro které ladiči pian nejsou potřeba.

Tento příklad byl spíše z oblasti ekonomie. Stejný přístup ale lze použít u otázek různé povahy. Dalo by se říct, že jde o inteligentní aplikaci selského rozumu.

Fermiho paradox

Zajímavým tématem týkajícím se odhadů je tzv. Fermiho paradox. Jde o to, že pokud je ve vesmíru nějaký další inteligentní život, proč jsme ho ještě nezaznamenali? Tzv. Drakeova rovnice⁶⁹ by nám měla říct, kolik současně existuje komunikace schopných mimozemských civilizací v naší galaxii. Nicméně ta samotná je souborem odhadů, které nejsou nijak podloženy tvrdými daty. Další možností směru uvažování je skrze odhad rychlosti šíření civilizace v rámci galaxie s využitím hypotetického mezihvězdného pohonu mezi soustavami. Často nám ale vyjde čas, který je velice krátký ve srovnání s „dobou života vesmíru“. Proto se vědci snaží nalézt zdůvodnění, proč jsme ještě žádnou takovou civilizaci nepotkali. Námětů na takové odůvodnění je mnoho,⁷⁰ ale pravděpodobně nám nezbyvá než jako běžným smrtelníkům počkat, jestli se dožijeme nějakého prvního kontaktu. Nebo se můžete zapojit do výzkumů s tím spojených, např. jako byl/je SETI,⁷¹ či do názavných projektů.

Jak dlouho bude trvat ...?

Zajímavou úlohou je, jak odhadnout okamžik, kdy něco zanikne, pokud máme k dispozici pouze dobu dosavadní existence dané věci, instituce apod. Předně je potřeba říct, že tento odhad vychází z Koperníkova principu. Ten předpokládá, že okamžik pozorování je náhodný. Pozorovatel, který činí tento odhad, by neměl být nějak význačný. Což samozřejmě není například ten, kdo navštívil slavnostní otevření. S odhady tohoto typu přišel John Richard Gott III,⁷² když navštívil v roce 1969 Berlínskou zeď. Položil si otázku: „Jak dlouho asi ještě bude stát?“ Uvážil, že má 50 % šanci, že se přišel podívat v době, kdy zeď stála čtvrtinu až tři čtvrtiny ze své celkové doby. Učinil tak odhad, že zeď, která stála již 8 let (od roku 1961),

⁶⁹ Velice stručný popis najdete na Wikipedii https://cs.wikipedia.org/wiki/Drakeova_rovnice. V anglické verzi najdete, jako obvykle, trochu více. Jde však o rovnici, která je diskutovaná a někteří vědci s ní nesouhlasí. V zásadě ale shrnuje parametry, které bychom měli odhadnout, abychom dostali alespoň nějaký odhad. Tedy na výsledek se v současnosti nedá vůbec spoléhat, ale je dobrým zamyšlením nad touto problematikou.

⁷⁰ Například 75 jich můžete nalézt v knize, která je celá věnována Fermiho paradoxu od Stephena Webba „If the Universe Is Teeming with Aliens ... WHERE IS EVERYBODY?: Seventy-Five Solutions to the Fermi Paradox and the Problem of Extraterrestrial Life“ (2. edice, 2015, Springer, ISBN 978-3319132358).

⁷¹ Projekt SETI@home na <https://setiathome.berkeley.edu/>, který spočíval v tom, že kdokoli mohl poskytnout výpočetní výkon svého počítače pro náročné výpočty, byl akorát v březnu 2020 pozastaven. Ale pokud budou dostatečné finance na provoz, pak bude probíhat analýza již získaných a zpracovaných dat. Pokud vás ale zaujala možnost pomoci vědcům poskytnutím výkonu svého počítače, pak vám můžeme doporučit Folding@home <https://foldingathome.org/>, v jehož rámci můžete pomoci při výzkumu nemocí, například aktuálně COVID-19.

⁷² https://en.wikipedia.org/wiki/J._Richard_Gott

bude zbořena s 50 % pravděpodobností někdy mezi lety 1971 ($1961 + 8 \cdot 4/3$) a 1993 ($1961 + 8 \cdot 3$). Při svém odhadování měl štěstí a zeď padla v roce 1989.

Tento intervalový odhad se dá ale upravit i např. na 95 % pravděpodobnost či i tzv. 5 sigma, tedy 99,9999 % pravděpodobnost. Nicméně čím vyšší pravděpodobnosti chceme dosáhnout, tím se intervaly rozšiřují a stávají se až neužitečně široké.

Podobným způsobem a mírně složitějšími úvahami můžeme odhadnout, že jsme se narodili na planetě, která má mezi osídlenými nadprůměrnou velikost, protože má i nadprůměrný počet jedinců. Tedy za předpokladu, že jsme měli stejnou pravděpodobnost se narodit jako jakýkoliv inteligentní druh. Ale jde samozřejmě pouze o odhad založený na statistickém modelu za současné znalosti 0 mimozemských civilizací. Ale lepší alespoň nějaký odhad než žádný.

Intrapolace a extrapolace

Ve fyzice často odhadujeme průběhy závislostí, kdy neznáme přesně teorii, ale dokážeme naměřit mnoho jiných dat v okolí. **Intrapolace** je označení pro situaci, kdy provádíme odhad uvnitř intervalu, kde máme okolní data – tedy máme změřeny jak nižší tak vyšší hodnoty. Příkladem intrapolace je to, jak byly odhadnuty vlastnosti chemických prvků při sestavování periodické tabulky. Mendělejev si tehdy uvědomil, že se vlastnosti prvků opakují s určitými periodami. Na základě toho jednak správně předpověděl existenci několika chemických prvků jako eka-alumina (galia) a eka-silicia (germania). Současně také předpověděl jejich základní vlastnosti na základě již známých prvků.

Extrapolace je již odvážnější proces, protože při něm odhadujeme mimo naměřený interval. Je zde proto větší pravděpodobnost, že náš odhad nebude přesný. Může se totiž stát, že se najednou výrazněji projeví nějaký jiný jev než ten, který byl dominantní na předchozím intervalu. Příkladem toho, kdy víme, že s extrapolací úplně dobře nepochodíme, je odpor vzduchu. Pro velice malé rychlosti můžeme uvažovat, že jde o laminární obtékání a síla je přímo závislá na první mocnině rychlosti (Stokesův odpor). Pro běžné rychlosti, kterých dosahuje třeba automobil, je dobré přiblížení pomocí turbulentního odporu, který je závislý na druhé mocnině rychlosti (Newtonův vztah pro odporovou sílu). Pro rychlosti blízké se rychlosti zvuku ve vzduchu pak odporová síla stoupá rychleji. Naopak po překročení rychlosti zvuku v daném prostředí dochází k tomu, že s dále rostoucí rychlostí klesá koeficient odporu a odporová síla neroste již tak rychle.

Ukázkou extrapolace je problémová úloha 2. série 31. ročníku FYKOSu,⁷³ kdy byly na základě metod pochopitelných pro středoškoláky odhadovány vlastnosti 118. prvku – oganessonu. Jsou zde použity standardní metody prokládání závislosti polynomem. Obecně je vhodné se omezovat na polynomy nižšího řádu, protože s rostoucím stupněm polynomu nám funkce rychleji „ujede“, protože při výběru polynomu se snažíme minimalizovat jeho vzdálenost (resp. kvadráty rozdílů funkčních hodnot) od námi naměřených bodů, ale nijak neošetřujeme to, aby se choval

⁷³https://fykos.cz/_media/rocnik31/ulohy/pdf/uloha31_2_p.pdf

rozumně i dále. Pokud to tedy data naznačují, pak je vhodné zůstat u lineární či kvadratické funkce.

Pokud funkce nevypadá na lineární, ale spíše na exponenciální či logaritmickou, můžeme fitovat na tu právě lépe odpovídající funkci. Pokud nemáme k dispozici počítač, můžeme využít vhodné transformace – např. převést jednu či obě osy na logaritmické a v té provést přibližné proložení graficky lineární funkcí, tedy pravítkem.

Taylorův rozvoj

Taylorův rozvoj (či polynom či řada) je způsob, jak převést jakoukoliv rozumnou funkci na polynom. S polynomy se nám totiž pracuje dobře, tak proč taky ne, že? Pokud nás pak zajímá chování funkce jenom blízko vybraného bodu, tak je Taylorův polynom to pravé.

Definice Taylorova rozvoje

Taylorův rozvoj je vlastně polynomiální řada, která nám přibližuje nějakou funkci pomocí polynomů. Námí vybranou funkcí $f(x)$ můžeme zapsat alternativně jako

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \end{aligned}$$

Pokud tedy známe funkci – přesněji řečeno její hodnotu a hodnoty všech derivací v jednom bodě, můžeme určit i hodnotu funkce v jakémkoliv jejím dalším bodě. Je to možná překvapivé tvrzení, ale opravdu stačí, aby se dvě funkce rovnaly v jednom bodě ve funkční hodnotě a všech derivacích a měly stejný definiční obor, a jsou zcela identické.⁷⁴

Pokud si zvolíme bod, ze kterého budeme vycházet jako $x_0 = 0$, což provádíme například u definice funkcí, nazývá se tato řada **Maclaurinova** a dá se zapsat ještě o něco jednodušeji jako

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Síla této řady spočívá v tom, že pokud nás zajímá pouze přibližné chování blízko bodu rozvoje této funkce, stačí nám započítat pouze několik prvních členů. Tyto řady využíváme hojně ve fyzice, když se snažíme pozorovanou závislost zjednodušit a na základě pár členů Taylorova rozvoje určit chování v nějaké oblasti. Například lineární aproximace není vlastně nic jiného než Taylorova řada prvního řádu. Čím více členů vezmeme, tím více se budeme blížit funkci, kterou takto přibližujeme a pro tím širší oblast bude naše aproximace platná.

⁷⁴Za předpokladu, že dané funkce jsou na celém vyšetřovaném intervalu hladké, neboli že se dají na celém intervalu libovolně krát derivovat.

Pokud byste potřebovali Taylorovu řadu pro více proměnných, tentokrát v okolí bodu $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, pak vypadá takto

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{(x_1 - a_1)^{k_1} (x_2 - a_2)^{k_2} \dots (x_n - a_n)^{k_n}}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n}}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Funkce můžeme rozkládat i do jiných řad – například do sinových a kosinových funkcí pro periodické funkce (Fourierovy řady), exponenciálních funkcí nebo zobecněných Taylorových řad pro komplexní čísla (Laurentovy řady).

Některé řady, které se mohou hodit

Abychom si nemuseli Taylorovu řadu odvozovat u každého příkladu znovu od začátku, je vhodné mít tabulku se základními řadami. Pokud byste si chtěli procvičit derivování, tak si je můžete zkusit sami odvodit. Některé užitečné a často používané odhady plynoucí z příslušných Taylorových polynomů, platící nejlépe v blízkém okolí $x = 0$, jsou zde

$$\begin{aligned} e^x &\approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2, & \ln(1+x) &\approx x - \frac{1}{2}x^2, \\ \frac{1}{1-x} &\approx 1 + x, & (1+x)^n &\approx 1 + nx, \quad n \in \mathbb{R}, \\ \sin x &\approx x - \frac{1}{6}x^3, & \sinh x &\approx x + \frac{1}{6}x^3, \\ \cos x &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2, & \cosh x &\approx 1 + \frac{1}{2}x^2, \\ \operatorname{tg} x &\approx x + \frac{1}{3}x^3, & \operatorname{tgh} x &\approx x - \frac{1}{3}x^3. \end{aligned}$$

Ačkoli to nesouvisí s Taylorovými řadami, často se hodí aproximovat faktoriál. Proto si zde uvedeme Stirlingův vzorec

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Limita relativistické energie

Podívejme se na praktický příklad využití Taylorova rozvoje. Ověříme, že když vyjdeme ze vztahu pro energii ve Speciální teorii relativity, dostaneme pro malé rychlosti klidovou energii plus kinetickou energii odpovídající klasické newtonovské mechanice.

Zaveďme obvyklé označení $\beta = \frac{v}{c}$, kde v je rychlost tělesa, c je rychlost světla, a označme

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}} = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

Vezměme známý Einsteinův vzoreček pro energii tělesa/částice

$$E = mc^2,$$

kde m je relativistická hmotnost částice, pro kterou platí $m = \gamma m_0$, kde m_0 je klidová hmotnost. Potom můžeme psát

$$E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 = \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} m_0 c^2.$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj γ pro $\beta \rightarrow 0$ s tím, že se budeme zajímat o první tři členy

$$\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} = 1 + \frac{d}{d\beta} \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} \beta + \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} \frac{1}{2} \beta^2 + O(\beta^3).$$

Značení $O(\beta^3)$ znamená, že máme ještě nějaký zbytek, který je řádově úměrný β^3 či vyšším mocninám. To je právě to, co budeme chtít zanedbat. Dále

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} &= \frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{\beta=0} = 0, \\ \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}} \right) \Big|_{\beta=0} &= \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\beta}{(1 - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \Big|_{\beta=0} = \frac{1 + 2\beta^2}{(1 - \beta^2)^{\frac{5}{2}}} \Big|_{\beta=0} = 1. \end{aligned}$$

Při malých rychlostech ve srovnání s rychlostí světla dostáváme pro energii vztah

$$E = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + O(\beta^3) \right).$$

Pokud se tedy omezíme na přiblížení β^2 , pak má celková energie tělesa, po přepsání na středoškolsky užívané veličiny, tvar

$$E \approx m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Skutečně dostáváme dva členy odpovídající jednak klidové energii tělesa $m_0 c^2$, která se nám v klasické fyzice nijak neprojevuje, a jednak klasické kinetické energii $\frac{1}{2} m_0 v^2$.

Závěr a upoutávka na příště?

Prošli jsme vybrané metody, jak relativně rychle dostat alespoň přibližný výsledek. Snad by se z nich dost dalo označit za triky. Nezapomínejte ale i na aplikaci selského rozumu. Zmínili jsme také pár tipů, jak psát řešení úloh lépe. Určitě se vám aspoň něco bude hodit při řešení FYKOSu či dalších soutěží, nebo při formálních záležitostech, třeba i během psaní protokolů či závěrečných prací.

Právě teď by bylo zajímavou úlohou odhadnout okamžik, kdy dojde v České republice či celosvětově ke kulminaci počtu nově nakažených SARS-CoV-2 či kdy dojde k poklesu počtu aktuálně nakažených. Nechtěli jsme být ale příliš zlomyslní. Současně doufáme, že tyto okamžiky nastanou ještě před odesílacím termínem série. Negativními faktory pro předpovědi šíření tohoto viru je třeba i to, že není

ještě moc přesně známo, jaký podíl nakažených může překonat nemoc bez nějakých výraznějších příznaků. Také se situace mění den ze dne díky opatřením, která jsou neustálé upravována. Tím pádem se dá očekávat, že jednoduché předpovědní modely ani nemohou být úspěšné s dostatečnou přesností.

Co bude příště? Tak to ještě nevíme. V době, kdy se psala tato kapitola seriálu, ještě nebylo známo téma dalšího ročníku. Určitě se můžete těšit na další zajímavé úlohy. Pokud se nemůžete dočkat dalšího čtení a máte trochu času, připomínáme, že se můžete podívat na minulé ročníky seriálu a úloh ve FYKOSu či na knihovničku Fyzikální olympiády.

Uvítáme zpětnou vazbu k průběhu letošního seriálu. Můžete získat i bonusový bod, pokud nám napíšete, jak se vám líbily úlohy. Jestli vám vyhovovalo to, že seriál byl spíše roztříštěný, co se týče oblastí fyziky a jednotlivé díly navazovaly jenom volně. Také můžete napsat, jestli vám něco chybělo – případně bychom mohli něco doplnit do textu seriálu na web. Rozhodně bychom pak chtěli vědět, pokud jste našli nějaké nepřesnosti v textu seriálu či ve vzorových úlohách (i mimo seriál). Za to nabízíme také bonusový bod či i více bodů, pokud najdete takových záležitostí větší množství.

Úloha VI.S ... být Sibylou ze Sáby...

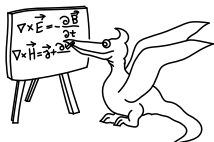
10 bodů

U všech částí této úlohy po vás chceme, abyste hodnoty následujících veličin alespoň řádově odhadli a svoje odhady náležitě zdůvodnili. Pokud byste někde našli správné hodnoty, můžete je uvést pro srovnání, ale samotné nebudou akceptované jako řešení. Hodnotit se bude především dobře popsany postup.

1. Jaký nejmenší objem potřebujeme k uchování 1 GB opakovaně čitelných informací při použití stávajících technologií?
2. Kolik uhlí spotřebuje ročně uhelná elektrárna, pokud má stálý elektrický výkon 100 MW?
3. Jak velké musí být těleso, aby dokázalo rozbít planetu podobnou Zemi na několik kusů tím, že do ní narazí?
4. Kolik energie celkem člověk „spotřebuje“ za celý život? Včetně jídla, dopravy a všech dalších vymožeností, které využívá.
5. Jak dlouho bychom museli svítit laserem na sirku, aby vzplála?

Bonus Co nejpřesněji odhadněte průměrný čas odeslání finální verze této úlohy přes webový upload FYKOSu. Řešení zasláná poštou neuvažujte. Určující čas je dle serveru.

Bonus II Připomínáme, že můžete získat body za korektury zadání a řešení úloh tohoto ročníku. Navíc můžete získat jeden bod za to, když ke svému řešení připojíte zpětnou vazbu k letošnímu seriálu. Přišla vám lepší forma ne-zcela navazujících témat? Chybělo vám něco, co bychom mohli dodatečně doplnit na web? Jaké téma byste chtěli v příštím ročníku? (řešení str. 189)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... pomalý rozjezd

- Vyjádřete následující veličiny¹ pomocí základních jednotek SI.
 - $F \cdot \Omega$, kde F je farad a Ω je ohm
 - $N \cdot \text{Pa}$, kde N je newton a Pa je pascal
 - $\frac{C \cdot V}{J}$, kde C je coulomb, V je volt a J je joule
 - $\frac{T \cdot \text{Wb}}{H \cdot \text{Sv}}$, kde H je henry, Sv sievert, T tesla a Wb weber
- V následujících tvrzeních nalezněte všechny chyby a popište, proč jde o chyby.
 - $s = vt^2/2 = 5,2 \cdot 1,2^2/2 = 3,744 \text{ m}$.
 - $y_m \sin(2\pi\omega) = 15\text{cm} \cdot \sin(2 \cdot 3,141 \cdot 50\text{Hz}) \doteq 0\text{cm}$
 - Pro experimenty jsme použili úspěšně sadu gamabeta. Na základě měření radioaktivního rozpadu Uranu ve smolinci jsme zjistily, že náš vzorek má aktivitu přesně 532,24 bequerelů.
 - $s = 1,23 \text{ m}$, $t = 2,7 \text{ s} \Rightarrow v = s/t \doteq 0,46 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $m = 240 \text{ g}$, $E = mv^2/2 \doteq 25 \text{ J}$, $P = E/t \doteq 9,3 \text{ W}$
- Jakou silou působí vítr na korunu stromu? Víme, že to má souvislost s rychlostí větru v , průřezem stromu vystaveného větru S a hustotou vzduchu ρ . Proveďte rozměrovou analýzu a na jejím základě určete vztah pro sílu.
- Sestavte podobnostní číslo odpovídající situaci, ve které protlačujeme kapalinu skrz charakteristickou délku l pomocí gradientu tlaku $\frac{dp}{dx}$ (případně si tuto veličinu představte jednoduše jako změnu tlaku se vzdáleností $\frac{\Delta p}{\Delta x}$). Kapalina má hustotu ρ a kinematickou viskozitu ν . Určete, jaké všechny varianty tohoto podobnostního čísla existují. Jednu z nich si vyberte a pokuste se ji interpretovat.

