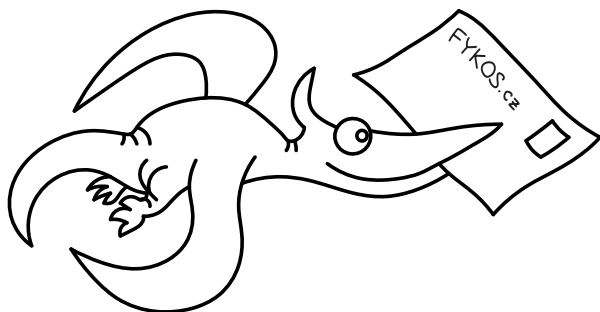


DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV

Fyzikální korespondenční seminář

XXXII. ročník – 2018/19



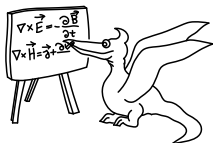
Copyright © Daniela Pittnerová, 2020
Copyright © MatfyzPress, nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy, 2020

ISBN 978-80-7378-405-8



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	14
Zadání experimentálních úloh	87
Řešení experimentálních úloh	89
Seriál o teoretické mechanice	118
Kapitola 1: Úvod, Newtonovská mechanika	118
Kapitola 2: Lagrangeovy rovnice I. druhu	123
Kapitola 3: Lagrangeovy rovnice II. druhu	130
Kapitola 4: Integrály pohybu	138
Kapitola 5: Keplerovy zákony	146
Kapitola 6: Variační počet	152
Řešení úloh ze seriálu	161
Akce FYKOSu	183
Podzimní soustředění v Karlovicích	183
Jarní soustředění v Domašově	184
Fyziklání 2019	186
Fyziklání online	188
Fyzikální Náboj	191
Den s experimentální fyzikou	191
Cyklus přednášek pro středoškoláky	192
Pořadí řešitelů	194



Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v jeho XXXII. ročníku, který probíhal ve školním roce 2018/19.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm brožur, v nichž nalezneme šest sérií po osmi úlohách. Dvě z nich jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna problémová vyžadující hlubší úvahu, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zbýlé tři úlohy se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které studenti znají z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení (poštou nebo přes internet). Opravující pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpobulárnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí bohatý program plný odborných přednášek z oblasti matematiky, fyziky nebo jiných přírodních věd, ale i her či jiných aktivit v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na zajímavá místa. Tento akademický rok se podzimní soustředění konalo v Karlovicích, okres Bruntál, a jarní soustředění v Domašově nad Bystřicí.

Další FYKOSí akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště v Praze a okolí, kde probíhá aktuální fyzikální výzkum.

Nepravidelně organizujeme akci Týden s aplikovanou fyzikou (TSAF). Představuje týden strávený prohlídkami vědeckých center, muzeí a různých firem zaměstnávajících fyziky v České republice i v zahraničí. Letos se, bohužel, TSAF nekonal.

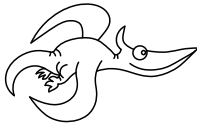
Tradiční FYKOSí Fyziklání, letos s novým jménem Fyziklání 2019, je tříhodinová soutěž až pětičlenných týmů v řešení fyzikálních úloh. Soutěž vyhrává tým s největším bodovým ziskem, přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. V letošním 13. ročníku se účastnilo 145 družstev z ČR a Slovenska, ale také 6 týmů ze Španělska, Srbska, Bosny a Hercegoviny, Spojeného království a Lotyšska. Celkově 724 soutěžících je pro nás skvělým důkazem, že se fyzika a přírodní vědy obecně mezi středoškolskými studenty stále těší popularitě. Fyziklání se stalo akcí zahrnující nejen samotnou soutěž, ale také doprovodný víkendový program.

FYKOSím Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání online (v zahraniční verzi Online Physics Brawl). V listopadu 2018 proběhl její osmý ročník a opět zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla své elektronické formě otevřena všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro které je vytvořena především. Tohoto ročníku se zúčastnilo 249 středoškolských a 48 jiných týmů celkově z 34 zemí. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, která se již řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší akce, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXXII. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítili čtenáře k samostatnému zamýšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je seriál o teoretické mechanice, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem či organizátorem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



FYKOS
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
18000 Praha 8

www: <http://fykos.cz>
 e-mail: fykos@fykos.cz

A jak vypadal XXXII. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 136 studentů ze 104 středních škol z celého světa. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 1 794 došlých řešení a udělili 8 744 bodů.



Zadání teoretických úloh

Úloha I.1 ... balónky

3 body

Kolik balónů s objemem $V = 101$ naplněných heliem s hustotou $\rho_{\text{He}} = 0,179 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je potřeba, aby se Filip s hmotností $m_F = 80 \text{ kg}$ vznášel ve vzduchu s hustotou $\rho_v = 1,205 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$? A kolik by jich bylo potřeba, aby se vznášela Danka s hmotností $m_D = 50 \text{ kg}$? Hmotnost prázdného balónu zanedbejte. (řešení str. 14)

Úloha I.2 ... ohňostrojí

3 body

Jáchym odpaloval ohňostrojí, který si můžeme představit jako světlici, která je v určitý čas vystřelena rychlostí v směrem svisle nahoru, a poté za nějaký čas vybuchne. Jáchym stál ve vzdálenosti x od místa odpalu, když uslyšel zvuk výstřelu. Za čas t_1 uviděl výbuch a za čas t_2 po zpozorování výbuchu ho i uslyšel. Spočítejte rychlost v . (řešení str. 14)

Úloha I.3 ... nestabilní

7 bodů

Mějme osm bodových nábojů (každý o velikosti q) umístěných ve vrcholech krychle. Určete velikost bodového náboje q_0 , který musíme umístit do středu krychle, aby byly všechny body v rovnováze. Bude rovnováha stabilní? (řešení str. 15)

Úloha I.4 ... pád z okna

7 bodů

Když James Bond pustil agenta 006 Aleca Treveljana z konstrukce radioteleskopu Arecibo ve finální scéně filmu Golden Eye, ten začal křičet s frekvencí f . Spočítejte závislost frekvence, kterou slyší 007, na čase. Odpor vzduchu neuvažujte.

Nápověda Pro radu jděte k panu Dopplerovi. (řešení str. 17)

Úloha I.5 ... zpropadený obvod

8 bodů

a) Určete odpor nekonečné odporové sítě na obrázku mezi body A a B. Bod A je přímo spojen s dvěma rezistory s odpory R_a a R_b . Každý z těchto rezistorů je spojen s dalšími dvěma odpory R_a a R_b a tak dále.

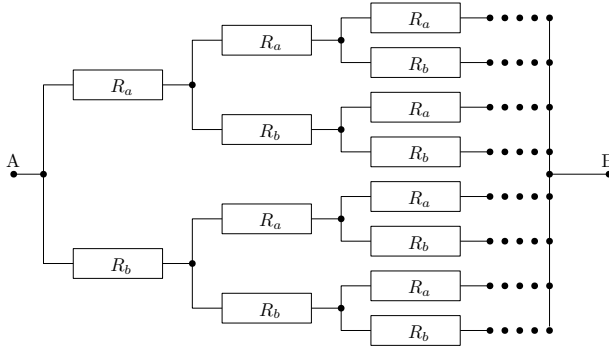
b) Na obrázku si místo rezistorů představte kondenzátory s kapacitami C_a a C_b . Jaká bude celková kapacita obvodu?

(řešení str. 18)

Úloha I.P ... strašná zima

10 bodů

Některé mlhoviny tvořené plynem z hvězd, např. Bumerang, mají nižší teplotu než reliktní záření, tedy vlastně jsou chladnější než vesmír. Jak je to možné? Pokuste



Obr. 1: Schéma nekonečné odporové sítě.

se stanovit podmínku na to, aby se plyn vyvrhovaný horkou hvězdou ochladil na teplotu nižší, než je reliktní záření. (řešení str. 21)

Úloha II.1 ... moonmen

3 body

Vaše váha by byla při Měsíci v zenitu menší než při Měsíci v nadiru. O kolik?

(řešení str. 23)

Úloha II.2 ... finská sauna

3 body

Představte si, že by Dano měl finskou saunu o rozměrech 2,5 m krát 3 m krát 4 m s relativní vlhkostí uvnitř 20 % při teplotě 90 °C. Kolik vody by musel vypařit, aby uvnitř sauny byla relativní vlhkost 35 %? Vodu vypařuje uvnitř na kamnech tak, že se teplota místnosti nezmění. (řešení str. 25)

Úloha II.3 ... fyzikální trofej

6 bodů

Danka vyhrála závod v derivování a za odměnu dostala sošku vyrobenou z průhledného materiálu ve tvaru hranolu se čtvercovou podstavou o hraně $a = 5$ cm a výšce $h \leq a$. Ať se dívá, jak se dívá, čelní stěnou nikdy nevidí přes boční stěny skrze trofej, vždy vidí pouze odražené paprsky. Jaký může mít materiál trofeje index lomu? Hranol je umístěn ve vzduchu. (řešení str. 26)

Úloha II.4 ... lunar lander

7 bodů

Jak má řídicí elektronika přistávacího modulu Apolla dávkovat tah T motoru (a tedy regulovat spotřebu paliva) směřující směrem dolů, aby se loď snášela na povrch Měsíce rovnoměrným přímočarým pohybem? Efektivní rychlost spalín motoru je u . Loď již zbrzdila svůj pohyb po orbitě a sestupuje přímo dolů v homogenním gravitačním poli se zrychlením g . Počáteční hmotnost modulu je m_0 .

Bonus Jak má elektronika dávkovat tah při přistání z výšky h a počáteční rychlosti v_0 , aby přistání bylo tzv. pádem z nulové výšky a minimalizovala se spotřeba paliva? Maximální tah motoru je T_{\max} . (řešení str. 27)

Úloha II.5 ... kladka a pták

9 bodů

Ke stropu je zavěšena pevná kladka a je na ni navlečeno lano tak, aby jeho levý i pravý konec byly ve stejné hloubce. Na jednom konci visí pták Fykosák a na druhém konci závaží, které má stejnou hmotnost jako pták. V počátečním stavu jsou pták i závaží nehybné. Popište, co se bude se soustavou dít, začne-li pták Fykosák lézt vzhůru (po svém vlastním lanu) s použitím konstantní síly. Nejprve předpokládejte, že lano je nehmotné a kladka je ideální. Poté počítejte s délkovou hmotností lana λ , jeho délkou l , momentem setrvačnosti kladky J a jejím poloměrem r . Předpokládejte, že lano na kladce neprokluzuje. (řešení str. 29)

Úloha II.P ... počasí na Matfyzu

10 bodů

Vytvořte co nejpřesnější předpověď počasí pro adresu V Holešovičkách 2, Praha 8, pro středů následující po uzávěrci série od 12:00 do 15:00. Jak se bude měnit počasí v průběhu celého dne? Smíte využít data o počasí nejpozději do soboty (včetně) předcházející uzávěrci. Součástí řešení je nutné svoji předpověď zdůvodnit, ocitovat zdroje a ideální je využít co nejvíce dat i zdrojů. (řešení str. 31)

Úloha III.1 ... zlevněné banány

3 body

Mikuláš v obchodě vložil několik banánů do igelitového sáčku. Před jejich zvážením ho napadlo, že kdyby pytlík naplnil místo vzduchu heliem, budou banány stát o něco méně. Helium Mikuláš koupil ve slevě za jednu korunu na litr při standardním tlaku. Jaká musí být cena banánů, aby se mu tento „podvod“ vyplatil?

Bonus Naleznete plyn, u kterého se vyplatí plnit jím sáček při ceně banánů 30 korun na kilogram. Nezapomeňte citovat zdroje ceny daného plynu.

(řešení str. 41)

Úloha III.2 ... efektivní kafe

3 body

Jsou dvě hodiny v noci a Jáchym si jde uvařit kafe. Na plotýnku, kterou tvoří litinový válec o poloměru r a výšce h , položí konvici s tepelnou kapacitou C_k . Konvice obsahuje vodu o objemu V , která má počáteční teplotu T_v . Zbytek soustavy má počáteční teplotu T_s . Jaká je celková účinnost (tj. poměr energie přijaté vodou ku dodané energii) ohřevu vody z její počáteční teploty na teplotu $T = 100^\circ\text{C}$? Neznámé hodnoty si dohleďte v tabulkách, nebo je odhadněte. Předpokládejte, že děj proběhne tak rychle, že všechny tepelné ztráty můžeme zanedbat. Pro úplnost zadání necht $T_s, T_v < T$. (řešení str. 42)

Úloha III.3 ... teplota v Dysonově sféře

6 bodů

Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota $t = 25\text{ }^\circ\text{C}$? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu.

(řešení str. 43)

Úloha III.4 ... destrukce smyčky

8 bodů

Představme si měděnou smyčku o poloměru r , která je určena rovinou, na níž je kolmé magnetické pole s magnetickou indukcí B . Maximální povolené tahové napětí ve smyčce je σ_p . Nyní začneme měnit magnetický tok ve smyčce z původní hodnoty Φ_0 podle vzahu $\Phi(t) = \Phi_0 + \alpha t$, kde α je kladná konstanta. Určete, za jak dlouho dosáhneme ve smyčce maximálního tahového napětí.

Nápověda Napětovou sílu ve smyčce můžeme spočítat jako $T = |BIr|$.

(řešení str. 44)

Úloha III.5 ... bodová

8 bodů

Uvažujme hmotný bod umístěný v jednodimenzionálním prostoru. Jeho počáteční pozice i rychlost je nulová. Bod se dokáže pohybovat s libovolným zrychlením z intervalu $[-a, a]$. Nazvěme $M(t)$ množinu všech možných stavů (x, v) takových, že bod se v čase t může nacházet na pozici x s rychlostí v . Sestrojme graf závislosti v na x v čase t . Množina $M(t)$ v tomto grafu vytvoří plochu $S(t)$. Analyticky popište křivky ohraničující $S(t)$.

Bonus Najděte funkční závislost obsahu $S(t)$.

(řešení str. 46)

Úloha III.P ... osobní powerbanka

10 bodů

Poslední procenta baterky v mobilu dochází, powerbanku máte vybitou nebo jste si ji pro jistotu nechali doma a 230 také není nikde v dohledu. Nebylo by skvělé mít neustále při sobě vlastní zdroj elektrické energie?

- Navrhnete několik různých zařízení, která by dokázala vyrábět elektrickou energii pouze ze zdrojů vašeho těla.
- Diskutujte jejich maximální výkon a účinnost. Co všechno byste s jejich pomocí dokázali zásobovat elektrinou?
- Diskutujte jejich dopad na vaše zdraví a fyzickou kondici. Které orgány by vám v důsledku jejich přetěžování selhaly nejdříve?

Jako jedno z možných zařízení uvažujte soustavu drobných turbín umístěných v krevním řečišti. Všechny argumenty podpořte co nejpřesnějšími výpočty.

(řešení str. 50)

Úloha IV.1 ... kostka se vzduchem

3 body

Mějme dutou kostku s hranou délky $a = 20\text{ cm}$ naplněnou vzduchem s teplotou $t_0 = 20\text{ }^\circ\text{C}$, což je zároveň teplota okolí kostky. Vzduch uvnitř kostky ochladíme

na $t_1 = 5^\circ\text{C}$. Jaká síla bude působit na každou stěnu kostky? Kostka při ochlazení vzduchu v ní nemění svůj objem. Tlak v okolí kostky je $p_0 = 101,3\text{kPa}$.

(řešení str. 55)

Úloha IV.2 ... utrhne se

3 body

Máme (nehmotný) provázek délky l a na jeho konci kuličku (hmotný bod) s hmotností m . Víme, že maximální tíha, co unese, je síla $F = mg$, kde g je místní tíhové zrychlení, ale už nic víc. Provázek upevníme a kuličku budeme držet ve stejné výšce, jako je místo upevnění, ve vzdálenosti délky provázku od druhého konce provázku, ale tak, abychom ho nenapínali. Kuličku uvolníme a ta se začne vlivem tíhového zrychlení pohybovat. Pod jakým úhlem provázku vůči svislé rovině se provázek přetrhne?

(řešení str. 56)

Úloha IV.3 ... levitující

6 bodů

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Poté nad ní umístil míček o hmotnosti m nabitý nábojem q . Vypočítejte, pro jaké hodnoty σ může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce h se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení g .

(řešení str. 57)

Úloha IV.4 ... trampolína

7 bodů

Dva hmotné body skákaly na trampolíně do výšky $h_0 = 2\text{m}$. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka $y = 160\text{cm}$), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymršťen? Kruhová trampolína má obvod $o = 10\text{m}$ a pruží díky $N = 42$ pružinám s tuhostí $k = 1720\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$. Trampolínu modelujeme N pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve střed. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je $M = 400\text{kg}$.

(řešení str. 59)

Úloha IV.5 ... frisbee

9 bodů

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem R . Velikost rychlosti těžiště disku je v . Určete úhel α mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než R .

(řešení str. 60)

Úloha IV.P ... V-1 ve vesmíru

10 bodů

Mezihvězdný prostor není prázdný, nýbrž obsahuje nepatrné množství hmoty. Uvažujte jen vodík, potřebnou hustotu si vyhledejte. Mohla by existovat kosmická loď, jež by „nasávala“ vodík před sebou a využívala energii z něj? Jak rychlá a velká by musela být, aby udržela termojadernou fúzi jen z přijatého vodíku? Jaké jiné překážky realizace je rozumné uvažovat?

(řešení str. 61)

Úloha V.1 ... procházka u silnice

3 body

Matěj jde podél silnice konstantní rychlostí a každých 7 minut potká tramvaj, která jede proti němu. Jednou za 10 minut ho mine tramvaj jedoucí opačným směrem. Tramvaje jezdí v obou směrech se stejnou frekvencí. S jakou? (řešení str. 63)

Úloha V.2 ... hloubka vniku do koule

3 body

Představte si, že máte podchlazenou plnou kovovou homogenní kouli, kterou vytáhnete z mrazáku, který máte nastavený na opravdu nízkou teplotu. Zajímalo by vás, jak rychle se bude zvyšovat její teplota, když ji umístíte do zahřáté místnosti. Protože by to jinak byl vysokoškolský problém, tak jsme pro vás úlohu zjednodušili. Ptáme se na odhad hloubky vniku (v metrech) „teplé oblasti“ do koule, který můžete získat rozměrovou analýzou. Známe relevantní parametry koule, konkrétně hustotu $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, měrnou tepelnou kapacitu $[c] = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a její součinitel tepelné vodivosti $[\lambda] = \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a zajímá nás závislost na čase $[t] = \text{s}$.

(řešení str. 64)

Úloha V.3 ... přepážka

6 bodů

Představme si akvárium tvaru krychle o straně $a = 1 \text{ m}$, které je vertikální přepážkou kolmou na stěny akvária rozděleno na dvě části. Dále uvažujme, že se tato přepážka může volně pohybovat ve směru kolmém na rovinu přepážky, ale ve zbylých dvou směrech se pohybovat nemůže. Také nemůže rotovat. Do jedné části akvária nalijeme $V_1 = 200 \text{ l}$ vody o hustotě $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a do druhé části nalijeme $V_2 = 230 \text{ l}$ oleje o hustotě $\rho_o = 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jaká bude rovnovážná polize přepážky? Jaké budou výšky hladin kapalin v jednotlivých částech akvária v rovnovážném stavu?

Bonus Najděte frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že přepážka má hmotnost $m = 10 \text{ oz}$ a že přesun vody probíhá bez jakéhokoli tření a odporu. (řešení str. 65)

Úloha V.4 ... rozstřík

8 bodů

Uvažujte volnou kapku vody s poloměrem R , kterou pomalu nabíjíte elektrickým nábojem. Najděte velikost náboje Q potřebného na to, aby sa kapka rozstříkla.

(řešení str. 67)

Úloha V.5 ... odskakující hopík

9 bodů

Tuhou kouli ve vzduchu roztočíme dostatečně velkou úhlovou rychlostí ω rovnoběžnou se zemí. Poté hopík pustíme z výšky h_0 na vodorovnou podložku. Od ní se odrazí do výšky h_1 a dopadne nedaleko původního místa dopadu. Určete vzdálenost těchto dvou bodů dopadu, jestliže je třecí koeficient mezi koulí a zemí f dostatečně malý. (řešení str. 70)

Úloha V.P ... problémy 1 sekundy

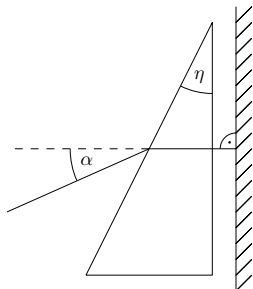
9 bodů

Navrhněte způsoby, jak zpomalit zeměkouli tak, abychom k některým rokům nemuseli přidávat přestupnou sekundu. Spočítejte, kolik by to stálo.

(řešení str. 71)

Úloha VI.1 ... sebeosvětlení

3 body



Svítíme na zrcadlo pod úhlem $\alpha = 15^\circ$ vůči kolmici. Chceme, aby se nám paprsek vracel zpátky do zdroje. Máme skleněný hranol s indexem lomu $n = 1,8$. Jaký musí být lámavý úhel η v závislosti na α a n , pokud situace vypadá jako obrázku? Předpokládejte, že okolní prostředí tvoří vzduch s indexem lomu n_0 .

Nápověda

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

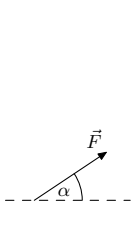
$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right).$$

(řešení str. 75)

Úloha VI.2 ... knihomol

3 body



Vítek trávil čas v knihovně. Kvůli jeho neobratnosti jedna kniha spadla z regálu a on ji rychlým pohybem ruky stačil přimáchnout ke stěně. Na knihu působí silou F pod úhlem α , viz obrázek. Kniha má hmotnost M a součinitel smykového tření mezi knihou a zdí je μ . Nalezněte podmínku pro sílu, při které kniha zůstane nehybná, a určete hraniční úhel α_0 , po jehož překročení již není možné knihu udržet.

(řešení str. 77)

Úloha VI.3 ... dostřík

6 bodů

Hladina 98% kyseliny sírové v lahvi sahá do výšky h . V určitém místě kolmo na stěnu nádoby vyvrtáme velmi malý otvor a kapalina začne vytékat ven. Do jaké maximální vzdálenosti od lahve může kyselina dostříknout ze všech možných poloh díry? Nádoba stojí na vodorovné rovině.

(řešení str. 78)

Úloha VI.4 ... lano

7 bodů

Přes břevno fotbalové branky (vodorovnou válcovou tyč) přehodíme dlouhé lano. Když bude jeden konec lana právě třikrát delší než druhý (přičemž oba budou viset volně ve vzduchu), lano samovolně sklouzne. Nyní lano kolem břevna jednou

obtočíme (čili bude „ohnuté“ o úhel 540°). Kolikrát teď může být jeden konec delší než druhý, aby lano nesklouzlo? (řešení str. 79)

Úloha VI.5 ... gumová houpačka

9 bodů

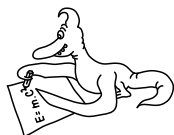
Matěje začaly nudit klasické houpačky, které jsou na dětských hřištích a lze se na nich houpat pouze dopředu a dozadu. Proto vymyslel vlastní atrakci, na které se bude houpat nahoru a dolů. Mezi dva stejně vysoké body ve vzdálenosti l natáhne gumu s klidovou délkou l . Následně se pomalu posadí přesně doprostřed gumy, přičemž se její střed vychýlí dolů o vzdálenost h . Nyní se velmi lehce odstrčí směrem nahoru a začne se houpat. Určete periodu malých kmitů. (řešení str. 80)

Úloha VI.P ... dálničně-bezpečnostní problém

10 bodů

- Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby byla silnice pod auty suchá, pokud prší?
- Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby na silnici nebyl žádný sníh a led, pokud sněží? Teplota dopadajícího sněhu je konstantní a srovnatelná s okolím, několik málo K pod 0°C .

Uvažujte, že prší nebo sněží nějaký konstantní objem vody na jednotku plochy za jednotku času. (řešení str. 83)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... balónky

Kolik balónů s objemem $V = 101$ naplněných heliem s hustotou $\rho_{\text{He}} = 0,179 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je potřeba, aby se Filip s hmotností $m_{\text{F}} = 80 \text{ kg}$ vznášel ve vzduchu s hustotou $\rho_{\text{v}} = 1,205 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$? A kolik by jich bylo potřeba, aby se vznášela Danka s hmotností $m_{\text{D}} = 50 \text{ kg}$? Hmotnost prázdného balónu zanedbejte.

