Úloha IV.S ... lagrangeovská

10 bodů; průměr 6,69; řešilo 16 studentů

V závere seriálu ste si určite všimli Lagrangián a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby „spadli z neba“. To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

1. *Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.*
   Návod: Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súranice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu $\vartheta = \pi/2$ a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.
2. *Zostavte Lagrangián pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závere seriálu. Pre tento Lagrangián následne nájdite všetky intergály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú r. Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.*
3. *Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Sírius, ktorých súradnice si nájdite.*
   Pomôcka: Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.

1. V prvej časti máme návod, ako máme postupovať, je teda rozumné sa ho držať. Najskôr si zostavíme lagrangián pre túto úlohu. Keďže sa jedná o centrálne pole, teda pole so stredovou symetriou, využijeme ju a zavedieme zovšeobecnené sférické súradnice. Vyjadrenie kartézskych súradníc potom bude

$$\begin{aligned} x &= r \sin\vartheta \cos\varphi \,, \\ y &= r \sin\vartheta \sin\varphi \,, \\ z &= r\cos\vartheta \,. \end{aligned}$$

Označenie a význam súradníc je ako v seriáli. Následne určíme jednotlivé kartézske zložky rýchlostí postupným časovým derivovaním transformačných vzťahov pre kartézske súradnice. Dosadíme do vzťahu pre kinetickú energiu T, ktorý bude

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta \dot{\varphi}^2\right) \,.$$

Keďže potenciál V závisí len na vzdialenosti, bude funkciou len zovšeobecnenej súradnice r. Lagrangián bude potom vyzerať

$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2\vartheta \dot{\varphi}^2\right) - V(r) \,.$$

Teraz zostavíme sústavu Lagrangeovych rovníc. Keďže lagrangián nezávisí explicitne na φ, zapíšeme poslednú rovnicu rovno v preintegrovanom tvare

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\vartheta}^2 - mr\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} &= 0 \,, \\ 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + mr^2\ddot{\vartheta} - mr^2 \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 &= 0 \,, \\ mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} &= C_1 \,. \end{aligned}$$

Chceme ukázať že pohyb bude rovinný, potrebujeme preto, aby uhlová súradnica ϑ ostala konštantná počas celého deja. V nápovede je povedané, že ju máme na počiatku položiť rovnú vhodnej konštante, rovnako ako aj rýchlosť v tomto smere. Ak zvolíme $\vartheta(0) = \pi/2$ a $\dot{\vartheta}(0) = 0$, z druhej rovnice dostaneme

$$\ddot{\vartheta} = \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} = 0\,.$$

Pretože je $\dot{\vartheta}$ nulová, nebude sa v ďalšom okamžiku ϑ meniť. A pretože je nulové i $\ddot{\vartheta}$, nebude sa meniť ani $\dot{\vartheta}$. Obe veličiny zostanú rovnaké, a preto sa ani ϑ nezmení.
Teraz si poďme v krátkosti odôvodniť, prečo bola vporiadku voľba $\vartheta = \pi/2$ a $\dot{\vartheta} = 0$. Vyplýva to jednoducho z ľubovôle zavedenia kartézskych súradníc. Ak mám danú počiatočnú polohu a rýchlosť našej častice, nič mi nebráni v tom zvoliť kartézske súradnice tak, aby častica aj vektor jej rýchlosti ležali v rovine xy. Počiatok kartézskych súradníc bude teda v strede nášho centrálneho poľa a polohový vektor častice ako aj vektor rýchlosti častice budú ležať v rovine xy, preto bude počiatočná rýchlosť v smere z nula, a teda nulová aj v smere ϑ. Ukázali sme teda, že pohyb bude nutne rovinný.

2. Teraz zostavíme lagrangián už len pre pohyb častice v rovine. Postačí nám použiť polárne súradnice

$$x = r\cos\varphi\,,$$
$$y = r\sin\varphi\,.$$

Lagrangián bude potom pre centrálne pole vyzerať

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)\,.$$

Vidíme, že tento lagrangián nezávisí na súradnici φ. To nám vygeneruje jeden integrál pohybu. Ďalší integrál pohybu bude zovšeobecnená energia. Použitím vzorcov na výpočty týchto integrálov pohybu zo seriálu dostaneme prvý integrál pohybu akúsi „zovšeobecnenú hybnosť“

$$mr^2\dot{\varphi} = \mathrm{konst} = l$$

a druhý integrál pohybu „zovšeobecnenú energiu“

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = E\,.$$

Z prvého integrálu pohybu vyjadríme $\dot{\varphi}$ a dosadíme do druhého, čím dostaneme diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre r

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2}\right)\,,$$

čo je presne rovnica, ktorá bola uvedená v texte seriálu.

3. Tretí príklad bol trochu na zamyslenie a aj keď mnohý z vás jednoducho použili sférickú kosínovú vetu, nezdôraznili sme, že vyžadujeme iný postup (aj keď sme iný postup odporučili), nebudú sa samozrejme za tento postup body strhávať.
   Je potrebné si uvedomiť, že aj keď hviezdy sú od nás v rôznej vzdialenosti, pri určovaní ich uhlových vzdialeností uvažujeme, akoby boli všetky na sfére s polomerom r. Dva body na sfére, ktorých poloha je zadaná v sférických súradniciach nech sú od seba vzdialené na sfére o uhol α. Ak by sme poznali ich kartézske súradnice, tak by sme vedeli ich uhlovú vzdialenosť jednoducho určiť zo skalárneho súčinu ich polohových vektorov

   $$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}| \cos\alpha\,.$$

   My ale vieme spraviť jednoducho prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami. Ak budeme uvažovať body na sfére (hviezdy) vo vzdialenosti r, potom využijúc vyššie uvedených vzťahov na prevod súradníc a dosadením do vzorca pre skalárny súčin dostaneme po vykrátení vzdialenosti r vzťah

   $$\cos\alpha = \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi_2 + \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 \sin\vartheta_2 \sin\varphi_2 + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2\,,$$

   ktorý je vlastne kosínusová veta pre sférický trojuholník. Ak to chceme vypočítať pre hviezdy Betelgeuze a Sírius, musíme si správne premeniť jednotky rektaztenzie a deklinácie napríklad na stupne (pri rektastenzii je 1 hodina 15°, minúta a sekunda sú príslušné zlomky ako štandardne). Ďalej musíme mať na pamäti, že súradnica ϑ tak, ako je definovaná v našej verzii sférických súradníc, sa meria od pólu sféry, kdežto deklinácia sa meria od nebeského rovníka, teda ak má Sírius deklináciu $-16{,}7^\circ$ jeho súradnica je $\vartheta = 106{,}7^\circ$. Po dosadení takto upravených a premenených súradníc do vzťahu odvodeného vyššie vypočítame, že uhol medzi týmito hviezdami je približne $27{,}1^\circ$.

Jakub Jambrich
`jakubj@fykos.cz`