Bonus Vymyslete co neoriginálnější Planckovu jednotku (veličinu sestavenou z kombinace redukované Planckovy konstanty \hbar , gravitační konstanty G , rychlosti světla c , Boltzmannovy konstanty k_B a Coulombovy konstanty k_e , přičemž nemusí obsahovat všechny). Popište její odvození a okomentujte její hodnotu. Nejzajímavější zmíníme v brožurce s řešeními.

Předně bychom měli poznamenat, že jeden bod opravdu neodpovídá odpovědi na jednu otázku, což bylo i naznačeno tím, že čtyři podotázky jsou za dva body. Současně bychom chtěli připomenout to, že jak jsme varovali, tak pokud řešitelé v letošním seriálu budou dělat přestupky proti formálním pravidlům, tak mohou

¹Bez ohledu na to, že dané součiny možná nedávají žádný rozumný fyzikální smysl.

přijít o nějaké body. Nicméně na druhou stranu co se týká např. podúlohy s hledáním chyb, tak jde o to nalézt alespoň nějaké důležité chyby.

1. Budeme postupovat tak, že všechny jednotky převedeme na součin základních jednotek SI a následně co nejvíce zjednodušíme zápis. Pro stručnost rovnou dosazujeme do zadání.

$$(a) F \cdot \Omega = (\text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{A}^2) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-2}) = \text{s}$$

$$(b) N \cdot \text{Pa} = (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}) = \text{kg}^2 \cdot \text{s}^{-4}$$

$$(c) \frac{C \cdot V}{J} = \frac{(\text{A} \cdot \text{s}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1})}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}} = 1. \text{ Tedy v tomto případě nám}$$

vyjde bezrozměrná veličina. Toho není třeba se bát² – to se nám obecně stává, pokud vydělíme jednotku tou samou jednotkou. Například pro dosazení do exponenciály, sinu a dalších funkcí právě potřebujeme bezrozměrné veličiny. Obdobně je toto žádaný výsledek pro podobnostní čísla.

$$(d) \frac{T \cdot \text{Wb}}{H \cdot \text{Sv}} = \frac{(\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}) \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1})}{(\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-2}) \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2})} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. Úloha s odhalováním chyb nabízela u každé podúlohy větší množství chyb a bylo potřeba najít alespoň jednu relevantní chybu v každém bodě.

(a) V postupu chybí jednotka v mezivýpočtu. Druhá a třetí rovnost tedy neplatí. Na závěr není zaokrouhleno – přestože se podle dosazení zdá, že máme zadané veličiny na dvě platné cifry (případně by se jednalo o chybu přepisu, kdyby tomu tak nebylo), tak je výsledek na čtyři platné cifry. Správně by měl být na dvě až tři platné cifry. Další podstatná chyba je, že pokud t má rozměr času, tak v by muselo mít rozměr zrychlení, aby nám vyšly metry. Pokud autor dodržuje standardní značení, tak je to chyba, protože v by mělo mít rozměr rychlosti. Pokud autor nedodržuje obvyklé značení, pak by to měl uvést. Vzhledem k tomu, že to jsou pravděpodobně pouze výňatky z řešení, tak nemůžeme s jistotou prohlásit, že je to chyba, ale pravděpodobně je.

(b) V úvodní rovnici se zapomnělo na čas. Do sinu totiž nemůžeme dosadit něco, co by mělo nějaký jiný fyzikální rozměr než jednotkový čili bezrozměrný (což úhel splňuje). Správně je pravděpodobně $y_m \sin(\omega t)$, kde t je čas, pokud je ω úhlová rychlost či frekvence. Pravděpodobně došlo v popisu úlohy k záměně ω , což je úhlová rychlost, za f , což je standardně frekvence. Mezi nimi platí vztah $\omega = 2\pi f$. Vzhledem k tomu, že frekvence $f = 50 \text{ Hz}$ je častá (je v elektrické síti), pak se toto vysvětlení nabízí jako nejpravděpodobnější. Jednotky by se měly psát stojatě a ne italikou, což je drobnější chyba, ale zápis pak není estetický a typograficky správný. V postupu jsou pak dvě chyby. Není vhodné místo π napsat 3,141 (což je navíc nesprávně zaokrouhleno, správnější by bylo 3,142), protože pak nám po dosazení vyjde (pravděpodobně okamžitá výchylka nějakého kmitajícího předmětu) $-0,89 \text{ cm}$. Toto by bylo správně zaokrouhlení poslední rovnosti. Nicméně víme, že by se jednalo

²Podle došlých řešení to někdo považoval za špatný výsledek.

o celý počet sinových vln a tak by byla výchylka přesně nulová, pokud by byl čas dosazený celočíselný. Ale bez nějaké další veličiny s rozměrem času v sinu je výsledek stejně nesmyslný. Na konec bychom měli napsat tečku.

- (c) Pokud jde o závěrečnou část řešení experimentální úlohy, obvykle zde již znovu neuvádíme název použitých pomůcek, ale to není nutně důležitá chyba. Jde také o název, takže by měl být s velkým písmenem (Gamabeta; podle některých zdrojů GamaBeta). Jde o školní soupravu pro měření radioaktivního záření, která je schopná měřit záření beta a gama. Z toho pochází právě i její název. Další drobnost je, že formulace, že byla sada použita úspěšně, se obvykle nehodí do fyzikálního zpracování – vhodná je spíše, pokud by šlo o testování. Další chyba ve velkém písmenu je v názvu prvku, který se má psát v češtině s malým. Pravděpodobně neměřili (či neměřily) rozpad planety Uran nebo něčeho s tímto názvem. Když jsme zmínili, co je Gamabeta, co měří a že jde o uran, tak bychom měli poznamenat, že nejde změřit přímo celkovou aktivitu uranového zářiče pomocí Gamabety, protože uran 238 se ve velké většině případů rozpadá alfa zářením. Produkty se pak opět postupně rozpadají různými typy záření, kde opět vystupuje alfa, ale i další formy záření. Dále pak také sada nedokáže přímo měřit neutronové záření, pokud náhodou nevyvolá sekundární záření v trubici. Drobnější chybou je pak chybějící písmeno c ve slově becquerel. Další chybou je prakticky jistě jedna hruška. V první větě je ve skupině alespoň jeden muž (použili) a v druhé jsou jenom ženy a případně střední či mužský neživotný rod (zjistily). Pokud by šlo o řešení do série FYKOSu, pak by mělo jít o individuální řešení a špatně je už samotné množné číslo. Doposavad jde ale o (potenciální) maličkosti, až na to alfa záření. Nejzávažnější chybou je závěr, kdy se uvádí, že má něco přesnou hodnotu aktivity. To je nesmysl samo o sobě, protože radioaktivní rozpad, o kterém se hovoří, má pravděpodobnostní charakter a i kdybychom dokázali měřit aktivitu vzorku dokonale, tak naměříme její kolísání. Dalším reálným problémem jsou konečné rozměry přístroje, který nedokáže obklopit dokonale vzorek a celková aktivita se určuje pouze z určitého prostorového úhlu, který se určuje docela složitě, protože detekční objem je zabudován v zařízení a není jasné, bez rozebrání přístroje, jeho přesný rozměr a umístění. Dalším reálným faktorem je to, že přístroj nemusí detekovat všechny částice. Zejména u vyšších hodnot aktivit se uplatňuje tzv. mrtvá doba detektoru. Aktivita také obvykle s časem klesá.³ Tedy celkově nelze nikdy říct, že aktivitu známe přesně. Pokud bychom zanedbali slovo „přesně“ a předpokládali, že výsledek je přesně na 0,01 Bq, pak bychom museli měřit vzorek minimálně 90 let, abychom ji naměřili tak přesně. Opět za předpokladu, že by se aktivita neměnila z důvodu úbytku látky, která se rozpadá, a nově přeměněných

³To ale nemusí být vždy pravda. Počáteční vzorek rozpadat na nějaké další radioaktivní látky. Pokud mají tyto produkty kratší poločas rozpadu, pak může celková aktivita vzorku po nějakou dobu růst.

jader. Další potenciální chybou je neuvážení pozadí – kosmického záření a přirozené radioaktivity v přírodě. Nicméně to by teoreticky mohlo být výpočetně ošetřené, ale na požadovanou přesnost by si to vyžadovalo místo s konstantním pozadím a další desítky let.

- (d) Do tohoto zadání se vloudil šotek či oprava. V nějakých verzích bylo k nalezení $46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, tedy chyběla nula. Což je také formální chyba. Ale ne všichni ji mohli nalézt. Podle výpočtu rychlosti se zdá, že se jedná o pohyb s konstantní rychlostí. V tom případě by se ale dalo čekat, že výkon je nulový, nebo že výkon nezávisí uvedeným způsobem na rychlosti, ale museli bychom ho počítat z odporových sil a ne z kinetické energie. Základní jednotkou je kilogram, ale do výpočtu energie byly dosazeny gramy. Výsledek by měl být tedy tisíckrát menší. V průběhu jsou vypočítány mezivýsledky, které jsou dále dosazovány a mají nízkou přesnost. Dochází tedy k zaokrouhlovacím chybám. Správnější by bylo vyjádřit neznámou a dosadit až na závěr $P = \frac{m s^2}{2t^3} \doteq 9,2 \text{ mW}$ (za předpokladu, že předchozí vztahy platí).
3. Jedná se o velice jednoduchou aplikaci rozměrové analýzy, která se v tomto případě dá docela snadno tipnout, ale ukažme si korektní postup. Předpokládáme tedy, že platí vztah

$$F = C \rho^\alpha S^\beta v^\gamma,$$

kde F je síla, kterou hledáme, a α , β a γ jsou hledané, neznámé, exponenty. C je pak neznámá bezrozměrná konstanta, kterou neurčíme. Na závěr bychom mohli ale diskutovat, na čem bychom očekávali, že bude C záviset. Víme, že fyzikální rozměry veličin jsou $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $[S] = \text{m}^2$ a $[v] = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Fyzikální rozměr síly je pak $\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Můžeme tedy psát, že pro jednotky platí

$$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2} = (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{m}^2)^\beta \cdot (\text{m}\cdot\text{s}^{-1})^\gamma.$$

Tento vztah můžeme upravit a následně přepsat jako soustavu tří rovnic tří neznámých, protože se musí rovnat všechny fyzikální rozměry.

$$\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg}^\alpha \cdot \text{m}^{-3\alpha+2\beta+\gamma} \cdot \text{s}^{-\alpha-\gamma},$$

$$1 = \alpha,$$

$$1 = -3\alpha + 2\beta + \gamma$$

$$-2 = -\gamma.$$

Tuto soustavu rovnic je opravdu jednoduché vyřešit, protože první neznámou jsme dostali okamžitě a třetí prakticky také. Pak zbývá jenom dosadit do zbývajících druhé rovnice. Dostáváme tak $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a $\gamma = 2$. Celkový výsledek je tedy $F = C \rho S v^2$. U konstanty C bychom pak čekali, že bude záviset na tvaru stromu, který jsme zatím nijak neuvažovali. Případně pak může záviset i na směru větru, pokud nebude strom sférický symetrický.

4. Postup pro určení podobnostního čísla je vlastně stejný jako u rozměrové analýzy. Můžeme se totiž na úlohu dívat tak, že chceme vyjádřit jednu z veličin, a pak prostě závěrečný vztah vydělíme touto veličinou.

Co se mohlo zdát komplikované na úloze, je přítomnost gradientu. Nicméně bylo přímo v zadání uvedeno, že si mají řešitelé tuto veličinu představit jako změnu tlaku se vzdáleností, kde nejsou nekonečně malé (d), ale konečně velké (Δ) veličiny. Pro přehlednost si označme $k = \frac{dp}{dx}$. Zjevně bude jednotka k podílem jednotky tlaku a délky, tedy $[k] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}$. Chceme, aby platilo

$$C = l^\alpha \cdot k^\beta \cdot \rho^\gamma \cdot \nu^\delta,$$

kde C je bezrozměrné. Víme, že $[l] = \text{m}$, $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a $[\nu] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Tedy má platit

$$1 = \text{m}^\alpha \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2})^\beta \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})^\gamma \cdot (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})^\delta.$$

Exponenty přerovnáme a opět sestavíme rovnice, ale tentokrát tři pro čtyři neznámé.

$$0 = \beta + \gamma,$$

$$0 = \alpha - 2\beta - 3\gamma + 2\delta,$$

$$0 = -2\beta - \delta.$$

Jednu neznámou si tedy můžem zvolit jako parametr. Vyberme například β . Okamžitě dostáváme $\gamma = -\beta$ a $\delta = -2\beta$. Po dostavení do druhé rovnice pak máme $\alpha = 3\beta$. Zjišťujeme, že jsme si zvolili docela vhodně, protože nejmenší exponent v absolutní hodnotě je β a nevyskytují se žádná necelá čísla. Současně jsou dva exponenty kladné a dva záporné. Tedy by se dalo říci, že jsme dostali optimální kombinaci pro $\beta = 1$

$$C = \frac{l^3}{\rho \nu^2} \frac{dp}{dx}.$$

Samozřejmě, že pokud umocníme číslo, které jsme si označili jako C , na libovolné nenulové číslo, dostaneme „stejně dobré“ podobnostní číslo. Jenom bude vypadat pravděpodobně o dost komplikovaněji. Nezákeřnější část celé úlohy je interpretace výsledku. Vzhledem k tomu, že známe experiment pouze letmo, to jde docela stěží. Nicméně vidíme, že v této formulaci číslo rychle roste s rostoucí charakteristickou délkou a lineárně s gradientem tlaku. Naopak je nepřímou úměrné hustotě a viskozitě. Tedy například můžeme prohlásit, že pro stejný typ proudění pro dvojnásobnou charakteristickou délku ve stejné kapalině za stejných podmínek potřebujeme aplikovat osminový tlak. To zní docela neintuitivně vzhledem k běžné zkušenosti. Ale obvykle nemáme zkušenosti s nuceným tokem viskózní kapaliny. Podívejme se tedy na podobnostní číslo vybrané profesionálním fyzikem. Úloha byla vytvořena

tak, že bylo vybráno Hagenovo číslo⁴, nicméně existuje nepřeberné množství čísel, které mají stejnou kombinaci fyzikálních veličin s drobnými odchylkami. Právě Hagenovo číslo pak používá ještě konstantu -1 , ale jinak je stejné.

5. **Bonus:** Tato úloha byla spíše o kreativitě než o fyzikální praxi. Originalita byla hodnocena tak, že body za ni získali ti, kteří našli Planckovu veličinu, která není k nalezení na Wikipedii:⁵

Řešitelů, kteří odevzdali řešení s bonusem bylo poměrně málo. Zmíňme tedy originální fyzikální veličiny, které jste nám poslali

- intenzita elektrického pole (Herman),
- magnetický moment (Twardoch),
- měrná tepelná kapacita (Krška),
- magnetizace (Vavřík)
- a magnetický indukční tok (Čemanová).

Můžeme přidat další originální Planckovy veličiny. Například nikdo neposlal řešení s Planckovým ryvem, který je změnou Planckova zrychlení a_P za Planckův čas t_P . Pokud už známe Planckovu délku $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$ a Planckův čas $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5}$, můžeme psát

$$g_P = \frac{a_P}{t_P} = \frac{c}{t_P^2} = \frac{l_P}{t_P^3} = \frac{c^6}{\hbar G} \doteq 1,0315 \cdot 10^{95} \text{ m}\cdot\text{s}^{-3}.$$

Planckův ryv je takto nepředstavitelně vysoká hodnota. Připomeňme ještě, že ryv se uplatňuje například v konstrukci dopravních prostředků. Menší zrychlení, která nastávají při rozjíždění a zpomalování vlaku, cestujícím nevadí tolik, když se mění pomalu. Pokud se mění rychle, je to pro ně nepříjemné. Proto se konstruktéři snaží minimalizovat ryv.

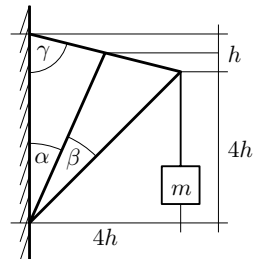
Co se týče kombinací, které mohou vzniknout, tak je zajímavé zamyslet se nad tím, jestli pomocí pěti zmíněných veličin ze zadání můžeme nakombinovat nějaké podobnostní číslo. Teplota a elektrický proud vystupují mezi veličinami pouze jednou. Proto není možné, aby Coulombova a Boltzmannova konstanta vystupovaly v konečném vztahu. Když se zaměříme na zbývající dvě, tak je kombinace mocnin proměnných opět taková, že nám buď jedna jednotka zůstane, nebo musí být všechny mocniny nulové. Podobnostní číslo tedy nezískáme.

Úloha II.S ... směs souřadnic a grafiky

1. Určete, kolik procent první stránky vzorového řešení úlohy 26-IV-5 zabírá černá barva. Řešení této úlohy najdete na https://fykos.cz/_media/rocnik26/ulohy/pdf/uloha26_4_5.pdf.

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Hagen_number

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Planck_units



Obr. 23: Soustava **169**

2. Představte si, že máte tužku, jejíž tuha má poměr $r = 0,8 \text{ mm}$. Tuha je vyrobena z grafitu v šesterečné soustavě, kde vzdálenost atomů uhlíku v jedné vrstvě je rovna $a = 2,46 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ a jednotlivé vrstvy jsou od sebe vzdáleny $c = 6,71 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Jakou délku tuhy spotřebujete na pomalování celé čtvrtky A4, pokud se papír při barvení pokryje průměrně 100 vrstvami tuhy?
3. Na obrázku 18 je zobrazena stabilní tyčová soustava, která se nachází v tíhovém poli se zrychlením g . Nejtlustší linka znázorňuje dokonale tuhé tyče zanedbatelné hmotnosti. Na konci těchto tyčí je na nehmotném provázku upevněno závaží o hmotnosti m (na obrázku zobrazeno středně tlustou linkou). Tenké čáry symbolizují délky tyčí. Platí, že $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tyč mezi úhly α a β půlí horní tyč. Tyče mohou působit silou pouze ve svém směru (žádná složka není kolmá na tyč). Tyče jsou v místech dotyku s levou stěnou pevně upevněny. Určete, které tyče jsou namáhány v tlaku a které v tahu a spočítejte velikosti sil, které na ně působí.
4. Uvažujme spirálu, která začíná v počátku soustavy souřadné a odvíjí se rovnoměrně. Vzdálenost mezi jednotlivými závity a je konstantní. Popište pohyb po této spirále ve vhodných souřadnicích.
5. Mějme šroubovici, která se odvíjí rovnoměrně. Šroubovice má konstantní poměr R a konstantní vzdálenost mezi závity h . Popište pohyb po šroubovici ve vhodných souřadnicích a určete, jaká je délka jednoho závitu této šroubovice.

Bonus Vymyslete nebo najděte (a citujte) souřadnice, které nejsou v knihovničce FO a byly by vhodné pro popis nějakého fyzikálního problému (uvedte jakého). Souřadnice popište převodem z kartézských souřadnic na vámi vybrané a zpět. Dále ukažte, jak lze ve vašich souřadnicích obecně určit vzdálenost dvou bodů.

Výpočet pokrytí papíru

Nejprve si stránku prohlédneme. Jde o stránku, která je pokrytá většinou textem plus se na ní nachází obrázek. Ten by mohl na první pohled mít přibližně stejné pokrytí barvou jako text. Obvykle se počet stran, které zvládnete vytisknout pomocí toneru, udává v násobcích stran s 5 % pokrytím.⁶ Stránka je pokrytá textem celá, takže bychom mohli „tipnout“, že by mělo jít velice zhruba o 10 % pokrytí. Ale to je opravdu jenom velice rychlý odhad. Podívejme se na jednu variantu korektnějšího řešení.