Aby sa Filip vo vzduchu vznášal, musí sa tiažová sila pôsobiaca naňho a na hélium v balónoch vyrovnat vztlakovej sile pôsobiacej na balóny vo vzduchu. Hmotnosť hélia v jednom balóne je $m_{\text{He}} = V\rho_{\text{He}}$. Vztlaková sila pôsobiaca na jeden balón je $F_{\text{vz0}} = V\rho_{\text{v}}g$. Ak hľadaný počet balónov označíme n , potom z rovností síl máme

$$\begin{aligned} m_{\text{F}}g + nm_{\text{He}}g &= F_g = F_{\text{vz}} = nF_{\text{vz0}} , \\ m_{\text{F}}g + n\rho_{\text{He}}Vg &= nV\rho_{\text{v}}g , \\ n &= \frac{m_{\text{F}}}{V(\rho_{\text{v}} - \rho_{\text{He}})} \doteq 7797 . \end{aligned}$$

Teda Filip bude na vznášanie sa potrebovať $n_{\text{F}} = 7797$ balónov. Ak do vzorca dosadíme namiesto hmotnosti Filipa hmotnosť Danky, bude Danka na vznášanie sa potrebovať $n_{\text{D}} = 4873$ balónov. Správne by sme mali uvažovať aj vztlakovú silu pôsobiacu priamo na Filipa, ale vzhľadom na takýto počet balónov je Filipov objem zanedbateľný. A navyše by sme už museli uvažovať hmotnosť prázdných balónov.

Úloha I.2 ... ohňostroj

Jáchym odpaloval ohňostroj, ktorý si môžeme predstaviť jako světlice, která je v určitý čas vystřelena rychlostí v směrem svisle nahoru, a poté za nějaký čas vybuchne. Jáchym stál ve vzdálenosti x od místa odpalu, když uslyšel zvuk výstřelu. Za čas t_1 uviděl výbuch a za čas t_2 po zpozorování výbuchu ho i uslyšel. Spočítejte rychlost v .

Nazvěme y výšku, kam světlice vystoupá, a τ čas, jak dlouho jí tento výstup bude trvat. Výstřel světlice je svislý vrh vzhůru. Potom z rovnice rovnoměrně zpomaleného pohybu dostáváme

$$y = v\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 .$$

Označíme-li rychlost zvuku c , zvuk výstřelu k Jáchymovi putuje čas

$$t = \frac{x}{c} .$$

Dále můžeme předpokládat, že rychlost světla je vůči rychlosti zvuku libovolně velká, Jáchym proto uvidí výbuch přesně v okamžiku, kdy nastane. Světlice nahoru doletí v čase t_1 od doby, kdy ji Jáchym uslyší, přičemž byla vystřelena dříve, v čase t . Z toho plyne

$$\tau = t_1 + t = t_1 + \frac{x}{c}.$$

Pokud si představíme pravouhlý trojúhelník s odvěsnami x a y a s přeponou z , platí

$$z = ct_2.$$

Z Pythagorovy věty máme

$$y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{c^2 t_2^2 - x^2}.$$

Tím jsme pomocí zadaných veličin vyjádřili jak y , tak τ , a proto můžeme dosadit do první rovnice

$$v = \frac{y}{\tau} + \frac{1}{2}g\tau = \frac{c}{ct_1 + x} \sqrt{c^2 t_2^2 - x^2} + \frac{g}{2c} (ct_1 + x).$$

Úloha I.3 ... nestabilní

Mějme osm bodových nábojů (každý o velikosti q) umístěných ve vrcholech krychle. Určete velikost bodového náboje q_0 , který musíme umístit do středu krychle, aby byly všechny body v rovnováze. Bude rovnováha stabilní?

Na každý bod s nábojem q působí ostatní body ve vrcholech krychle odpudivou silou a jeden bod ve středu působí silou přitažlivou. Rovnováha nastane, pokud tyto síly budou mít stejnou velikost a opačný směr, takže se navzájem vyruší. Ze symetrie problému je jasné, že stačí řešit úlohu jen pro jeden z vrcholů krychle a rovnováha pak bude splněna i pro všechny zbylé body včetně toho prostředního.

Dále si uvědomme, že stačí řešit silovou rovnováhu na přímce spojující střed a daný vrchol (tedy na tělesové úhlopříčce). Všechny ostatní složky sil se totiž díky symetrii navzájem vyruší. Nejprve spočítáme, jakou celkovou silou je bod odpuzován a posléze vyjádříme, jak velký náboj musíme doprostřed umístit.

Máme celkem sedm nábojů, které na bod působí. Rozdělíme se je do tří kategorií. První jsou tři náboje, které s naším bodem sdílejí společnou hranu krychle. Další tři jsou ty, které s ním sdílejí stěnovou úhlopříčku (neboli právě jednu stěnu). Poslední jeden náboj je přesně v opačném vrcholu krychle. Pro výpočet složky síly působící ve směru tělesové úhlopříčky jsou klíčové vždy dvě veličiny – vzdálenost bodů r a sklon jejich spojnice vůči tělesové úhlopříčce φ (pokud body leží na tělesové úhlopříčce, je sklon $\varphi = 0$, pokud je spojnice kolmá na úhlopříčku, je $\varphi = 90^\circ$). Celkovou sílu nám udává Coulombův zákon

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q^2}{r^2}.$$

Pro výpočet složky síly rovnoběžné s tělesovou úhlopříčkou stačí velikost síly vynásobit členem $\cos \varphi$. Dostáváme tak

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{\cos \varphi}{r^2}.$$

První zlomek je pro všechny body stejný. Úhly a vzdálenosti lze zjistit jednoduchou geometrií, výsledky jsou shrnuty v následující tabulce. Délka hrany krychle je a .

kategorie	počet nábojů	r	$\cos \varphi$	$\frac{\cos \varphi}{r^2}$
1	3	a	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}a^2}$
2	3	$\sqrt{2}a$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}a^2}$
3	1	$\sqrt{3}a$	1	$\frac{1}{3a^2}$

Celková síla tedy je

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon a^2} \left(\sqrt{3} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon a^2} \frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{6}.$$

Náboj, který umístíme doprostřed, musí kompenzovat tuto sílu. Vzdálenost středu od vrcholu je $\sqrt{3}a/2$. Platí tedy

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{4qq_0}{3a^2}.$$

Z podmínky rovnosti sil dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{q^2}{4\pi\epsilon a^2} \frac{6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2}{6} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{4qq_0}{3a^2}, \\ q(6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 2) &= 8q_0, \\ q_0 &= \frac{3\sqrt{6} + 6\sqrt{3} + 2}{8} q \doteq 2,468q. \end{aligned}$$

Všimněme si, že výsledek nezávisí na rozměru krychle ani na permitivitě prostředí (předpokládali jsme homogenní prostředí). Zbývá vyřešit otázku, zda bude rovnováha stabilní, labilní, či volná. Stabilní rovnováha nastává, když se soustava po malé výchylce z rovnovážné polohy samovolně vrátí zpět do rovnovážné polohy. Tedy pokud malinko vychýlíme některý z bodů, výslednice sil ho bude tlačit zpět. Jak to ale zjistíme? Mohli bychom si rozepsat závislost sil na obecné poloze bodu nebo přímo vypočítat potenciál v okolí daného bodu.

Zkusme na to jít jednoduchou úvahou. Představme si, že vychýlíme prostřední bod o malinkou vzdálenost ze středu směrem k jednomu z vrcholů. Na prostřední bod původně působily pouze přitažlivé síly od ostatních vrcholů. Nyní se rozhodně zvýší přitažlivá síla směrem k bodu, ke kterému byl středový náboj přiblížen, zároveň se ale sníží přitažlivá síla k vrcholu na opačné straně. Na vychýlený prostřední náboj nyní proto bude působit síla, která ho bude vychylovat dále od středu. To znamená, že rovnováha je nestabilní, ba dokonce labilní.

Pokud bychom všem vrcholovým bodům udělili stejnou výchylku směrem od středu, stabilita by zůstala zachována, protože nezáleží na délce strany krychle. V tomto směru je tedy rovnováha volná.

Tento problém můžeme samozřejmě řešit i trikem. Z Gaussova zákona elektrostatiky lze dokázat, že jakákoli soustava bodových nábojů nemůže být nikdy ve stabilní rovnovážné poloze bez působení dalších sil (např. gravitační). Dokažme to sporem – předpokládejme, že existuje bod, ve kterém má elektrostatický potenciál lokální minimum a nenachází se zde žádný náboj (tedy kdybychom do tohoto místa umístili libovolně malý kladný bodový náboj, byl by ve stabilní rovnováze). Kolem tohoto místa uděláme dostatečně malou Gaussovou plochu tak, aby se uvnitř nenacházel žádný náboj. Jelikož je to stabilní poloha, lze kouli udělat tak malou, aby vektor intenzity elektrického pole všude na povrchu koule směřoval dovnitř (aby se při malé výchylce kladný náboj vracel zpět). Nyní po integraci

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

dostaneme záporný výsledek, což znamená, že uprostřed koule se nachází záporný náboj, ale to je ve sporu s naším předpokladem.

Úloha I.4 ... pád z okna

Když James Bond pustil agenta 006 Aleca Treveljana z konstrukce radioteleskopu Arecibo ve finální scéně filmu Golden Eye, ten začal křičet s frekvencí f . Spočítejte závislost frekvence, kterou slyší 007, na čase. Odpor vzduchu neuvažujte. Nápověda Pro radu jděte k panu Dopplerovi.

Na časovou závislost frekvence, kterou 007 uslyší, bude mít vliv několik faktorů. Roli bude hrát Dopplerův jev, protože Alec se chová jako pohybující se zdroj zvuku, dále bude záležet na vzdálenosti obou agentů, která se s časem zvyšuje, a také musíme brát v úvahu fakt, že rychlost zvuku je konečná. Rychlost zvuku označme c a vzdálenost obou agentů y . Jelikož se jedná o volný pád z klidové polohy, je závislost vzdálenosti na čase dána vztahem

$$y(t) = \frac{1}{2}g\tau^2,$$

kde g je tíhové zrychlení a τ je čas od okamžiku upuštění.

Frekvence f' , kterou by slyšel pozorovatel nacházející se v klidu hned nad 006 padajícím rychlostí v , je podle Dopplerova jevu

$$f' = f \frac{c}{c + v},$$

po dosazení $v = g\tau$ dostáváme časovou závislost

$$f'(\tau) = f \frac{c}{c + g\tau}.$$

Problém je v tom, že frekvenci f' James neuslyší v čase τ , ale v čase

$$t = \tau + \frac{y(\tau)}{c} = \tau + \frac{g\tau^2}{2c},$$

protože nějaký čas trvá, než se k němu zvuk dostane. Hledáme tak závislost $f'(t)$. Z předchozí rovnice si můžeme vyjádřit

$$\tau = -\frac{c}{g} \pm \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}}.$$

Zřejmě nás zajímá pouze kladný čas, proto před odmocninou použijeme znaménko plus. Dosazením do rovnice pro frekvenci dostáváme

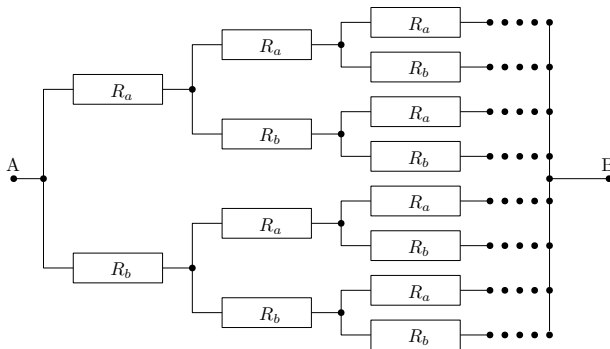
$$f'(t) = f \frac{c}{c + g \left(-\frac{c}{g} + \sqrt{\frac{c^2}{g^2} + \frac{2ct}{g}} \right)} = \frac{f}{\sqrt{1 + \frac{2gt}{c}}}.$$

Samozřejmě jsme neuvvažovali odraz zvuku od obřího teleskopu, na který 006 tvrdě dopadne.

Úloha I.5 ... zpropadený obvod

a) Určete odpor nekonečné odporové sítě na obrázku mezi body A a B. Bod A je přímo spojen s dvěma rezistory s odpory R_a a R_b . Každý z těchto rezistorů je spojen s dalšími dvěma odpory R_a a R_b a tak dále.

b) Na obrázku si místo rezistorů představte kondenzátory s kapacitami C_a a C_b . Jaká bude celková kapacita obvodu?

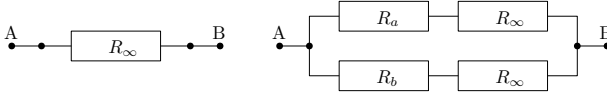


Obr. 2: Schéma nekonečné odporové sítě.

V nekonečných sítích se obecně využívá toho faktu, že pokud by síť byla opravdu dokonalá a nekonečná a pokud je zároveň pravidelná, dají se v ní nalézt jednotlivé subčásti, které mají stejný odpor (či stejnou kapacitu) jako celková síť. Pokud je

totiž obvod nekonečný, nezáleží na tom, jestli ještě přidáte nebo uberete jeden opakující se článek, stále jich bude nekonečno. Něco málo o takovýchto obvodech naleznete například v knihovničce Fyzikální olympiády v textu Elektrické obvody (stejnoseměrný proud) - část 2.9 Řetězový obvod¹.

Nejprve se budeme věnovat bodu a), tedy rezistorové síti. Tu si můžeme představit buď jako celou síť s odporem R_∞ , anebo jako obvod se čtyřmi rezistory, z nichž mají dva odpor R_∞ , třetí R_a a čtvrtý R_b , viz obrázek 3.



Obr. 3: Alternativní schémata problému, pomocí nichž vypočítáme odpor celé sítě.

V druhém případě máme tedy dvě dvojice rezistorů zapojených sériově, tyto dvojice jsou pak zapojené paralelně. Můžeme jednoduše napsat vztah mezi těmito dvěma obvody pomocí rovnice, která po úpravách vede na kvadratickou rovnici,² kterou snadno vyřešíme.

$$R_\infty = \left(\frac{1}{R_a + R_\infty} + \frac{1}{R_b + R_\infty} \right)^{-1},$$

$$R_\infty = \frac{(R_a + R_\infty)(R_b + R_\infty)}{R_b + R_\infty + R_a + R_\infty},$$

$$R_\infty(R_a + R_b + 2R_\infty) = R_a R_b + R_\infty(R_a + R_b) + R_\infty^2,$$

$$R_\infty^2 = R_a R_b \quad \Rightarrow \quad R_\infty = \sqrt{R_a R_b}.$$

Celkový odpor rezistorové sítě je tedy $R_\infty = \sqrt{R_a R_b}$. Záporný kořen jsme „zahodili“, protože záporný odpor pro naši úlohu nemá fyzikální význam. Sčítáme totiž samé kladné ideální rezistory. Záporný odpor by mohl mít význam, pokud bychom zapojili nějaké nelineární či exotické součástky do našeho obvodu. Více si o záporném odporu můžete přečíst například na Wikipedii³.

Stejným způsobem můžeme určit i celkovou kapacitu v bodě b). Jediný rozdíl je v tom, že u rezistorů sčítáme sériově zapojené odpory, kdežto u kapacity sčítáme

¹<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/elobvody.pdf>

²Nekonečné či řetězové obvody ve většině úloh, se kterými se můžete v soutěžích setkat, vedou právě na kvadratickou rovnici.

³https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_resistance

paralelně zapojené kondenzátory.

$$\begin{aligned}
 C_\infty &= \left(\frac{1}{C_a} + \frac{1}{C_\infty} \right)^{-1} + \left(\frac{1}{C_b} + \frac{1}{C_\infty} \right)^{-1}, \\
 C_\infty &= \frac{C_a C_\infty}{C_a + C_\infty} + \frac{C_b C_\infty}{C_b + C_\infty}, \\
 1 &= \frac{C_a (C_b + C_\infty) + C_b (C_a + C_\infty)}{(C_a + C_\infty)(C_b + C_\infty)}, \\
 C_a C_b + C_\infty (C_a + C_b) + C_\infty^2 &= 2C_a C_b + C_\infty (C_a + C_b), \\
 C_\infty^2 &= C_a C_b \quad \Rightarrow \quad C_\infty = \sqrt{C_a C_b}.
 \end{aligned}$$

Vyšlo nám, že celková kapacita obvodu je $C_\infty = \sqrt{C_a C_b}$, tedy shodou okolností jsme získali zcela stejný tvar řešení jako u rezistorů. Kromě záporného řešení jsme ještě „zahodili“ možnost, že by kapacita celkového obvodu byla nulová. Došlo k tomu v kroku mezi druhým a třetím řádkem, kdy jsme obě strany vydělili C_∞ . Proč nečekáme, že by kapacita byla nulová? Intuitivně by se dalo čekat, že pokud by byla kapacita nekonečného obvodu nulová, bude odpor složený z rezistorů stejným způsobem nekonečný. Pokud tento argument nestačí, můžeme se podívat na to, jaké budou kapacity pro konečné obvody, které budeme postupně konstruovat přidáváním dalších a dalších sad kondenzátorů. Je to alternativní metoda, jak kapacitu určit, ale je náročnější na jednotlivé výpočty a počet kroků. Navíc je potřebná znalost konvergence. Pokud si zjednodušíme pro rozhodnutí potvrzení či zamítnutí nulové hodnoty celkové kapacity na situaci $C_a = C_b = C$, dostáváme postupně celkové kapacity obvodu $2C, 4C/3, 8C/7, 16C/15, 32C/31 \dots$ Intuitivně vidíme, že tato řada konverguje k C , což odpovídá $C_\infty = \sqrt{C_a C_b} = C$, nikoliv nulovému řešení, které jsme zahodili oprávněně.

Celkový odpor či celková kapacita takto poskládaného obvodu z nekonečného množství součástek o dvou odporech či kapacitách je tedy geometrickým průměrem jejich hodnot.

Ještě můžeme zcela na závěr poznamenat, že jsme od začátku předpokládali, že odpory spojovacích vodičů jsou nulové, což je standardní dle obvyklých konvencí. Pokud bychom museli uvažovat odpory i těchto vodičů, pak by se nám úloha zkomplikovala. Nicméně v případě rezistoru je rozumné zahrnout odpor vodiče vedoucího k rezistoru k tomu příslušnému rezistoru. Výsledek by byl pak stejný, pokud by tyto odpory vodičů byly všude stejné. Samozřejmě, že u reálné nekonečné sítě by byl nejspíše problém v nestejné délce vodičů, pokud tedy pomíneme fakt, že nekonečné sítě stejně nelze dosáhnout. V případě kondenzátorů by mohlo jít o trochu větší problém, protože kromě kapacity bychom museli uvažovat i rezistivitu vodičů. Navíc i mezi jakýmkoliv součástkami může vznikat parazitní kapacita (či induktance), která bude nejspíše malá, ale v případě nekonečného obvodu je pak netriviální ji zanedbat. Úlohu jsme nezamýšleli až takto těžkou, a proto úvahy nad těmito jevy by mohly získat bonusové body. Důležité je korektní „snadné“ řešení idealizovaných obvodů.

Úloha I.P . . . strašná zima

Některé mlhoviny tvořené plynem z hvězd, např. Bumerang, mají nižší teplotu než reliktní záření, tedy vlastně jsou chladnější než vesmír. Jak je to možné? Pokuste se stanovit podmínku na to, aby se plyn vyvrhovaný horkou hvězdou ochladil na teplotu nižší, než je reliktní záření.

Reliktné žiarenie je elektromagnetické žiarenie prichádzajúce zo všetkých smerov, ktoré vzniklo krátko po veľkom tresku. V dnešnej dobe má charakter žiarenia absolútne čierneho telesa s teplotou $T_r = 2,73$ K. Preto by sa dalo predpokladať, že všetky objekty vo vesmíre budú mať vyššiu teplotu. V prípade rovnováhy by mali všetky objekty rovnakú teplotu T_r , no vo vesmíre sa nachádzajú zdroje energie (napr. hviezdy), ktoré spôsobujú, že v istých oblastiach vesmíru je podstatne teplejšie. Zdroj „chladu“ však neexistuje, preto nás zaujímajú nerovnovážne procesy, pri ktorých dochádza k ochladzovaniu.

Hmlovina uvedená ako príklad v zadaní je planetárna hmlovina tvorená obálkou plynu s teplotou približne $t = 2$ K rozpínajúca sa rýchlosťou okolo $v = 150 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. Pri vzdialenosti okolo 1500 ly je jej rozmer asi 0,5 ly a je teda stará asi 1000 rokov.⁴ Fakt, že je chladnejšia ako reliktné žiarenie, bol objavený vďaka absorpcii fotónov reliktného žiarenia molekulami oxidu uhoľnatého v hmlovine, ktoré by v opačnom prípade sami vyžarovali.⁵

Táto nízka teplota sa dá vysvetliť práve veľmi rýchlou expanziou plynu, ktorý nestíha prijímať teplo od materskej hviezdy (s výkonom $L_* \approx 300L_\odot$ a povrchovou teplotou $T_* = 6000$ K a polomerom približne $R_* = 16R_\odot$) ani reliktného žiarenia. Prečo ale takýchto veľmi chladných hmlovín nepozorujeme viac? Čím je práve Bumerang taký výnimočný? V prípade tejto hmloviny je rýchlosť unikajúcich častíc o rád vyššia ako obyčajne. Tento rozdiel je pravdepodobne spôsobený iným mechanizmom vzniku - tesnou interakciou červeného obra a inej hviezdy v spoločnej obálke. Pritom vznikal disk materiálu obalujúci hviezdy a týmto procesom poháňaný výtrisk hmoty v smere normály na obežnú rovinu. Na konci procesu približovania sa po špirále sa obe hviezdy pravdepodobne zrazili.⁶

Základným problémom tejto úlohy je, že procesy, o ktorých uvažujeme, nie sú rovnovážne. Preto nastávajú problémy napr. s definíciou teploty či iných stavových veličín, a vzťahy ako Planckov zákon, 1. veta termodynamická, či stavová rovnica majú len obmedzené použitie v závislosti na extrémnosti podmienok. Napriek tomu sa však pokúsme vytvoriť aspoň približný model situácie použitím týchto vzťahov.

Oblak materiálu, ktorý hviezda vyvrhla, idealizujeme ako dokonale tepelne vodivú guľu, ktorej polomer r sa mení priamoúmerne so vzdialenosťou R od hviezdy. Neunikajú z neho častice, rýchlosť pohybu oblaku v je konštantná v smere od hviezdy. Oblak prijíma teplo Q_L od hviezdy, teplo Q_r od reliktného žiarenia a vyžaruje teplo Q_z do okolia podľa Stephan-Boltzmanovho zákona.

⁴<http://adsabs.harvard.edu/abs/1997ApJ...487L.155S>

⁵<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017MNRAS.466.1412B>

⁶<https://arxiv.org/pdf/1703.06929.pdf>

Pre polomer oblaku teda platí $r = \alpha R = \alpha vt$. Pre jeho objem

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(\alpha vt)^3.$$

Z prvej vety termodynamickkej máme

$$dU = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - \delta W = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - pdV.$$

Pre vnútornú energiu plynu platí $U = \frac{s}{2}nR_m T$, čo po zdiferencovaní a dosadení dáva

$$\frac{s}{2}nR_m dT = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - pdV = \delta Q_L + \delta Q_r - \delta Q_z - 4\pi p(\alpha v)^3 t^2 dt.$$

Pre teplo vyžiarené oblakom za čas dt máme

$$\delta Q_z = P dt = 4\pi r^2 \sigma T^4 dt = 4\pi(\alpha v)^2 \sigma T^4 t^2 dt.$$

Teplo prijaté plynom od hviezdy vieme určiť zo svietivosti hviezdy L , vzdialenosti oblaku od hviezdy R a jeho prierezu S ako časť povrchu sféry so stredom v hviezde a polomerom R obsahujúcu oblak (hviezda vyžaruje rovnomerne do celého priestoru)

$$\delta Q_L = P dt = \frac{L}{4\pi R^2} S dt = \frac{L}{4\pi R^2} \pi r^2 dt = \frac{L}{4} \alpha^2 dt,$$

teplo prijaté z reliktného žiarenia ako

$$\delta Q_r = 4\pi r^2 \sigma T_r^4 dt = 4\pi(\alpha v)^2 \sigma T_r^4 t^2 dt.$$

A pre tlak plynu máme

$$p = \frac{nR_m T}{V} = \frac{3nR_m T}{4\pi(\alpha vt)^3}.$$

Keď všetko dosadíme, dostávame

$$\frac{s}{2}nR_m dT = \frac{L}{4}\alpha^2 dt + 4\pi(\alpha v)^2 \sigma T_r^4 t^2 dt - 4\pi(\alpha v)^2 \sigma T^4 t^2 dt - \frac{3nR_m T}{t} dt.$$

Po úprave dostávame vzťah pre časovú deriváciu teploty

$$\frac{dT}{dt} = \frac{L\alpha^2}{2snR_m} + \frac{8\pi(\alpha v)^2 \sigma}{snR_m} T_r^4 t^2 - \frac{8\pi(\alpha v)^2 \sigma}{snR_m} T^4 t^2 - \frac{6}{s} \frac{T}{t}.$$

Táto rovnica nemá analytické riešenie, dá sa však riešiť numericky.

Pozrime sa ale na podmienku ochladenia pod teplotu T_r . Aby sa plyn pod túto teplotu ochladil, musí byť v čase t_r , keď túto teplotu dosiahne, derivácia teploty podľa času záporná

$$\frac{dT}{dt} = \frac{L\alpha^2}{2snR_m} - \frac{6}{s} \frac{T_r}{t_r} < 0.$$

To bude dosiahnuté pre málo svietivú hviezdu vyvrhujúcu veľké množstvo hmoty do malej oblasti priestoru, ak teplota oblaku dosiahne teplotu reliktného žiarenia dosť skoro, teda hmota bude vyvrhovaná dostatočnou rýchlosťou.

Náš model má však niekoľko chýb. Vyvrhnutý materiál modeluje ako ideálny plyn, no v skutočnosti ide o najprv elektricky nabitý materiál, z ktorého časti sa stane neutrálny plyn (či už atomický, alebo neskôr molekulárny) a zo zvyšku kondenzujú prachové častičky. Náš model považuje obláčik za dokonale tepelne vodivý, čo pravdepodobne neplatí, keďže sa oblak prudko rozpína. Rozpínajúci sa oblak prijíma energiu žiarenia. Tu je však podstatné, či je opticky hustý (nepriehľadný) ako na počiatku expanzie a energiu prijíma svojím povrchom (teda jeho okraj je značne prehriaty oproti stredu), alebo priehľadný ako riedky plyn na konci expanzie a energiu prijímajú častice v celom objeme. Rovnako náš model rozpínania oblaku nie je ideálny. Oblak nebude homogénny - bude mať hustý stred a okraje, ktoré sa rozplývajú do priestoru. Celkovo sme neuvažovali ďalšie interakcie: gravitáciu materskej hviezdy, jej magnetické pole a lokálne pole galaxie, ktoré môžu či už na začiatku usmerňovať nabité častice alebo zrnká prachu pozdĺž siločiar. Podobne sme zanedbali interakcie s hviezdny a medzhviezdny vetrom a žiarením okolitých hviezd.

Celkovo teda môžeme konštatovať, že na ochladenie pod teplotu reliktného žiarenia je nutné, aby bol materiál vyvrhnutý vo veľkom množstve vysokou rýchlosťou a centrálna hviezda mala nízku svietivosť. Kvantifikovať podmienky presne je veľmi náročný, ak nie nemožný problém. Na ich splnenie však pravdepodobne nestačí jedna hviezda. Málo svietivá hviezda totiž nedokáže vyvrhnúť materiál dostatočne prudko. Preto sa zdá, že jedinou možnosťou je interakcia červeného obra s inou hviezdou, ktorá materiál obálky červeného obra vymrští do priestoru.

Úloha II.1 ... moonmen

Vaše váha by bola pri Měsíci v zenitu menší než při Měsíci v nadiru. O kolik?

Nejprve si ujasníme, že naše hmotnost nezávisí vůbec na poloze měsíce ani na tom, na jaké planetě se nacházíme. Váha je však veličina, kterou ukazují váhy, když se na ně postavíme. Váhy měří pouze sílu, tu pak přepočítávají na hmotnost, přičemž používají standardní hodnotu tíhového zrychlení $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

Proto nás bude zajímat pouze rozdíl sil v případě, když je Měsíc v zenitu a když je v nadiru. Naši hmotnost označme m . Hmotnost Měsíce budeme značit $M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, jeho vzdálenost od středu Země $R = 384\,000 \text{ km}$ a poloměr Země $r = 6\,378 \text{ km}$. Při výpočtu síly, kterou na nás působí Měsíc, vyjdeme z Newtonova gravitačního zákona

$$F = G \frac{mM}{(R - r)^2},$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Protože vzdálenost Měsíce od Země je o dva řády větší než poloměr Země, můžeme r zanedbat a počítat pouze se vzdáleností R . Když se Měsíc nachází v nadiru (podnožníku), působí na nás silou F

směrem od Země. Když se nachází v zenitu (nadhlavníku), přitahuje nás silou F k Zemi. Celkový rozdíl je tedy $2F$. Tomu odpovídá změna váhy

$$\Delta m = \frac{2F}{g} = \frac{2GmM}{gR^2}.$$

Z použitých veličin neznáme naši hmotnost m , proto odhadneme průměrnou hmotnost fykosáka na $m = 70$ kg. Po dosazení máme $\Delta m = 0,47$ g. Budete-li se vážit přesně pod Měsícem, budete vážit přibližně o polovinu gramu méně než v druhém případě.

Skrytý bonus

Gravitační síla však není jednou silou, která na nás působí. Ještě je tu odstředivá síla, která vzniká tak, že se otáčíme kolem těžiště soustavy Země–Měsíc.

Úhlová rychlost otáčení této soustavy buď ω , hmotnost Země nechť je $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg. Těžiště soustavy se potom nachází ve vzdálenosti

$$\frac{M}{M_Z + M} R$$

od středu Země směrem k Měsíci, což je pod zemským povrchem. Velikost odstředivé síly v okamžiku, kdy máme Měsíc přesně pod nohama, je

$$F_1 = m\omega^2 \left(r + \frac{M}{M_Z + M} R \right).$$

Když je Měsíc v opačné pozici, pro odstředivou sílu platí

$$F_2 = m\omega^2 \left(r - \frac{M}{M_Z + M} R \right).$$

Abychom dosáhli požadované přesnosti, nemůžeme při výpočtu síly F zanedbat zemský poloměr. Počítejme tedy se silou F_a pro měsíc v podnožníku a F_b pro měsíc v nadhlavníku. Výsledný rozdíl sil bude

$$\begin{aligned} \Delta F &= (F_a - F_1) - (-F_b - F_2) = \frac{GmM}{(R+r)^2} + \frac{GmM}{(R-r)^2} - \frac{2m\omega^2 MR}{M_Z + M} = \\ &= GmM \left(\frac{1}{(R+r)^2} + \frac{1}{(R-r)^2} - \frac{2}{R^2} \right), \end{aligned}$$

kde jsme za ω dosadili z třetího Keplerova zákona

$$\omega^2 = \frac{G(M_Z + M)}{R^3}.$$

Dále můžeme vzorec pro změnu síly upravit na

$$\begin{aligned}\Delta F &= GmM \left(\frac{R^2 - (R+r)^2}{(R+r)^2 R^2} + \frac{R^2 - (R-r)^2}{(R-r)^2 R^2} \right), \\ \Delta F &= GmM \frac{r}{R^2} \left(\frac{-2R-r}{(R+r)^2} + \frac{2R-r}{(R-r)^2} \right), \\ \Delta F &= GmM \frac{r}{R^2} \left(\frac{(-2R-r)(R-r)^2 + (2R-r)(R+r)^2}{(R+r)^2 (R-r)^2} \right), \\ \Delta F &\approx GmM \frac{6r^2}{R^4}.\end{aligned}$$

Pro rozdíl vah po dosazení $a_g = \frac{GM_Z}{r^2}$ (zde zanedbáváme odstředivou sílu způsobenou rotací Země, ale chyba způsobená tímto zanedbáním je vůči výsledné hodnotě velmi malá, protože se jedná o multiplikativní konstantu a ne o rozdíl blízkých čísel jako výše) dostáváme

$$\Delta m \approx m \frac{6Mr^4}{M_Z R^4} = 0,39 \text{ mg},$$

což je výrazně méně než v předchozím případě. Stojí za pozornost, že takové síly způsobují mimo jiné i příliv a odliv.

Úloha II.2 ... finská sauna

Představte si, že by Danó měl finskou saunu o rozměrech 2,5 m krát 3 m krát 4 m s relativní vlhkostí uvnitř 20 % při teplotě 90 °C. Kolik vody by musel vypařit, aby uvnitř sauny byla relativní vlhkost 35 %? Vodu vypařuje uvnitř na kamnech tak, že se teplota místnosti nezmění.

Poměrně dobrý výsledek získáme, pokud vypočítáme množství vodní páry v sauně na začátku a na konci. Nejdříve si ujasníme, co nám udává veličina absolutní vlhkost vzduchu Φ . Ta nám zadává hmotnost m vodní páry ve vzduchu o objemu V neboli hustotu vodní páry obsažené ve vzduchu. Matematicky ji můžeme vyjádřit jako $\Phi = m/V$. Relativní vlhkostí vzduchu φ pak rozumíme poměr absolutní vlhkosti vzduchu Φ při dané teplotě a absolutní vlhkosti vzduchu Φ_m , při které je za této teploty vodní pára ve vzduchu sytou párou.

Nyní už je výpočet jednoduchý. Hmotnost vody, kterou musí Danó nechat vypařit, je rovna

$$\Delta m = (\Phi_2 - \Phi_1) V,$$

kde V je objem sauny, Φ_1 a Φ_2 jsou absolutní vlhkosti vzduchu na začátku a na konci. Dále potřebujeme využít naší znalosti relativní vlhkosti $\varphi_1 = 20\%$ a $\varphi_2 = 35\%$ na začátku a na konci. Pro hmotnost vody Δm dostaneme

$$\Delta m = (\varphi_2 - \varphi_1) \Phi_m V,$$

kde $\Phi_m = 0,42 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota syté vodní páry při teplotě 90°C , jejíž číselnou hodnotu najdeme v tabulkách⁷. Dano by ale radši znal potřebný objem vody ΔV , a proto mu ho ještě dopočteme,

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1) \Phi_m V}{\rho},$$

kde $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ je hustota studené vody (asi 10°C), kterou do sauny napustil z vnějšku. Po číselném dosazení dostáváme, že Dano musí nechat vypařit 1,9 l vody. Nezapomínejme, že se nejedná o přesný výsledek, protože jsme neuvažovali například únik vzduchu s vodní parou ze sauny v průběhu vypařování.

Úloha II.3 ... fyzikální trofej

Danka vyhrála závod v derivování a za odměnu dostala sošku vyrobenou z průhledného materiálu ve tvaru hranolu se čtvercovou podstavou o hraně $a = 5 \text{ cm}$ a výšce $h \leq a$. Ať se dívá, jak se dívá, čelní stěnou nikdy nevidí přes boční stěny skrze trofej, vždy vidí pouze odražené paprsky. Jaký může mít materiál trofeje index lomu? Hranol je umístěn ve vzduchu.

Nejdříve se zamysleme nad tím, co se nám zadání snaží říct. Na bočních stěnách vidíme jenom odraz, tudíž jsme schopni vidět jen paprsky přicházející z protilehlé stěny (ať už přímo nebo odrazem).

To nutně implikuje, že paprsek se musí na boční stěně absolutně odrazit. Označíme-li úhel dopadu na první rozhraní (ve směru od pozorovatele) jako α a úhel lomu jako β , pak na prvním rozhraní píšeme Snellův zákon

$$n_0 \sin \alpha = n \sin \beta,$$

kde n_0 je index lomu vzduchu a n index lomu hranolu. Z toho pro absolutní odraz na boční stěně dostaneme

$$n \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = n \cos \beta \geq 1. \quad (1)$$

Nyní nalezneme největší možný úhel β . V rovnici výše nastává rovnost právě pro největší úhel β , označme ho β_0 . Tomuto úhlu odpovídá i největší úhel α_0 a to v případě případě, když jsou paprsky téměř rovnoběžné s povrchem hranolu, takže $\alpha_0 = \pi/2$. Na prvním, resp. na druhém rozhraní platí

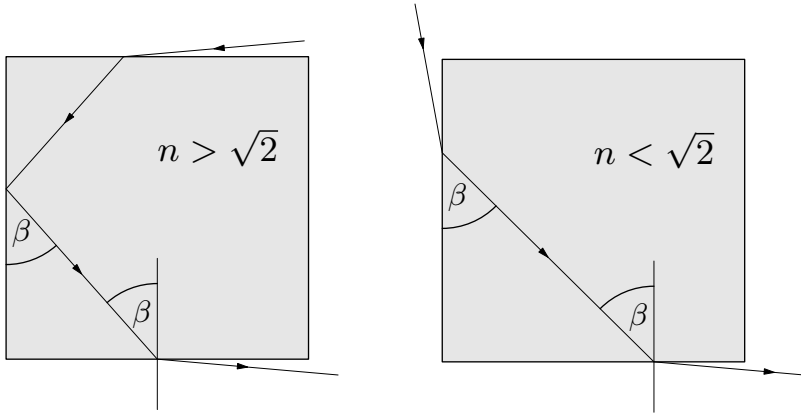
$$\begin{aligned} n \sin \beta_0 &= n_0 \sin \frac{\pi}{2} = 1, \\ n \cos \beta_0 &= n_0 \sin \frac{\pi}{2} = 1, \end{aligned}$$

kde jsme při úpravách položili index lomu vzduchu roven 1. Sinus a kosinus úhlu β se rovnají a tedy

$$\beta_0 = \frac{\pi}{4}.$$

V posledním kroku dosadíme do (1) maximální β_0 , z čehož pro index lomu hranolu dostaneme $n \geq \sqrt{2}$.

⁷<https://www.tzb-info.cz/tabulky-a-vypocty/9-vlastnosti-syte-vodni-pary-pri-danem-tlaku>



Obr. 4: Pohled shora na hranol.

Úloha II.4 ... lunar lander

Jak má řídicí elektronika přistávacího modulu Apolla dávkovat tah T motoru (a tedy regulovat spotřebu paliva) směřující směrem dolů, aby se loď snášela na povrch Měsíce rovnoměrným přímočarým pohybem? Efektivní rychlost spalín motoru je u . Loď již zbrzdila svůj pohyb po orbitě a sestupuje přímo dolů v homogenním gravitačním poli se zrychlením g . Počáteční hmotnost modulu je m_0 .

Bonus Jak má elektronika dávkovat tah při přistání z výšky h a počáteční rychlosti v_0 , aby přistání bylo tzv. pádem z nulové výšky a minimalizovala se spotřeba paliva? Maximální tah motoru je T_{\max} .

Pri riešení tejto úlohy je dôležité uvedomiť si, že sa jedná o sústavu s premennou hmotnosťou. Pohybovú rovnicu systému určíme z prvého Newtonovho zákona

$$F = \frac{dp}{dt}.$$

Nech je v nejakom čase t hybnosť sústavy $p(t) = m(t)v(t)$, pričom hybnosť p aj rýchlosť v sú kladné smerom nahor. Keďže je rýchlosť modulu v konštantná, za čas Δt sa hybnosť zmení na

$$p(t + \Delta t) = (m(t) + \Delta m)v - \Delta m(v - u),$$

kde $\Delta m(v - u)$ je práve hybnosť paliva vyvrhnutého smerom nadol z motorov modulu. Pre nekonečne malú zmenu času prejdeme od Δt k diferenciálu dt , odkiaľ

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p(t + dt) - p(t)}{dt} = \frac{dm}{dt}u.$$

Na pristávací modul pôsobí jediná sila, sila gravitačná $F = -F_g = -m(t)g$. Po dosadení do prvého Newtonovho zákona dostávame

$$-m(t)g = \frac{dm(t)}{dt}u = -T.$$

Riešime teda diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{g}{u}m = \frac{dm}{dt},$$

ktorej riešením je

$$m(t) = m_0 \exp\left(-\frac{g}{u}t\right),$$

kde m_0 je hmotnosť landeru v čase $t = 0$ s. Spotrebu paliva máme jednoducho ako

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{m_0 g}{u} \exp\left(-\frac{g}{u}t\right)$$

a pre veľkosť ťahu motora požadujeme

$$T(t) = m_0 g \exp\left(-\frac{g}{u}t\right),$$

aby modul klesal rovnomerne priamočiario.

Bonus

V tomto prípade máme pohybovú rovnicu

$$mg = -\dot{m}u - m\ddot{x},$$

kde kladný smer súradnice x smeruje nahor, z čoho po úprave máme

$$g + \ddot{x} = -\frac{\dot{m}}{m}u.$$

Po integrácii podľa času po čas dopadu t_d máme

$$gt_d + [\dot{x}]_0^{t_d} = -u [\ln(m)]_0^{t_d}, \quad (2)$$

$$\frac{gt_d - v_0}{u} = \ln\left(\frac{m_0}{m_{t_d}}\right),$$

kde sme použili $v(t_d) = 0$. Vidíme teda, že pre minimálnu spotrebu paliva musíme pristáť čo najrýchlejšie. Riešením by bolo tesne pred dosadnutím prudko spomaliť, to však nie je technicky možné. Najlepšie je teda voľne padať a následne vo vhodnom čase spustiť motory na plný ťah tak, aby modul dosadol s nulovou rýchlosťou.

Ak v čase $t_0 = 0$ s začneme brzdiť konštantným ťahom, pre hmotnosť landeru máme

$$m(t) = m_0 - \frac{T_{\max}}{u}t.$$

To po dosadení do rovnice (2) pre medze s indexom 0 pre čas začatia brzdenia a bez indexu v čase t počas brzdenia a úprave dáva

$$v(t) = v_0 - gt - u \ln\left(1 - \frac{T_{\max}}{um_0}t\right).$$

Ak tento vzťah znovu preintegrujeme a dosadíme medzu pre začiatok brzdenia, dostaneme

$$x(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - u \left(\left(t - \frac{u m_0}{T_{\max}} \right) \ln \left(1 - \frac{T_{\max}}{u m_0} t \right) - t \right),$$

kde h_0 je výška landeru nad povrchom v čase začatia brzdenia. Pár poznámok k výsledku. Pre $T = 0$, teda bez ťahu motorov, dostávame vzťahy pre voľný pád (odporúčame použiť Taylorov rozvoj na logaritmus). Vzťah v argumente logaritmu je podiel aktuálnej hmotnosti lode a jej hmotnosti v počiatočnom čase, teda je kladný, pokiaľ lodi nedôjde palivo a pohybová rovnica prestane platiť.

Ako má teda elektronika lode rozhodovať? V každom okamihu voľného pádu vieme zo vzťahu pre rýchlosť položením $v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ určiť čas t (napríklad numericky), v ktorom bude mať lander nulovú rýchlosť. Tento čas dosadíme do vzťahu pre výšku nad povrchom $x(t)$. Brzdiť je potrebné začať v okamihu, keď sa takto určená výška rovná aktuálnej výške landeru nad povrchom. V praxi sa často prestane brzdiť tesne nad povrchom a lander sa nechá dopadnúť voľným pádom z malej výšky, aby motory zbytočne nevírili prach na povrchu.

Úloha II.5 ... kladka a pták

Ke stropu je zaväšená pevná kladka a je na ni navlečeno lano tak, aby jeho levý i pravý koniec byly ve stejné hloubce. Na jednom konci visí pták Fykosák a na druhém konci závaží, které má stejnou hmotnost jako pták. V počátečním stavu jsou pták i závaží nehybné. Popište, co se bude se soustavou dít, začne-li pták Fykosák lézt vzhůru (po svém vlastním lanu) s použitím konstantní síly. Nejprve předpokládejte, že lano je nehmotné a kladka je ideální. Poté počítejte s délkovou hmotností lana λ , jeho délkou l , momentem setrvačnosti kladky J a jejím poloměrem r . Předpokládejte, že lano na kladce neprokluzuje.

Úlohu budeme riešiť pomocou rozboru sil. Pták Fykosák stahuje lano dolú silou F . Tato síla musí byť zrejme väčšia než jeho tíha, inak by se na laně neudržel. Síla se pomocí lana přenese na druhé těleso, na které tak budou působit dvě síly – tíhová síla F_g směrem dolú (která je podle zadání stejná jako Fykosákova) a síla F směrem nahoru. Označme nyní hmotnost Fykosáka a závaží m , potom můžeme určit velikost zrychlení, s jakým se závaží začne pohybovat směrem nahoru

$$a = \frac{F - F_g}{m} = \frac{F}{m} - g.$$

Na ptáka Fykosáka působí také síla F směrem nahoru a tíhová síla F_g směrem dolú, takže i on se bude pohybovat se zrychlením a směrem nahoru.

Není to ale v rozporu se zákonem zachování energie? Pokud by pták Fykosák šplhal například po žebříku, při působení stejné síly F by se zrejme pohyboval se stejným zrychlením a . V tomto případě se tak závaží zvedá „zdarma“. Nebo snad ne?

Rozpor je samozrejme pouze zdánlivý. Fykosák působí silou na lano, tedy při výpočtu práce musíme sílu integrovat podle délky lana. To se pohybuje dolú stejnou

rychlostí, jakou se Fykosák pohybuje nahoru. Síla tedy působí na dvakrát delší dráze než v případě, že by Fykosák lezl po žebříku.

Ve druhé části úlohy uvažujeme hmotné lano a kladku s nenulovým momentem setrvačnosti. Kladka dělí lano na dvě části. Označme délku té s ptákem Fykosákem jako x . Na tuto část lana působí směrem dolů síla $F + \lambda xg$, zatímco na druhou část lana působí směrem dolů síla $(m + (l - x))g$. V tomto případě jsme zanedbali rozměry kladky vůči délce lana. Dále necht' je zrychlení závaží a' . Potom výslednicí těchto sil je výraz

$$\left(m + \lambda l + \frac{J}{r^2}\right) a',$$

kde první člen představuje zrychlení závaží, druhý zrychlení lana a třetí zrychlení kladky. Máme tak rovnici

$$\left(m + \lambda l + \frac{J}{r^2}\right) a' = F + \lambda xg - (m + \lambda(l - x))g,$$

odkud si můžeme vyjádřit

$$a' = \frac{F + 2\lambda xg - \lambda lg - mg}{m + \lambda l + Jr^{-2}}.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici typu $\ddot{x} = b + cx$. Řešením homogenní rovnice je

$$x_H = C_1 e^{\sqrt{c}t} + C_2 e^{-\sqrt{c}t}.$$

Partikulárním řešením je zřejmě

$$x_P = -\frac{b}{c},$$

tedy pro celkové řešení platí

$$x = x_H + x_P = C_1 e^{\sqrt{c}t} + C_2 e^{-\sqrt{c}t} - \frac{b}{c}.$$

Z počátečních podmínek $x(0) = l/2$ a $\dot{x}(0) = 0$ dostáváme dosazením do této rovnice soustavu

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 - \frac{b}{c} &= \frac{l}{2}, \\ C_1 \sqrt{c} - C_2 \sqrt{c} &= 0, \end{aligned}$$

jejímž řešením je

$$C_1 = C_2 = \frac{l}{4} + \frac{b}{2c} = \frac{l}{4} + \frac{F - \lambda lg - mg}{4\lambda g} = \frac{F - mg}{4\lambda g}.$$

Tím jsme našli funkci $x(t)$. Jejím dosazením do rovnic výše snadno spočítáme například zrychlení závaží a' . Jak již určitě tušíte, pohyb ptáka Fykosáka nebude zdaleka tak složitý. Ve skutečnosti bude zcela stejný jako v první části úlohy – síly, co na něj působí, se nezměnily, takže i jeho pohyb se nezmění. Pro jeho zrychlení tak platí

$$a = \frac{F}{m} - g.$$

Úloha II.P ... počasí na Matfyzu

Vytvořte co nejpřesnější předpověď počasí pro adresu V Holešovičkách 2, Praha 8, pro středů následující po uzavěrci série od 12:00 do 15:00. Jak se bude měnit počasí v průběhu celého dne? Smíte využít data o počasí nejpozději do soboty (včetně) předcházející uzavěrci. Součástí řešení je nutné svoji předpověď zdůvodnit, ocitovat zdroje a ideálně je využít co nejvíce dat i zdrojů.