Použijeme APFill – Ink and Toner Coverage Calculator 6.0.⁷ Tento program podporuje nejen zpracování souborů TIFF, JPG či BMP, ale pokud si nainstalujete i Ghostscript,⁸ pak lze pracovat přímo se soubory formátu PDF (či PS).

⁶Komentář k tomu, co je 5 % pokrytí, najdeme třeba na <https://www.naplne.cz/co-je-5-pokryti>.

⁷<https://avpsoft.com/products/apfill/>

⁸<https://www.ghostscript.com/>

Využijeme funkci „CMYK Coverage ratio (PDF, PS)“. Jelikož pokrytí pro tisk záleží i na rozlišení, podíváme se na všechna dostupná rozlišení: 50 dpi, 75 dpi, 150 dpi, 300 dpi a 600 dpi. Jednotka dpi značí „dot per inch“, tedy bodů (pixelů) na palec. Rozdílná pokrytí u různých rozlišení jsou dána tím, že se z vektorových fontů musí přepočítat nějakým způsobem body, které pak tiskárna na papír vytiskne. Pro pokrytí v rámci počítačové obrazovky platí, že čím vyšší rozlišení, tím vyšší přesnost. Stránka ovšem není jenom v odstínech černé - obrázek je totiž tvořený z barev CMY, tedy azurové (Cyan), fuchsiové (Magenta) a žluté (Yellow), přestože by správně měl být v odstínech černé (black). V tabulce 24 jsou uvedené výsledky. Od 300 dpi se zdá, že jsou již stabilní, a proto jako rozhodující můžeme vzít tato data. Jako relativně rozumný odhad pak můžeme vzít průměr z hodnot C, M a Y a ten přičíst k hodnotě K. Dostáváme pak pokrytí 5,41 %. Chybu výsledku z programu alespoň odhadneme na 0,1 %. Dostáváme tak výsledný odhad, že $(5,4 \pm 0,1) \%$ stránky je pokryto odstíny černé, resp. $(5,3 \pm 0,1) \%$ je pokryto explicitně černou barvou.

Tab. 24: Výsledky pokrytí první strany řešení úlohy 26-IV-5 získané pomocí programu APFill – Ink and Toner Coverage Calculator 6.0. Počet platných cifer odhaduje výstupu z programu.

Rozlišení/dpi	C	M	Y	K
50	0,35 %	0,31 %	0,32 %	10,57 %
75	0,25 %	0,22 %	0,23 %	7,90 %
150	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,80 %
300	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,25 %
600	0,17 %	0,15 %	0,15 %	5,25 %

Zajímavou možností je udělat průměr z různých na sobě nezávislých odhadů. Podívejme se tedy na odhady řešitelů úlohy, kteří zaslali tuto část. Jedná se o hodnoty od 3,1 % po 28 %.⁹ Střední hodnota vychází 11 % a pokud bereme samotné hodnoty jako přesné,¹⁰ pak je výběrová směrodatná odchylka 7 %. Řešitelé používali různé programy – GIMP, ImageJ, Python a další, které dokážou vytvořit histogramy. Je zajímavé, že např. ImageJ dával výrazně odlišné výsledky – 5,23 % a 18,96 %, což je pravděpodobně způsobeno nastavením rozlišení a interpretací výsledků.

Bodování úlohy bylo poměrně tolerantní. Nicméně odpověď 23,7587 % je evidentně nesprávná, výsledek na takový počet platných cifer by musel být doložen nějakým opravdu hodně přesným postupem. S ohledem na to, že reálná hodnota je nejspíše opravdu výrazně nižší, je to zjevně neopodstatněně zapsaná přesnost.

⁹Pokud si z dvou odhadů jednoho řešitele vybereme pouze 3,1 % a druhou variantu, totiž 62 %, zahodíme. Stránka pokrytá z více než poloviny barvou by musela být plná obrázků a ne textu.

¹⁰Většina řešitelů neuvedla explicitně neurčitost odhadu, což bychom správně měli brát za chybu.

Spotřebovaná tuha

Rozměr a krystalové mřížky nemusíme vůbec použít, čehož si všimla i velká část řešitelů. Je pouhou zajímavostí, že na jeden atom připadá průměrně plocha $S_C = = \sqrt{3}a^2/2 \doteq 5,24 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$.

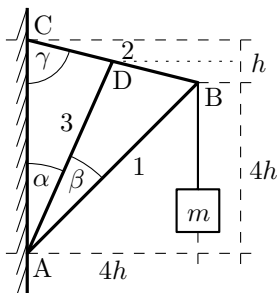
Slovo čtvrtka v zadání znamená papír s vyšší gramáží. Plochu listu A4 můžeme určit z jeho rozměrů. Šířka A4 je $x = 210 \text{ mm}$ a výška je $y = 297 \text{ mm}$. Plocha je pak $S_{A4} = xy \doteq 0,0624 \text{ m}^2$. Mimochodem, papír serie A je standardizován tak, že A0 má plochu $1,00 \text{ m}^2$ a každý další má poloviční plochu předcházejícího.

V zadání je uveden poloměr tuhy, pravděpodobně se jedná o válcovou tuhu. Průřez určíme jako $S_t = \pi r^2 \doteq 2,01 \text{ mm}^2$. Pro jednoduchost lze předpokládat, že se stírají vrstvy po vrstvách. Pak potřebná délka tuhy h je dána následujícím poměrem

$$h = 100 \frac{S_{A4}}{S_t} c = \frac{xy}{\pi r^2} c \doteq 2,1 \text{ mm}.$$

Pokud chceme pomalovat celou čtvrtku A4 pomocí grafitové tuhy o poloměru $0,8 \text{ mm}$ při předpokladu, že průměrně se bude oddělovat 100 vrstev tuhy, budeme potřebovat pouhé $2,1 \text{ mm}$ tuhy.

Tyčová soustava



Obr. 24: Náčrt zadání tyčové soustavy s doplněným označením tyčí a spojů.

Na obrázku 24 jsme si označili body a tyče. Ze zadání víme, že tyče mohou působit silou ve stejném směru, jak jsou upevněné, a ne kolmo. Ze zákona akce a reakce vyplývá, že i na tyče může být působeno pouze v jejich směru. Tím pádem se tyč označená jako 4 v soustavě vůbec neprojeví a můžeme ji odebrat. Pokud by se jednalo o reálnou konstrukci, kde jsou tyče hmotné, mají šířku, a navíc se po zavěšení předmětu některé protáhnou a jiné zkrátí, pak by se pravděpodobně uplatnila i tyč 4.

Soustava se nám zjednodušila na dvě tyče a jedno závaží. Celkový součet sil působících na bod B musí být nulový. Překresleme si síly do silového trojúhelníku, viz obrázek 25. Označili jsme $\delta = \alpha + \beta = 45^\circ$. Vidíme, že horizontální složky \mathbf{F}_1 a \mathbf{F}_2 se musí vyrušit a že vertikální složka těchto dvou sil pak musí vyrušit $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$,

kde \mathbf{g} je tíhové zrychlení. Dále již budeme pracovat jenom s velikostmi těchto sil, které již nebudeme značit tučně. Dostáváme dvě rovnice

$$F_1 \sin \delta = F_2 \sin \gamma,$$

$$F_1 \cos \delta + F_2 \cos \gamma = mg.$$

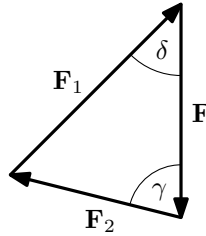
Stačí vyřešit soustavu rovnic o dvou neznámých a dostáváme velikosti sil

$$F_1 = \frac{mg}{\cos \delta + \cotg \gamma \sin \delta} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \doteq 1,13 mg,$$

$$F_2 = \frac{mg}{\cos \gamma + \cotg \delta \sin \gamma} = \frac{\sqrt{17}}{5} \doteq 0,825 mg,$$

kde jsme úhel γ určili z obrázku 24 pomocí vztahu $\sin \gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

Pokud by soustava byla složitější, mohli bychom použít momentovou větu, ale tady jsme si vystačili s jednou relativně jednoduchou rovnováhou sil. Na tyč 1 působí tlakem síla $1,13mg$, na tyč 2 působí tahem síla $0,825mg$ a tyč 4 je dle předpokladů bez síly.



Obr. 25: Náčrt sil působících v bodě B.

Archimédova spirála

Jde o standardní křivku. Možností, jak ji vyjádřit, je více. Můžeme například využít nějaké t jako parametr a v polárních souřadnicích pak rovnici spirály $r = at$ a $\varphi = 2\pi t$. Převod na kartézské souřadnice je $x = at \cos(2\pi t)$ a $y = at \sin(2\pi t)$.

Nebo využijeme přímo úhel φ a můžeme psát $r = \frac{a\varphi}{2\pi}$. Převodní vztahy jsou $x = \frac{a\varphi}{2\pi} \cos \varphi$ a $y = \frac{a\varphi}{2\pi} \sin \varphi$.

Pokud bychom chtěli určit dráhu, kterou urazí bod po křivce (z φ_{\min} do φ_{\max}), dostali bychom poměrně komplikovaný vztah

$$l = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi = \frac{a}{2\pi} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \left[\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} + \operatorname{argsinh} \varphi \right]_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}}.$$

Integrál si můžete zkusit spočítat sami. Pokud nevíte jak začít, použijte substituci $\varphi = \sinh u$.

Šroubovice

Opět jde o jednoduchou úlohu. Rovnici pro šroubovici lze napsat ve válcových souřadnicích jako

$$\begin{aligned} r &= R, \\ \varphi &= 2\pi t, \\ z &= at, \end{aligned}$$

kde t je opět parametr, který bychom mohli přeskálovat. Důležité je si uvědomit, že jde o pohyb po válci. Spirála má rovnoměrnou stoupavost, takže když si válec rozvineme do roviny, jedná se o pohyb po přímce, resp. úsečkách. Délku jednoho závitu pak můžeme určit snadno jako

$$l_1 = \sqrt{z^2(1) + (\varphi(1)r)^2} = \sqrt{a^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Pokud bychom chtěli zobecnit délku spirály v závislosti na posunu v parametru t , dostali bychom následující rovnici

$$l(t) = t\sqrt{a^2 + 4\pi^2 R^2}.$$

Zajímavé souřadnicové soustavy

V zadání jsou explicitně vynechané souřadnicové soustavy, které jsou v knihovničce Fyzikální olympiády. Bohatší nabídku souřadnicových soustav můžete nalézt například na anglické Wikipedii, kde je vyjmenovaná více jak desítka ortogonálních souřadnicových systémů.¹¹

Podívejme se například na bipolární souřadnicový systém.¹² Ten je podobný polárním, ale liší se tím, že zde máme dvě ohniska místo jednoho. Souřadnice tak mohou být využity pro popis pole v okolí dvou nabitých válců. Souřadnice σ a τ o stejné hodnotě jsou v obou případech kružnice. Jedna z nich prochází vždy oběma ohnisky, kdežto druhá neprotíná ani jedno a obkružuje právě jedno ohnisko (resp. s výjimkou přímky kolmé k jejich spojnici, což je taková deformovaná kružnice). Souřadnice σ je definovaná jako úhel mezi levým ohniskem, polohou bodu a druhým ohniskem. Druhá souřadnice je daná logaritmickým poměrem vzdáleností od ohnisek, tedy $\tau = \ln \frac{d_1}{d_2}$. Pokud je vzdálenost mezi ohnisky $2a$, pak platí pro převod souřadnic

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad y = a \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}.$$

Opacným převodem je

$$\operatorname{tgh} \tau = \frac{2ax}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad \operatorname{tg} \sigma = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}.$$

Pokud vezmeme bipolární systém a zrotujeme ho v 3D okolo středu, a to okolo osy kolmé ke spojnici ohnisek, dostáváme toroidní souřadnice.¹³ Ty mohou být dobré u popisu pole tokamaku.

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_coordinates

¹²https://en.wikipedia.org/wiki/Bipolar_coordinates

¹³https://en.wikipedia.org/wiki/Toroidal_coordinates

Úloha III.S . . . vzduchová pistole podrobně

Máme vzduchovou pistoli o hmotnosti $M = 1,3$ kg. Vystřelíme z ní diabolku (náboj), která má hmotnost $m = 0,50$ g a průměr $d = 4,5$ mm.

1. Jakou kinetickou energii bude mít náboj po výstřelu, když podle technické specifikace dosáhne rychlosti $v = 250$ fps (tedy 250 stop za sekundu)?
2. Jaký bude zpětný ráz pistole? Zajímá nás jak rychlost, kterou by se zbraň pohybovala, kdyby nebyla upevněná, tak její hybnost.
3. Jak se změní moment hybnosti Země, pokud vystřelíme ze zbraně rovnoběžně se zemským povrchem? Zajímají nás okamžiky, kdy měla maximální hybnost a potom, když dopadla a zcela se zastavila. Pro jednoduchost uvažujte, že zbraň je pevně spojená se Zemí (která je zcela kulatá) a že zbraň při výstřelu nezačala rotovat. Jakou úhlovou rychlost Země získá či ztratí?
4. Jaký je spodní odhad maximálního zrychlení střely, pokud se náboj v první čtvrtině hlavně urychlí na 90 % maximální rychlosti? Vnitřní délka hlavně je $D = 18$ cm.
5. Náboj jsme vstřelili do kousku plastelíny o hmotnosti $m_p = 42$ g, který je zavěšený na tenkém provázku délky $l = 48$ cm. Pokud by náboj v plastelině uvízl, jaká by byla maximální úhlová výchylka tohoto kyvadla?
6. Může náboj při nárazu na lidskou pokožku překročit hodnotu plošné dopadové energie $Q_{\max} = 50 \text{ J}\cdot\text{cm}^{-2}$?

Bonus Nakonec se nám experiment s kyvadlem nepodařil a plastelínu jsme prostřelili. Naměřili jsme poloviční výchylku kyvadla, než jsme původně očekávali. Jaká byla výstupní rychlost náboje z plastelíny? Předpokládejte, že při průchodu plastelínou náboj nezmění směr a ani nic z plastelíny neodnese s sebou.

Kinetická energie

Nejprve převedeme rychlost na základní jednotky. Jedna stopa má dle definice 30,48 cm. Hodnota 250 fps tedy odpovídá rychlosti $v = 76,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Kinetickou energii pak snadno vypočteme jako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \doteq 1,45 \text{ J}.$$

Energie střely je maximálně 1,5 J, což je odpověď na první otázku. Takovou vzduchovku si můžete v České republice pořídit i bez zbrojního pasu.

Zpětný ráz

Další otázka se týká zpětného rázu. Hybnost, kterou získá kulka, je

$$p = mv \doteq 0,038 \text{ kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Stejnou hybnost, pouze opačného směru, získá i zbraň. To vyplývá ze zákona zachování hybnosti. Z toho můžeme určit velikost rychlosti zbraně V , pokud by byla volná

$$p = mv = MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}v \doteq 0,029 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Zpětný ráz vzduchové pistole je tedy zhruba $3 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ opačného směru, než vyletí náboj.

Moment hybnosti Země

Při počítání momentu je zcela zásadní rozhodnout se, vůči jaké ose ho chceme určit. Jelikož nás zajímá změna rychlosti rotace Země, dává smysl jej počítat vůči ose procházející zemským těžištěm. Hybnost p , kterou jsme spočítali výše, je kolmá na poloměr Země $R_Z = 6378 \text{ km}$. Změna momentu hybnosti potom bude

$$L = pR_Z = mvR_Z \doteq 2,4 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

To vypadá jako docela vysoká hodnota. Podívejme se však, jaké úhlové rychlosti rotace Země to odpovídá. Moment setrvačnosti zeměkoule s hmotností $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ je

$$J_Z = 2M_Z R_Z^2 / 5.$$

Maximální úhlová rychlost, kterou Země získá či ztratí, bude

$$\omega = \frac{L}{J_Z} = \frac{5mvR_Z}{2M_Z R_Z^2} = \frac{5mv}{2M_Z R_Z} \doteq 2,5 \cdot 10^{-33} \text{ s}^{-1}.$$

Tato hodnota je tak nízká, že by se těleso s touto úhlovou rychlostí neotočilo ani jednou od vzniku vesmíru.

Urychlení střely

Dráha, na které se má náboj urychlit, je $D/4$. Za tu dobu má nabrat rychlost $0,90v$. Aby bylo zrychlení minimální, musí být zároveň konstantní. Pokud by nebylo, pro dosažení stejné rychlosti by muselo být nějakou chvíli vyšší.

Dobu urychlování si označme jako t . Pak můžeme psát, že pro dráhu platí $D/4 = at^2/2$ a pro rychlost $0,90v = at$, kde a je hledané rovnoměrné zrychlení. Dosazením jedné rovnice do druhé dostáváme

$$t = \frac{D}{1,8v} \doteq 1,3 \text{ ms},$$

$$a = \frac{1,62v^2}{D} \doteq 5,2 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Pokud bychom uvažovali, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb, pak by se náboj urychloval po dobu $1,3 \text{ ms}$ zrychlením $52 \text{ km} \cdot \text{s}^{-2}$. Ve skutečnosti je však zrychlení značně nerovnoměrné a proto bude jeho maximální hodnota v průběhu výstřelu značně vyšší.

Plastelínové kyvadlo

Nejprve dojde ke vstřelení náboje do plastelíny, což můžeme považovat za dokonale nepružnou srážku. Při ní se zachovává pouze hybnost a část kinetické energie se přemění na jiné formy energie. Označíme-li rychlost spojené střely a plastelíny po srážce jako w , bude platit

$$mv = (m + m_p)w \quad \Rightarrow \quad w = \frac{m}{m + m_p}v \doteq 0,90 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Kinetická energie kyvadla se potom bude postupně přeměňovat na potenciální energii dle zákona zachování mechanické energie. Kyvadlo vystoupí o h výše v tíhovém poli s tíhovým zrychlením g . Dostáváme

$$\frac{1}{2}(m + m_p)w^2 = (m + m_p)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{w^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(m + m_p)^2} \doteq 4,1 \text{ cm}.$$

Výšku výstupu pak můžeme pomocí pravoúhlého trojúhelníku převést na úhel

$$\alpha = \arccos\left(\frac{l-h}{l}\right) = \arccos\left(1 - \frac{m^2v^2}{2gl(m + m_p)^2}\right) \doteq 0,416 \text{ rad} \doteq 23,8^\circ.$$

Kyvadlo by se po vstřelení náboje mělo vychýlit o $23,8^\circ$. Poznamenejme, že jsme zanedbali hmotnost závěsu a že jsme kyvadlo považovali za hmotný bod.

Nyní se podívejme na zajímavější variantu, kterou se zabýval bonus. S plastelínou jsme to nějak nedomysleli a podařilo se nám ji prostřelit. Pro nový rozdíl výšek platí

$$h_2 = l\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Nyní využijeme identitu

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

a dostaneme

$$h_2 = l\left(1 - \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}\right) = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{2l}}\right).$$

Dosadíme vstupní veličiny

$$h_2 = l\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2v^2}{4gl(m + m_p)^2}}\right) \doteq 1,0 \text{ cm}.$$

Do této výšky vystoupí pouze plastelína – tentokrát již ne s nábojem. Ze zákona zachování mechanické energie vyplývá

$$m_pgh_2 = \frac{1}{2}m_pw_2^2,$$

kde w_2 je rychlost, kterou plastelína získala po prostřelení nábojem. Platí pro ni

$$w_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2v^2}{4gl(m + m_p)^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq 0,45 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Hybnost, která byla odebrána střele, je $p_2 = m_pw_2$. Rozdíl hybností bude

$$mv_2 = mv - m_pw_2.$$

Z něj už snadno určíme výstupní rychlost náboje

$$v_2 = v - \frac{m_p}{m} w_2 = v - \frac{m_p}{m} \sqrt{2gl} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2 v^2}{4gl(m+m_p)^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \doteq 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tato hodnota je zhruba poloviční vůči maximální. Je ovšem vidět, že závislost je složitější. Pro jiné uspořádání tak nejspíš nebude platit, že poloviční úhel odpovídá zhruba poloviční rychlosti.