Teorie

Počasím obvykle nazýváme stav nejspodnější hranice atmosféry nazývané *troposféra*, která sahá v našich zeměpisných šířkách výšky přibližně 11 km. Ačkoliv je předpověď počasí hojně využívaným fyzikálním modelem, došlo k jejímu výraznějšímu zpřesnění až v posledních několika letech díky zvýšení výkonu výpočetní techniky. Přesto je předpověď počasí na dlouhou dobu stále velmi nepřesná a předpovídat počasí na déle než týden dopředu z aktuální situace je téměř nemožné. K těmto dlouhodobým výhledům se používá především statistika z let minulých. Náš úkol vytvořit předpověď počasí na 4 dny dopředu tedy patří již k náročnějším úkolům a ani profesionálním meteorologům se obvykle nepodaří předpovědět víc než obecný charakter počasí.⁸

Cyklóna a anticyklóna

Konkrétní předpověď počasí se určuje podle pohybů mas vzduchu v atmosféře a jeho vlastností jako tlak, teplota či vlhkost. Charakter počasí silně ovlivňují rozsáhlé útvary tlakových níží, výší a front, které je oddělují. Tlaková níže neboli *cyklóna* je oblast, kde má vzduch nižší tlak než v okolí. Proudění zde má vzestupný charakter, který vede k ochlazení vzduchu a vzniku srážek. Cyklona obvykle přináší oblačnost a srážky spolu s výrazným ochlazením, v zimě však může znamenat konec teplotní inverze.⁹ Na severní polokouli se cyklona vlivem Coriolisovy síly pohybuje proti směru hodinových ručiček.¹⁰ Pohyb a vývoj cyklony je velmi těžko předvídatelný, stejně jako přesná poloha srážek v tomto útvaru. Tlaková výše neboli *anticyklóna* je oblast, kde má vzduch vyšší tlak než v okolí. Proudění zde má sestupný charakter, který vede k oteplení vzduchu a rozpouštění oblačnosti. Během tlakové výše je tedy téměř jasno, v létě obvykle teplo, v zimě naopak můžou díky vyjasnění být silné mrazy. Vlivem Coriolisovy síly se anticyklóna pohybuje po směru hodinových ručiček.¹¹ Anticyklóna je obvykle velmi stabilní, a tak není problém provádět týdenní výhledy.

Fronty

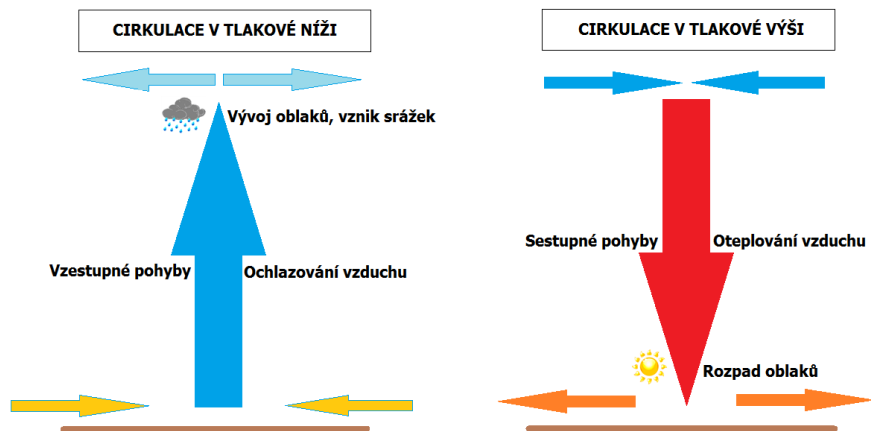
Oblasti vysokého a nízkého tlaku vzduchu bývají obvykle odděleny takzvaným *frontálním rozhraním*. Prvním typem frontálního rozhraní je teplá fronta, která

⁸<http://meteo-aktuality.blog.cz/1411/zasady-predpovidani-pocasi>

⁹<http://meteo-aktuality.blog.cz/en/1511/tlakove-utvary-a-pocasi-v-nich>

¹⁰<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Cyklona&oldid=16963194>

¹¹<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Anticyklona&oldid=16682272>



Obr. 5: Cirkulace vzduchu v cykloně a anticykloně.

znamená příchod teplého vzduchu a ustupování studeného vzduchu. Na synoptických mapách¹² se obvykle značí červenou čarou s půlkruhy. Teplé fronty se na našem území vyskytují častěji v zimě než v létě a znamenají vytrvalejší srážky. Druhý typ je studená fronta, která znamená příchod chladného vzduchu místo ustupujícího teplého. Na synoptické mapě se značí modrou čarou s trojúhelníčky. Studená fronta se objevuje náhle, obvykle znamená velmi rychlé ochlazení spojené s náhlými a těžko předvídatelnými srážkami, ve kterých se nezdá objevují i bouřky. Spojením teplé a studené fronty vzniká *okluzní fronta*, a to díky tomu, že studená fronta se pohybuje rychleji, a tak teplou obvykle dohoní. Okluzní fronta může mít charakter studené nebo teplé fronty.¹³

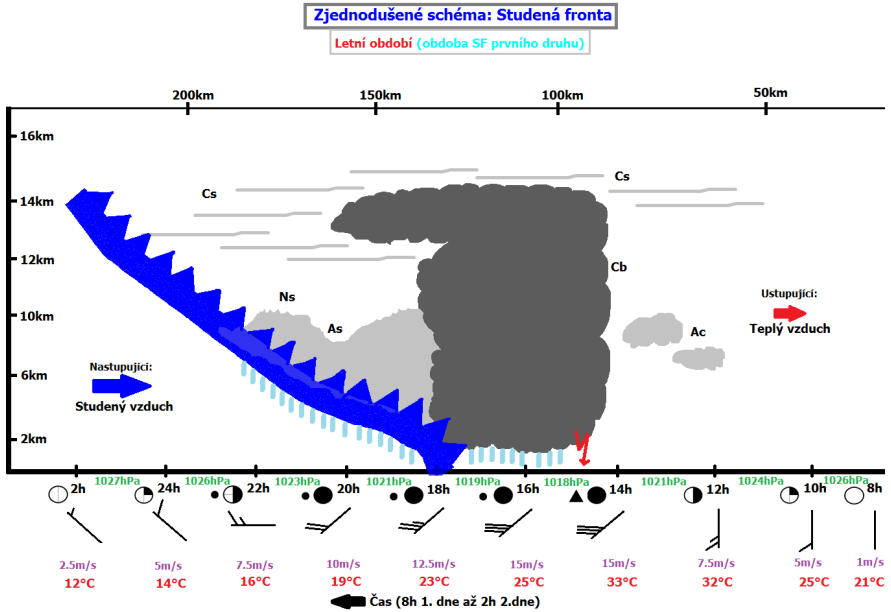
Evropské podmínky

Nad Evropským prostorem se stabilně vyskytují 4 dominantní útvary, a to tlakové výše nad Azorskými ostrovy a nad Ruskem a níže nad Řeckem a nad Islandem. Česká republika leží přibližně uprostřed mezi těmito útvary v mírném pásu v oblasti západního proudění takzvané Ferrelovy buňky.¹⁴ Počasí je zde silně ovlivněno lokálními vlivy, zejména pak Golským proudem, díky čemuž se zde velmi často mění s přechodem front směrem od západu s přibližně týdenní periodou.

¹²<http://portal.chmi.cz/predpovedi/predpovedi-pocasi/evropa/synopticka-situace>

¹³<http://meteo-aktuality.blog.cz/en/1511/frontalni-vlny-a-jejich-vliv-na-pocasi>

¹⁴https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Globalni_cirkulace_atmosfery&oldid=16383481



Obr. 6: Studená fronta – schéma vývoje počasí. Čas jde zprava doleva. Např. v 16 hodin se ve výšce od 2 do 14 km vyskytuje mrak typu cumulonimbus (Cb), charakteristický tvarem kovadliny. Nad ním se mohou vyskytovat oblaka typu cirrostratus (Cs). Vítr bude jihozápadní (fouká z JZ) o rychlosti 15 m s^{-1} („šíp“ se třemi čárkami). Bude oblačno a dešť (tmavé velké a malé kolečko). Podrobný popis symbolů lze najít na

<http://meteo-aktuality.blog.cz/1512/meteorologicke-znacky>.

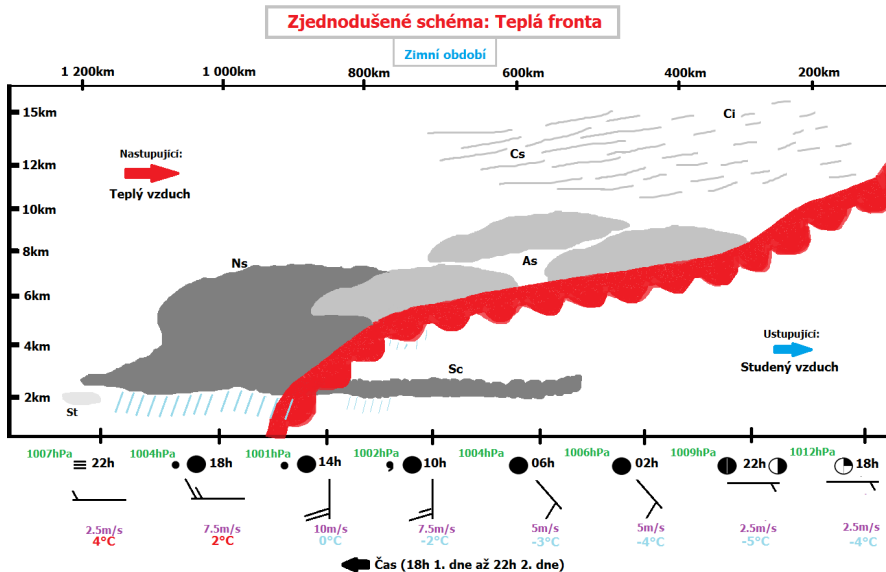
Model atmosféry

Abychom mohli atmosféru nějakým způsobem popsat a předpovědět tak její chování, musíme si vytvořit zjednodušený model. Je tomu tak proto, že nemůžeme sledovat jednotlivé molekuly a pak pomocí zákonů kvantové mechaniky předpovědět jejich chování, protože by bylo jednak nemožné změřit přesná vstupní data, jednak nemáme dostatečný výpočetní výkon k tak rozsáhlé simulaci.

Tlak

Tlak vzduchu je způsoben tíhovou silou vzduchu nad námi, čili je intuitivní, že s rostoucí nadmořskou výškou tlak vzduchu klesá.¹⁵ Na to, jakým způsobem tlak vzduchu klesá, existují dva modely, a to *izotermická atmosféra*, kde předpokládáme teplotu vzduchu nezávislou na výšce a *adiabatická atmosféra*, kde předpokládáme

¹⁵Proto se tlak uváděný v synoptických mapách vždy přepočítává na hladinu moře.



Obr. 7: Teplá fronta, význam symbolů viz Obr.6

nulový vertikální tepelný tok. My si zde ukáže ten druhý, který je přesnější. Atmosferický tlak je podobně jako hydrostatický tlak určen tíhou vzduchu nad daným bodem, ale na rozdíl od kapalin se zde hustota mění, vztah pro hydrostatický tlak tedy můžeme psát pouze v diferenciálním tvaru pro změnu tlaku dp za výškový rozdíl dh , která je rovna tíze vzduchu v této vrstvě, tedy

$$dp = -\rho(h)gdh.$$

Nyní dosadíme vyjádření hustoty ze stavové rovnice ideálního plynu v podobě $pV = \frac{m}{M}RT$ a dostaneme

$$dp = -\frac{Mp}{RT}gdh. \quad (3)$$

Když si představíme vzduchovou bublinu, která stoupá od země vzhůru, tak v modelu adiabatické atmosféry jí není dodávána žádná energie a ani žádnou energii neztrácí, čili vzduch v ní se rozpíná adiabaticky. Proto použijeme vztah pro adiabatický děj $pV^\kappa = \text{konst}$, který přepíšeme, aby v něm figurovala teplota a tlak. Toho docílíme vyjádřením objemu ze stavové rovnice $V = nRT/p$ a dosazením do vztahu pro adiabatický děj

$$p \left(\frac{nRT}{p} \right)^\kappa = \text{konst} \Rightarrow p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{konst}. \quad (4)$$

Nyní rovnici (4) zderivujeme a vyjádříme z ní dp , které dosadíme do rovnice (3)

$$(1 - \kappa)p^{-\kappa}T^\kappa dp + \kappa p^{1-\kappa}T^{\kappa-1}dT = 0,$$

$$\frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{T} dT = dp = -\frac{Mp}{RT} gdh,$$

$$dT = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{M}{R} gdh.$$

Dostali jsme diferenciální rovnici závislosti teploty na výšce, kterou vyřešíme

$$T = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{M}{R} gh + T_0. \quad (5)$$

Odtud již pomocí vztahu (4) dostaneme závislost tlaku na výšce

$$p^{1-\kappa}T^\kappa = p_0^{1-\kappa}T_0^\kappa,$$

$$p = p_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}},$$

$$p = p_0 \left(\frac{T_0}{T_0 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{M}{R} gh} \right)^{\frac{\kappa}{1-\kappa}}.$$

Takovéto rozdělení podle výšky má tlak v rovnovážném případě za předpokladu adiabatické atmosféry a zanedbatelných rychlostí proudění. Jakékoliv odchylky od tohoto stavu způsobí vertikální proudění vzduchu.

Vítr

Vítr je pohyb mas vzduchu, který je způsobený rozdílným tlakem. Vzduch proudí proti směru gradientu tlaku,¹⁶ tedy z oblasti vyššího tlaku do nižšího. Sílu působící na jednotku hmotnosti (neboli zrychlení) pak vyjádříme jako

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p,$$

kde ρ značí hustotu vzduchu.¹⁷ Kdyby působila pouze tato síla, tlak vzduchu by se rychle vyrovnal, což ale v praxi nepozorujeme. Na vzduch totiž působí ještě Coriolisova síla, což je zdánlivá síla způsobená rotací Země, jejíž velikost je úměrná rychlosti částice. Tato síla působí na všechna pohybující se tělesa kolmo ke směru rychlosti, a to tak, že na severní polokouli je stáčí doprava a na jižní doleva. Kvůli této síle se cyklony a anticyklony otáčejí opačným směrem. Jelikož se masa vzduchu nepohybuje po přímce, působí na ni ještě odstředivá síla rovněž kolmo ke směru pohybu. Rychlost tohoto proudění pak zpomaluje třecí síla, díky níž není vítr tak silný. Ve výsledku se tedy vzduchová částice pohybuje po spirále dovnitř nebo ven z tlakové níže či výše a rychlost větru je úměrná velikosti tlakového gradientu.¹⁸

¹⁶Gradient je vektorový operátor, který aplikujeme na skalární pole a dostaneme vektor ve směru nejvyššího růstu. Jeho složky se spočítají jako parciální derivace skalárního pole (v našem případě tlaku vzduchu) podle jednotlivých souřadnic.

¹⁷<http://slovník.cmes.cz/heslo/3370>

¹⁸Míková T., Zárybnická A., Karas P., Žák M. *Když se blížíská na časy*, CPRESS Brno 2018, s.23

Teplota

Vzduch se ohřívá díky slunečnímu záření i díky zpětnému vyzařování od povrchu Země či vodní hladiny. Teplota v daném místě pak kromě tohoto ohřevu závisí i na proudění vzduchu, které přináší teplejší či chladnější vzduch. Slunce dodává Zemi stálý tepelný výkon o velikosti takzvané solární konstanty¹⁹ $P_S = 1\,366\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Jelikož ale paprsky dopadají na zemský povrch pod nenulovým úhlem, musíme tuto hodnotu ještě vynásobit kosinem úhlu dopadu, který se během roku i během dne mění. Výkon dopadající na jednotkovou plochu Země je tedy

$$P = P_S \cos \varphi.$$

Velikost úhlu φ vyčteme v tabulkách, nebo jí spočítáme z polohy slunce na obloze. Při výpočtu dopadajícího výkonu nesmíme zapomenout ani na odraz slunečního záření od oblaků, tedy přesný výpočet se stává obtížným, nehledě na ohřev vzduchu od pozemských objektů.

Vlhkost

Poslední z parametrů je vlhkost vzduchu, která mimo tvorby oblaků a jejich kondenzace rovněž ovlivňuje pocitovou teplotu. Definujeme dvě veličiny, první je takzvaná absolutní vlhkost, což je hmotnost vodní páry v daném objemu, a druhá je relativní vlhkost, což je poměr absolutní vlhkosti a její maximální možné hodnoty za dané teploty a tlaku, nazývané též hustota sytých par.²⁰ Relativní vlhkost vyjádříme jako

$$\phi = \frac{\Phi}{\Phi_n},$$

kde Φ je absolutní vlhkost a Φ_n je hustota nasycených par. S vlhkostí souvisí taktéž rosný bod, což je teplota, při které dosahuje relativní vlhkost 100%. Pokud tedy teplota klesne pod rosný bod a ve vzduchu jsou přítomna kondenzační jádra, dochází ke kondenzaci. Když teplý vlhký vzduch stoupá a ochlazuje se, v jednu chvíli dosáhne jeho teplota rosného bodu a voda začne kondenzovat, čímž dochází ke vzniku mraků. Zároveň při příliš vysoké vlhkosti vzduchu pocítujeme nepříjemné dusno a může se nám hůře dýchat.²¹

Tvorba modelu

Jak si můžeme všimnout, vlivů, které je potřeba do modelu zařadit, je velmi mnoho. K vytvoření rozumné předpovědi na 3 dny by nám nestačilo uvažovat model pro Prahu ani pro Českou republiku, ale museli bychom do něj zahrnout celou Evropu. Něco takového je daleko za možnostmi našeho textu, protože to vyžaduje přesnější modely a spoustu dat, která bychom ani nebyli schopni s běžným výpočetním výkonem zpracovat. Proto opustíme metody modelování atmosférické situace a v další části úlohy se pokusíme předpovědět počasí na základě již existujících modelů a statistik z minulých let.

¹⁹https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Slunecni_konstanta&oldid=15403051

²⁰https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Vlhkost_vzduchu&oldid=17116343

²¹https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Rosny_bod&oldid=16137628

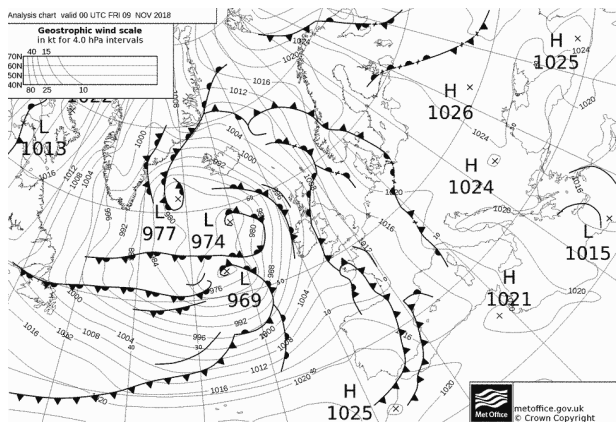
Předpověď počasí

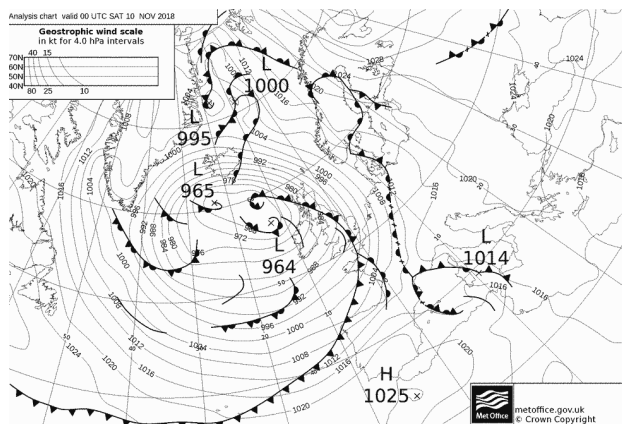
Protože vzorové řešení tvoříme až se zpožděním (za které se jménem Daniela Dupkaly velmi omlouváme), můžeme naši předpověď porovnat se skutečným počasím v den, na který se mělo předpovídat. Toto porovnání uvedeme, ačkoliv z logických důvodů nemohlo být součástí vašich řešení.

Předpověď na 14. 11. 2018

K této předpovědi využíváme data o teplotě ze serveru www.in-pocasi.cz a data o tlaku z německého serveru <http://www.wetterzentrale.de>, které mají možnosti vyhledávání v archivu, a tak tu můžeme najít počasí z 9. 11. a 10. 11., což je pátek a sobota před deadlinem.

V dané dny u nás převládal vyšší tlak, který měl za následek suché počasí s teplotami mezi 6 °C a 15 °C. V pátek foukal východní vítr, který se v sobotu změnil na jižní. Nad západní polovinou území se nacházelo frontální rozhraní, které přinášelo oblačnost, což koresponduje s teplotní mapou, ze které můžeme vidět, že na východě našeho území byly vyšší rozdíly denních a nočních teplot, tedy pravděpodobně jasno, zatímco ve zbytku republiky bylo zataženo.





Obr. 9: Synoptická mapa, sobota 10.11.

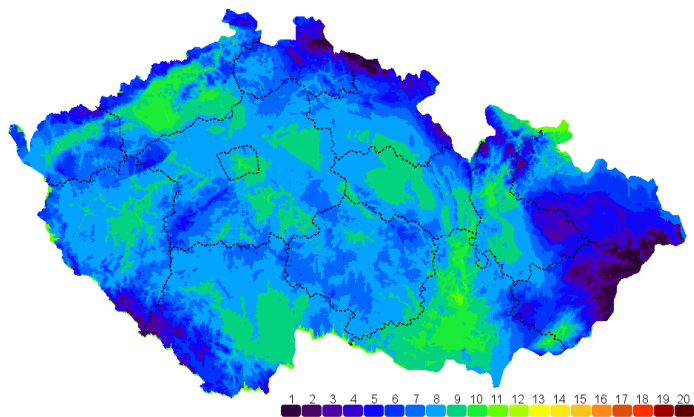
jící tlakové výši, může být teplota o něco vyšší. Naše předpověď tedy bude znít *jasno, beze srážek, tlak 1 010 hPa, teplota 10 °C*.

Skutečné počasí 14. 11. 2018

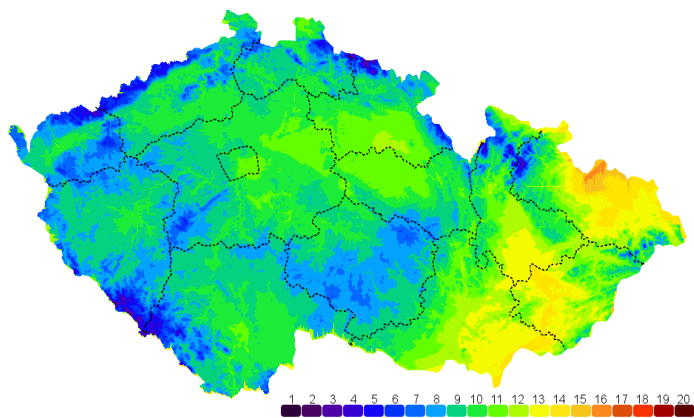
Ve středu 14. 11. skutečné počasí odpovídalo tlakové výši. Naměřená teplota v Praze na Karlově na Katedře fyziky atmosféry byla 10,8 °C, což se blíží našemu předpokladu, tlak však byl výrazně vyšší, a to 1 031 hPa. Oblačnost byla asi 60%, relativní vlhkost 5%, rychlost větru 3 m·s⁻¹ a dle našeho předpokladu byl den beze srážek.

Závěr

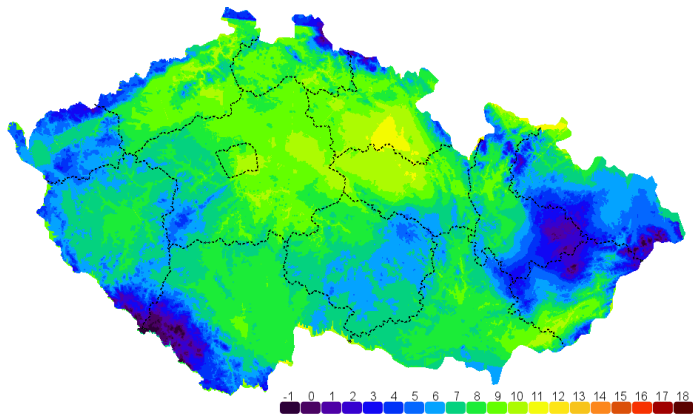
Přes mnoho zjednodušujících předpokladů i fakt, že jsme neměli žádný model, se nám povedlo zhruba odhadnout charakter počasí, i když předpověď oblačnosti i tlaku vzduchu neodpovídala skutečné situaci.



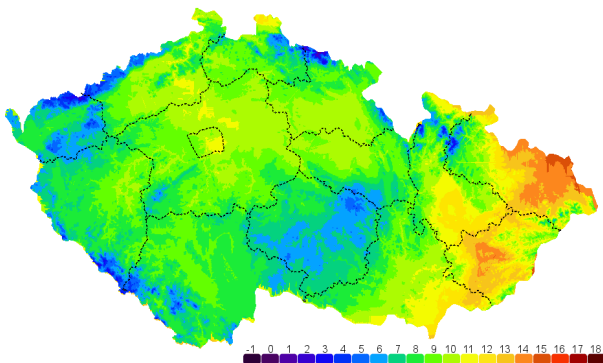
Obr. 10: Teplotní mapa, pátek 9.11. 7:00.