Nebezpečnost zbraně

Hodnoty dopadové energie střely vyšší než $Q_{\max} = 50 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$ považují soudní znalci za odpovídající potenciálnímu smrtelnému účinku. Proto jsme se ptali právě na tuto hranici. Jedná se o energii dopadající střely vydělenou jejím průřezem. Ten považujeme za kruhový s plochou $S = \pi d^2/4$. Maximální energii dostaneme z maximální rychlosti střely

$$Q = \frac{E_k}{S} = \frac{2mv^2}{\pi d^2} \doteq 9,1 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Pokud převedeme plošnou energii na stejnou jednotku, dostáváme $9,1 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$. Tato vzduchová pistole se do limitu Q_{\max} vejde. Mohli byste ale mít vzduchovou pušku, která vystřeluje 3,2krát rychlejší náboje, pro kterou stále nemusíte mít zbrojní pas, protože se vejde do 16 J. Při stejné velikosti a hmotnosti nábojů by pak ale dosáhla $100 \text{ J} \cdot \text{cm}^{-2}$. Takže byste potenciálně měli problém u soudu s vysvětlováním toho, že jde o malý náboj, který obvykle kůži neprotrhne.

Úloha IV.S . . . elektro todleto

1. Jak velký je odpor mezi sousedními vrcholy n -dimenzionálního drátěného „čtyřstěnu“? Každá hrana má odpor R . Začněte výpočtem pro $n = 1$ (úsečka), $n = 2$ (trojúhelník) a $n = 3$ (čtyřstěn) a následně najděte obecný vztah.
2. Jaké umístění a velikost bude mít zrcadlový elektrický náboj k přímce s homogenní délkovou hustotou náboje λ , která je umístěna ve vzdálenosti $r > R$ od středu uzemněného dutého nekonečně dlouhého válcového vodiče o poloměru R ? Válcový vodič a přímka jsou rovnoběžné.
3. Mějme nekonečnou rovinu s plošnou hustotou náboje σ_1 . Té se téměř dotýká kulová slupka s poloměrem R a s plošnou hustotou náboje σ_2 . Jaký musí být vztah mezi uvedenými veličinami, aby v místě, kde jsou k sobě deska se slupkou nejblíže, byla intenzita elektrického pole nulová?

Bonus Jaká je intenzita gravitačního pole uvnitř a vně planety o poloměru R , jejíž hustota záleží pouze na vzdálenosti od středu r podle vztahu $\varrho = \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)$?

Odpor n -dimenzionálního čtyřstěnu

Budeme postupovat podle doporučení a začneme s úsečkou, u které víme, že odpor bude triviálně $R_1 = R$. Druhým krokem má být trojúhelník. Ten je složený z jednoho přímého spojení a druhého, které má odpor dvou hran. Ty jsou zapojené paralelně, a proto výsledný odpor bude

$$R_2 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \left(\frac{2+1}{2R} \right)^{-1} = \frac{2}{3}R.$$

Déle nás zajímá čtyřstěn. Označme a a b vrcholy, mezi kterými měříme odpor, zbylé dva budou c_1 a c_2 . Všimněme si, že každý vrchol je spojen se všemi ostatními. Proud z a do b poteče po těchto cestách: (a, b) , (a, c_1, b) a (a, c_2, b) . Všechny ostatní cesty obsahují hranu (c_1, c_2) , přes kterou ale proud téct nemůže. Vysvětlení je jednoduché – vrcholy c_1 a c_2 jsou stejně daleko od bodů a a b (přesně jednu hranu), čili jsou na stejném potenciálu. Jak bylo zmíněno v seriálu, proud teče pouze mezi body s rozdílným potenciálem. Odpor tří paralelně spojených cest určíme snadno jako

$$R_3 = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \frac{1}{2}R.$$

Nyní provedeme indukční krok, potřebný k zobecnění do n -té dimenze. Přidáme další vrchol, označme jej c_{n-1} , a spojíme jej se všemi dalšími vrcholy. Tím vznikne n nových hran – (a, c_{n-1}) , (b, c_{n-1}) a $n-2$ hran typu (c_i, c_{n-1}) , kde $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Podle argumentu výše ale budou všechny vrcholy c_j na stejném potenciálu, takže po hranách mezi nimi nepoteče proud. Jediná nová cesta, kterou zvětšením dimenze o jedna získáme, bude (a, c_{n-1}, b) . Tuto cestu připojíme paralelně se všemi ostatními, čili výsledný odpor bude

$$R_n = \left(\frac{1}{R} + (n-1) \frac{1}{2R} \right)^{-1} = \frac{2}{n+1}R.$$

Odpor n -dimenzionálního čtyřstěnu je $\frac{2}{n+1}R$ pro libovolné přirozené n .

Zrcadlový náboj

Původně se mělo jednat o zjednodušení 2. úlohy z 6. série 22. ročníku FYKOSu, kterou jsme citovali v textu seriálu, protože nyní bylo možné zjednodušit situaci na dvojrozměrný problém. Ale ukázalo se, že v řešení je háček a přijímali jsme relativně tolerantně i pokusy o řešení, které dávaly alespoň trochu smysl (tedy zrcadlový náboj byl uvnitř válce a měl zápornou velikost). Nejdříve se trochu netradičně podíváme na špatný způsob řešení, protože i chybami se člověk učí.

Omezíme se na rovinu kolmou na hlavní osu válce. Případně, pokud chceme, můžeme si představovat, že vezmeme nějaký tenký řez výšky h , ve kterém bude uzavřen náboj $Q = \lambda h$.

Hledáme takový drát¹⁴ který bychom umístili dovnitř válce rovnoběžně s vnějším drátem tak, aby byl potenciál elektrického pole na povrchu válce nulový (na

¹⁴Jako drát budeme v této úloze označovat nabitou přímku s konstantní délkovou hustotou náboje.

povrchu libovolného uzemněného tělesa je vždy nulový potenciál). To bude náš zrcadlový náboj. Vzdálenost tohoto drátu od středu válce označíme r' a jeho délkovou hustotu náboje λ' . Předpokládáme, že zrcadlový drát bude umístěn stejným směrem od středu válce jako je původní. Pokud by to tak nebylo, pak by nám v následujícím řešení vyšla záporná vzdálenost. A nyní se dopustíme zásadní chyby, protože budeme předpokládat následující vztahy pro potenciál, odpovídající bodovým nábojům

$$\frac{\lambda}{r - R} + \frac{\lambda'}{R - r'} = 0,$$

$$\frac{\lambda}{r + R} + \frac{\lambda'}{R + r'} = 0.$$

Tato soustava dvou rovnic o dvou neznámých odpovídá podmínce nulového potenciálu pro bod na povrchu kružnice nejbližze, resp. nejdále od původního nabitého drátu. Můžeme z ní určit jak polohu, tak délkovou hustotu zrcadlového náboje

$$r' = \frac{R^2}{r}, \quad \lambda' = -\lambda \frac{R}{r}.$$

Podmínku jsme splnili pro dva body. Měli bychom ještě ověřit, jestli je splněna na celé kružnici. Pokud umístíme osu válce do počátku a oba dráty na osu x , pro potenciál v libovolném bodě roviny můžeme psát

$$\varphi = \frac{\lambda}{\sqrt{(x - r)^2 + y^2}} + \frac{\lambda'}{\sqrt{(x - r')^2 + y^2}}.$$

Položíme-li $\varphi = 0$, dosazením za λ' a r' dostaneme

$$\frac{\lambda}{\sqrt{(x - r)^2 + y^2}} - \frac{\lambda \frac{R}{r}}{\sqrt{(x - \frac{R^2}{r})^2 + y^2}} = 0,$$

což můžeme upravit na $(x^2 + y^2 - R^2)(r^2 - R^2) = 0$. Jelikož rovnice kružnice je $x^2 + y^2 = R^2$, tato podmínka je zřejmě splněna a potenciál na celé kružnici je skutečně nulový. Problém je, že jsme i k této kontrole využili stejný vztah pro potenciál, a proto chyba nebyla odhalena.

Správně bychom si měli uvědomit, že intenzita elektrického pole ve vzdálenosti r od středu homogenně nabitě přímky je

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}.$$

Jak vidíme, zjednodušení situace na dvojrozměrný případ není tak triviální, jak by se mohlo na první pohled zdát. Nyní spočítáme potenciál

$$\varphi(x) = - \int_{\infty}^x \mathbf{E} \cdot d\tilde{\mathbf{r}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \int_x^{\infty} \frac{1}{\tilde{r}} d\tilde{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} [\ln \tilde{r}]_x^{\infty}.$$

Problém s tímto výpočtem je ten, že nulová hodnota potenciálu se typicky volí v nekonečnu, ale v tom případě dostáváme nekonečné hodnoty, což nechceme. Musíme tedy nulovou hladinu zvolit v nějaké konečné vzdálenosti r_0 . To navíc potřebujeme i kvůli tomu, aby v logaritmu byla bezrozměrná veličina. Výsledný potenciál bude

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} [\ln \bar{r}]_x^{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{x}.$$

Stejně jako ve špatném řešení, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r-R} + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{R-r'} &= 0, \\ \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{r+R} + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_0}{R+r'} &= 0. \end{aligned}$$

Její řešení a následné ověření platnosti $\varphi = 0$ na celé kružnici je však mnohem obtížnější, proto byl udělován plný počet bodů už za sestavení těchto rovnic a diskuzi.

Plošně nabitě objekty

Z textu seriálu víme, že pro velikost intenzity elektrického pole desky platí

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}.$$

Podívejme se na tenkou kulovou slupku. Budeme uvažovat, že jsme těsně nad povrchem a že plocha, na které je intenzita stejná, je $S = 4\pi R^2$, což odpovídá povrchu koule. Náboj uzavřený v kouli je pak $Q = S\sigma_2$. Dostáváme intenzitu

$$E_2 = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}.$$

Vidíme, že intenzita těsně nad povrchem koule nabitě plošným nábojem nezávisí na jejím poloměru. Intenzity směřují v nejbližším bodě proti sobě – aby byla celková intenzita nulová, musí se velikosti obou intenzit rovnat, čili platí

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} &= \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}, \\ \sigma_1 &= 2\sigma_2. \end{aligned}$$

Nalezli jsme hledanou podmínku pro parametry, kdy musí platit $\sigma_1 = 2\sigma_2$ a poloměr koule může být libovolný. Na závěr poznamenejme, že úloha předpokládá, že nabití je pevné a náboje se na objektech nehýbou. V případě, že by koule či deska byly vodivé, bylo by to daleko složitější. Už z logiky věci bychom nemohli použít zjednodušenou verzi Gaussova zákona, protože by byla porušena symetrie, kterou pro ni potřebujeme.

Gravitační pole planety

Začneme výpočtem vnější intenzity. Jelikož je situace sféricky symetrická, bude nám stačit určit celkovou hmotnost planety

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2 \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) dr = 4\pi \varrho_{\max} \int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) dr = \\ &= 4\pi \varrho_{\max} \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right]_0^R = 4\pi \varrho_{\max} \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^3}{5} \right) = \frac{8\pi}{15} \varrho_{\max} R^3. \end{aligned}$$

Pokud bychom srovnali hmotnost homogenní planety s hustotou ϱ_{\max} s naší planetou, byla by dva a půl krát větší.

Intenzita gravitačního pole naší planety nad jejím „povrchem“¹⁵ je dle Gaussovy věty

$$K = -\frac{4\pi GM}{S} = -\frac{8\pi}{15} G \varrho_{\max} \frac{R^3}{r^2}.$$

Jak vidíme, opět jsme dostali intenzitu klesající s druhou mocninou vzdálenosti od středu koule. Nyní přejdeme do vnitřní oblasti. Integrovat nebudeme celou hmotnost planety, ale pouze její část do vzdálenosti r od středu. Jde ovšem o prakticky stejnou úlohu, pouze s jinou konečnou mezí

$$M_r = \int_0^r 4\pi \tilde{r}^2 \varrho_{\max} \left(1 - \left(\frac{\tilde{r}}{R} \right)^2 \right) d\tilde{r} = 4\pi \varrho_{\max} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} \right).$$

Pro intenzitu platí

$$K = -\frac{4\pi GM_r}{S_r} = -4\pi G \varrho_{\max} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5R^2} \right).$$

Záporné znaménko u intenzity znamená, že vždy směřuje do středu koule. V řešení je potřeba dodržovat znaménkovou konvenci či alespoň uvést, kterým směrem bude intenzita směřovat. V tomto případě to sice není tak nutné, protože máme pouze jedno těleso a jde o gravitační pole, ale už v případě dvou či více těles se to komplikuje.

Zajímavostí, které si všiml Jaroslav Herman, je, že maximální intenzita gravitačního pole není na povrchu planety, ale ve vzdálenosti $r_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{3} R$ od středu planety. Intenzita v tomto bodě je $K = -\frac{8\sqrt{5}\pi}{27} G \varrho_{\max} R$, což je zhruba 1,24 násobek velikosti na povrchu planety.

Na závěr bychom rádi připomněli, že jsme sice spočítali intenzitu gravitačního pole, ale tím jsme neurčili tíhové zrychlení. Bohužel, tyto pojmy se často pletou. Tíhové zrychlení totiž zahrnuje i odstředivé zrychlení způsobené rotací planety.

¹⁵Dle definice hustoty v závislosti na poloměru je akorát na povrchu nulová hustota. Tedy není to nějaký pevný povrch, ale ohraničení, které považujeme za povrch.

Úloha V.S ... mini a maxi

1. Máme PET lahev s vodou, která stojí na nekonečné rovině. V jaké výšce bychom měli vytvořit v lahvi malý otvor, aby voda dostříkla co nejdále od lahve? Lahev po celou dobu nehybně stojí na rovině a otvor prochází kolmo stěnou. Průřez otvoru je výrazně menší než průřez lahve.
2. Kam bychom měli umístit otvor (viz předchozí podúloha), pokud chceme, aby byl dostřík nejdlejší po jedné minutě? Předpokládejte, že lahev má konstantní průřez S a otvor má výrazně menší průřez s . Pro numerické řešení odhadněte rozumné hodnoty konstant.
3. Jaký může mít baterie maximální výkon na spotřebiči, pokud má elektromotorické napětí U_e a vnitřní odpor R_i ? Pro jaký odpor spotřebiče to nastane? Popřípadě, pro jakou impedanci to nastane, pokud bude obvod tvořen rezistorem, cívkou a kondenzátorem?
4. Jak nejlépe se k sobě mohou dostat dvě jádra dusíku 14, která se pohybují se střední kvadratickou rychlostí odpovídající plynu za normálních podmínek?
5. Najděte maximální možnou teplotu, kterou by mohl mít plyn, ve kterém by probíhal děj $p = p_0 e^{-\alpha V}$, kde α je kladná konstanta a p_0 je tlak plynu v počátečním stavu.

Předně poznamenejme, že jsme akceptovali jak numerická, tak analytická řešení, a to jak s použitím derivací, tak bez nich. Ve vzorovém řešení jsou vybrána ta řešení, která jsme považovali za nejvhodnější pro daný problém, ale nejsou jediná možná.

Dostřík vody

Otvor je dle zadání malý. Můžeme tedy uvažovat, že v celém jeho průřezu vytéká voda stejnou rychlostí. Dále předpokládejme, že dno nádoby je zanedbatelně tlusté. To je pouze z praktických důvodů, aby otvor mohl být libovolně nízký. Voda, která je pod otvorem, totiž experiment nijak neovlivní. Zanedbáváme také všechny odporové síly a povrchové napětí vody. Láhev předpokládáme za shora otevřenou.

Označme výšku hladiny v nádobě H a výšku otvoru nad stolem h . Rychlost výtoku vody je dána výškou vody nad otvorem $H - h$. Díky přenosu tlaku sloupcem vody si můžeme představit, jako by se voda urychlila pádem o odpovídající výšce. Rychlost dostaneme ze zákona zachování mechanické energie

$$mg(H - h) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2g(H - h)}.$$

Použili jsme standardní značení m pro hmotnost malého objemu vody, g pro tíhové zrychlení a v pro rychlost. S touto rychlostí voda opustí nádobu kolmo na její povrch. Následuje vodorovný vrh, který si můžeme rozložit na volný pád ve svislé ose a rovnoměrný pohyb ve vodorovné ose. Doba pádu je

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Za tento čas se v druhé ose proud vody posune o vzdálenost

$$x = vt = \sqrt{2g(H-h)} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{(H-h)h}.$$

Proud vody tedy dostříkne na vzdálenost $2\sqrt{(H-h)h}$. Zajímavé je, že to nezávisí na tom, jak velké je tíhové zrychlení. Jediné, co stačí předpokládat, je, že tíhové zrychlení je nenulové a konstantní v celé oblasti, kde experiment provádíme.

Vraťme se k původní otázce, a to k maximalizaci vzdálenosti x . Odmocnina je funkcí, která je rostoucí. Jinak řečeno, pokud je maximální její argument, tak je maximální i odmocnina. Stačí proto maximalizovat funkci $f = (H-h)h$, kde H považujeme za fixní a měníme h . Funkci upravíme na čtverec

$$f = Hh - h^2 = -\left(h - \frac{H}{2}\right)^2 + \frac{H^2}{4}.$$

Z této rovnice je zřejmé, že maximum nastane pro $h = \frac{H}{2}$. Největšího dostříku tak dosáhneme pro otvor v poloviční výšce lahve. Konkrétně, voda dostříkne do vzdálenosti $x_{\max} = H$. Tím máme odpověď na první otázku.

Druhá otázka je komplikovanější. Tu budeme řešit už pro nějaké konkrétní odhadnuté hodnoty numericky. Už v zadání jsme naznačili, že by mohlo být vhodné využít numerickou simulaci a odhadnout parametry. Nechtě počáteční výška hladiny je $H = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m}$. Plochu průřezu lahve odhadneme jako $S = 60 \text{ cm}^2 = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Průřez otvoru pak můžeme řádově odhadnout na $s = 2,0 \text{ mm}^2$.

Pro numerickou simulaci využijeme nástroj, který je dostupný téměř všem, a to Microsoft Excel. Není to sice prostředí, které by se běžně používalo pro profesionální fyzikální simulace (popravdě se ve fyzice nepoužívá skoro vůbec), ale v tomto jednoduchém případě nám postačí. Využijeme doplněk „Řešitel“ (v anglické verzi „Solver“), který se sice skrývá v instalaci, ale musíte si ho před prvním použitím zavést (hledejte postup v nápovědě). Alternativně je možné pracovat s nějakým volně dostupným tabulkový procesorem a také není nutné používat nějaký doplněk, který ale nejspíš bude stejně existovat, protože jeden parametr zvládnete optimalizovat manuálně.

Připravíme si list, kde uvedeme definované počáteční hodnoty a konstanty. Sevstavíme vzorce na změnu výšky hladiny v láhvi. Odhadli jsme, že časový krok 0,01 s bude postačující pro naše potřeby. To by mělo stačit pro přesnost výsledku na tři platné cifry. Náš algoritmus je následující. V daném čase vypočítáme z výšky hladiny rychlost výtoku kapaliny. Na základě rychlosti výtoku určíme objem kapaliny, který vyteče, a následně i pokles hladiny v láhvi.¹⁶ Pokles hladiny použijeme pro změnu aktuální výšky hladiny vody v láhvi. Pomocí doplňku Řešitel pak maximalizujeme hodnotu v buňce s vzdáleností dostříku vody podle změn buňky s výškou

¹⁶Mohli bychom nějaké kroky vynechat, jeden z těchto dvou údajů je vlastně zbytečný. Ale je dobré sledovat ve výpočtu i nějaké vedlejší veličiny, když hledáte chybu. Také je vhodné optimalizovat postup, když chcete výsledky zpřesnit a jste omezeni výpočetním výkonem. Nicméně s použitím běžného dnešního notebooku a Excelu není problém si dovolit „luxus“ pár sloupečků navíc.

otvoru nad podložkou. Výpočet si můžete prohlédnout v souboru.¹⁷ Pokud byste se zajímali o lepší metody numerických výpočtů, podívejte se na seriál 31. či 21. ročníku FYKOSu.

Pro námi odhadnuté hodnoty a pro otevřený vršek láhve je optimální vytvořit otvor 11,7 cm nad povrchem stolu. Po minutě bude dostřík z této výšky 21,9 cm.

V rámci zadání byl v úloze skrytý bonus, a to prozkoumat i variantu s uzavřenou láhví. Pro ideální láhev s atmosférickým tlakem vzduchu je dostřík na počátku stejný. Nedošlo totiž ještě k poklesu hladiny, a tedy ani k poklesu tlaku nad kapalinou. V případě, že sledujeme výtok po minutě, je situace výrazně složitější. Předpokládáme, že na počátku byl u hladiny vody atmosférický tlak. Rychlost výtoku pak počítáme z rozdílu tlaků uvnitř na úrovni otvoru ve stěně a atmosférického tlaku venku. Když bude rozdíl nulový, výtok z lahve se zastaví. Pro potřeby úlohy budeme předpokládat, že vnitřní průřez láhve je konstantní až do výšky, kterou zvolíme jako $H_1 = 30$ cm.

Hlavním problémem, na který narazíme pro takto nastavené parametry, je, že výtok po nějakých pár sekundách přestane. Konkrétně, pokud se pak snažíme alespoň maximalizovat dobu výtoku, dosáhneme 3,4 s pro nulovou výšku otvoru nad podložkou. Pokud otvor umístíme výše, pak je doba ještě kratší. Můžeme zmenšit otvor v láhvi či zvětšit prostor v láhvi nad hladinou. Obě tyto změny mohou vést k tomu, že voda z jinak dokonale těsné láhve bude vytékat déle. Láhev moc zvětšovat nechceme, tak upřednostníme zmenšení otvoru. Zmenšení plochy na desetinu nepostačí, zmenšíme ji proto na setinu, neboli na $0,02 \text{ mm}^2$. Potom výsledný maximální dostřík po jedné minutě vyjde 18,8 cm pro otvor ve výšce 10,8 cm nad povrchem stolu.

Pro úplnost si ještě uvedme analytické řešení. Necht y je výška hladiny v čase t , potom rychlost výtoku bude

$$v = \sqrt{2g(y-h)}.$$

Změna objemu kapaliny v lahvi za nějaký malý čas dt bude $dV = -svdt$, čemuž odpovídá změna výšky hladiny

$$dy = -\frac{s}{S}vdt = -\frac{s}{S}\sqrt{2g(y-h)}dt.$$

Tuto jednoduchou diferenciální rovnici snadno vyřešíme a dostaneme výraz

$$y = h + \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{\frac{g}{2S}}t \right)^2,$$

který je samozřejmě platný pouze do času

$$t = 2\sqrt{2g}\frac{S}{s}\sqrt{H-h}.$$

¹⁷https://fykos.cz/_media/rocnik33/ulohy/prilohy/5/s/reseni-r33s5p8-simulace.xlsx?cache=

Nyní známe výšku hladiny v zadaném čase. Z předchozí úlohy víme, že voda dostříkne do vzdálenosti

$$x = 2\sqrt{(y-h)h} = 2\sqrt{h} \left(\sqrt{H-h} - \sqrt{\frac{g}{2S}t} \right) = 2\sqrt{h} (\sqrt{H-h} - K),$$

kde jsme několik parametrů úlohy schovali do konstanty K . Tento výraz chceme maximalizovat podle výšky otvoru h , a to znamená spočítat derivaci

$$\frac{dx}{dh} = \frac{\sqrt{H-h} - K}{\sqrt{h}} - \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{H-h}},$$

kteřou položíme rovnou nule. Po pár jednoduchých úpravách dostaneme kvadratickou rovnici, jejíž řešením je

$$h = \frac{4H - K^2 \pm K\sqrt{8H + K^2}}{8}.$$

Všimněme si jedné důležité skutečnosti – v čase $t = 0$ platí $K = 0$, čímž bychom získali stejné řešení jako v předchozím případě. Vraťme se ale k výsledné rovnici. Pokud bychom zvolili kořen $s +$, potom by h vyšlo větší než v případě pro $t = 0$. Snadno nahlédneme, že h mělo vyjít menší, čili správně je kořen $s -$. Dosazením číselných hodnot dostaneme

$$h \doteq 11,7 \text{ cm},$$

což je stejně jako u numerického řešení. Analytické řešení uzavřené lahve ponecháváme čtenáři jako cvičení.

Výkon baterie

Nejdříve se zaměříme na situaci s rezistorem s odporem R a stejnosměrným proudem. Proud protékající obvodem bude

$$I = \frac{U_e}{R_i + R}.$$

Napětí se rozdělí na vnitřní odpor a na spotřebič. Konkrétně napětí na rezistoru bude

$$U = U_e R = U_e \frac{R}{R_i + R}.$$

Výkon na spotřebiči je součin proudu a napětí na součástce

$$P = UI = \frac{R}{(R_i + R)^2} U_e^2.$$

Vidíme, že pro R blížící se k nule jde výkon také k nule. Stejně tak i pro velmi velký odpor R bude výkon téměř nulový. Maximum proto nastane pro nějakou konečnou hodnotu. V tomto případě budeme extrém hledat analyticky pomocí derivace. Zajímá nás maximum P v závislosti na R , tedy derivujeme

$$\frac{dP}{dR} = \frac{(R_i + R)^2 - 2R(R_i + R)}{(R_i + R)^4} U_e^2 = \frac{R_i - R}{(R_i + R)^3} U_e^2.$$

Abychom našli extrém, položíme derivaci rovnou nule

$$\frac{dP}{dR} = 0 \quad \Rightarrow \quad R = R_i .$$

Maximální výkon nastane pro odpor, který je stejný jako vnitřní odpor zdroje a bude mít hodnotu $P_{\max} = \frac{U_o^2}{4R_i}$.

Podívejme se na verzi úlohy se střídavým proudem. Budeme předpokládat, že prvky RLC jsou zapojeny sériově. Pak je velikost celkové impedance obvodu

$$Z = \sqrt{(R + R_i)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} ,$$

kde ω je úhlová frekvence proudu. Zajímá nás užitečný výkon na spotřebiči, tedy činný výkon $P = UI \cos \varphi$, kde $\cos \varphi$ je účinník. Ten určíme z fázového rozdílu, pro který platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Po troše práce zjistíme, že výsledek je stejný jako ve stejnosměrném případě. Pouze je potřeba doplnit podmínku pro vztah mezi kapacitou, indukčností a úhlovou frekvencí, a sice

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} .$$

S touto podmínkou je účinník rovný 1, tedy maximální možné hodnotě, a obvod se, co se výkonu týká, chová jako rezistor.

Jádra dusíku

Normální podmínky odpovídají tlaku $p_0 = 10^5$ Pa a teplotě $t = 0^\circ\text{C}$, resp. $T = 273,15$ K. Střední kvadratická rychlost částice v plynu, kterou si můžeme najít v tabulkách, je

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} ,$$

kde $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹ je Boltzmannova konstanta a m_0 je hmotnost částice. Ta byla zadána tím, že jde o atomární dusík 14, tedy $m_0 = 2,33 \cdot 10^{-26}$ kg. Rychlost obou částic bude $v \doteq 700$ m·s⁻¹.

Pokud by někdo vzal molekulu dusíku, pak by hmotnost byla dvojnásobná a rychlost molekuly nižší. Zadána byla ale úmyslně pouze jádra, aby byla další část úlohy jednoznačnější. Když máme jádra, tak je můžeme brát daleko snadněji jako bodové náboje. Molekuly jsou složitější tím, že je v nich přítomno více jader a může pak záležet i na orientaci. Také bylo v zadání uvedeno pouze jádro, abychom nemuseli uvažovat elektronový obal.

Dusík má atomové číslo 7, takže náboj každého jádra je $Q = 7e$, kde vystupuje elementární náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C. Pokud chceme jádra dostat k sobě co nejlíže, pak je pošleme proti sobě čelně. Rychlost, kterou jsme již určili, mají ale někde ve velké (nekonečné) vzdálenosti od sebe a jak se začnou přibližovat,

rychlost se začne snižovat, protože na sebe jádra působí odpudivou elektrostatickou silou. Gravitační přitažlivá síla je v tomto případě vůči té elektrostatické zcela zanedbatelná. Otázkou je, kdy se všechna kinetická energie přemění na potenciální elektrostatickou, kterou můžeme v závislosti na vzdálenosti r vyjádřit jako

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r} = \frac{49e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r},$$

kde $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ je permitivita vakua. Předpokládáme-li, že obě jádra měla v nekonečnu stejnou rychlost, můžeme psát

$$\begin{aligned} \frac{49e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} &= E_p = 2E_k = 2\frac{1}{2}m_0v_k^2, \\ r &= \frac{49e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{3kT} \doteq 1,00 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \end{aligned}$$

Je dobré si všimnout, že hmotnost částice ani nepotřebujeme znát, pouze teplotu – hmotnost jsme použili pouze pro mezivýpočet rychlosti částic. Vidíme, že zjednodušení, která jsme provedli, jsme získali situaci, která se ani zdaleka neblíží běžné situaci v plynu, který dýcháme. Zde jsou molekuly k sobě mnohem blíže než $1 \mu\text{m}$. Je to dáno zejména tím, že jsme uvažovali zcela ionizovaný plyn, zatímco ve vzduchu kolem nás jsou neutrální molekuly. Ve vzdálenostech výrazně větších než je poloměr atomu, řádově $10 \cdot 10^{-10} \text{ m}$, se atom zvnějšku obvykle chová neutrálně a odpudivá elektromagnetická síla se projeví až ve větší blízkosti. V běžném neionizovaném plynu se tedy atomy dostávají daleko blíže k sobě, což je nutné i kvůli tomu, kolik jader se obvykle vejde do jednotkového objemu vzduchu. Kvůli silnému odpuzování jader elektromagnetickou silou je také tak těžké přimět je k jaderné fúzi.

Teplota děje v plynu

Máme zadaný děj v plynu

$$p = p_0 e^{-\alpha V}.$$

Plyn považujeme za ideální a můžeme tedy psát

$$pV = nRT,$$

kde n je látkové množství plynu, $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ je molární plynová konstanta a T je jeho teplota. Vyjádříme si teplotu jako funkci ostatních veličin

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{p_0 V}{nR} e^{-\alpha V}.$$

Teplota je nyní vyjádřena pomocí objemu, který je proměnný, a dalších konstant, které jsou pro uzavřený systém konstantní. Podobně jako u výkonu rezistoru, vidíme, že pro nulový objem a nekonečně velký objem by byla teplota nulová. Zderivujeme teplotu podle objemu

$$\frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{nR} e^{-\alpha V} (1 - \alpha V).$$

Nyní položíme derivaci rovnou nule. Pouze poslední člen součinu může být nulový, čili pro extrém platí

$$1 - \alpha V = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{\alpha}.$$

Maximální teploty $T_{\max} = \frac{p_0}{\alpha n R e}$ dosáhne plyn pro objem $V = \frac{1}{\alpha}$.

Úloha VI.S . . . být Sibylou ze Sáby . . .

U všech částí této úlohy po vás chceme, abyste hodnoty následujících veličin alespoň řádově odhadli a svoje odhady náležitě zdůvodnili. Pokud byste někde našli správné hodnoty, můžete je uvést pro srovnání, ale samotné nebudou akceptované jako řešení. Hodnotit se bude především dobře popsany postup.

1. Jaký nejmenší objem potřebujeme k uchování 1 GB opakovaně čitelných informací při použití stávajících technologií?
2. Kolik uhlí spotřebuje ročně uhelná elektrárna, pokud má stálý elektrický výkon 100 MW?
3. Jak velké musí být těleso, aby dokázalo rozbít planetu podobnou Zemi na několik kusů tím, že do ní narazí?
4. Kolik energie celkem člověk „spotřebuje“ za celý život? Včetně jídla, dopravy a všech dalších vymožeností, které využívá.
5. Jak dlouho bychom museli svítit laserem na sirku, aby vzplála?

Bonus Co nejpřesněji odhadněte průměrný čas odeslání finální verze této úlohy přes webový upload FYKOSu. Řešení zaslaná poštou neuvažujte. Určující čas je dle serveru.

Bonus II Připomínáme, že můžete získat body za korektury zadání a řešení úloh tohoto ročníku. Navíc můžete získat jeden bod za to, když ke svému řešení připojíte zpětnou vazbu k letošnímu seriálu. Přišla vám lepší forma ne-zcela navazujících témat? Chybělo vám něco, co bychom mohli dodatečně doplnit na web? Jaké téma byste chtěli v příštím ročníku?

Pro dobré hodnocení řešení této úlohy bylo potřeba ukázat logické myšlení a dojít k alespoň trochu rozumnému výsledku. Zdůrazněme, že pokud používáme netriviální tvrzení, pak je potřeba doložit citaci jejich zdroje. Současně jsme významně pozitivně brali, pokud jste zmínili, jaké další faktory jste zanedbali.

Datový objem

Jedna cesta k řešení úlohy je zaměřit fyzikální limity ukládání informací a pak je konfrontovat se současným stavem techniky a praktického využití. Druhou možností je podívat se na stávající sériově vyráběnou techniku, její současné nejlepší datové hustoty a nové chystané technologie.

Pro řádový odhad je převod jednotek zanedbatelným vedlejším detailem. I když pokud si koupíte pevný disk a chtěli byste ho zaplnit celý, tak vás tyto detaily nemusí potěšit. Jde o to jestli je 1 GB (gigabyte) roven $1,00 \cdot 10^9$ B (bytů), tedy $8,00 \cdot 10^9$ b (bitů, jednotek informace typu ano/ne). Takto by to mělo být podle stávajících konvencí. Alternativně se někdy používaly jiné převody založené na

mocninách dvojky. Pro ty se ale vyhradily jinak značené jednotky, a to $1 \text{ KiB} = 1024 \text{ B}$ (kibibyte), resp. $1 \text{ MiB} = 1024 \text{ KiB}$ (mebibyte) a $1 \text{ GiB} = 1024 \text{ MiB}$ (gibibyte), což by dávalo rozdíl či převod $1 \text{ GB} \doteq 0,931 \text{ GiB}$. To nás může zajímat v případech, že se snažíme nahrát opravdu přesně 1 GiB informací na disk, ale pro naši úlohu s řádovým odhadem je 7% zanedbatelných. Počet bitů, který nás bude zajímat, budeme značit $N = 8,00 \cdot 10^9$.

Nejprve se můžeme podívat na fyzikální limity a zvážit, jestli je v dnešní době realistické takto uložená data číst. Někteří řešitelé zmiňovali, že se podařilo uložit informaci na jeden atom kobaltu.¹⁸ Pokud by se dařilo takto ukládat informace i v rámci atomu v krystalické mřížce, pak bychom při molárním objemu kobaltu¹⁹ $V_m = 6,67 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ a Avogadrově konstantě $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ dostali pro 1 GB dat při 1 bitu na jeden atom objem zhruba $V_1 = NV_m/N_A \approx 1 \cdot 10^{-19} \text{ m}^3$. Ovšem to je z hlediska techniky nerealistické, protože bychom museli umět číst data z celého objemu krystalu. Realističtější by bylo, kdybychom tvrdili, že to zvládneme z povrchu, který by byl nanesený na nějakém nosiči. Ale nosič bude pravděpodobně tvořit řádově větší objem. Měl by být tak tlustý, aby šlo data snadno fyzicky přenášet z místa na místo. Na obrázku u citovaného dokumentu ze Science Alert je vidět, že atomy od sebe byly na ploše netriviálně vzdálené (nešlo hned o sousední atomy), což je dalším důvodem si myslet, že zápis do celé krystalické mřížky je příliš optimistický.

Kdybychom chtěli být ještě optimističtější, mohli bychom uvažovat, že bychom dokázali zapsat jeden bit na každý elektron každého atomu. Tím pádem bychom hypoteticky potřebovali ještě o něco menší objem. Kdybychom dokonce dokázali manipulovat se stavy atomového jádra, mohli bychom získat ještě další prostor pro uchovávání informací. Z dnešního poznání světa jsou to spíše sci-fi úvahy.

Druhým přístupem je podívat se na techniku, která se v dnešní době prodává a zaměřit se na to, jakou hustotu dat na fyzický objem dané nosiče nabízejí. SD karty existují ve třech velikostech – standardní SD, miniSD a microSD.²⁰ Protože chceme co nejvyšší koncentraci dat, zaměříme se na objemově nejmenší z nich (microSD). Budeme uvažovat, že jde o kvádr s rozměry $a = 15 \text{ mm}$, $b = 11 \text{ mm}$ a $c = 1,2 \text{ mm}$.²¹ Objem vychází řádově na $V'_2 = abc \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3$. Největší kapacitu má v současnosti $N_2 = 2 \text{ TB}$. Na 1 GB připadá objem $V_2 = V'_2 N/N_2 \approx 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3$. Pokud bychom brali pevné disky s pohyblivým diskem (HDD) za jeden celek, pak největší paměti, které dosahují, jsou 16 TB , ale mají přitom řádově větší objem než microSD karty.²² SSD paměti jsou o něco lepší než HDD, ale ne víc než o řád. V současnosti mají nejvyšší kapacitu 100 TB při velikosti odpovídající $3,5''$ HDD diskům.²³ Flash paměti (USB klíče) jsou na tom s kapacitou podobně jako microSD, ale při významně větších rozměrech zařízení. MicroSD tím pádem vychází ze všech běžně používaných pamětí jednoznačně nejlépe.

¹⁸<https://www.sciencealert.com/scientists-find-new-mechanism-for-storing-data-on-single-atom>

¹⁹<https://cs.wikipedia.org/wiki/Kobalt>

²⁰Například <https://www.ruggedinformer.com/how-to-choose-the-right-sd-card/>

²¹https://en.wikipedia.org/wiki/SD_card#Physical_size

²²https://en.wikipedia.org/wiki/Hard_disk_drive

²³<https://lurl.cz/@fykosdrive>

Podobný přístup, který řešitelé používali docela často, byl zjistit, jak mohou být v dnešní době nejmenší tranzistory vyrobené průmyslově. V současnosti probíhá vývoj $d_3 = 3\text{ nm}$ technologie,²⁴ která by se dala asi nejlépe označit za současný technický limit. Plánují se sice ještě menší, ale současně ani 3 nm technologie není zatím sériově zavedená. Plocha jednoho bitu je zhruba $S'_3 = d_3^2 = 9 \cdot 10^{-18}\text{ m}^2$. Pokud uložíme 1 GB a bity by byly hned vedle sebe, pak dostáváme plochu $S_3 = N S'_3 \doteq 7 \cdot 10^{-8}\text{ m}^2$. Je otázkou, jaké tloušťky procesoru je možné dosáhnout. Ale protože potřebujeme nějak rozumně snadno destičku přenášet bez zlomení, půjde nejspíše o řád milimetrů či o něco menší. Skutečně, tloušťky waferů,²⁵ ze kterých se vyrábí procesory, jsou v řádech desetin milimetru. Celkový objem by pak na základě tohoto odhadu mohl být zhruba $V_3 \approx 1 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3$. Tím jsme dostali jen o řád lepší odhad než u microSD disků, kde jsme uvažovali zařízení i s obalem. Nezapomeňme, že jsme tiše předpokládali, že data lze ukládat trvale, což je ale u tranzistorů možné pouze za neustálého připojení k elektrickému napětí. To není tak praktické jako u SD disků, kde to nepotřebujeme.