Obr. 11: Teplotní mapa, pátek 9.11. 15:00.



Obr. 12: Teplotní mapa, sobota 10.11. 7:00.



Obr. 13: Teplotní mapa, sobota 10.11. 15:00.

Úloha III.1 ... zlevněné banány

Mikuláš v obchodě vložil několik banánů do igelitového sáčku. Před jejich zvážení ho napadlo, že kdyby pytlík naplnil místo vzduchu heliem, budou banány stát o něco méně. Helium Mikuláš koupil ve slevě za jednu korunu na litr při standardním tlaku. Jaká musí být cena banánů, aby se mu tento „podvod“ vyplatil?

Bonus Nalezněte plyn, u kterého se vyplatí plnit jím sáček při ceně banánů 30 korun na kilogram. Nezapomeňte citovat zdroje ceny daného plynu.

Keď vrecúško s banánmi naplníme heliom, bude naň pôsobiť vztlaková sila, ktorá je podľa Archimedovho zákona rovná $F_{vz} = \rho Vg$, pričom sa počíta s hustotou tekutiny ρ , v ktorej je objekt ponorený, a objemom ponorenej časti objektu V . Zároveň pôsobí tiažová sila na hélium samotné, ktorá ho „ťahá dole“, preto platí

$$\Delta m_B g = (\rho_{vzd} - \rho_{He}) V g,$$

kde Δm_B je zmena váhy banánov, ρ_{vzd} a ρ_{He} sú hustoty vzduchu a hélia a V je objem vo vrecúšku, ktorý sme vyplnili heliom. Tento objem vieme vypočítať ako podiel hmotnosti použitého hélia a hustoty hélia

$$V = \frac{m_{He}}{\rho_{He}},$$

čiže po vykrátení g a dosadení V máme vzťah

$$\Delta m_B = \left(\frac{\rho_{vzd}}{\rho_{He}} - 1 \right) m_{He}.$$

Keďže Mikuláš chce, aby sa mu podvod oplatil, cena použitého hélia musí byť minimálne rovná ušetrenej cene banánov

$$m_{He} C_{He} \leq \Delta m_B C_B,$$

kde C_{He} , C_B sú ceny za kilogram hélia, resp. banánov. Po dosadení za Δm_B dostávame vzťah pre cenu banánov

$$C_B \geq \frac{C_{He}}{\frac{\rho_{vzd}}{\rho_{He}} - 1}.$$

Cenu hélia v jednotkách CZK·kg⁻¹ vypočítame z hustoty hélia a zadanej ceny hélia c_{He} v jednotkách CZK·ℓ⁻¹ ako

$$C_{He} = \frac{c_{He}}{\rho_{He}}.$$

Dosadíme do finálneho vzťahu pre cenu banánov a dostaneme

$$C_B \geq \frac{c_{He}}{\rho_{vzd} - \rho_{He}} = 900 \text{ CZK} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Hraničná cena banánov, pri ktorej sa Mikulášovi tento podvod vyplatí je 900 CZK·kg⁻¹. Táto hranica je nezávislá na množstve použitého hélia, čiže ak by sme použili viac hélia ako máme, vrecúško by sa začalo vznášať. Zbytočne by sme mrhali heliom a pani predavačke by sa to mohlo zdať podozrivé.

Bonus

Z predchádzajúcich výpočtov vieme, že musí platiť

$$\frac{C_B}{C_P} \left(\frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_P} - 1 \right) \geq 1,$$

pričom C_P je cena plynu za kilogram a ρ_P je hustota plynu. Potrebujeme nájsť taký plyn, pre ktorý sa podvod oplatí pri cene banánov $30 \text{ CZK} \cdot \text{kg}^{-1}$. Nájdeme si ceny²² a hustoty²³ rôznych technických plynov a zistíme, či je niektorý z nich vyhovujúci. Samozrejme, zaujímajú nás len plyny s nižšou hustotou ako vzduch $\rho_{\text{vzd}} = 1,2759 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ktoré sú bezpečné na použitie v danej situácii. Získané údaje, z ktorých sme prepočítali cenu na jeden kilogram v $\text{CZK} \cdot \text{kg}^{-1}$ a potom dosadili do vyššie uvedených vzťahov, umiestnime do prehľadnej tabuľky 1.

Tab. 1: Tabuľka plynov

plyn	$\frac{\rho_P}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$	$\frac{C_P}{\text{CZK} \cdot \text{kg}^{-1}}$	$\frac{C_B}{C_P} \left(\frac{\rho_{\text{vzd}}}{\rho_P} - 1 \right)$
vodík	0,088 95	6 428	0,06
hélium	0,1762	5100	0,04
zemný plyn	0,7	8	3,2
acetylén	1,147	560	0,006
dusík	1,234	334	0,003

Plyn, pri ktorom sa to oplatí, je – podľa nami nájdených údajov o cenách plynov – zemný plyn, hlavne kvôli jeho nízkej cene.

Úloha III.2 ... efektivní kafe

Jsou dvě hodiny v noci a Jáchym si jde uvařit kafe. Na plotýnku, kterou tvoří litinový válec o poloměru r a výšce h , položí konvici s tepelnou kapacitou C_k . Konvice obsahuje vodu o objemu V , která má počáteční teplotu T_v . Zbytek soustavy má počáteční teplotu T_s . Jaká je celková účinnost (tj. poměr energie přijaté vodou ku dodané energii) ohřevu vody z její počáteční teploty na teplotu $T = 100^\circ\text{C}$? Neznámé hodnoty si dohledejte v tabulkách, nebo je odhadněte. Předpokládejte, že děj proběhne tak rychle, že všechny tepelné ztráty můžeme zanedbat. Pro úplnost zadání nechtě $T_s, T_v < T$.

Nechť je hustota litiny ρ_l , její měrná tepelná kapacita je c_l . Celková kapacita soustavy tak je

$$C_s = C_k + \pi r^2 h \rho_l c_l.$$

²²Ceny plynů převzaty z <https://www.kurzy.cz/plyn/srovnani-cen> a <https://www.messer.sk/cennik>

²³Hustoty převzaty z <http://www.converter.cz/tabulky/hustota-plynu.htm>

Při ohřívání vody musíme nutně ohřát i plotýnku s konvicí, k čemuž jim musíme dodat teplo

$$Q_s = C_s (T - T_s) = (C_k + \pi r^2 h \rho_1 c_1) (T - T_s) .$$

Obdobně pro vodu máme ρ_v a c_v a musíme jí dodat teplo

$$Q_v = V \rho_v c_v (T - T_v) .$$

Účinností rozumíme poměr energie, která se využije na ohřev vody, a celkové dodané energie, tedy

$$\eta = \frac{Q_v}{Q_v + Q_s} = \frac{V \rho_v c_v (T - T_v)}{V \rho_v c_v (T - T_v) + (C_k + \pi r^2 h \rho_1 c_1) (T - T_s)} .$$

Nyní už jen zbývá dosadit realistické hodnoty. Naše plotýnka má poloměr $r = 10$ cm a výšku $h = 2$ cm. Konvice váží 500 g a je z oceli, její tepelná kapacita tedy je $C_k = 230 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$. Na kafe potřebujeme $V = 250$ ml vody. Můžeme předpokládat, že začátku má vše včetně vody teplotu $T_v = T_s = 20^\circ\text{C}$. Měrnou tepelnou kapacitu vody $c_v = 4180 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ a litiny $c_1 = 545 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$, stejně tak jejich hustoty $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a $\rho_1 = 7200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ jsme našli v tabulkách.

Dosazením hodnot do vzorce výše dostáváme odhad pro účinnost ohřevu vody $\eta \doteq 0,28$. Tato nadočekávaná vysoká hodnota je způsobena velkou tepelnou kapacitou vody v porovnání s kovy.

Úloha III.3 ... teplíčko v Dysonově sféře

Jaký poloměr by musela mít Dysonova sféra, aby obklopila hvězdu se zářivým výkonem Slunce tak, že na vnějším povrchu této sféry by byla teplota $t = 25^\circ\text{C}$? Neuvažujte přítomnost atmosféry v Dysonově sféře. Dysonova sféra by měla být relativně tenká dutá struktura kulového tvaru obklopující danou hvězdu.

Ze zadání plyne, že teplota Dysonovy sféry se ustálila na konstantní teplotě $t = 25^\circ\text{C}$. K vyřešení úlohy nám tedy stačí analyzovat tok energie Dysonovou sférou. Předpokládáme, že Dysonova sféra je schopná pohltit veškerou energii přicházející ze Slunce. Tato energie je přenášena v podobě elektromagnetického záření. Ze zadání víme, že daná hvězda má zářivý výkon Slunce²⁴ $L = 3,83 \cdot 10^{26}$ W. Tento výkon je rovnoměrně vyzařen do všech směrů. Množství energie, které dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry je

$$\frac{L}{S} = \frac{L}{4\pi r^2} ,$$

kde S je plocha Dysonovy sféry a r je její poloměr. Rozdíl vnitřního a vnějšího poloměru zanedbáváme. Dysonova sféra se navenek jeví jako absolutně černé těleso, protože veškerou energii z hvězdy pohltí a navenek vyzařuje pouze tepelné

²⁴Viz např. <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html>.

záření. Podle Stefanova-Boltzmannova zákona je celková intenzita M tepelného záření černého tělesa, což je celková energie vyzařená za jednotku času jednotkovou plochou zdroje záření, rovna

$$M = \sigma T^4,$$

kde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a $T = 298 \text{ K}$ je termodynamická teplota Dysonovy sféry.

Zářivý výkon hvězdy a výkon tepelného záření Dysonovy sféry jsou jediné zdroje záření, které musíme započítat. Přestože princip fungování Dysonovy sféry je schován v pomyslné černé skřínce, stačí nám vědět, že Dysonova sféra je schopna pohltit *veškerou* energii ze Slunce. Na druhou stranu, aby byl náš výpočet korektní, musí tepelné záření vnější plochy Dysonovy sféry navždy opustit tuto soustavu, což jsme mlčky předpokládali. Náš předpoklad byl v pořádku, neboť koule je konvexní těleso a energie vyzařovaná malou ploškou ΔS na jejím povrchu, sféře, uniká do prázdného poloprostoru. To nám zaručuje, že Dysonova sféra neozářuje sama sebe vnějším povrchem.

Nyní konečně dejme do rovnosti energii z hvězdy, která dopadne za jednotku času na jednotkovou plochu Dysonovy sféry, a intenzitu M tepelného záření Dysonovy sféry,

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T^4.$$

Odtud získáme hledaný poloměr r Dysonovy sféry,

$$r = \frac{1}{2T^2} \sqrt{\frac{L}{\pi\sigma}}.$$

Po číselném dosazení dostáváme, že hledaný poloměr Dysonovy sféry pro zadané podmínky je $r = 2,61 \cdot 10^{11} \text{ m} = 1,74 \text{ au}$.

Úloha III.4 ... destrukce smyčky

Představme si měděnou smyčku o poloměru r , která je určena rovinou, na níž je kolmé magnetické pole s magnetickou indukcí B . Maximální povolené tahové napětí ve smyčce je σ_p . Nyní začneme měnit magnetický tok ve smyčce z původní hodnoty Φ_0 podle vzahu $\Phi(t) = \Phi_0 + \alpha t$, kde α je kladná konstanta. Určete, za jak dlouho dosáhneme ve smyčce maximálního tahového napětí.

Nápověda Napětovou sílu ve smyčce můžeme spočítat jako $T = |BIr|$.

Zamysleme se nad tím, co se v úloze děje. V okamžiku, kdy začneme měnit magnetický tok procházející smyčkou, se v ní začne indukovat napětí a tedy i proud. Tuto skutečnost nám popisuje Lenzův zákon, který říká, že indukovaný elektrický proud v uzavřeném obvodu má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického indukčního toku, která je jeho příčinou. Systém se snaží jakoby vrátit do původního stavu, a proto má Lenzovská indukce směr opačný původnímu B . Řečí matematiky

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\alpha.$$

Indukovaný proud ve smyčce pak určíme snadno pomocí Ohmova zákona. Označíme-li odpor smyčky jako R , pak

$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{\alpha A}{\varrho 2\pi r},$$

kde A je průřez smyčky a ϱ rezistivita materiálu. Je zřejmé, že T závisí na B , a to závisí na čase. Pro moment t_0 , kdy dosáhneme maximálního tahového napětí, musí platit následující podmínka

$$\sigma_p = \frac{T(t_0)}{A} = \frac{B(t_0)Ir}{A} = \frac{B(t_0)\alpha}{2\varrho\pi}.$$

Dále musíme určit $B(t_0)$, z definice²⁵ získáme

$$B(t_0) = \frac{\Phi(t_0)}{\pi r^2} = \frac{\Phi_0 + \alpha t_0}{\pi r^2}.$$

Nyní stačí dosadit za $B(t_0)$ do vztahu pro tahové napětí, to pak přejde na

$$\sigma_p = \frac{(\Phi_0 + \alpha t_0)\alpha}{2\varrho\pi^2 r^2}.$$

Cílem úlohy bylo zjistit, za jaký čas se toto stane. Proto ze vztahu výše vyjádříme t_0 , finální výraz pak je

$$t_0 = \frac{2\pi^2 \varrho r^2 \sigma_p}{\alpha^2} - \frac{\Phi_0}{\alpha}.$$

V řešení jsme mlčky zanedbali vlastní magnetické pole indukovaného proudu. Z průřezu A bychom si mohli dopočítat vlastní poloměr vodiče a odhadnout velikost intenzity vlastního magnetické pole, nicméně typická smyčka má vlastní poloměr mnohem menší než poloměr R a tudíž můžeme tuto skutečnost zanedbat. Při řešení jsme taktéž zanedbali vlastní změnu rozměrů smyčky.

Pro zájemce

Tyto řádky jsou věnované řešitelům, kteří by rádi věděli, jak si odvodit nápovědu v zadání. Jak již víme z textu výše, v uzavřené smyčce se začne indukovat proud. Proto začne na vodič působit síla ve směru do středu smyčky (viz. obrázek) podle Ampérova zákona síla dána jako

$$d\mathbf{F} = Id\mathbf{l} \times \mathbf{B},$$

kde $d\mathbf{l}$ je malý element smyčky. Ten si můžeme vyjádřit pomocí malého úseku $d\Theta$ jako $r d\Theta$. Protože jsou na sebe vektory v rovnici kolmé, tak se vztah zjednoduší na

$$dF = IBrd\Theta.$$

²⁵Magnetický indukční tok vytvářený magnetickou indukcí \mathbf{B} na libovolně orientované ploše S je definován jako $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$. Pro homogenní pole a rovinou plochu platí $\Phi = BS \cos \alpha$ (úhel α svírá normálový vektor plochy s vektorem magnetické indukce). V našem případě jsou na sebe vektory kolmé.

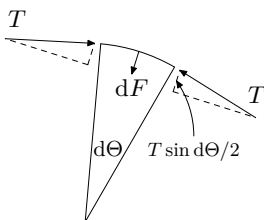
Z obrázku nyní můžeme vyjádřit tahovou sílu ve smyčce v závislosti na malém úhlu $d\Theta$. Horizontální složky se vyruší (jsou rovny $T \cos d\Theta/2$) a výsledná síla dovnitř smyčky (působící proti dF) je dána součtem dvou vertikálních složek, získáme tedy

$$dT = 2T \sin \frac{d\Theta}{2} \approx T d\Theta,$$

kde jsme použili aproximaci pro malé hodnoty argumentu funkce sinus. Z podmínky rovnováhy pak máme

$$IBrd\Theta = Td\Theta \quad \Rightarrow \quad T = IBr.$$

A máme dokázáno. Tento princip je ve fyzice velmi častý a doporučuji ho řádně prostudovat.²⁶



Obr. 14: Obrázek k nápovědě.

Úloha III.5 ... bodová

Uvažujme hmotný bod umístěný v jednodimenzionálním prostoru. Jeho počáteční pozice i rychlost je nulová. Bod se dokáže pohybovat s libovolným zrychlením z intervalu $[-a, a]$. Nazvěme $M(t)$ množinu všech možných stavů (x, v) takových, že bod se v čase t může nacházet na pozici x s rychlostí v . Sestrojme graf závislosti v na x v čase t . Množina $M(t)$ v tomto grafu vytvoří plochu $S(t)$. Analyticky popište křivky ohraničující $S(t)$.

Bonus Najděte funkční závislost obsahu $S(t)$.

Nejdříve podotkneme, že pokud je možné nějakého bodu (x, v) dosáhnout v čase t , zřejmě je možné ho dosáhnout i v jakémkoli větším čase tím, že se před začátkem pohybu budeme odpovídající časový rozdíl pohybovat s nulovým zrychlením. Z toho vyplývá, že množina M se v čase pouze zvětšuje.

Zvolme nějaký konkrétní čas t . Nyní si představme, že se po celou dobu od počátku do času t pohybujeme pouze se zrychlením a . Není těžké spočítat, že dosáhneme rychlosti $v_{\max} = at$ a polohy

$$x_{\max} = \frac{1}{2}at^2.$$

²⁶Dalším typickým příkladem na něj je např. capstan equation.

Toto je zřejmě největší rychlost a zároveň největší vzdálenost, které můžeme v daném čase dosáhnout, takže musí být součástí okraje množiny. Obráceně, nejdále v záporném směru se můžeme dostat do bodu ve vzdálenosti $x_{\min} = -x_{\max}$ s rychlostí $v_{\min} = -v_{\max}$.

Dále zkusme najít, jakou největší rychlost můžeme mít na souřadnici x . Pro každý bod od x_{\min} do x_{\max} tak najdeme horní hranici množiny pro rychlost bodu. Situace je zřejmě symetrická vůči současné změně znaménka u rychlosti a polohy, takže dolní hranici rychlosti najdeme pouhým bodovým zrcadlením výsledku vzhledem k počátku.

Abychom při pohybu z klidu dosáhli nějaké rychlosti, musíme zrychlovat a při tom nutně urazíme nějakou vzdálenost. Můžeme si rozmyslet, že pokud bychom se pohybovali s menším než maximálním zrychlením, jakékoli rychlosti bychom dosáhli na větší vzdálenosti než v případě pohybu s maximálním zrychlením. Jinak řečeno, chceme-li na co nejkratší vzdálenosti dosáhnout co největší rychlosti, musíme se pohybovat s maximálním zrychlením.

Snadno spočítáme, že pro zrychlení z nuly na v musíme urazit vzdálenost

$$\Delta x = \frac{v^2}{2a}.$$

Jakou maximální rychlost tak můžeme mít například v počátku, tedy v bodě $x = 0$? Jednoduše musíme nejdříve zrychlovat na opačnou stranu, čímž se dostaneme do záporných hodnot osy x . Potom můžeme začít zrychlovat v kladném směru, čímž se postupně vrátíme zpět do počátku, tentokrát už s kladnou rychlostí v .

Nyní zase vyvstává otázka, jak se v co nejkratším čase dostat co nejdále od počátku, abychom se pak mohli vrátit s co největší rychlostí? Odpověď je stejně prostá, jako celý zbytek úlohy – pohybem nejdříve s maximálním záporným zrychlením a hned poté s maximálním kladným zrychlením.

Pojďme konečně úvahy výše přepsat do rovnic. Pro daný čas t si zvolíme bod x a maximální rychlost, kterou v něm můžeme mít, označíme v . Po čas t_1 budeme mít zrychlení $-a$ a po další čas t_1 zrychlení a . Tím dosáhneme bodu $(y, 0)$. Odtud se budeme pohybovat se zrychlením a po dobu t_2 a konečně dorazíme do bodu (x, v) . Dostáváme rovnice

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}at_1^2 + \left(-at_1^2 + \frac{1}{2}at_1^2\right) = -at_1^2, \\ x - y &= \frac{1}{2}at_2^2, \\ v &= at_2, \\ t &= 2t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Známe a , t a x , neznáme v , t_1 , t_2 a y . Čtyři rovnice pro čtyři neznáme jsou přesně tolik co potřebujeme, abychom si z nich vyjádřili v . Nicméně zjistíme, že se neobejdeme bez odmocnin. Nám ale stačí najít vztah pro hraniční body v čase t , teda zbavit sa pomocných neznámých t_1 , t_2 a y . Dostat můžeme například rovnicí

$$x = \frac{1}{4a} (v^2 + 2vat - a^2t^2).$$

Což je samozřejmě parabola. Její osa je rovnoběžná s osou x , kterou parabola protíná v bodě $(x_1, 0)$, kde

$$x_1 = -\frac{1}{4}at^2,$$

což je nejvzdálenější bod v záporném směru, kam se můžeme dostat s nulovou konečnou rychlostí. Odtud vede hranice až do bodu (x_{\max}, v_{\max}) , který jsme určili dříve. Parabola samozřejmě pokračuje i dál, tam však nemá fyzikální smysl (příslušný čas t_1 by vyšel záporný). Nicméně stále ještě jsme nenalezli druhou hranici množiny od bodu (x_{\max}, v_{\max}) zpět na osu x .

Pokud se budeme pohybovat polovinu času t se zrychlením a a druhou polovinu se zrychlením $-a$, skončíme opět na ose x , tedy s nulovou rychlostí, na souřadnici

$$x_2 = \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}at^2 - \frac{1}{2}a\left(\frac{t}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{4}at^2.$$

Bod $(x_2, 0)$ tak zřejmě představuje největší vzdálenost, kam se můžeme od počátku na ose x dostat. Hranice množiny musí vést z bodu (x_{\max}, v_{\max}) do bodu $(x_2, 0)$.

Nyní stojíme před podobným problémem jako v první části řešení – snažíme se najít nejmenší rychlost, kterou můžeme mít pro dané x mezi x_2 a x_{\max} . Jednodušší však bude opačný postup – zkusme pro danou rychlost mezi 0 a v_{\max} najít největší x , do kterého se můžeme v čase t dostat.

Jistě je pravda, že maximálního x dosáhneme tehdy, pokud se v každém bodě trajektorie budeme pohybovat s největší rychlostí, s jakou to bude právě možné. Začneme tedy zrychlovat se zrychlením a , a to až do času τ . V čase τ naopak začneme brzdít se zrychlením $-a$, takže v čase t budeme mít rychlost v . První část dráhy se pohybujeme s maximálním zrychlením a a tedy i maximální možnou rychlostí. Naopak ve druhé části brzdíme nejvíce jak to jde, a tedy kdybychom měli ještě o něco větší rychlost, už bychom to do času t nedokázali ubrzdít na rychlost v .

Jednoduchou úvahou jsme ukázali, že tento způsob pohybu nám pro danou koncovou rychlost v zajistí největší možnou uraženou vzdálenost. Opět dostáváme sadu rovnic

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}a\tau^2 + \left(a\tau(t - \tau) - \frac{1}{2}a(t - \tau)^2\right), \\ v &= a\tau - a(t - \tau) = a(2\tau - t). \end{aligned}$$

Nyní máme jen dvě neznámé, a sice x a τ . Můžeme si tak vyjádřit

$$x = \frac{1}{4a} \left(a^2t^2 + 2vat - v^2\right).$$

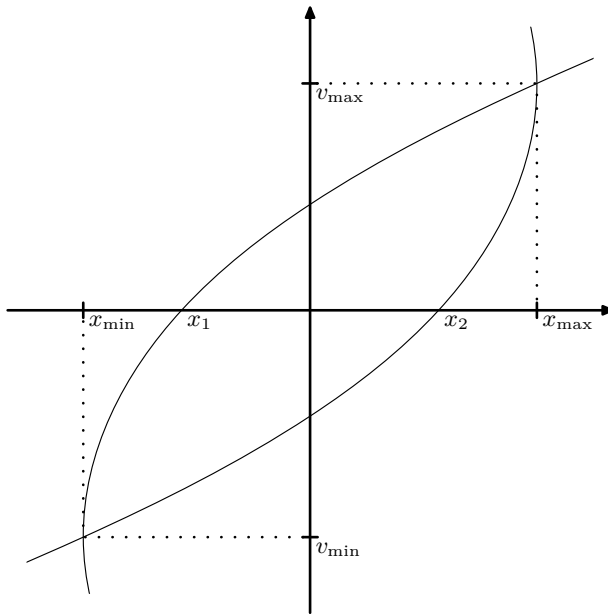
Pokud nám tento výsledek přijde povědomý, tak zcela oprávněně. Jedná se o parabolu, která nám vyšla již v první části, bodově převrácenou podle počátku. Jak jsme zmínili výše, ze symetrie situace vyplývá, že tato parabola tvoří dolní hranici množiny od bodu x_{\min} do bodu x_2 , zatímco první parabola vytváří dolní hranici od bodu x_{\min} do bodu x_1 .