Podívejme se na zcela sci-fi přístup, alespoň z dnešního pohledu. To je umístění informace do černé díry, respektive na její povrch. Zatím se ale ani jistě neví, jestli černé díry informaci „smažou“, nebo pouze zůstane ukrytá na jejich povrchu. Pokud by se informace na jejich povrchu ukládala, pak by téměř jistě šlo o nejvyšší dosažitelnou informační hustotu. Ovšem pak nemá smysl ptát se na objem, ale na rozdíl povrchů černé díry. Tedy jak se zvětší, když se na ni informace „nahráje“. Více si můžete o problému informací a černých děrách přečíst například na Wikipedii.²⁶

Některí řešitelé zmiňovali možnost zápisu informace do DNA,²⁷ což je jistě zajímavá technika. Využívají ji všechny živé organizmy i viry.²⁸ V tomto případě dostáváme ani ne objemovou či plošnou, ale spíše délkovou hodnotu, protože DNA je dvojitá.²⁹ Jednu část molekuly, která kóduje informaci, tedy dvojici nukleotidů, můžeme pro jednoduchost považovat za 2 bity (4 možnosti). V DNA jsou totiž k dispozici 4 druhy nukleotidů – adenin (A), guanin (G), cytosin (C) a thymín (T). Jedna dvojice odpovídá stoupání o desetiny nanometrů v závislosti na typu DNA. Uvažme například B-DNA se stoupáním $h_4 = 0,33\text{ nm}$ na základní pár. To odpovídá zhruba $h = N h_4 / 2 \doteq 1,3\text{ m}$ délky na uschování 1 GB informace. Pokud by nás zajímal objem samotné DNA při průměru $d_4 = 2,0\text{ nm}$ a předpokladu, že ji můžeme aproximovat za válec, dostáváme úžasných $V_4 \approx \pi d_4^2 h / 4 = \pi d_4^2 N h_4 / 8 \doteq 4 \cdot 10^{-18}\text{ m}^3$. Toto je ale objem značně nepraktického tvaru, který bychom potřebovali uskladnit ve svinutém stavu, například v nádobě tvaru kvádru. Pokud bychom ale přímo stočili molekuly na tento objem, pak by se nám překrývaly okraje molekuly. Tím pádem by molekula nemohla „fungovat“. Musíme nechat větší mezery mezi atomy, aby se nenavázaly molekulární vazby jinde

²⁴https://en.wikipedia.org/wiki/3_nm_process

²⁵[https://en.wikipedia.org/wiki/Wafer_\(electronics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Wafer_(electronics))

²⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole_information_paradox

²⁷Mohli bychom zapisovat i do RNA, ale dále budeme mluvit pouze o DNA. RNA je do jisté míry velice podobný systém ukládání genetické informace a řádově bychom dostali stejný výsledek.

²⁸Viry spíše nejsou pokládány za živé. Ale jsou různé pohledy na tuto problematiku.

²⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Nucleic_acid_double_helix

a molekula se stala nečitelnou. Navíc DNA nemůžeme nechat jen tak na vzduchu, aby se nepoškodila, ale měla by být v roztoku. Kdyby se nám ale podařilo takto objem minimalizovat, aby zůstal ve stejném řádu, pak bychom se opět dostali ke stejnému problému jako u jader kobaltu. Tam jsme zmiňovali, že když informaci napěchujeme do objemu, tak ji nedokážeme efektivně přečíst. Takže i u DNA je pak minimální prakticky použitelný objem přenosového média řádově větší. Pokud bychom ignorovali problém se čtením, pak bychom očekávali objem řádu 10^{-16} m^3 .

Závěrem považujeme za nejrozumnější odhad objemu $1 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3$ u microSD disků, alespoň co se týče zadání této úlohy. Jde totiž o již sériově vyráběný výrobek a odpovídá tak jistě současným technickým možnostem. Technika se ale bude jistě stále dále o něco vylepšovat. Alespoň než narazí na zmiňované fyzikální limity.

Uhelná elektrárna

Zadání této úlohy bylo velice jednoduché, protože jsme se omezili na uhelnou elektrárnu, která má stálý elektrický výkon $P = 100 \text{ MW}$. Respektive by se mohlo například jednat o elektrárnu, která má dvojnásobný výkon, ale průměrně je polovinu času vypnutá.

Co jsme chtěli určitě uvážit, je výhřevnost uhlí a účinnost elektrárny. Výhřevnost uhlí se liší významně pro hnědé a černé uhlí. Znatelné rozdíly jsou i mezi ložisky a na základě kvality konkrétní dodávky. Na základě zdroje,³⁰ kde vidíme, že se výhřevnost hnědého uhlí (HU) pohybuje od $10 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ až k $17 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ a černého (ČU) od $16 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ po $29 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, vezmeme pro naše účely hodnotu $H = 15 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$, která odpovídá kvalitnějšímu hnědému či nekvalitnímu prachovému černému s ještě nějakými příměsemi. V ČR se pravděpodobně v elektrárnách spálí spíš více toho hnědého s nižší výhřevností, ale budeme brát tento „střed“.

Účinnost může být trochu složitější na odhad. Rozhodně stále platí, že jsme omezení účinností Carnotova cyklu při převodu tepla na kinetickou energii, k čemuž dochází v turbínách elektrárny. Ta závisí jenom na teplotách ohřáté páry a chladiče. Ty ale, bez znalosti konstrukce elektrárny, může být těžké odhadnout. Další problém je pak účinnost převodu pohybu turbín na elektrickou energii. Je zde sice už obvykle nižší ztráta než první zmíněná, ale ekonomicky je také důležitá. V článku na webu POWER³¹ se dočteme, že účinnosti těch nejlepších elektráren se dostávají zhruba k 47 %, běžněji pak kolem 40 %. Vezmeme tedy pro náš odhad hodnotu $\eta = 40 \%$. Spotřebu uhlí za $t = 1$ rok pak můžeme určit jako

$$M = \frac{Pt}{\eta H} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ kg}.$$

Podle našeho odhadu by myšlená elektrárna se stálým výkonem 100 MW měla ročně spotřebovat zhruba 500 000 tun uhlí.

Podívejme se pro srovnání na příklad reálné elektrárny v ČR – Ledvice.³² Na webu ČEZ je dokonce možné virtuálně si ji projít a nalézt informace, které nás pro srovnání budou zajímat.³³ Kotel 660 MW bloku je největší elektrárenský kotel

³⁰<https://vytapani.tzb-info.cz/tabulky-a-vypocty/11-vyhrevnosti-paliv>

³¹<https://www.powermag.com/who-has-the-worlds-most-efficient-coal-power-plant-fleet/>

³²https://cs.wikipedia.org/wiki/Elektrárna_Ledvice

³³<http://virtualniprohlidky.cez.cz/cez-ledvice/>

v ČR. Tento blok se nevyužívá pouze na výrobu elektrické energie, ale také pro distribuci tepla. Při výhřevnosti $H_L = 11,5 \text{ GJ}\cdot\text{t}^{-1} = 11,5 \text{ MJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ zde mlýny zpracovávají $m_{L1} = 442 \text{ t}\cdot\text{h}^{-1}$ uhlí. Tím můžeme odhadnout elektrickou účinnost bloku jako

$$\eta_L = \frac{P}{H_L m_{L1}} \doteq 47\%,$$

jedná se tedy o účinnou moderní elektrárnu. Dále na jejich webu můžeme nalézt informaci, že 70 000 tun uhlí vystačí zhruba na týden provozu. To by odpovídalo spotřebě přibližně 3 700 000 tun za rok. Což odpovídá spotřebě uhlí 560 000 tun ročně odpovídajícím 100 MW jejího výkonu. Náš odhad, v němž jsme uvažovali, že elektrárna běží bez přestávek, nám poskytl výsledek, který přibližně odpovídá spotřebě jedné reálné elektrárny.

Destrukce planety

Jak někteří řešitelé správně poznamenali, jednalo se o úlohu podobnou problémové úloze z první série tohoto ročníku – ničitel planet³⁴. Nebyla ovšem formulována stejně a zadání se dalo interpretovat jinak. Jedna z interpretací, které se nabízele, bylo vytvořit praskliny napříč celou planetou. Je pravdou, že toho lze docílit pouze u planety v pevném skupenství. Reálná Země má tekuté jádro, ale pokud Země bude existovat dostatečně dlouho a nebude zničena nějakým katastrofickým scénářem, pak bude jednou i její jádro pevné. Alespoň částečně jsme akceptovali i jiné zajímavé návrhy, jak docílit takového výsledku – například velice silnou tektonickou činnost. Ale vždy záviselo na tom, jak byl postup propracovaný.

Nejdříve vyjdeme z interpretace „ničitele planet“ a budeme předpokládat, že všechna kinetická energie projektilu (dopadajícího asteroidu či spíše, jak zjistíme, planety) přejde do naší destruované planety. Při úvaze, že chceme transportovat kousky planety do nekonečné vzdálenosti, aby se nám už nenavrátily, ale v nekonečnu jim stačí nulová hybnost, můžeme převzít vzorec pro potřebnou energii bomby

$$E_b = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R},$$

kde G je gravitační konstanta, M je hmotnost planety a R je její poloměr. Pokud bychom chtěli volně pustit na ničenou planetu jiné těleso z nekonečné vzdálenosti, aby mělo dostatečnou energii vůči této planetě, pak by muselo mít hmotnost řádově srovnatelnou s ničenou planetou. Takže by muselo jít de facto o druhou planetu. Nikde jsme ale nelimitovali hmotnost, ale ani rychlost planety. Takže bychom mohli poslat daleko lehčí těleso, ale vysokou rychlostí.

Podívejme se ale na variantu, která nám opravdu dá spodní odhad minimální energie pro rozbití křehké planety, která je celá v pevném skupenství. Naše úvahy budou směřovat na porušení jednotlivých vazeb v krystalické mřížce. Vazebné energie dvou sousedních atomů v krystalu jsou typicky řádu elektronvoltů.³⁵ U iontových vazeb jde např. o 5 eV. Pokud by byla látka držena pouze Van der

³⁴https://fykos.cz/_media/rocnik33/ulohy/pdf/uloha33_1_p.pdf

³⁵<http://www.ped.muni.cz/wphy/fyzv1a/>

Waalsovými silami, pak bychom byli o dva řády níže. U kovové vazby může jít o 0,7 eV na atom. Předpokládejme, že typická „síla“ vazby, resp. vazebná energie, bude $E_1 = 1 \text{ eV}$. Typická vzdálenost sousedních atomů je v pevných látkách v řádu jednotek angstromů, tedy desetin nanometru. Vezměme tedy řádově $d = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$. Pokud bychom chtěli přetnout planetu v hlavní rovině (rovinou procházející středem), pak potřebujeme energii

$$E = N E_1 \doteq \frac{S}{d^2} E_1 = \frac{\pi R^2}{d^2} E_1 \doteq 2 \cdot 10^{15} \text{ J} = 2 \text{ PJ}.$$

Energie na tento způsob rozbití planety by byla v řádu petajoulů. Odhad je podhodnocený tím, že jsme chtěli planetu rozbit na více částí³⁶ Přes všechny uvedené nepřesnosti bychom mohli říci, že jde o spodní odhad zcela minimální energie potřebné k rozlámání planety na pár dílů. Pojďme se podívat na to, co to znamená pro velikost a rychlost dopadajícího tělesa. Pokud bychom se omezili na „nízké“ rychlosti, které může těleso nabýt ve Sluneční soustavě přirozeně (například $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$), pak by hmotnost dopadajícího tělesa měla být přibližně deset tisíc tun. To odpovídá tělesům o průměru asi 20 m. Znovu připomeňme, že odhad je ale jen minimální energie na přerušování vazeb! Těleso, které způsobilo vyhnutí dinosaurů, ale přitom Zemi nezlikvidovalo, bylo velké asi 10 km, tedy o 3 řády rozměrnější. Navíc by zde nastal problém v atmosféře, která by dopad zbrzdila a energie dopadajícího tělesa by se „neúčelně“ přeměnila do vnitřní energie atmosféry a nevyužila by se na „lámání planety“. Také negativní roli hraje nenulový objem dopadajícího tělesa, kde po dopadu půjde energie do většího objemu planety a ne pouze do námi požadované jedné praskliny, či několika málo prasklin. Trochu bychom se mohli požadovanému výsledku přiblížit tím, že bychom „házeli“ enormně velkou „žiletku“ na planetu bez atmosféry. Ale i tak bychom potřebovali reálně o několik řádů vyšší energii. Prostě, jako obvykle u úloh se sci-fi zadáním, může řešením opět být sci-fi postup, pokud je dobře okomentovaný.

Poznamenejme, že bychom neměli zapomenout na zákon zachování hybnosti. Ten bude hrát roli u těles se srovnatelnou a vyšší hmotností vzhledem k hmotnosti planety. Celá soustava se totiž bude pohybovat dále a nedojde k předání celé energie. Pokud ale vychází hmotnost tělesa, které na planetu dopadá, řádově nižší, je tento efekt zanedbatelný.

Energie lidského života

Klíčem k řešení této úlohy je odhadnout spotřebu člověka prostřednictvím jídla a pak k tomu přičíst další aktivity, které jsou energeticky náročné. Přičemž druhou část můžeme poskládat z různých částí lidského života a lidských aktivit,

³⁶Možná až paradoxně můžeme ale zmínit, že jsme něco i nadhodnotili. Požadavek rozbití všech vazeb „v plné síle“ je nadnesený, protože u deformačních testů se ukazuje, že díky příměsím a nepravidelnostem v krystalech je možné je rozbit řádově nižšími silami, než bychom odhadovali na základě vypočteného odhadu dokonalé čistého krystalu. Prakticky v takových deformačních zkouškách nemusíme uvažovat posun těžiště dvou částí krystalu vůči sobě, což by se u lámané planety zanedbávat zase nemělo.

nebo pohodlně využít absolutní odhad celosvětové spotřeby energie, který nalezneme například na Wikipedii.³⁷ V tomto odhadu je započtena spotřeba primárních energetických zdrojů – ropa, uhlí, zemní plyn, jaderná a s jistou mírou přesnosti i obnovitelné zdroje. Musíme mít stále na paměti, že i když jde o odhad, který by měl být relativně komplexní, tak jde stále jenom o přibližný odhad. V roce 2017 se zde mluví o celosvětové spotřebě primárních zdrojů ve výši $E_W = 162$ PWh. V tento rok bylo na Zemi zhruba 7 550 milionů obyvatel.³⁸ To dává 20 MWh na osobu a rok. Předpokládaná délka dožití v dnešní době je zhruba 73 let.³⁹ Průměrně, za předpokladu stávající spotřeby⁴⁰ dostáváme, že člověk spotřebuje 1,6 GWh, čili 6 TJ za život v energiích mimo jídlo.⁴¹

Na odhad spotřeby z jídla musíme vyjít z energetické hodnoty, kterou tělu poskytne. Mohli bychom odhadnout jakousi účinnost biochemických procesů. Ale v rámci našeho odhadu se spokojíme s tím, že by šlo o komplikovanou záležitost.⁴² Co se týče denní spotřeby jednotlivce, můžeme zkusit věřit Wiki skriptům,⁴³ která tvrdí, že pro dospělého je doporučený příjem od 10 MJ do 12 MJ. V dětství je to sice menší množství a i ve stáří bude pravděpodobně mírně odlišné. Vezměme proto tedy řádový odhad 10 MJ denní spotřeby energie z jídla pro spotřebu průměrné osoby.⁴⁴ Po 73 letech života docházíme k číslu řádové 0,27 TJ. Podle tohoto odhadu průměrný člověk spotřebuje ve stravě zhruba dvacetinu energie, kterou spotřebovává jinými způsoby. V rámci přesnosti našeho odhadu by se tedy dalo říci, že jde prakticky o zanedbatelnou položku. Byť tuto část spotřeby energie pro celkovou bilanci nakonec zanedbáváme, tak je důležité tento odhad provést. Bez něj bychom nevěděli, že je zanedbání oprávněné.

Alternativní přístup pro odhad lidské spotřeby jídla může vyjít z tepelného výkonu člověka (či bazálního metabolismu). Nejčastěji se tvrdí, že obvykle má člověk tepelný výkon $P \approx 100$ W, jak můžete najít třeba i na webu⁴⁵ Podle tohoto odhadu nám vyjde 0,23 TJ jako celoživotní energetický tepelný výdej. Čistě tepelný výkon člověka není všechna energie, kterou člověk spotřebuje. Nějakou přeměnou i na

³⁷https://en.wikipedia.org/wiki/World_energy_consumption

³⁸<https://www.worldometers.info/world-population/>

³⁹<https://www.worldometers.info/demographics/life-expectancy/>

⁴⁰Energetická spotřeba ovšem v průběhu posledních desítek let rostla. Prodlužovala se i délka dožití jedince. Stoupal i počet lidí žijících na Zemi. Pokud bychom chtěli určit průměrnou hodnotu spotřeby jednoho jedince, tak bychom měli brát spíše průměry za každý rok. Ale pak by bylo také důležité, k jakému roku narození budeme takového jedince vztahovat. Opět vzhledem k tomu, že jde o řádový odhad, tak si dovolíme všechny údaje vztáhnout zhruba na jeden konkrétní rok.

⁴¹Další nedokonalostí je, že běžný obyvatel z rozvojového státu jako je Súdán spotřebuje pravděpodobně řádově méně energie než někdo například z České republiky a ten spotřebuje zase méně než průměrný obyvatel Kataru. Vizte např. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_energy_consumption_per_capita.

⁴²Navíc strávenou potravu vyloučíme a nějací další živočichové ji mohou opět částečně využít. Ve střezech máme bakterie, které žijí z toho, co od nás dostanou. Ale zase nám pomáhají trávit. Vůbec pak není jednoznačná otázka, co je energie přímo pro člověka.

⁴³https://www.wikiskripta.eu/w/Doporučený_příjem_živin

⁴⁴Samozřejmě, že na světě jsou i lidé, co trpí podvýživou, nebo jsou naopak morbidně obézní a sní i řádově více. Ale berme hodnoty, které budou reprezentovat idealizovaného průměrného člověka.

⁴⁵<https://vetrani.tzb-info.cz/vnitřni-prostredi/404-tepelna-pohoda-a-nepohoda>

užitečnou práci, byť půjde spíše o její menší podíl. Oba odhady jsou tedy ve velice dobrém souladu.

K odhadu spotřeby v životě šlo také zkusit odhadnout všechno možné, co dělá, např. průměrný střeoevropan. Je toho ovšem hodně a je tu riziko zanedbání velkého množství energie. Měli bychom uvážit všechny energie, které spotřebujeme v domácnosti. Nesmíme zapomenout ani na práci (a školu) či další veřejné prostory. Dále jde i o energii, kterou spotřebují továrny při výrobě předmětů, které denně využíváme. Velké množství energie spotřebujeme různými transportními prostředky, pokud tedy zrovna nejsme v karanténě.