Abychom shrnuli předchozí úvahy, množina všech bodů, ve kterých se můžeme v čase t nacházet, je ohraničená dvěma parabolami, bodově symetrickými vůči počátku. Jejich analytický předpis je

$$x = \frac{1}{4a} (v^2 + 2vat - a^2t^2) ,$$

$$x = \frac{1}{4a} (a^2t^2 + 2vat - v^2) .$$

Pro úplnost dodejme, že pro každý bod uvnitř ohraničeného prostoru můžeme najít takový čas τ , že $\tau < t$ a zároveň daný bod leží na jedné z hraničních parabol pro čas τ . To je podle vůbec první poznámky tohoto řešení důkazem, že celá plocha nemá žádné vnitřní hranice kolem oblastí, které by do hledané množiny nepatřily, ale zároveň by byly uvnitř vnějších hranic.



Obr. 15: Hranice výsledné množiny M v nějakém čase t .

Bonus

Pokud jste to dočetli až sem, tak jistě tušíte, že bonus je již jen triviální záležitost. Stačí vhodně zvolit podle čeho integrovat, abychom si zbytečně nepřidělávali práci.

Definujme první parabolu jako $x = f_1(v)$ a druhou jako $x = f_2(v)$. Potom pro obsah plochy S zřejmě platí

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{v_{\max}} (f_2(v) - f_1(v)) \, dv = \frac{1}{a} \int_0^{v_{\max}} (a^2 t^2 - v^2) \, dv = \\ &= \frac{1}{a} \left[a^2 t^2 v - \frac{v^3}{3} \right]_0^{v_{\max}} = \frac{2}{3} a^2 t^3. \end{aligned}$$

Úloha III.P . . . osobní powerbanka

Poslední procenta baterky v mobilu dochází, powerbanku máte vybitou nebo jste si ji pro jistotu nechali doma a 230 také není nikde v dohledu. Nebylo by skvělé mít neustále při sobě vlastní zdroj elektrické energie?

- Navrhněte několik různých zařízení, která by dokázala vyrábět elektrickou energii pouze ze zdrojů vašeho těla.
- Diskutujte jejich maximální výkon a účinnost. Co všechno byste s jejich pomocí dokázali zásobovat elektrinou?
- Diskutujte jejich dopad na vaše zdraví a fyzickou kondici. Které orgány by vám v důsledku jejich přetěžování selhaly nejdříve?

Jako jedno z možných zařízení uvažujte soustavu drobných turbín umístěných v krevním řečišti. Všechny argumenty podpořte co nejpřesnějšími výpočty.

Lidské tělo získává energii z přeměny chemických látek v potravinách na jiné. Tuto energii opět uchovává ve formě chemických vazeb. Největší část energie (kolem 80 %) se nakonec přemění na teplo a zbytek se spotřebuje při vypařování vody²⁷ Stálo by za to toto teplo využít a přeměnit ho na elektrickou energii. Dále se nabízí použít vhodně umístěné turbíny (například v krevním řečišti nebo v dýchací trubici). energii můžeme získat i spálením methanu a vodíku, produkovaných ve střevech. Jednu metodu již dlouhou dobu využíváme a tou je mechanická energie neboli práce svalů – určitě jste si již někdy točili klikou nabíjející svítilnu. Některé z těchto nápadů si detailněji rozebereme.

Nejdříve se podívejme na některá zařízení, která bychom chtěli napájet. Pro výpočet energie uložené v akumulátoru mobilního telefonu zvolme kapacitu $K = 2 \text{ Ah}$ a napětí $U = 4,5 \text{ V}$. Potom pro uloženou energii platí $E = KU = 32,4 \text{ kJ}$. Kapacity baterií chytrých hodinek se pohybují kolem $K = 300 \text{ mAh}$ s napětím $U = 3,8 \text{ V}$, takže uchovávají energii $E = 4,1 \text{ kJ}$. Nakonec se podívejme na velmi praktický přístroj, který se již vědci snaží napájet lidským tělem – kardiostimulátor, jehož průměrný příkon je $30 \mu\text{W}$ ²⁸

Turbínka v krevním řečišti

Abychom mohli získávat energii z krevního oběhu, potřebujeme do něj nainstalovat nějaký systém turbín. Z praxe víme, že s rozměry turbíny roste i její účinnost. Proto zvolme co nejméně turbín hned vedle srdce, kde jsou tepny a žíly nejširší. Otázkou

²⁷<https://opentextbc.ca/anatomyandphysiology/chapter/24-6-energy-and-heat-balance/>

²⁸https://link.springer.com/chapter/10.1007/2F978-3-642-50209-5_11

je z jaké strany. Jestli do místa, kde krev ze srdce proudí (aorta a výstup plicního oběhu), či naopak tam, odkud krev proudí do srdce (horní a dolní dutá žíla, vstup plicního oběhu). K této otázce se vrátíme později.

Práce W , potřebná na protlačení objemu V , je součinem síly a dráhy, na které daná síla působí. Je-li na počátku této dráhy tlak v kapalině p_1 a na konci tlak p_2 , výsledná síla bude

$$F = S(p_1 - p_2),$$

kde S je obsah plochy průřezu trubice. Proudí-li kapalina rychlostí v , pro výkon bude platit

$$P = Fv = Q(p_1 - p_2),$$

kde Q je objemový průtok kapaliny v trubici. U zdravého člověka zhruba odpovídá hodnotě²⁹ $Q = 0,071 \cdot \text{tep}^{-1} = 0,0841 \cdot \text{s}^{-1}$.

Tlak na začátku turbíny p_1 bude přibližně roven diastolickému tlaku, který pro zdravého člověka uvažujeme 90 mmHg. Pokud budeme tok krve takto brzdit, bude se srdce pravděpodobně snažit tuto ztrátu dohnat tím, že zvýší svůj výkon. Problémem je, že tato změna je velmi individuální (v závislosti na zdraví daného člověka) a nelze ji příliš dobře předpovídat. Navíc by tím docházelo k nadměrnému zatěžování srdce. Pokud bychom však počítali pouze malé rozdíly tlaků (při malém odporu turbíny), mohli bychom tuto skutečnost zanedbat. Pro větší rozdíly však můžeme vždy udělat dolní odhad předpokladem $p_1 = \text{konst.}$ Tlak p_2 umíme nastavit změnou odporu turbíny. Hledáme tedy co nejmenší diastolický tlak, kdy ještě nedochází k žádným dalším zdravotním potížím.

Takto způsobená porucha se odborně nazývá „Isolated diastolic hypotension“³⁰ a nastává při poklesu tlaku pod 60 mmHg, kdy člověk začne pocítovat únavu a může mít závratě. Ty jsou způsobeny špatným prokrvením mozku, čemuž lze předjet tím, že dáme turbínku na místa vtoku krve do srdce. Jediné nebezpečí tedy spočívá v nadměrném zatěžování srdce a v problémech s tím spojených, jako je například zvýšené opotřebovávání srdce. Ty se u lidí postižených touto vadou projevují až ve vyšším věku.

Jaká bude účinnost takové turbíny? Námi uvažované žíly mají průměr kolem 1 až 2 cm, což jsou pro výrobu přijatelné rozměry. Účinnost však při takových rozměrech bude hrál velkou roli, jelikož s klesajícími rozměry a výkonem výrazně klesá. Pozorováním závislosti účinnosti malých turbín na jejich výkonu³¹ můžeme optimisticky odhadnout účinnost vodní turbíny daných rozměrů na 10 %. Jelikož má krev přibližně stejnou hustotu jako voda ($1060 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$), nemusíme tento odhad z důvodu použití jiné kapaliny měnit.

Dosazením hodnot do vztahu výše dostáváme

$$P = \eta Q(p_{90} - p_{60}) = 0,02 \text{ W}.$$

Námi stanovenou baterii telefonu bychom tímto způsobem nabili za asi tři týdny.

²⁹<https://hypertextbook.com/facts/2001/VitaliyShchupak.shtml>

³⁰<https://www.uab.edu/mix/stories/diastolic-blood-pressure-how-low-is-too-low>

³¹https://ac.els-cdn.com/S187661021735124X/1-s2.0-S187661021735124X-main.pdf?_tid=b471dfa5-178d-4e57-92ee-a334313ce1c4&acdnat=1534083170_d5a9d5ddb0cd4230c8e48af14375ae92

Pokud bychom postupně zvyšovali odpor turbíny (třeba v rámci měsíců až let), mohlo by si srdce na vyšší potřebný tlak zvyknout a posílit se. Každopádně by tak docházelo k jeho rychlejšímu opotřebení.

Některá zdravotní rizika již byla zmíněna. Co jsme však doposud nezmínili je problém s nízkou účinností turbíny. Zbýlých 90 % (účinnosti jsme uvažovali jako 10 %) se totiž ve výsledku přemění na teplo. Toto teplo je však velmi rychle odváděno krví a pokud by nevznikalo těsně u stěn žil, které by mohlo poškozovat, nemělo by být nebezpečné. V poslední řadě je třeba zmínit možnou poruchu turbín, při které by mohlo dojít k ucpaní žil a následné vysoce pravděpodobné smrti. Dalším velmi vysokým rizikem je vznik trombu kvůli turbulencím, jež vedou ke krevním sraženinám a následné srdeční zástavě. V praxi bylo dosaženo $800 \mu\text{W}$ elektřiny pomocí podobného konceptu,³² což je řádově menší hodnota než námi vypočítaná. To může být způsobeno špatným odhadem účinnosti nebo tím, že jsme výkon turbíny tlačili až na samotnou hranici dlouhodobé přežitelnosti člověka. Tu však lze redukovat snížením odporu turbíny, čímž nastavíme nižší tlak, který pro srdce nebude přílišnou zátěží.

Mnohem slibnější koncept než turbíny využívá nanotrubiček³³ a v budoucnu by jím bylo možné napájet různé senzory uvnitř krevního řečiště, například pro diabetiky nebo nanoboty.

Síla fuku

Na podobném konceptu by mohla fungovat turbínka umístěná v hrtanu, kde však neproudí krev, ale vzduch. Potom můžeme použít výše zmíněný vzorec, upravený pro danou situaci. Tedy výkon foukací turbíny bude

$$P = \eta Q (p_{\text{fuk}} - p_{\text{atm}}) .$$

Účinnost turbíny η bude snížena díky tomu, že jí proudí vzduch místo krve. Na druhou stranu bude zvýšena tím, že bude moct být větší. Vzhledem k tomu, jak hrubé odhady zde děláme, můžeme jí považovat za stejnou jako v případě krve. Objem vydechovaného vzduchu a příslušný čas, který výdech trvá, lze snadno dohledat.³⁴ Pro normální nádechy můžeme odhadnout $V = 0,5\text{l}$. Jelikož se nadechujeme přibližně šestnáctkrát za minutu, turbínkou protéká $Q = 0,13\text{dm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ vzduchu. Při dýchání naše plíce obvykle vytvářejí přetlak 2 – 3 kPa vůči okolnímu prostředí. Maximální dosažitelný přetlak je přibližně³⁵ 15 kPa. Odhadněme, že přetlak 3 kPa oproti standardním 2 – 3 kPa by nebyl příliš obtížný na udýchání. Pak dostáváme výkon $P = 40\text{mW}$. Pro maximální použitelný přetlak 12 kPa (tedy navíc oproti normálnímu přetlaku, nutnému k dýchání), máme $P = 160\text{mW}$. Pomocí systému potrubí a klapek bychom mohli dosáhnout toho, že by vzduch turbínou proudil stále stejným směrem. Tím bychom docílili dvakrát většího výkonu.

³²<http://blogs.discovermagazine.com/80beats/2011/05/17/tiny-turbine-inside-arteries-could-power-pacemakers-and-cause-blood-clots>

³³<https://newsroom.wiley.com/press-release/angewandte-chemie-international-edition/how-draw-electricity-bloodstream-one-dimension>

³⁴<https://www.mada.org.il/en/about/engineer/challenge/respiratory-system>

³⁵http://flutopedia.com/refs_bpress.htm

Pro nižší přetlak uvedme pro srovnání, že nabití mobilního telefonu by trvalo téměř 230 h, chytré hodinky bychom nabili za 30 h. Spotřebu kardiostimulátoru pokrýváme přibližně tisíckrát.

Odpadní teplo

Teplo, jež vyzařují naše těla, má z velké části formu infračerveného záření. Pro generování elektrické energie uvnitř fotovoltaických článků je však nutné dosáhnout určité minimální energie dopadajícího záření. Typická solární křemíková buňka vyžaduje alespoň 1,1 eV, takže funkčnost je shora omezena vlnovou délkou dopadajícího záření přibližně 1200 nm.³⁶ Zdola je pak omezena³⁷ hodnotou 300 nm, viz graf 16.

Uvažujme absolutně černého člověka, jehož teplota je 37 °C. Celková intenzita záření bude

$$I = \pi \int_{300 \text{ nm}}^{1200 \text{ nm}} dI(\lambda),$$

kde $dI(\lambda)$ je spektrální intenzita záření, kterou můžeme spočítat z Planckova vyzařovacího zákona. Nás však zajímá elektrický výkon na jednotku plochy, čili musíme započítat ještě účinnost solárních panelů. Potom dostaneme

$$P_S = \int_{300 \text{ nm}}^{1200 \text{ nm}} \eta(\lambda) dI(\lambda).$$

Numerickou integrací nám vyšlo $P_S = 45 \text{ mW} \cdot \text{m}^{-2}$. Stanovme plochu lidského těla³⁸ na 2 m^2 . Výkon získaný pomocí fotovoltaických článků z lidského těla tedy činí $P = 90 \text{ mW}$, čímž můžeme náš telefon nabít za dobu přibližně 4 dní. Prakticky by bylo možné články implementovat do oblečení, čímž bychom získali mnohem více energie ze slunečního záření než z člověka samotného. Dalším nedostatkem fotovoltaických panelů, jež nebyl zmíněn, je, že při malých tocích energie nemusí vůbec dojít k sepnutí nabíjecí části a získaná energie je tak nulová.

Větrný pohon

Obecně se udává, že člověk za den vyprodukuje okolo $1,4 \text{ dm}^3$ plynu v podobě větrů,³⁹ jejichž složení je⁴⁰

- Dusík: 20 – 90 %
- Vodík: 0 – 50 %
- Oxid uhličitý: 10 – 30 %
- Kyslík: 0 – 10 %
- Methan: 0 – 10 %

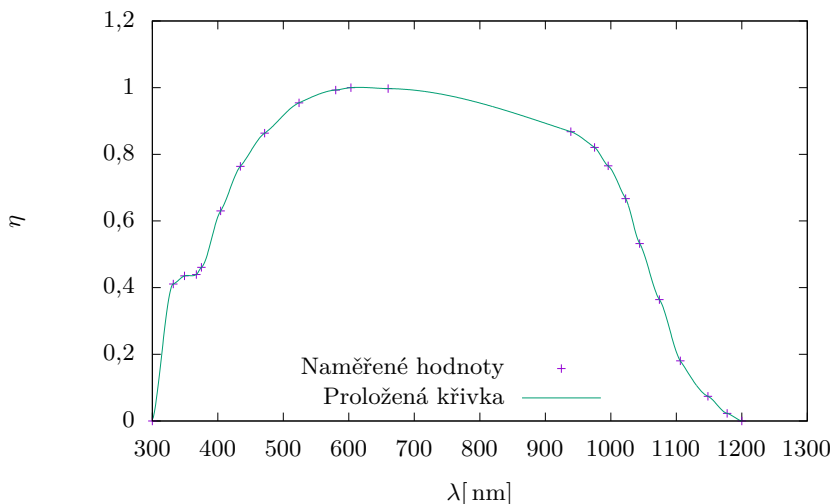
³⁶<https://sciencing.com/effect-wavelength-photovoltaic-cells-6957.html>

³⁷https://www.researchgate.net/figure/Relative-quantum-efficiency-versus-wavelength-at-several-discrete-temperatures-for-a_fig1_283165648

³⁸<https://www.calculator.net/body-surface-area-calculator.html?csex=m&bodyweight=85&bodyweightunit=kilogram&bodyheightfeet=&bodyheightinch=&bodyheight=180&x=96&y=23>

³⁹<https://www.telegraph.co.uk/men/the-filter/qi/10305094/QI-gas-facts-how-much-gas-does-the-average-human-produce.html>

⁴⁰<https://www.thoughtco.com/chemical-composition-of-farts-608409>



Obr. 16: Účinnost fotovoltaických článků v závislosti na vlnové délce dopadajícího záření.

Z toho jsou hořlavé vodík a methan. Produkce methanu není v lidském těle nijak velká, avšak spálením i jen malého množství můžeme získat hodně energie,⁴¹ přesněji $810 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Co se vodíku týká, jeho spálením lze získat až $120 \text{ kJ} \cdot \text{g}^{-1}$ neboli $240 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Ten by také bylo možné použít v palivovém článku, což je velmi perspektivní technologie s vyšší účinností než obyčejné spalování.

Za normálních podmínek je molární objem $22,4 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. Za den tak dokážeme vyrobit energii maximálně

$$W_p = 12,6 \text{ kJ}.$$

Na využití této energie bychom potřebovali nějaký druh spalovacího motoru, jejichž účinnost se většinou pohybuje v intervalu 10 – 50%.⁴² Uvažme tedy $\eta = 10\%$, jelikož i při velmi dobrém konceptu spalovacího motoru nesmíme zapomínat na to, že spalujeme pouze malé množství plynu. Účinnost spalovacích motorů totiž roste se zvyšující se teplotou. Takto by bylo možné získat energii přibližně $W = 1,3 \text{ kJ}$. To stačí na nabití přibližně 4% baterie námi uvažovaného telefonu.

Seebeckův efekt

K tomuto jevu⁴³ dochází při spojení dvou kovů či polovodičů s různými hodnotami Seebeckova koeficientu⁴⁴ a s rozdílnou teplotou. Mezi oběma částmi vznikne napětí

⁴¹https://www.wou.edu/las/physci/GS361/Energy_From_Fossil_Fuels.htm

⁴²https://cs.wikipedia.org/wiki/Spalovací_motor

⁴³<http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=194&sim=351&cnt=1>

⁴⁴<https://www.electronics-cooling.com/2006/11/the-seebeck-coefficient/>

a tedy i elektrický proud. Napětí lze jednoduše spočítat jako

$$U = \Delta\alpha\Delta T,$$

kde $\Delta\alpha$ je rozdíl Seebeckových koeficientů použitých materiálů a ΔT je rozdíl teplot.

Chceme vybrat dva materiály s co největším rozdílem Seebeckova koeficientu. V případě polovodičů je největší rozdíl mezi selenem a $\text{Pb}_{15}\text{Ge}_{37}\text{Se}_{58}$, jež činí $\Delta\alpha_p = 2890 \mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$. Při pokojové teplotě 21°C je teplotní rozdíl vůči teplotě lidského těla $\Delta T = 16\text{K}$, což odpovídá napětí přibližně $U = 46\text{mV}$. Jak je vysvětleno v článku⁴⁴ o seebeckově koeficientu, nelze z polovodičů sestavit fungující drátový systém a proto se používají spíše pro opačný Peltierův článek.⁴⁵ Pro Seebeckův je nutné použít kovy. Zvolme antimon a bismut, kde $\Delta\alpha = 119 \mu\text{V}\cdot\text{K}^{-1}$, tedy $U = 1,9\text{mV}$.

Podívejme se na nějaké reálné koncepty. Například v roce 2014 byl publikován článek,⁴⁶ podle kterého bylo dosaženo výkonu na plochu přibližně $1,5\text{mW}\cdot\text{m}^{-2}$. Jedním metrem čtverečním bychom pokryli zhruba polovinu lidského těla. V úvodu bylo zmíněno, že na nabití mobilního telefonu potřebujeme $32,4\text{kJ}$ energie, což by v tomto případě trvalo zhruba 250 dní. Pro napájení kardiostimulátoru by nám stačila plocha 200cm^2 .

Tato metoda je velmi bezpečná. Co se týče zatížení organismu, lidské tělo je v zimě připraveno zvýšit svůj tepelný výkon z přibližně 100W na zhruba 150W a ochlazování v řádech miliwattů, dokonce ani wattů, mu nezpůsobí žádné obtíže, takže omrzlin se bát nemusíme. Problém by samozřejmě nastal už při trochu větší zimě, jelikož kovové desky nelze považovat za příliš dobře izolující oblečení.

Pro napájení současných mobilních telefonů se všechny tyto koncepty ukázaly velmi nepraktické. Pokud však uvážíme podobnou elektroniku s menším příkonem, například energie získaná z větrného pohonu či krevní turbíny by pokryla polovinu elektrické spotřeby chytrých hodinek. Navíc všechny tyto možnosti byly dostatečné na napájení kardiostimulátoru, což je v dnešní době asi hlavní důvod zkoumání těchto přístrojů. Jako nejpraktičtější se jeví využití Seebeckova efektu či větrného pohonu, jelikož tato zařízení by bylo možné kdykoli sundat. Navíc nemají vedlejší efekty, jako je například možná smrt v případě turbíny v krevním řečišti.

Úloha IV.1 . . . kostka se vzduchem

Mějme dutou kostku s hranou délky $a = 20\text{cm}$ naplněnou vzduchem s teplotou $t_0 = 20^\circ\text{C}$, což je zároveň teplota okolí kostky. Vzduch uvnitř kostky ochladíme na $t_1 = 5^\circ\text{C}$. Jaká síla bude působit na každou stěnu kostky? Kostka při ochlazení vzduchu v ní nemění svůj objem. Tlak v okolí kostky je $p_0 = 101,3\text{kPa}$.

⁴⁵<https://www.sciencedirect.com/topics/chemistry/peltier-effect>

⁴⁶<http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0964-1726/23/10/105002>

Vzduch v kocke môžeme považovať za ideálny plyn, teda preň platí stavová rovnica. Keďže sa nemení objem vzduchu v kocke, ide o izochorický dej. Nech T je termodynamická teplota plynu, potom stavová rovnica platí v tvare

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_1}{T_1}.$$

Odtiaľ vyjadríme tlak plynu po ochladení

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}.$$

Sila F pôsobiaca na stenu kocky je tlaková sila vyvolaná rozdielom tlakov vnútri a mimo kocky Δp . Platí

$$F = S\Delta p,$$

kde $S = a^2$ je plocha steny. Teda

$$F = a^2 (p_0 - p_1),$$

$$F = a^2 p_0 \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \doteq 207 \text{ N}.$$

Keďže je tlak vnútri kocky nižší ako tlak okolia, sila pôsobí v smere do kocky.

Úloha IV.2 . . . utrhne se

Máme (nehmotný) provázek délky l a na jeho konci kuličku (hmotný bod) s hmotností m . Víme, že maximální tíha, co unese, je síla $F = mg$, kde g je místní tíhové zrychlení, ale už nic víc. Provázek upevníme a kuličku budeme držet ve stejné výšce, jako je místo upevnění, ve vzdálenosti délky provázku od druhého konce provázku, ale tak, abychom ho nenapínali. Kuličku uvolníme a ta se začne vlivem tíhového zrychlení pohybovat. Pod jakým úhlem provázku vůči svislé rovině se provázek přetrhne?

Keď sa guľička nachádza v hĺbke h pod vodorovnou rovinou, z ktorej bola vypustená, zo zákona zachovania mechanickej energie máme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2.$$

Pohyb guľičky ale chceme popisovať pomocou uhlu α , ktorý zvierá povrázok so zvislým smerom. Pre hĺbku h teda máme

$$h = l \cos \alpha,$$

čo po dosadení a vyjadrení rýchlosti dáva

$$v = \sqrt{2gl \cos \alpha}.$$

Na guličku působí tiažová sila smerom nadol a sila povrázku v smere k závesu. Výslednica týchto síl spôsobuje, že sa gulička pohybuje po kružnicovej trajektórii s polomerom l , preto platí bilancia zložiek síl v smere povrázku

$$\frac{mv^2}{l} = F_p - F_g \cos \alpha.$$

Povrázok je teda napínaný silou

$$F_p = 2mg \cos \alpha + mg \cos \alpha = 3mg \cos \alpha.$$

Pretrhne sa práve vtedy, keď táto sila prevýši mg , teda keď pre uhol odtrhnutia α_0 platí

$$\begin{aligned} F_p &= mg, \\ \cos \alpha &= \frac{1}{3}, \\ \alpha &= 70,5^\circ, \end{aligned}$$

teda keď povrázok zvierá so zvislým smerom uhol asi $70,5^\circ$.

Úloha IV.3 . . . levitující

Matěj má rád levitující věci, a tak si pořídil nekonečnou nevodivou nabitou vodorovnou rovinu s plošnou nábojovou hustotou σ . Poté nad ní umístil míček o hmotnosti m nabitý nábojem q . Vypočítejte, pro jaké hodnoty σ může míček vůbec nad deskou levitovat. V jaké výšce h se pak může vznášet? Uvažujte konstantní tíhové zrychlení g .

Nejtěžší částí této úlohy je asi výpočet velikosti odpudivé síly, kterou deska působí na míček. Na to je potřeba vypočítat elektrickou intenzitu ve výšce h nad deskou. Na to lze jít několika způsoby.

Nejjednodušší je najít si v tabulkách vzoreček pro elektrickou intenzitu E nekonečné nabitě roviny. Ta je všude nad deskou stejná a její velikost je z tabulek $E = \frac{\sigma}{2\epsilon}$.

Druhá možnost je aplikování Gaussova zákona, který říká, jak je tok elektrické intenzity libovolnou uzavřenou plochou závislý na náboji uvnitř, neboli

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon}.$$

Vypadá to komplikovaně, ale zvolíme-li správnou plochu, nemusíme ani integrovat. Ze symetrie předpokládáme, že všechny elektrické siločáry jsou kolmé na desku, protože zde nemůže být žádný jiný preferovaný směr. Představme si libovolný Gaussov válec (to je takový válec, jehož podstavy jsou rovnoběžné s deskou a deska prochází jeho středem). Jeho pláštěm tedy nebude procházet žádný tok elektrické intenzity. Zároveň má intenzita na obou podstavách stejnou (konstantní) hodnotu, protože jsou od desky stejně daleko, takže integrál můžeme vypustit. Také

víme, že vektor intenzity je vždy kolmý na podstavu, čili skalární součin přejde ve standardní součin. Má-li podstava plochu S , integrál přejde do tvaru

$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon}.$$

Nyní stačí jen dosadit náboj uvnitř $Q = \sigma S$ a dostaneme stejný vzoreček jako předtím.

Třetí možností (pro ty, co neznají Gaussův zákon ani tabulky, ale zato rádi integrují) je výpočet přímo z Coulombova zákona. Celou rovinu si rozdělíme na malinké čtverečky a dvakrát integrujeme

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{x^2 + y^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}} dx dy,$$

kde $x^2 + y^2 + h^2$ je vzdálenost od míčku a zlomek $\frac{h}{\sqrt{x^2 + y^2 + h^2}}$ zaručuje, že sčítáme pouze kolmou složku. Samozřejmě nemusíme integrovat v kartézských souřadnicích. Mohli jsme si celou rovinu také rozsekát na soustředné kružnice a integrovat v polárních souřadnicích. Tyto integrační metody však ponecháme jen labužníkům a integrály se nebudeme již dále zabývat, když můžeme použít například Gaussův zákon.

Máme tedy $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$. Předpokládáme-li, že Matěj provádí experiment ve vzduchu, jehož permitivita je velmi blízká permitivitě vakua, můžeme psát $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

Nyní stačí vyjít z rovnosti tíhové a elektrické síly

$$\begin{aligned} F_e &= F_g, \\ Eq &= mg, \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} q &= mg, \\ \sigma &= \frac{2mg\varepsilon_0}{q}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že elektrická síla vůbec nezávisí na výšce h nad deskou. Stejně tak pro konstantní tíhové zrychlení tíhová síla nezávisí na výšce. Proto je možné docílit levitace pouze při nábojové hustotě vypočtené výše. Míček ale zase bude levitovat v libovolném místě. Kdyby byla nábojová hustota větší, míček by odletěl do nekonečna a kdyby byla menší, míček by spadnul.

Pokud bychom uvažovali přesnější model s tíhovým zrychlením klesajícím s druhou mocninou vzdálenosti, byla by levitace nestabilní (tzn. při výchylce nahoru by převládla odpudivá elektrická síla a při výchylce dolů by byla větší tíhová přitažlivá síla).

Úloha IV.4 . . . trampolína

Dva hmotné body skákaly na trampolíně do výšky $h_0 = 2$ m. Ve chvíli, kdy oba byly v nejnižším možném místě trajektorie (výchylka $y = 160$ cm), jeden z nich záhadně zmizel. Do jaké nejvyšší výšky byl druhý vymrštěn? Kruhová trampolína má obvod $o = 10$ m a pruží díky $N = 42$ pružinám s tuhostí $k = 1720 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Trampolínu modelujeme N pružinami rozmístěnými rovnoměrně a spojenými ve středu. Hmotnost zmizelého hmotného bodu je $M = 400$ kg.

K řešení úlohy použijeme zákon zachování energie. Nejdříve zjistíme, jak velké množství energie bylo uloženo v pružinách v okamžiku, kdy se nacházely oba body v nejnižší poloze (maximální výchylce trampolíny). Posléze přepočteme energii pružnosti trampolíny na rozdíl v potenciální energii vystřeleného hmotného bodu, z čehož nakonec určíme maximální dosaženou výšku h .

Potenciální energie pružnosti E_p závisí na velikosti deformace neboli na natažení pružin δx , a parametru pružnosti, který je v našem případě charakterizován tuhostí k

$$E_p = \frac{1}{2} N k \delta x^2,$$

kde N je počet natažených pružin trampolíny. Prodloužení pružin δx určíme pomocí Pythagorovy věty dosazením maximální výchylky y a poloměru vypočteného z obvodu kruhu $r = o/2\pi$, tedy

$$y^2 + r^2 = (r + \delta x)^2.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\delta x = \sqrt{r^2 + y^2} - r.$$

Dále potřebujeme zjistit hmotnost vystřeleného bodu m , kterou vypočteme pomocí rovnosti potenciální energie obou hmotných bodů při výskoku a energie pružnosti E_p

$$\frac{1}{2} N k \delta x^2 = (M + m) g (y + h_0).$$

Vyjádřením m z poslední rovnice dostáváme

$$m = \frac{N k \delta x^2}{2g(y + h_0)} - M.$$

A nakonec maximální dosaženou výšku h vystřeleného hmotného bodu získáme řešením rovnice

$$E_p = m g (y + h).$$

Výsledkem je

$$h = \frac{E_p}{m g} - y,$$

kde už jen zbývá dosadit za neznámé veličiny z rovnic výše. Prostým dosazením číselných hodnot pak dostáváme, že hmotný bod vystoupal do výšky $h = 29,38$ m.

Ještě zdůrazněme, že jsme mohli použít tyto jednoduché přepočty na základě ZZE, protože systém se v nejnižším místě trajektorie nacházel v nerovnovážné poloze, kde byla veškerá energie z výskoku uložená v natažených pružinách a hmotné body neměly žádnou kinetickou energii.

Úloha IV.5 . . . frisbee

Tenký homogenní disk obíhá na vodorovné podložce po kružnici s poloměrem R . Velikost rychlosti těžiště disku je v . Určete úhel α mezi rovinou disku a svislým směrem. Tření mezi diskem a podložkou je dostatečné. Poloměr disku je řádově menší než R .

Hmotnost disku a jeho poloměr označme m a r , potom pro jeho moment setrvačnosti kolem osy kolmé na rovinu disku platí

$$J = \frac{1}{2}mr^2.$$

Disk kolem této osy rotuje s úhlovou rychlostí ω . Jeho moment hybnosti vzhledem k této ose je $L = J\omega$. Disk se stále dotýká podložky, takže pro jeho rychlost pohybu máme

$$v = \omega r = \Omega R,$$

kde Ω je úhlová rychlost oběhu disku po kružnici. Za čas dt se disk (přesněji průmět disku do podložky) otočí o úhel $d\varphi = \Omega dt$. Vodorovná složka momentu hybnosti $L_x = L \cos \alpha$ se při tom změní o $dL_x = L_x d\varphi$, svislá složka zůstane stejná.

Na střed disku působí tíhová síla $F_g = mg$. Ta je vyrovnaná tlakovou silou roviny, po které se disk pohybuje. To způsobuje moment síly vzhledem k ose procházející středem disku

$$M_1 = F_g r \sin \alpha.$$

Zároveň na disk působí třecí síla podložky, která je dostředivou silou, pro kterou platí $F_d = m\Omega^2 R$. Ta způsobuje moment

$$M_2 = -F_d r \cos \alpha.$$

Celkový moment sil se rovná derivaci momentu hybnosti podle času. V tomto případě z geometrie situace vyplývá

$$M_1 + M_2 = \frac{dL_x}{dt} = L_x \Omega.$$

Postupným dosazováním za všechny neznámé dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3v^2}{2Rg}.$$

Můžeme psát výsledek $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3v^2}{2Rg}$.

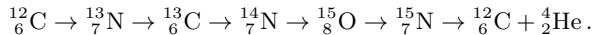
Úloha IV.P . . . V-1 ve vesmíru

Mezihvězdný prostor není prázdný, nýbrž obsahuje nepatrné množství hmoty. Uvažujte jen vodík, potřebnou hustotu si vyhledejte. Mohla by existovat kosmická loď, jež by „nasávala“ vodík před sebou a využívala energii z něj? Jak rychlá a velká by musela být, aby udržela termojadernou fúzi jen z přijatého vodíku? Jaké jiné překážky realizace je rozumné uvažovat?

Dosažení termojaderné fúze se lidstvu již daří, bohužel se však zatím nedaří ji realizovat kontrolovaně tak, aby vyprodukovala více energie, než kolik se spotřebuje na ohřev plazmatu. Proto je důležité umět tuto reakci nastartovat tak, aby naše loď neskončila rozptýlena po mezihvězdném prostoru. Tato část problému ještě není pro naše účely dostatečně dobře zvládnutá, ač se předpokládá, že ITER, jehož spuštění je plánováno na rok 2025, by měl vytvořit více energie, než kolik spotřebuje na svůj provoz.

Problém je, že v ITERu používají reakci deuteria a tritia, kdežto v mezihvězdném prostoru se vyskytuje téměř jen lehký vodík. To je nemilé, protože slučování dvou protonů na jádro deuteria je sice exotermická reakce, ale protože je zprostředkována slabou interakcí,⁴⁷ probíhá (dokonce i ve hvězdách) jen velice pomalu a při srážkách dominuje krátkodobé spojení na diproton, který se téměř okamžitě rozpadá zpět na dva protony. Toto se v pozemských podmínkách nedaří překonat a proto se o lehkém vodíku jako o palivu pro termojadernou fúzi zatím ani neuvažuje.

Pokud chceme urychlit chemické reakce, jedna z obvyklých metod je přidání katalyzátoru. To je látka, která se v reakci nespotřebovává, ale vstupuje do ní a tím usnadňuje (a tedy i urychluje) její průběh. V některých jaderných reakcích lze dosáhnout podobného efektu přidáním nějakého specifického izotopu. Například pro slučování protonů na jádro helia existuje CNO cyklus, kde v nejjednodušší variantě⁴⁸ probíhají postupné přeměny mezi těmito jádry (nepíšeme přidávané protony, odcházející pozitrony z β^+ rozpadu a fotony)



Výhoda tohoto postupu je, že slučování protonů na jádro deuteria nahrazujeme β^+ rozpadem, který není vázaný na počet srážek v plazmatu. Nevýhodou však je, že kvůli většímu náboji zúčastněných jader musíme překonat vyšší coulombickou bariéru a tedy proces probíhá až při vyšších teplotách.⁴⁹

Termojaderná fúze je sice exotermická reakce, ale k jejímu nastartování musíme překonat energetickou bariéru, která činí řádově 0,1 MeV. K tomu je třeba dosáhnout teploty přes $100 \cdot 10^6$ °C. V klasických tokamacích se plazma ohřívá několika způsoby. Jednak pomocí urychleného svazku částic, přičemž urychlení probíhá podobně jako na klasickém urychlovači částic. Dále se ohřívá indukci vířivých proudů,

⁴⁷ Jak je nutné vždy, když se v reakci přeměňuje proton na neutron nebo naopak.

⁴⁸ Existují i jiné varianty probíhající při ještě vyšších teplotách. Více se dá zjistit kupříkladu na en.wikipedia.org/wiki/CNO_cycle.

⁴⁹ Ve Slunci představuje asi 1,7 % výroby ${}^4\text{He}$, dominuje až u hvězd 1,3 krát hmotnějších, než Slunce.

podobně jako na indukční varné desce. V naší lodi bychom místo toho mohli energetickou bariéru překonávat kinetickou energií dopadajících protonů. K tomu je třeba, aby energie dopadajících protonů byla zhruba 0,1 MeV. Což, pokud kinetickou energii protonů přepočítáme na rychlost,⁵⁰ odpovídá zhruba 1,5 % c , tedy cca $4\,400\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Naše loď by musela letět minimálně touto rychlostí, pokud jsou protony v prostoru „téměř nehybné“.

Uvažujme, kolik energie by vlastně taková kosmická loď vyžadovala. Ačkoliv vesmírná tělesa létají ohromnou rychlostí, musíme si uvědomit, že kosmické prostředí klade tělesům zanedbatelný odpor, takže je třeba raketě dodávat jen energii na zrychlování, zpomalování a změnu směru letu. Z čehož lze usoudit, že většina energie se spotřebuje při startu a pak je víceméně potřeba energie jen na provoz samotné lodi. Mezinárodní vesmírná stanice (ISS) spotřebuje na svůj provoz něco pod 100 kW příkonu, což použijeme jako řádový odhad spotřeby. Když uvážíme, že ze čtyř protonů získáme maximálně přibližně 25 MeV energie,⁵¹ lze spočítat, že ISS by za sekundu spotřebovala přibližně 10^{17} protonů při ideální účinnosti fúzního reaktoru. To by znamenalo, že při typických hustotách částic v naší galaxii⁵² $\rho = 2\cdot 5\cdot 10^5\text{ m}^{-3}$ a sběrnou plochou někde kolem⁵³ $S = 1\text{--}100\text{ m}^2$ bychom se museli při neuvážení speciální teorie relativity pohybovat rychlostí řádově⁵⁴ $10^9\text{--}10^{11}\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, takže po započítání relativistické kontrakce dostaneme rychlost téměř rovnou rychlosti světla. Z toho můžeme usoudit, že posbírat dost vodíku na rozumný provoz lodi je obtížné až nemožné, minimálně s technologií blízké budoucnosti.

Nakonec odhadněme, kolik vodíku by se ve výsledku na lodi spotřebovalo. Hodnota 10^{17} částic se sice zdá jako hodně velké číslo, ale po přepočtení na gramy zjistíme, že na jednu sekundu provozu spotřebujeme zhruba 170 ng vodíku. To znamená, že 1 kg vodíku by při ideální účinnosti stačilo na 200 let provozu. Proto se zdá rozumnější vzít si palivo s sebou. To by nám navíc umožnilo použít deuterio-tritiovou reakci⁵⁵ která se zdá být daleko snadněji realizovatelnou. Navíc bychom nemuseli řešit zbytečné technické problémy se zachytáváním vodíku.

Pokud bychom přeci jen chtěli k pohonu využít „něco, co posbíráme cestou“, nabízí se jedna velice zajímavá možnost, a to použít miony z kosmického záření. Mion je elementární částice podobná elektronu, která ale má $200\times$ vyšší hmotnost. Pokud nahradíme v molekule vodíku elektrony miony, kvůli větší hmotnosti budou blíže jádru a proto se zásadně zmenší délka vazby v molekule H_2 . Díky tomu se jádra dokáží dostat velmi blízko a splynout při relativně nízké teplotě – pro deute-

⁵⁰ Vztah pro relativistickou kinetickou energii je $E_k = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$.

⁵¹ Celková energie reakce je 26,73 MeV, ale část energie odchází ve formě kinetické energie neutron, které s látkou téměř neinteragují.

⁵² Hustota je silně variabilní, obecně klesá směrem od středu galaxie, toto je rozumná hodnota ve velké části galaxie podle en.wikipedia.org/wiki/Interstellar_medium. Slunce se ale nachází v cca 300 ly velké bublině, vzniklé po dávném výbuchu supernovy, kde je hustota cca desetkrát menší.

⁵³ Jedná se jen o řádový odhad toho, co je rozumně zkonstruovatelné.

⁵⁴ Používáme vztah $N = S\rho v$, s relativisticou kontrakcí by tento vztah byl správně $N = S\rho v \sqrt{\frac{1}{1-v^2/c^2}}$

⁵⁵ Samozřejmě bychom museli řešit to, že tritium se průběžně rozpadá s poločasem přibližně 12 let.

rium a tritium k fúzi dochází již za pokojové teploty! V pozemských podmínkách toto bohužel není použitelné, protože na vytvoření jednoho mionu spotřebujeme o mnoho řádů víc energie, než kolik se pak uvolní fúzí. Pokud bychom ale měli miony „zadarmo“ z kosmického záření,⁵⁶ byli bychom ve výkonu reaktoru limitováni jen jejich počtem. Bohužel kvalifikovaný odhad množství získaných mionů a tedy i výkonu sahá za rámec tohoto textu.⁵⁷

Úloha V.1 . . . procházka u silnice

Matěj jde podél silnice konstantní rychlostí a každých 7 minut potká tramvaj, která jede proti němu. Jednou za 10 minut ho mine tramvaj jedoucí opačným směrem. Tramvaje jezdí v obou směrech se stejnou frekvencí. S jakou?

Uvažujme, že tramvaje jezdí konstantní rychlostí v s konstantními dráhovými rozestupy s . Jejich perioda tedy je

$$T = \frac{s}{v}.$$

Matějovu rychlost označíme u . Perioda tramvajů jedoucích proti němu bude

$$T_1 = \frac{s}{v + u}. \quad (6)$$

A pro periodu tramvajů jedoucích stejným směrem, jako Matěj jde, platí

$$T_2 = \frac{s}{v - u}. \quad (7)$$

Z (6) si vyjádříme Matějovu rychlost

$$u = \frac{s - T_1 v}{T_1},$$

kterou dosadíme do (7) a dostáváme

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{s}{v - \frac{s - T_1 v}{T_1}}, \\ T_2 \left(2v - \frac{s}{T_1} \right) &= s, \\ 2v T_2 &= s \left(1 + \frac{T_2}{T_1} \right), \\ T &= \frac{s}{v} = \frac{2T_2}{1 + \frac{T_2}{T_1}} = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 8,24 \text{ min}. \end{aligned}$$

Frekvence tramvajů je tedy $f = \frac{1}{T} \doteq 0,121 \text{ min}^{-1} \doteq 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Z výsledného vztahu také vyplývá, že f je aritmetickým průměrem obou naměřených frekvencí.

⁵⁶Miony se sice v kosmickém záření nevyskytují, protože mají poločas rozpadu v řádu mikrosekund, ale vznikají nárazem jiných energetických částic do hustého prostředí.

⁵⁷Zájemcům o hlubší pochopení pro začátek doporučujeme k prostudování en.wikipedia.org/wiki/Muon-catalyzed_fusion

Úloha V.2 . . . hloubka vniku do koule

Představte si, že máte podchlazenou plnou kovovou homogenní kouli, kterou vy-
táhnete z mrazáku, který máte nastavený na opravdu nízkou teplotu. Zajímalo by
vás, jak rychle se bude zvyšovat její teplota, když ji umístíte do zahřáté místnosti.
Protože by to jinak byl vysokoškolský problém, tak jsme pro vás úlohu zjednodu-
šili. Ptáme se na odhad hloubky vniku (v metrech) „teplé oblasti“ do koule, který
můžete získat rozměrovou analýzou. Známe relevantní parametry koule, konkrétně
hustotu $[\rho] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$, měrnou tepelnou kapacitu $[c] = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a její součinitel
tepelné vodivosti $[\lambda] = \text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a zajímá nás závislost na čase $[t] = \text{s}$.

Zadání je zjednodušením úlohy z jedné maďarské soutěže.⁵⁸ Na odkaze uvedeném
v poznámce pod čarou naleznete i náznak komplikovanějšího řešení.

Nejdříve poznamenejme něco k rozměrové analýze. Jde o metodu, díky které
můžeme někdy z pouhé znalosti jednotek relevantních veličin určit nějakou dal-
ší veličinu se známou jednotkou. Bohužel pomocí této metody nezjistíme přesný
vztah, protože nám zůstane nějaká bezrozměrná multiplikační konstanta, kterou
musíme určit buď měřením, nebo poctivým fyzikálním odvozením. Také se tato
metoda může hodit v nějakých úlohách FYKOSu.

Pro zajímavost - ve fyzice se používají také tzv. podobnostní čísla. Zejména
v mechanice a dynamice tekutin je známé například Reynoldsovo číslo či Weberovo
číslo. Jde o bezrozměrné veličiny, které nám říkají něco o tom, jestli je proudění
turbulentní, jak se nám budou formovat bubliny atd. K určení těchto čísel můžeme
také použít rozměrovou analýzu s tím, že hledaná veličina má být bezrozměrná.

Nyní k řešení samotné úlohy. Dle předpokladu má pro hloubku vniku x platit

$$x = C \rho^\alpha c^\beta \lambda^\gamma t^\delta.$$

Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} m &= (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})^\beta \cdot (\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1})^\gamma \cdot \text{s}^\delta = \\ &= (\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})^\alpha \cdot (\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\cdot\text{K}^{-1})^\beta \cdot (\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{K}^{-1})^\gamma \cdot \text{s}^\delta. \end{aligned}$$

Využili jsme vztahy pro přepis jednotek energie a výkonu na základní jednotky SI
($\text{J} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$ a $\text{W} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$). Vzhledem k tomu, že rovnice musí platit i pro
rovnosti jednotlivých jednotek, rozepíšeme si ji do soustavy čtyř rovnic pro čtyři
neznámé exponenty $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. V pořadí pro jednotky kg, m, s a K to jsou

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \gamma, \\ 1 &= -3\alpha + 2\beta + \gamma, \\ 0 &= -2\beta - 3\gamma + \delta, \\ 0 &= -\beta - \gamma. \end{aligned}$$

⁵⁸Peter Vankó: *Eötvös Competition - a small competition with great influence*, subkapitola
3.2. Dostupné z http://eik.bme.hu/~vanko/wfphc/Eotvos_comp_Vanko_paper.pdf.

Když soustavu vyřešíme, dostaneme $\alpha = \beta = -1/2$ a $\gamma = \delta = 1/2$, tedy výsledná rovnice pro hloubku vniku je

$$x = C \sqrt{\frac{\lambda t}{c \rho}}.$$

Tím jsme dostali požadovaný vztah a v rámci toho, že jde o jednoduchou úlohu na rozměrovou analýzu, dále hodnotu konstanty C neřešíme.

Úloha V.3 . . . přepážka

Představme si akvárium tvaru krychle o straně $a = 1$ m, které je vertikální přepážkou kolmou na stěny akvária rozděleno na dvě části. Dále uvažujeme, že se tato přepážka může volně pohybovat ve směru kolmém na rovinu přepážky, ale ve zbylých dvou směrech se pohybovat nemůže. Také nemůže rotovat. Do jedné části akvária nalijeme $V_1 = 2001$ vody o hustotě $\rho_v = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a do druhé části nalijeme $V_2 = 2301$ oleje o hustotě $\rho_o = 900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jaká bude rovnovážná poloha přepážky? Jaké budou výšky hladin kapalin v jednotlivých částech akvária v rovnovážném stavu?

Bonus Najděte frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy. Předpokládejte, že přepážka má hmotnost $m = 10$ oz a že přesun vody probíhá bez jakéhokoli tření a odporu.

Označme vzdálenost přepážky od okraje první části x . Potom voda sahá do výšky

$$y_1 = \frac{V_1}{ax}$$

a olej sahá do výšky

$$y_2 = \frac{V_2}{a(a-x)}.$$

Sílu, kterou kapalina působí na přepážku, spočítáme jako součin tlaku v kapalině a plochy přepážky, v které tento tlak působí. Tlak v kapalině se s hloubkou mění podle vzorce $p = h\rho g$, což vede na integrál. Tomu se však můžeme vyhnout, když si uvědomíme, že nižší tlak v horní polovině přepážky kompenzuje vyšší tlak v dolní polovině.⁵⁹ Můžeme tak uvažovat, že na celou přepážku působí stejný průměrný tlak. Pro sílu způsobenou tlakem vody dostáváme

$$F_1 = \frac{1}{2} y_1 \rho_v g a y_1 = \frac{V_1^2 \rho_v g}{2ax^2},$$

zatímco pro sílu způsobenou tlakem oleje platí

$$F_2 = \frac{1}{2} y_2 \rho_o g a y_2 = \frac{V_2^2 \rho_o g}{2a(a-x)^2}.$$

⁵⁹Exaktní výpočet by se provedl tak, že $dF = p(y)ady$, odkud vidíme, že se integruje lineární funkce, tedy vznikne faktor $1/2$.