Náš nejlepší odhad tedy je, že dle dnešní situace průměrný člověk spotřebuje za svůj život přibližně 6 TJ energie. Přičemž raději nebudeme ani uvažovat nad směrodatnou odchylkou, která by určitě vyšla enormní.⁴⁶ Otázkou také je, jestli do toho nezakomponovat nějak i stravu zvířat, kterou nakonec zkonzumuje člověk. Ale pak by se musela zase z energetického příjmu vyjmout část s masitou stravou, abychom ji nezapočítali dvakrát. Dalších detailů, kterými bychom mohli náš odhad zlepšovat, je mnoho, ale bylo by to hodně práce s pravděpodobně malou přidanou hodnotou v určení přesnosti odhadu.

Laserové vzplanutí

Pro jednoduchý odhad jde o kombinaci odhadu hmotnosti části sirky, která se zahřívá, a její měrné tepelné kapacity, čímž odhadneme potřebnou minimální energii pro vzplanutí. Na základě toho, za jakou dobu můžeme laserem dodat dostatečnou energii, lze usoudit, jestli je tento odhad realistický kvůli disipaci energie. Pokud nám totiž například vyjde 10 h, pak pravděpodobně sirku ani znatelně nezahříváme a nezapálíme ji ani do Vánoc. A to ať začneme v libovolnou roční dobu. Pokud nám vyjde 1 μ s, pak je naopak značně pravděpodobné, že sirku zapálíme, byť to ve skutečnosti může trvat časově o řád déle. Působí to sice jako trochu začarovaný kruh, ale tím fixováním výkonu laseru na počátku postupu se tento způsob řešení stává použitelný.

Pro kompletní řešení bychom museli totiž uvážit kromě výkonu laseru i jeho spektrální složení a absorpční spektrum hlavičky sirky. Dále bychom za zjednodušeného předpokladu konstantního paprsku laseru začali řešit, jak bude absorbovat teplo. Část záření by se rovnou od hlavičky odrazela. Část by se začala rozptylovat třemi způsoby šíření tepla – vedením, zářením a prouděním. Pro správný popis vedení tepla bychom měli znát tepelně vodivostní charakteristiky hlavičky i dřeva sirky. Dále bychom pro popis záření měli znát emisní spektrum povrchu sirky (pokud není stejné jako absorpční). Proudění bychom snad mohli zanedbat, ale v nejbližším okolí sirky by mohlo hrát také roli. Výsledný čas bychom určili jako

⁴⁶Poznamenejme, že v rámci takovýchto přesností nedává smysl rozlišovat rozdíly například mezi muži a ženami. I když je zde samozřejmě hodně faktorů, co se nějakým způsobem liší – ženy žijí déle, mužů se rodí obvykle o něco více, muži častěji žijí „agresivnější“ či „riskantní“ způsobem. Navíc by rozpočítání průmyslu mezi ženy a muže bylo dost složité a záviselo by na interpretaci toho, „za co kdo může“. Mělo by se to také počítat podle věku, protože se s věkem spotřeba jedince liší. Také by se pro přesnější číslo mělo uvažovat, jak se spotřeba lidstva mění rok od roku.

interval od počátku svícení laserem do chvíle, kdy rozumně velká část hlavičky dosáhne teploty vznícení.

Zkusme tedy odhadnout, jaký je minimální čas potřebný pro zapálení pro výkon laseru, u kterého víme, že může sirku zapálit. Na internetu naleznete spoustu videí,⁴⁷ která ukazují, jak lasery něco zapalují. Předně bychom chtěli zdůraznit, že v případě, že byste chtěli podobný experiment zopakovat, sežeňte si nejdříve ochranné brýle, které absorbují danou vlnovou délku. Přímý zásah z podobně výkonného laseru snadno způsobí okamžité oslepnutí. Dále nesvítejte na žádný povrch, od kterého by se mohl paprsek efektivně odrazet do okolí, protože i odraz může být podobně nebezpečný. Ve videu vidíme laser s výkonem $P = 1,0 \text{ W}$. Pokud předpokládáme, že hlavička sirky zachytí všechnu energii, pak platí pro předané teplo $Q = Pt$, kde t je čas.

Otázkou je samotná teplota vznícení sirky (či zápalky). Současné „bezpečnostní zápalky“ se vyrábějí tak, že v hlavičce sirky je chlorečnan draselný a v škrátku je fosfor.⁴⁸ Když škrtneme, tak se malé množství fosforu dostane mezi chlorečnan draselný a tím se vytvoří Armstrongova směs,⁴⁹ která se snadno zapálí díky tření. Ovšem nás zajímají zápalné vlastnosti sirky bez škrátání. Podle publikace *Požárně technické charakteristiky a technické informace pro potřeby ZPP*⁵⁰ je teplota vznícení bezpečnostní zápalky vyšší než $175 \text{ }^\circ\text{C}$, resp. $180 \text{ }^\circ\text{C}$ až $200 \text{ }^\circ\text{C}$. Berme tedy teplotu vznícení zhruba $190 \text{ }^\circ\text{C}$, respektive zhruba $\Delta T = 170 \text{ K}$ vyšší než je běžná pokojová teplota.

Pro další výpočty si zjednodušíme sirku na model její hlavičky. Budeme ji považovat za kouli o poloměru $r = 1 \text{ mm}$. Jde o mírně podhodnocenou hodnotu reálného objemu, ale není potřeba prohrát laserem celou hlavičku. Předpokládáme tedy, že odhad bude lepší, když vezmeme spíše o něco menší hodnotu. Protože je hlavička složena zejména ze směsi, jejíž hlavní složkou je chlorečnan draselný, a dřeva pod ní, podívejme se na tepelné kapacity a hustoty těchto látek. Pro chlorečnan můžeme najít⁵¹ hodnotu $820 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (po převodu z $\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) a hustotu $2320 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pokud bychom si zavedli objemovou tepelnou kapacitu, pak by měla hodnotu $c_{v1} \doteq 1,9 \text{ MJ}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$. Pro dřevo nalézáme⁵² hodnoty od $1380 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ po $2510 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a pro hustoty od $200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ do $1200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Pro kombinace zde uvedených různých dřevních hmot nám vychází hodnota od $0,3 \text{ MJ}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$ po $1,9 \text{ MJ}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$. Přestože je hodnota u použitého dřeva pravděpodobně nižší, vezměme hodnotu $c_V = 1,9 \text{ MJ}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$, která odpovídá horní hranici a současně kapacitě chlorečnanu. Zapalujeme totiž spíše povrch sirky a v minulém odhadu jsme vzali menší hodnotu. Tepelnou kapacitu modelu hlavičky odhadujeme jako

$$C = Vc_V = \frac{4}{3}\pi r^3 c_V \doteq 7,9 \text{ mJ}\cdot\text{K}^{-1}.$$

⁴⁷Příkladem může být <https://youtu.be/-ZL69FhIJp4>

⁴⁸<https://en.wikipedia.org/wiki/Match>

⁴⁹https://cs.wikipedia.org/wiki/Armstrongova_směs

⁵⁰<https://www.hzscr.cz/soubor/kniha-zpp-ptch-pdf>

⁵¹https://en.wikipedia.org/wiki/Potassium_chlorate

⁵²https://stavba.tzb-info.cz/docu/tabulky/0000/000086_katalog.html

Za jakou dobu se hlavička modelu sirky zahřeje o ΔT ?

$$Q = Pt = C\Delta T \quad \Rightarrow \quad t = \frac{C\Delta T}{P} \doteq 1,3 \text{ s.}$$

Při použití 1 W laseru nám vyšla hodnota řádově v době sekund. To odpovídá citovanému videu relativně dobře.

Můžeme se ještě zaměřit na odhad výkonu laseru, pro který se nám skoro jistě nepodaří sirku zapálit. Vyjdeme z toho, že pokud by se stihlo vyzařovat povrchem modelu hlavičky sirky tepelné záření a byla by na teplotě $T = 190^\circ\text{C}$, resp. zhruba 460 K, pak ještě nedojde k zapálení. Využijeme Stefanův-Boltzmannův zákon. Uvažujeme, že povrch modelu je ideálně černé těleso.

$$P = \sigma T^4 S = \sigma T^4 4\pi r^2 \doteq 32 \text{ mW,}$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a $S = 4\pi r^2$ je povrch modelu. Je to opravdu hodně hrubý odhad a to pouze na základě tepelných ztrát zářením a za předpokladu okamžité rovnoměrné distribuce tepla v hlavičce sirky. Ale dává nám alespoň určitou představu, že u laseru s výkonem v řádu desítek miliwattů bychom spíše neměli čekat, že by se nám sirku podařilo zapálit za libovolně dlouhou dobu. U řádově slabších laserů si pak už můžeme být jistí. Laserová ukazovátka, která se používají běžně při prezentacích, mívají obvykle výkon právě v řádu miliwattů až desítek miliwattů a podle obecných zkušeností s nimi bez nějakých speciálních úprav nic zapálit nedokážeme. To dobře odpovídá právě získanému výsledku.

Bonus: čas odeslání

Předně bychom měli zmínit, že cítíme určitý rozdíl mezi „časem odeslání“ a „dobou odeslání“. Předně jde o něco, co proběhlo jednorázově v jednu chvíli a není důležitá doba, po kterou to probíhalo. Druhé spojení naopak evokuje, že jde o děj, který probíhal nějakou dobu. Spojení čas odeslání bylo tedy zvoleno zcela úmyslně s tím, že to nebude spleteno. Ale velká část účastníků, která svá řešení zaslala, řešila to, jak dlouho trvá datům, než k nám dojdou. Přitom by mělo být indicií i to, že nás zajímá čas serveru. To mělo upozornit na to, že lidé mohou mít různé časy na svých počítačích, ale rozhodující je čas nahrání na server. Také jsme tím chtěli eliminovat problém časových pásem. Chtěli jsme uvažovat, že doba nahrávání a přenosu je zanedbatelná, takže bylo zvoleno slovo „odeslání“, protože řešitel zpravidla řešení odesílá/odevzdává, byť server je přijímá. Možná jsme mohli dopsat, že jde o účastnická řešení, ale to mělo být jasné z kontextu. I kdybychom uznávali zvolenou interpretaci zadání, tak nikdo pořádně nepopsal celou „datovou cestu“ řešení. Další část řešitelů napsala jenom hodinu, ale už ne datum, takže se jim tip nemohl započítat.

Teď již tedy k samotné odpovědi a zamýšlené pointě. Chtěli jsme ukázat, jak moc nechávají řešitelé odeslání na poslední chvíli. To se z větší části potvrdilo. Přes upload přišlo 37 řešení. Jedno 11. 4. 2020, další 19. 4., další 26. 4., pak tři 27. 4. a zbytek až poslední den. V poslední půlhodině došlo 9 řešení, z toho 6 v posledních 10 minutách. Průměrná hodnota příchozích řešení je 27. 4. 2020 v 23:59

(s výběrovou směrodatnou odchylkou 3 dny, 5 hodin). Nejblíže byl Vojtěch Kuchař s odhadem 28. 4. 2020 7:54. Ještě podobně blízko byli Samuel Krempaský a Tomáš Tuleja s 27. 4. v π hodin odpoledne. Tito tři dostali bod za dobrý tip. Alespoň části bodů dostali ti, kteří tip nějak podrobněji zdůvodnili. Průměrný tip řešitelů úlohy byl 27. 4. 2020 v 13:27.

Pokud bychom měli doporučit nějakou strategii, pak asi nejlepší odhad za minimálních znalostí chování ostatních je napsat čas, ve který to člověk sám plánuje odeslat. Tuto strategii zvolili zřejmě Robert Gemrot a Marco Souza de Jooode, kteří zvolili čas odlišný o méně jak 10 minut od času jejich odeslání. Zajímavostí je, že všichni, kromě Roberta, předpokládali, že budou ostatní řešitelé zodpovědnější⁵³ než oni sami a zvolili průměrný čas dřívější, než bylo jejich odeslání. Na druhou stranu víme, že půjde o asymetrické rozdělení. Jak se i v praxi ukázalo, tak jeden řešitel, který úlohu odešle ve větším předstihu, může značně posunout celkový průměr. Tipovat tedy čas o něco dříve, pokud jste mezi těmi, co posílají úlohy poslední den, je také docela dobrá strategie.

Bonus II: zpětná vazba

Děkujeme za zpětnou vazbu. Nejkonstruktivnějším byl Robert Gemrot a proto získal více bodů.

⁵³Za předpokladu, že zde zodpovědnost znamená, s jakým předstihem úlohu odešlou. Samozřejmě, že všichni ti, kteří úlohu vůbec odeslali, by se jinak měli brát jako zodpovědnější než ti, co ji neodeslali vůbec. Alespoň v této metrice.



Podzimní soustředění v Jedlové

Ve dnech 21.–29. 9. 2019 proběhlo tradiční podzimní soustředění, které se konalo v obci Jedlová v Lužických horách. Soustředění se zúčastnilo 39 středoškoláků, kterým stačilo vypočítat první sérii v předtermínu nebo se dostali za své výsledky v minulém ročníku FYKOSu. Soustředění bylo opět plné zajímavých přednášek a her.

Organizátoři

Markéta Calábková, Daniela Pittnerová, Daniel Dupkala, Karel Kolář, Mikuláš Matoušek, Jáchym Bártík, Matěj Mezera, Filip Ayazi, Jozef Lipták, Jan Střeleček, Vít Beran, Katarína Častulíková, Jiří Vala, Lukáš Timko, Martin Vaněk, Jindřich Jelínek, Ivan Hudák, Erik Hendrych, Šimon Pajger, Jakub Šafin, Kateřina Rosická, Miroslav Hanzelka (návštěva), Kristína Nešporová (návštěva).



Obr. 26: Mimoni se školili jak v technice...

Účastníci

Viktor Materna, Robert Gemrot, Lubor Čech, Marco Souza de Joode, Martina Daňková, Jaroslav Scheinflug, Jiří Kohl, Adam Krška, David Kománek, Aleš Opl, Patrik Kašpárek, Radka Křížová, Jiří Zelenka, Jan Benda, Soňa Husáková, Jakub

Kliment, Vojtěch Stránský, Jaroslav Herman, Adam Húšťava, Vojtěch Votruba, Barbora Čemanová, Eliška Durstová, Tomáš Tuleja, Elena Chochořáková, Benedikt Bareš, Adam Mendl, Jakub Strnad, Veronika Hendrychová, Hynek Jakeš, Jan Červeňan, Laura Hanousková, Dominik Farhan, Matěj Charousek, Martin Kysela, Karolína Letochová, Tomáš Patsch, Jan Piroutek, Ondřej Piroutek, Martin Vavřík.

Legenda

Skupina 39 odhodlaných mimoňů se snažila najít svého pána zla, kterému by mohli sloužit. V modrých kalhotkách a pracovních brýlích se vydali na cestu za banány. . . ehm, novým pánem zla, kterého poměrně rychle našli. Bohužel, jak to už bývá, není problém si pána najít, ale udržet si ho. . .



Obr. 27: . . . tak v diplomacii.

Jarní soustředění (neproběhlo)

V souvislosti s opatřeními vlády proti šíření koronaviru jarní soustředění neproběhlo. Těšíme se, že se s účastníky potkáme na dalších akcích po uvolnění opatření.

Fyziklání 2020

Letošní, v pořadí již 14. ročník soutěže Fyziklání opět svou rozsáhlostí překonal ročník předešlý. V pátek 14. února se v prostorách Pražského TOP Hotelu sešlo neuvěřitelných 974 soutěžících a 70 organizátorů, kteří zajistili hladký průběh soutěže. Z celkových 201 týmů přijeli dva týmy z již pravidelně se účastnícího Španělska, jeden ze Srbska a nově i tři týmy z Polska a tři týmy až z Ruska.



Obr. 28: Na začátku byl o odevzdávání velký zájem,...

Příčku absolutního vítěze obsadil tým *Teorie všeho se jede rozloučit*, v kategorii B pak zazářil tým ze sousedního Slovenska s názvem *Gamčácké vektory* a v kategorii C se na prvním místě umístil opět tým z Bratislavy - *Gamča 3*.



Obr. 29: ... protože celkově bylo hodně účastníků,...

I tento rok na účastníky po soutěži čekal společenský večírek s rautem, jenž se tentokrát konal v Rezidenci primátora Hlavního města Prahy. Na druhý den

byla připravena série přednášek v prostorách fakulty, po obědě se účastníci mohli spolu s průvodcem projít Prahou nebo navštívit některou z expozic Národního technického muzea. Dále na program volně navazovala návštěva Planetária Praha či Štefánikovy hvězdárny. Program po Fyziklání byl zakončen nedělními exkurzemi po fyzikálních laboratořích MFF UK.



Obr. 30: ... ale orgové byli připraveni.

Soutěže Fyziklání se účastní družstva s nejvýše pěti členy. Na začátku soutěže dostane každé družstvo sedm příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo přičte počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů vyzvedne nový příklad. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny a jejím cílem je samozřejmě získat co největší počet bodů. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.

Výsledky

Kategorie A

- | | |
|-----------------------------------|--------|
| 1. Teorie všeho se jede rozloučit | 149 b. |
| 2. GChDáci | 132 b. |
| 3. Harmonic Approxilator | 130 b. |

Kategorie B

- | | |
|---------------------|--------|
| 1. Gamčácke vektory | 109 b. |
| 2. Black Quartz | 104 b. |
| 3. GJH B | 101 b. |

Kategorie C

- | | |
|-----------------------|-------|
| 1. Gamča3 | 10 b. |
| 2. $e=\pi=\sqrt{g}=3$ | 94 b. |
| 3. TMA | 92 b. |

Fyziklání online

Letos proběhl již devátý ročník internetové soutěže Fyziklání online. Konal se ve středu 27. 11. 2019. Do soutěže se aktivně zapojilo celkem 390 týmů sestávajících z 1779 účastníků ze 39 různých zemí. Tím se překonal loňský rekord v počtu zúčastněných o více než 30 %.

Celkovým vítězem se stal americký tým *Temple of Next* z MIT se ziskem 249 bodů. Těsně za ním se v kategorii open umístil vietnamsko hongkongský tým *Catchers in the E&M field* s 248 body. Tetí pozici obsadil slovenský tým *FtáKopySk* s 241 body. Ziskem 184 bodů se tým *Harmonic Approxilator* ze slovenska dostal na první místo v kategorii A. Z týmů kategorie B na první příčku dosáhl český tým *Asymptotische Freiheit*, který získal 163 bodů. Vítězem kategorie C se stal tým *stevenson_* z USA se 121 body. Mezi českými a slovenskými týmy v kategorii C vyhrál český tým *TMA* se 109 body.

Nejlepší české i zahraniční týmy byli oceněni věcnými cenami podle svého věru.

Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel sedm úloh s jednoznačným číselným výsledkem. Po zadání správného výsledku do našeho webového systému získal tým zadání následující úlohy. Soutěž trvala 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení každé úlohy bylo hodnoceno bonusovými body. Jelikož se soutěž konala online, byly všechny pomůcky povoleny. Zakázána však byla komunikace s lidmi mimo soutěžní tým.

Obr. 31: Slovenský tým *Szimere Bindis* během soutěže.

Výsledky

Středoškoláci A

- | | |
|--------------------------|--------|
| 1. Harmonic Approxilator | 184 b. |
| 2. SCI-TECH | 176 b. |
| 3. adlai ewing stevenson | 174 b. |

Středoškoláci B

- | | |
|---------------------------|--------|
| 1. Asymptotische Freiheit | 163 b. |
| 2. Desertron | 152 b. |
| 3. WWP South | 143 b. |

Středoškoláci C

- | | |
|--|--------|
| 1. stevenson_ | 121 b. |
| 2. (fine structure constant) ⁽⁻¹⁾ | 118 b. |
| 3. TMA | 109 b. |

Středoškoláci A - CZ/SK

- | | |
|--------------------------|--------|
| 1. Harmonic Approxilator | 184 b. |
| 2. Maružčyni bobánci | 148 b. |
| 3. Teorie všeho | 132 b. |

Středoškoláci B - CZ/SK

- | | |
|-----------------------------------|--------|
| 1. Asymptotische Freiheit | 163 b. |
| 2. Matici čo idú vyhrať Fyzikláni | 127 b. |
| 3. Tým Jirky Močkoře | 114 b. |

Středoškoláci C - CZ/SK

- | | |
|----------------------------|--------|
| 1. TMA | 109 b. |
| 2. TvojeMáma | 90 b. |
| 3. Snáď inteligentní ľudia | 82 b. |

Open

- | | |
|------------------------------|--------|
| 1. Temple of Next | 249 b. |
| 2. Catchers in the E&M field | 248 b. |
| 3. FtáKopySk | 241 b. |
| 4. NOFY066 | 214 b. |
| 5. Five Ugly Faces | 204 b. |



Obr. 32: Český tým K-c.

Ve výsledkové listině jsou uvedeny pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je k nalezení na webových stránkách soutěže <https://online.fyziklani.cz/cs/default/last-years>.



Obr. 33: Slovenský tým 5členná 3lógia Douglasa Adamsa.

Fyzikální Náboj

Letošní ročník Fyzikálního Náboje se uskutečnil 8. listopadu 2019 a byl organizován slovenským FKS a FYKOSem. Princip soutěže je podobný Fyziklání – 5členné týmy během 2 hodin řeší fyzikální úlohy a snaží se získat co nejvíce bodů za správná řešení. Oproti Fyziklání se liší soutěžním časem (2 hodiny proti 3), bodováním (za správnou odpověď je vždy 1 bod) a místem – Náboj probíhá v několika evropských městech současně. Letos to bylo v Praze (Gymnázium Christiana Dopplera a nově i FJFI ČVUT), Ostravě (Gymnázium Ostrava-Zábřeh), Bratislavě, Košicích, Budapešti, Gdaňsku, Řešově (letos poprvé) a Moskvě.

V České republice soutěžilo celkem 83 týmů (z toho 41 v kategorii Junioři a 42 v kat. Senioři), což je o 20 více než loni.

Vítězné týmy, kat. Senioři, ČR

1. (4.) Gymnázium, třída Kapitána Jaroše 14, Brno, B
2. (5.) Gymnázium, Nad Alejí 1952, Praha 6
3. (7.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5 – Smíchov

Vítězné týmy, kat. Junioři, ČR

1. (2.) Gymnázium, Pulická 779, Dobruška
2. (3.) Gymnázium Jana Keplera, Parlérova 2, Praha 6
3. (4.) Slovanské gymnázium, tř. Jiřího z Poděbrad 13, Olomouc

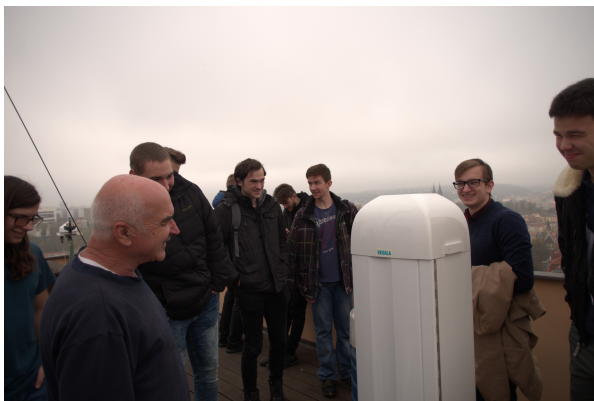
V závorkách je uvedeno pořadí v rámci mezinárodního žebříčku. Kompletní výsledkovou listinu najdete na webu soutěže (<https://physics.naboj.org>).

Den s experimentální fyzikou

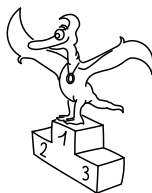
DSEF 2019 se konal v pondělí 11. 11. 2018 na MFF UK na Karlově jako součást IAPS School Day na téma „Elements and materials“. Celkem 64 středoškoláků se zúčastnilo dopoledních exkurzí na Matfyzu, kde si prohlédli meteorologickou stanici Karlov, generaci plazmatu pomocí femtosekundového laseru nebo transmisní elektronový mikroskop. Odpoledne navštívili laboratoř vysokých napětí v Praze Dejvicích (ČVUT), tokamak COMPASS, laser PALS a laboratoř terahertzové spektroskopie (AV ČR, v. v. i.).



Obr. 34: Transmisní elektronový mikroskop



Obr. 35: Tradiční exkurze na meteorologickou stanici Karlov.



Pořadí řešitelů

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 396
1. <i>Tomáš Patsch</i>	Slovanské G, Olomouc	237
2. <i>Pavel Provozník</i>	G Dašická, Pardubice	202
3. <i>Martin Kysela</i>	G, Český Krumlov	161
4. <i>David Bálek</i>	G Legionářů, Příbram	145
5. <i>Jakub Hadač</i>	G V. Hlavatého, Louny	140
6. <i>Jonáš Dej</i>	Wichterlovo G, Ostrava	124
7. <i>David Mendl</i>	G P. de Conbertina	112
8. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	108
9. <i>Martin Švanda</i>	Arcibiskupské G, Praha	98
10. <i>Jan Cícha</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	74
11. <i>Sandeep Kandi</i>	IMSA, Aurora, USA	72
12. <i>Juraj Pavolko</i>	G, P. Horova, Michalovce	71
13. <i>Domínik Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	69
14. <i>Otomar Miskolczi</i>	G J. Heyrovského, Praha	40
15. <i>Dalibor Očenášek</i>	G Uničov	38
16. <i>Michaela Jarošová</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	25
17.–18. <i>Kristýna Jenčíková</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	24
17.–18. <i>Ladislav Vávra</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	24
19. <i>Michael Křivan</i>	G V. Hlavatého, Louny	23
20.–22. <i>Andrej Bružeňák</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	18
20.–22. <i>Vojtěch Pluskal</i>	G, Olomouc-Hejčín	18
20.–22. <i>Matúš Púll</i>	G Christiana Dopplera, Praha	18
23. <i>Anna Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	17
24.–25. <i>Tadeáš Ďurčanský</i>	G, Nymburk	15
24.–25. <i>Daniél Franc</i>	G, Roudnice nad Labem	15
26.–28. <i>Adam J. Jerhot</i>	ZŠ Weberova, Praha 5 - Košíře	12
26.–28. <i>Julie Křimská</i>	G Jana Keplera, Praha	12
26.–28. <i>Matej Repa</i>	G Grösslingová, Bratislava	12
29. <i>Patrik Jendele</i>	SPŠ stavební Plzeň	10
30. <i>Aleš Chaloupka</i>	G J. Blahoslava, Ivančice	6
31. <i>Michaela Jarošová</i>	G Nad Kavalírkou, Praha	3
32. <i>Anna Hájzová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 396
1. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	323
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	267
3. <i>Jáchym Mraček</i>	Akademické G, Praha	216
4. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	214
5. <i>Adam Kozubek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	210
6. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	206
7. <i>Vojtěch Smola</i>	G Komenského, Havířov	194
8. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	187
9. <i>Marie Lausová</i>	G, Jihlava	175
10. <i>Jan Pijáček</i>	Biskupské G, Brno	172
11. <i>Jan Marjanko</i>	G J. Jungmanna, Litoměřice	171
12. <i>Jakub Pelc</i>	G, Benešov	157
13. <i>Ondřej Piroutek</i>	G, Českolipská, Praha	147
14. <i>Václav Maštera</i>	G P. de Coubertina, Tábor	144
15.–16. <i>Marek Brodský</i>	G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady	121
15.–16. <i>Martin Fedorko</i>	G J. A. Raymana, Prešov	121
17. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	108
18. <i>Adam Hústava</i>	European School Luxembourg II	101
19.–21. <i>Antonín Kubík</i>	G, Roudnice nad Labem	96
19.–21. <i>Aleš Manuel Papáček</i>	G, Třeboň	96
19.–21. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	96
22.–23. <i>Luboš Bariak</i>	G Tajovského, B. Bystrica	85
22.–23. <i>Ondřej Grohmann</i>	G, Olomouc-Hejčín	85
24. <i>Monika Janderová</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	82
25. <i>Tomáš Heger</i>	Jiráskovo G, Náchod	79
26. <i>Paulína Dujavová</i>	G J. A. Raymana, Prešov	68
27. <i>Wiktor Macura</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	67
28. <i>Jakub Jedlička</i>	G Christiana Dopplera, Praha	57
29. <i>Anežka Karamonová</i>	G B. Hrabala	55
30. <i>Jakub Mikeš</i>	G J. Škody, Přerov	49
31. <i>Marie Poláková</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	47
32. <i>Jakub Dubský</i>	G, Ostrov	43
33. <i>Jan Hlavsa</i>	G J. Palacha, Mělník	39
34. <i>Daniel Myšák</i>	Mendelovo G, Opava	37
35. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	36
36. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	31
37. <i>Oto Ulrich</i>	G, Uherské Hradiště	28
38. <i>Jakub Ferenčík</i>	G Dašická, Pardubice	27
39. <i>Tomáš Pecl</i>	VOŠ a SPŠ elektrotech., Plzeň	26
40. <i>Karolína Zemene</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	25
41. <i>Tomáš Zatloukal</i>	G, Boskovice	20
42.–43. <i>Filip Brutovský</i>	G Alejová, Košice	15
42.–43. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	15
44.–45. <i>Barbora Cabalková</i>	G, Žamberk	14
44.–45. <i>Matěj Prokopič</i>	G Jana Keplera, Praha	14
46.–47. <i>Jakub EL Mouhib</i>	Gymnázium Milady Horákové Praha	12
46.–47. <i>Petr Šicho</i>	G Jana Keplera, Praha	12
48. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	8
49. <i>Lukáš Šrol</i>	G Hubeného, Bratislava	6
50. <i>Eliška Štégllová</i>	G T. G. Masaryka, Litvínov	3

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	318
2. <i>Vojtěch Kuchař</i>	Wichterlovo G, Ostrava	271
3. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	224
4. <i>Jakub Kliment</i>	G Tajovského, B. Bystrica	212
5. <i>Marek Milička</i>	G dr. K. Polesného., Znojmo	196
6. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	179
7.–8. <i>Elena Chocholaková</i>	G L. Svobodu, Humenné	160
7.–8. <i>Martin Opat</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	160
9. <i>Jozef Csipes</i>	G Grösslingová, Bratislava	156
10. <i>Martina Daňková</i>	Gymnázium Brno-Bystrc	146
11. <i>Domínik Farhan</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	130
12. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	128
13. <i>Mona Alizadeh</i>	St Paul's GS	119
14. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	118
15. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	96
16. <i>Josef Trojan</i>	G Botičská, Praha	95
17. <i>Karolína Letochová</i>	G, Šternberk	92
18. <i>Onďrej Sladký</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	90
19. <i>Aneta Pjatkanová</i>	G, Kralupy	76
20. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	75
21. <i>Jan Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	68
22. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	53
23. <i>Alexandra Mészárošová</i>	G Andreja Vrábla, Levice	48
24. <i>Zsolt Beke</i>	G H. Selyeho Komárno	44
25. <i>Dávid Benko</i>	G L. Svobodu, Humenné	42
26. <i>Riley Lofgren</i>	Lambert High School, USA	41
27. <i>Anna Marie Ortová</i>	G Jana Nerudy, Praha	39
28. <i>Matej Michalko</i>	G Andreja Vrábla, Levice	34
29. <i>Zuzana Horváthová</i>	G Andreja Vrábla, Levice	33
30. <i>Adrián Šegeda</i>	G Grösslingová, Bratislava	27
31.–33. <i>Matyáš Háze</i>	Jiráskovo G, Náchod	24
31.–33. <i>Maroš Mešter</i>	G Poštová, Košice	24
31.–33. <i>Petr Skupien</i>	Mendelovo G, Opava	24
34.–35. <i>Marek Broul</i>	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	22
34.–35. <i>Martin Bucko</i>	G Grösslingová, Bratislava	22
36.–37. <i>Viktor Fukala</i>	G Jana Keplera, Praha	21
36.–37. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	21
38. <i>Onďrej Chlubna</i>	G Orlová	20
39. <i>Jaroslav Grulich</i>	Jiráskovo G, Náchod	19
40. <i>Michal Žáček</i>	G, Lovosice	18
41. <i>Marek Čermák</i>	Jiráskovo G, Náchod	17
42.–43. <i>Daniel Fousek</i>	G, Špitálská, Praha	16
42.–43. <i>Jaroslava Ježková</i>	Jiráskovo G, Náchod	16
44.–46. <i>Livia Čerešňová</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	14
44.–46. <i>Tomáš Jánský</i>	G V. Hlavatého, Louny	14
44.–46. <i>Petr Šolc</i>	Jiráskovo G, Náchod	14
47.–48. <i>Daniel Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	13
47.–48. <i>Daniel Theis</i>	G, Cheb	13
49. <i>Antonia Hekster</i>	Jakarta Intercultural	12
50.–51. <i>Martin Felkl</i>	Jiráskovo G, Náchod	11

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	360
50.–51. Ondřej Hejna	Jiráskovo G, Náchod	11
52. Tomáš Foral	G P. de Coubertina, Tábor	10
53.–54. Laura Hanousková	G J. Wolкера, Prostějov	9
53.–54. Václav Sedlák	S/PŠ Jedovnice	9
55.–56. Ondřej Galuščák	G, Nymburk	8
55.–56. Jakub Krátký	S/PŠ Jedovnice	8
57.–59. Brian Chu	AWS, USA	6
57.–59. Daniel Ježek	Jiráskovo G, Náchod	6
57.–59. Martin Uždil	Jiráskovo G, Náchod	6
60. Patrik Kočan	G M. Hattalu, Trstená	4
61. Martin Polyácsko	G Alejová, Košice	3
62. Daniel Kubrt	Jiráskovo G, Náchod	2
63.–64. Duong Phan	Cumberland Valley HS, USA	1
63.–64. Veronika Staňková	Jiráskovo G, Náchod	1

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
1. <i>Jaroslav Herman</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	302
2. <i>Martin Schmied</i>	G, Jihlava	263
3. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	223
4. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	182
5. <i>Mohamed Ahmed Elsayed</i>	STEM High School, Egypt	102
6. <i>Martin Ormoš</i>	G J. A. Raymana, Prešov	86
7. <i>Mostafa Ahmed</i>	STEM High School, Egypt	76
8. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	66
9.–10. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	64
9.–10. <i>Tomasz Twardoch</i>	XIII LO w Szczecinie, Poland	64
11. <i>Veronika Hendrychová</i>	G, Turnov	63
12. <i>Mohamed Ayman</i>	STEM High School, Egypt	59
13. <i>Matěj Holubička</i>	Zemědělská akademie a Gymnázium	56
14. <i>Jan Stoklasa</i>	Mendelovo G, Opava	47
15. <i>Jaroslav Scheinpflug</i>	G Jírovцова, České Budějovice	45
16. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	40
17. <i>Ondřej Tomášik</i>	G J. G. Tajovského	39
18. <i>Adam Grunt</i>	G, Trutnov	38
19. <i>Samuel Krempaský</i>	G L. Svobodu, Humenné	36
20. <i>Peter Ehab</i>	STEM High School, Egypt	34
21. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	33
22. <i>Jan Dívila</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	32
23.–24. <i>David Kománek</i>	G, Špitálská, Praha	29
23.–24. <i>Tereza Němcová</i>	G a SOŠ, Jaroměř	29
25. <i>Jan Piroutek</i>	G, Špitálská, Praha	26
26. <i>Jindřich Maňas</i>	G J. Pivečky, Slavičín	20
27. <i>Mohamed Tarek Abdelmo-hsen Heggi</i>	STEM High School, Egypt	17
28. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	13
29. <i>Štefan Evin</i>	G, Bardejov	12
30. <i>Mostafa Khalil</i>	STEM High School, Egypt	10
31.–33. <i>Hiep Le</i>	HS for Gifted, Vietnam Nat. Uni.	9
31.–33. <i>Šimon Prudil</i>	Jiráskovo G, Náchod	9
31.–33. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	9
34. <i>Kornel Howil</i>	XIII LO w Szczecinie, Poland	6
35.–36. <i>Aleksander Lenart</i>	AGH U of Technology, Poland	3
35.–36. <i>Šimon Prudil</i>	Jiráskovo G, Náchod	3

DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXIII. ročník – 2019/20

Předmluva: Daniela Pittnerová

Náměty úloh:

Karel Kolář (I.2, I.3, I.P, I.S, II.1, II.5, II.P, II.S, III.S, IV.1, IV.2, IV.3, IV.E, IV.S, V.E, V.S, VI.S), Matěj Mezera (I.1, I.4, II.E, III.3, III.4, III.E, IV.4, V.3, VI.P), Jozef Lipták (III.2, V.2, V.5, V.P, VI.3), Jáchym Bártík (III.5, IV.5, VI.4, VI.E), Václav Mikeska (I.5, II.2, V.4), Miroslav Hanzelka (III.P, VI.5), Daniela Pittnerová (II.3, V.1), Katarína Častulíková (IV.P), Jindřich Jelínek (VI.2), Dominika Kalasová (II.4), Šimon Pajger (I.E), Kateřina Rosická (VI.1), Lukáš Timko (III.1),

Řešení úloh:

Karel Kolář (I.2, I.3, I.S, II.1, II.5, II.S, III.S, IV.1, IV.2, IV.S, V.S, VI.S), Jozef Lipták (I.4, II.4, III.2, IV.E, V.2, V.5, VI.1, VI.P), Matěj Mezera (I.1, II.E, III.3, III.4, IV.4, V.3), Jindřich Jelínek (II.5, III.E, IV.3, VI.2, VI.5), Jáchym Bártík (III.5, III.P, IV.5, VI.4), Václav Mikeska (I.5, II.2, V.4), Daniela Pittnerová (II.P, V.1), Tomáš Červeň (IV.P), Jindřich Dušek (I.P), Filip Geib (V.P), Ivan Hudák (V.E), Tereza Labudová (II.3), Šimon Pajger (I.E), Lukáš Timko (III.1), Jiří Vala (VI.E), Martin Vaněk (VI.3),

Tipy a triky v řešení fyzikálních úloh: Karel Kolář

Legenda podzimního soustředění: Markéta Calábková

Legenda jarního soustředění: (nekonalo se)

Sazba: Matěj Rzehulka, Jáchym Bártík, Markéta Calábková

Obrázky a grafy: Matěj Mezera, Karel Kolář

Jazykové korektury: Matěj Coufal, Daniela Pittnerová, Matěj Rzehulka, Jozef Lipták

Odborné korektury: Jozef Lipták, Jáchym Bártík, Matěj Mezera, Šimon Pajger, Róbert Jurčo, Jindřich Jelínek, Daniel Dupkala, Václav Mikeska, Matěj Rzehulka, Jakub Šafin

DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXIII. ročník – 2019/20

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 613. publikaci.

Vytiskl ReproStředisko a nakladatelství MatfyzPress MFF UK

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením.
Nakladatelství neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Vydáno pro interní potřebu MFF UK.
Neprodejná publikace

216 stran, 35 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu X_YL^AT_EX
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2020

ISBN 978-80-7378-419-5