Z podmínky rovnováhy vyplývá rovnost sil, tedy $F_1(x_0) = F_2(x_0)$. Odtud dostáváme kvadratickou rovnici

$$\left(\frac{V_2^2 \varrho_o}{V_1^2 \varrho_v} - 1 \right) x_0^2 + 2ax_0 - a^2 = 0,$$

jejímž řešením je

$$x_0 = \frac{a}{\left(\frac{V_2^2 \varrho_o}{V_1^2 \varrho_v} - 1 \right)} \left(-1 \pm \frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{\varrho_o}{\varrho_v}} \right).$$

Fyzikální smysl má zřejmě kořen s $+$. Výsledkem úlohy tak je, že přepážka se ustálí ve vzdálenosti

$$x_0 = a \left(\frac{V_2^2 \varrho_o}{V_1^2 \varrho_v} - 1 \right)^{-1} \left(\frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{\varrho_o}{\varrho_v}} - 1 \right) = a \left(\frac{V_2}{V_1} \sqrt{\frac{\varrho_o}{\varrho_v}} + 1 \right)^{-1} \doteq 48 \text{ cm}$$

od stěny první části akvária. Výšky kapalin obou částech akvária získáme dosažením za x do prvních dvou rovnic

$$y_1 = \frac{V_1}{ax_0} \doteq 42 \text{ cm},$$

$$y_2 = \frac{V_2}{a(a - x_0)} \doteq 44 \text{ cm}.$$

Bonus

Spočítejme potenciální energii soustavy s přepážkou na souřadnici x . Opět můžeme použít střední hodnotu výšky, ve které se kapaliny nachází. Dostáváme tak

$$V = V_1 \varrho_v g \frac{y_1}{2} + V_2 \varrho_o g \frac{y_2}{2} = \frac{g}{2a} \left(\frac{V_1^2 \varrho_v}{x} + \frac{V_2^2 \varrho_o}{a - x} \right).$$

Pro frekvenci malých kmitů kolem rovnovážné polohy x_0 platí

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}.$$

Pokud vám tento vzorec přijde cizí, zde je jeho odvození. Potenciál, který nám vyšel, je v okolí rovnovážné polohy zřejmě spojitá a nekonečně diferenciovatelná funkce, takže ji můžeme zapsat pomocí Taylorova polynomu

$$V(x) = V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{V''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{V'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Zvolíme-li $V(x_0)$ jako nulovou hladinu, bude platit $V(x_0) = 0$. Dále, $V'(x_0) = 0$ z definice rovnovážného bodu. Další členy jsou postupně čím dál tím menší (pro x dostatečně blízka x_0), takže s jistou dávkou aproximace můžeme psát

$$V(x) \approx \frac{1}{2} V''(x_0) (x - x_0)^2.$$

Tento vzorec je však velmi podobný vztahu pro potenciál harmonického oscilátoru

$$V(x) = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 .$$

Z toho už vidíme, že člen $V''(x_0)$ hraje roli tuhosti oscilátoru k a můžeme ho dosadit do známého vzorce

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} .$$

Nyní se vraťme k původnímu příkladu. První derivace potenciálu je

$$\frac{dV}{dx} = \frac{g}{2a} \left(-\frac{V_1^2 \varrho_v}{x^2} + \frac{V_2^2 \varrho_o}{(a-x)^2} \right) ,$$

další derivací dostáváme

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{g}{a} \left(\frac{V_1^2 \varrho_v}{x^3} + \frac{V_2^2 \varrho_o}{(a-x)^3} \right) .$$

Teď už jen stačí dosadit do vzorce výše a máme výsledek $f \doteq 25$ Hz.

Úloha V.4 . . . rozstřík

Uvažujte volnou kapku vody s poloměrem R , kterou pomalu nabíjíte elektrickým nábojem. Najděte velikost náboje Q potřebného na to, aby sa kapka rozstříkla.

Uvažujme nejdříve elektricky neutrální vodní kapku nacházející se ve vzduchu. Povrchové napětí lze chápat jako plošnou hustotu povrchové energie, tedy energii povrchové vrstvy kapaliny vztaženou na jednotkovou plochu. To způsobí, že kapka bude mít tendenci zaujmout tvar s nejmenším povrchem, tedy kouli s poloměrem R . Na kapku působí kapilární tlak p_k způsobený povrchovým napětím mezi vodou a vzduchem a tlak vzduchu odpovídající atmosférickému tlaku p_a . Oba tyto tlaky se uvnitř kapky sečtou na výsledný tlak $p_k + p_a$. Z Youngovy-Laplaceovy rovnice⁶⁰ přímo plyne vztah pro kapilární tlak uvnitř sférické kapky

$$p_k = \frac{2\sigma}{R} ,$$

kde σ je povrchové napětí mezi vodou a vzduchem.

Nyní nabijeme kapku nábojem Q tak pomalu, že ji můžeme považovat za vodičovou, takže se nanosený náboj prakticky ihned rovnoměrně rozloží po jejím povrchu. Náboj na povrchu kapky vytvoří vně kapky elektrické pole, které bude silově působit na libovolnou malou plošku ΔS povrchu kapky a vytvoří tak tlak elektrického pole p_E .

Pokusme se určit velikost tlaku p_E . Označme η plošnou hustotu náboje na povrchu kapky, která je rovna

$$\eta = \frac{Q}{4\pi R^2} .$$

⁶⁰Více se o ní můžete dočíst na https://en.wikipedia.org/wiki/Young-Laplace_equation.

Využijeme faktu, že elektrické pole sféricky symetricky rozloženého náboje je vně koule stejné jako elektrické pole bodového náboje Q umístěného ve středu koule. Naopak uvnitř kapky je elektrické pole nulové, protože se jedná o vodič. Vnější elektrické pole je tedy radiální a pro jeho velikost platí

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (8)$$

kde $r > R$ je vzdálenost od středu kapky a ϵ_0 je permitivita vakua. Pro výpočet tlaku p_E potřebujeme zjistit, jakou silou působí elektrické pole na malou plošku ΔS s nábojovou hustotou η . Komplikace je v tom, že do výsledného elektrického pole přispívá i náboj na malé plošce ΔS , jehož příspěvek musíme odečíst. Zajímá nás totiž, jakou silou působí na náboj na malé plošce ΔS elektrické pole od zbytku koule.

Využijeme principu superpozice. Označme $E_{\Delta S}$ velikost elektrické intenzity způsobené nábojem na malé plošce ΔS v blízkosti této plošky. Vektor elektrické intenzity je zřejmě kolmý na rovinu plošky a míří směrem od povrchu této plošky (uvnitř koule směřuje do středu a vně koule směřuje od středu koule). Důležité je, že toto pole je v obou případech stejně velké. Elektrické pole nábojů na zbylé části koule uvažujeme v blízkosti plošky konstantní s velikostí E' . Uvnitř i vně má stejnou velikost a směřuje od středu koule. Teď využijeme toho, že výsledná elektrická intenzita uvnitř koule je nulová,

$$E' - E_{\Delta S} = 0.$$

Velikost výsledného pole nad ploškou je potom $E' + E_{\Delta S} = 2E_{\Delta S} = 2E'$. Srovnáním s rovnicí (8) dostáváme

$$2E' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

odkud jednoduchou úpravou získáme explicitní vztah pro výpočet velikosti elektrického pole od zbytku koule v oblasti plošky ΔS ,

$$E' = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Tlak elektrického pole již spočítáme snadno jako podíl velikosti síly působící na náboj na malé plošce a velikosti dané plošky

$$p_E = \frac{E' \eta \Delta S}{\Delta S} = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q^2}{R^4}.$$

Uvědomme si, že p_E má opačný směr než kapilární tlak, neboť se souhlasné náboje v kapce zřejmě odpuzují. Podmínka rozstříku kapky je

$$p_E = p_k + p_a,$$

$$\frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q^2}{R^4} = \frac{2\sigma}{R} + p_a.$$

Odtud si už snadno vyjádříme velikost potřebného náboje

$$|Q| = 4\pi R^2 \sqrt{2\varepsilon_0} \sqrt{\frac{2\sigma}{R} + p_a}.$$

Ještě dodejme, že v zadání nebylo přímo řečeno, abychom úlohu řešili v zemské atmosféře za normálních podmínek. Proto připouštíme řešení nabitě kapky ve vakuu, které je o něco jednodušší. Řešení úlohy ve vakuu dostaneme tak, že položíme atmosférický tlak roven nule, neboli dostáváme rovnost

$$|Q| = 8\pi \sqrt{\sigma\varepsilon_0} R^3,$$

Úlohu lze také řešit vysokoškolským přístupem za použití Gaussova zákona pro tok elektrického pole uzavřenou plochou ve tvaru

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vnější normálový vektor k nějaké uzavřené ploše a Q je celkový náboj uvnitř této plochy. Aplikací Gaussova zákona na povrch nabitě kapky dostáváme rovnost

$$4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

odkud pro velikost výsledného elektrického pole plyne

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2},$$

což je ve shodě s rovnicí (8) pro $r = R$. Abychom mohli odečíst od výsledného elektrického pole příspěvek od náboje na malé plošce ΔS , potřebujeme určit jeho velikost. Opět vyjdeme z Gaussova zákona. Uvažujme malý váleček obklopující na povrchu kapky právě plošku ΔS tak, že je jeho osa rovnoběžná s normálovým vektorem na plošce ΔS (míří v radiálním směru). Z Gaussova zákona plyne, že tok intenzity elektrického pole povrchem válečku je roven celkovému náboji uvnitř válečku vydělenému konstantou ε_0 . Tok pláštěm je zanedbatelný, protože výšku válečku můžeme uvažovat libovolně malou. Zbývá tedy tok podstavami, pro který platí

$$2\Delta S E_{\Delta S} = \frac{\eta \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

Jednoduchou úpravou získáme rovnicí

$$E_{\Delta S} = \frac{\eta}{2\varepsilon_0} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Velikost elektrického pole E' v okolí plošky vypočteme podobně jako v první části

$$E' = E - E_{\Delta S} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2}.$$

Velikosti elektrických polí, které jsme spočítali pomocí Gaussova zákona, se shodují s již dříve získanými výsledky. K řešení úlohy bychom dále došli stejnými úvahami jako v první části.

Úloha V.5 . . . odskakující hopík

Tuhou koulí ve vzduchu roztočíme dostatečně velkou úhlovou rychlostí ω rovnoběžnou se zemí. Poté hopík pustíme z výšky h_0 na vodorovnou podložku. Od ní se odrazí do výšky h_1 a dopadne nedaleko původního místa dopadu. Určete vzdálenost těchto dvou bodů dopadu, jestliže je třecí koeficient mezi koulí a zemí f dostatečně malý.

Z rovnic pro volný pád $h = \frac{1}{2}gt^2$ a $v = gt$ dostaneme rychlost v_0 , kterou koule dopadne na zem

$$v_0 = \sqrt{2h_0g}.$$

Koule dopadá přímo svisle, ale po odrazu bude mít jak svislou složku rychlosti v_y , tak vodorovnou složku v_x díky tření. Velikost v_y je taková, aby koule vyskočila do výšky h_1 , tedy

$$v_y = \sqrt{2h_1g},$$

Předpokládejme, že srážka trvá velmi malý čas $\Delta t = t_1 - t_0$. Hybnost ve svislém směru se během nárazu změní o

$$\Delta p_y = m(v_0 + v_y).$$

Protože změna hybnosti je rovna impulzu síly, můžeme říct, že pro svislou sílu F_y působící na kouli v průběhu nárazu platí

$$\Delta p_y = \int_{t_0}^{t_1} F_y dt,$$

kde síla může být obecně závislá na průběhu srážky, tedy na čase t . Horizontální třecí síla, která působí mezi koulí a deskou, je v každém okamžiku $F_x = fF_y$. Ze zadání vyplývá, že můžeme předpokládat, že třecí síla je tak malá, že nezastaví rychlou rotaci koule a ta tak během celé srážky neustále prokluzuje. Z toho si vyjádříme změnu hybnosti ve vodorovném směru

$$\Delta p_x = \int_{t_0}^{t_1} F_x dt = \int_{t_0}^{t_1} fF_y dt = f \int_{t_0}^{t_1} F_y dt = f\Delta p_y.$$

Všimněme si, že jsme se nyní kompletně zbavili závislosti síly F_y na čase a také času Δt , který již ani není potřeba limitně zmenšovat k nule. V tomto triku spočívala veškerá záludnost této úlohy. Dále vyjádříme rychlost ve vodorovném směru v okamžiku po odrazu

$$v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{f\Delta p_y}{m} = f(v_0 + v_y).$$

Díky znalosti výšky h_1 jsme snadno schopni dopočítat, že celý skok koule (od prvního do druhého dopadu) trval čas

$$t = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Kombinací s v_x získáme doskočenou vzdálenost

$$s = v_x t = 2f(v_0 + v_y)\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2f\left(\sqrt{2h_0g} + \sqrt{2h_1g}\right)\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 4f(h_1 + \sqrt{h_0h_1}).$$

Je pozoruhodné, že výsledek nezávisí na momentu hybnosti koule, na gravitačním zrychlení a dokonce ani na počáteční úhlové rychlosti ω (pokud je dostatečně velká). Samozřejmě jen za docela silného předpokladu, že třecí koeficient je tak malý, že koule během dopadu prokluzuje.

Úloha V.P ... problémy 1 sekundy

Navrhněte způsoby, jak zpomalit zeměkouli tak, abychom k některým rokům nemuseli přidávat přestupnou sekundu. Spočítejte, kolik by to stálo.

Najskôr sa pozrime na to, prečo vôbec pridávame prestupné sekundy k niektorým rokom. Pridávanie prestupných sekúnd má iný dôvod ako pridávanie prestupných dní, ktoré je zapríčinené tým, že jedna rok trvá o niečo dlhšie ako 365 dní. Odchýlka, ktorá zaujíma nás, je spôsobená hlavne pôsobením slapových síl medzi Mesiacom a Zemou, ktoré spôsobujú príliv a odliv. Ale rotácia Zeme vďaka treniu posúva príliv a odliv pred pozíciu, kde by normálne bol. Táto masa vody spôsobuje vychýlenie gravitačnej sily od spojnice stredov Zeme a Mesiaca, čo má za dôsledok nenulový moment sily, ktorý urýchľuje Mesiac (vďaka čomu sa vzdaluje od Zeme) a spomaľuje rotáciu Zeme.⁶¹ Ďalšie príčiny fluktuácie dĺžky dňa sú napríklad výmena momentu hybnosti s atmosférou vďaka vyparovaniu vody a treniu, zmena momentu zotrvačnosti kvôli roztápaniu horských a pevninských ľadovcov, zmena rozloženia hmoty vnútri Zeme a iné.⁶²

Aby sme prestupné sekundy nemuseli pridávať, treba nepretržite urýchľovať rotáciu Zeme, a teda pôsobiť proti už spomenutým trecím silám. Momentálna odchýlka sa pohybuje okolo 0,7 ms. ⁶³ Podľa porovnaní zaznamenaných astronomických pozorovaní so spätne predpovedanými, F. R. Stephenson a L. V. Morrison určili priemernú zmenu dĺžky dňa ako 1,7 ms za storočie.⁶⁴

⁶¹Toto je len kvalitatívny popis, nakoľko popis slapových síl medzi rotujúcimi telesami nie je podstata úlohy. Zaujímajúcim o kvantitatívny popis si ho môžu pozrieť napríklad na https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_acceleration.

⁶²https://en.wikipedia.org/wiki/Day_length_fluctuations, <https://en.wikipedia.org/wiki/ΔT>.

⁶³Táto hodnota je približne priemer, okolo ktorého sa fluktuácie pohybujú. V skutočnosti sa reálna hodnota mení zo dňa na deň. Súčasnú hodnotu si môžete pozrieť napríklad na <http://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php>.

⁶⁴Stephenson, F.R.; Morrison, L.V. (1995).: *Long-term fluctuations in the Earth's rotation: 700 BC to AD 1990*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London.

V tomto řešení si ukážeme tři způsoby, ako by sme to mohli dosiahnuť. Existuje ich, samozrejme, oveľa viac.

Výroba ledovců

Zmínili jsme, že tání polárních ledovců zvětšuje moment setrvačnosti Země. Cílem tohoto postupu je tomu zabránit a ideálně ještě nové ledovce vyrobit. Pro zjednodušení výpočtů předpokládáme, že Země je koule s poloměrem $R = 6\,378$ km, hmotností $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg a s momentem setrvačnosti

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2.$$

Budeme též předpokládat, že vodu pro výrobu ledu shromáždíme rovnoměrně z celého povrchu Země, čímž v podstatě odstraníme kulovou plochu s momentem setrvačnosti

$$I_k = \frac{2}{3}mR^2,$$

kde m je hmotnost nového ledu. Pokud jej vytvoříme blízko osy rotace (například na pólech), přírůstek momentu setrvačnosti díky ledu bude zanedbatelný. Nový moment setrvačnosti Země potom bude

$$I = I_0 - I_k = \frac{2}{5}MR^2 - \frac{2}{3}mR^2.$$

Ze zákona zachování hybnosti máme

$$\begin{aligned}\omega I &= \omega_0 I_0, \\ \frac{2\pi}{T} I &= \frac{2\pi}{T_0} I_0,\end{aligned}$$

kde T_0 a T jsou časy periody rotace Země kolem své osy před a po vytvoření ledu. Po vyjádření m a dosazení za I_0 a I dostáváme

$$m = -\frac{3}{5}M \frac{\Delta T}{T_0}.$$

Po dosazení číselných hodnot $T_0 = 86\,400$ s a $\Delta T \doteq 4,7 \cdot 10^{-8}$ s nám vyjde hmotnost

$$m \doteq -2 \cdot 10^{12} \text{ kg}.$$

Led má měrné skupenské teplo tání $334\,000$ J·kg⁻¹, teplo potřebné na ochlazení na 0 °C můžeme zanedbat. Celkové teplo, které budeme muset každý den z ledu odebrat, je

$$\Delta Q \doteq 7 \cdot 10^{17} \text{ J}.$$

Pro vyjádření účinnosti čerpání tepla se zavádí „coefficient of performance“⁶⁵, definovaný jako podíl přeneseného tepla ku dodané práci. Hodnoty pro ohřívání a ochlazování se liší, protože v jednom případě se použitá práce mění na užitečné

⁶⁵Český výraz topný faktor má smysl pouze pro vytápění.

teplo, zatímco v druhém na odpadní teplo. Největší účinnosti dosáhneme použitím obráceného Carnotova cyklu

$$\beta = \frac{T_1}{T_2 - T_1},$$

kde T_1 je teplota, ze které čerpáme, a T_2 je teplota kam čerpáme. Zřejmě $T_1 = 0^\circ\text{C}$. Odpadní teplo nám stačí vypouštět někde v dostatečné vzdálenosti od pólů, odhadem $T_2 = 20^\circ\text{C}$. Dosazením teplot v kelvinech dostáváme $\beta \doteq 14$. Lze předpokládat, že v praxi se nám podaří dosáhnout zhruba poloviční účinnosti. Na druhou stranu, nejspíš nepotřebujeme, aby T_2 byla až tak vysoká. Odhadněme proto $\beta = 10$, čili na 10 W přeneseného tepla spotřebujeme 1 W energie.

Při průměrné ceně⁶⁶ 1 kWh v Evropě 0,1 € by chlazení ledu stálo zhruba $2 \cdot 10^9$ € denně.

Tlak slnečného žiarenia

Tento spôsob využíva to, že fotóny zo Slnka majú svoju hybnosť. Pri nárazoch na telesá teda pôsobia tlakom, ktorý vieme využiť napríklad tak, že po Zemi rozostavíme zrkadlá. Zrkadlá budú fotóny odrážať a vďaka tomu budú pôsobiť momentom sily na Zem. Tlak spôsobovaný týmito fotónmi pri Zemi je

$$p = \frac{F}{S} = \frac{1}{S} \frac{2E}{tc} = \frac{2P_S}{c},$$

kde E/c je hybnosť fotónov a P_S je slnečná konštanta, ktorá má pri Zemi hodnotu $P_S = 1\,367\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Na požadované spomalenie Zeme budeme musieť zmenšiť jej moment hybnosti každý deň o

$$\Delta L = \omega_0 I_0 - \omega I_0 = 2\pi \frac{I_0}{T_0} - 2\pi \frac{I_0}{T} = \frac{4\pi}{5} MR^2 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \approx \frac{4\pi}{5} MR^2 \left(\frac{\Delta T}{T_0^2} \right),$$

kde ω a T sú uhlová rýchlosť a perióda po spomalení. Po dosadení číselných hodnôt dostaneme

$$\Delta L \doteq 4 \cdot 10^{21} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}.$$

Budeme predpokladať, že môžeme zrkadlá rozostaviť po celom povrchu Zeme a aj ich počas dňa otáčať. Jedným z možných rozostavení je také, pri ktorom zrkadlá na strane, na ktorej je práve dopoludnie, odrážajú fotóny kolmo naspäť. Tým na ne pôsobí dvakrát väčší tlak, ako keby ich len pohlcovali. Zrkadlá na strane, na ktorej je v danom čase popoludnie, ich odrážajú tak, že výsledná zmena hybnosti smeruje do stredu Zeme. Toto zostavenie nie je najideálnejšie, ale pokiaľ zvolíme za rameno sily polomer Zeme, tak by sa tieto aproximácie mali vykompenzovať. Potom dostaneme približne rovnaký moment sily, ako by sme získali počítaním

$$M \approx pSr = \frac{P_S}{c} \cdot \pi R^2 \cdot R,$$

$$M \approx \frac{\pi R^3 P_S}{c},$$

⁶⁶http://ec.europa.eu/eurostat/statistics-explained/index.php/Electricity_price_statistics

a po dosadení číselných hodnôt

$$M \approx 3,7 \cdot 10^{15} \text{ N}\cdot\text{m}.$$

Po vydelení ΔL týmto momentom, dostaneme čas, za ktorý sa toto spomalenie uskutoční

$$t = \frac{\Delta L}{M} \approx 1,1 \cdot 10^6 \text{ s} \doteq 12 \text{ dní},$$

čo je teda o rád pomalšie, ako potrebujeme.

Povrch Zeme je približne $5 \cdot 10^{14} \text{ m}^2$ a meter štvorcový lepšieho zrkadla stojí minimálne 200 €, takže cena všetkých zrkadiel bude minimálne 10^{17} €, z čoho vyplýva, že tento spôsob je nie len nepoužiteľný, ale aj milión-krát drahší.

Raketové motory

Predchádzajúci spôsob trval príliš dlho, takže musíme zväčšiť moment sily, ktorým pôsobíme na Zem. To vieme dosiahnuť viacerými spôsobmi. Napríklad vymeníme slabý tlak fotónov za o dosť silnejší ťah raketového motora. Presnejšie, použijeme najsilnejší motor na tekuté palivo, aký bol doteraz použitý: RD-170, ktorý má pri zemi ťah 7,3 MN. Motor sa skladá zo štyroch „jednotiek“ so spaľovacou komorou a tryskou. Ako palivo používa rafinovaný petrolej (celková spotreba $4 \cdot 166,25 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1} = 665 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$) a ako okysličovadlo tekutý kyslík (spotreba $4 \cdot 432 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1} = 1728 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$).⁶⁷

Vplyv atmosféry budeme zanedbávať. Motor kvôli snahe o najväčšie rameno umiestnime na rovník, kde bude pôsobiť momentom sily

$$M = FR \doteq 4,7 \cdot 10^{13} \text{ N}\cdot\text{m},$$

ktorým keď vydělíme $\Delta L = 4 \cdot 10^{21} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$ z predchádzajúceho spôsobu, tak dostaneme čas, za ktorý Zem spomalí

$$t = \frac{\Delta L}{M} \doteq 9 \cdot 10^7 \text{ s} \doteq 1000 \text{ dní}.$$

To je na prvý pohľad nepoužiteľné ako v predchádzajúcom spôsobe, ale tento spôsob má výhodu v tom, že môžeme pridať viac motorov na zvýšenie momentu sily. Motorov teda potrebujeme asi tisíc.

Cena tekutého kyslíka je⁶⁸ \$0,16 kg⁻¹. Avšak cena rafinovaného petroleja pre rakety je⁶⁹ okolo \$30 kg⁻¹, čo prevažuje všetky ostatné náklady, a teda celková cena potrebného rafinovaného petroleja je okolo \$1,7 · 10¹² denne. Výpočtom zistíme, že denne by sme potrebovali 5,7 · 10¹⁰ kg petroleja, čo po porovnaní so svetovou ťažbou ropy 1,8 · 10¹² kg ročne⁷⁰ vraví jasne - museli by sme ťažiť asi 10-krát viac ropy. A keďže petrolej je vysoko rafinovaný, na jeho výrobu treba ropy ešte viac.

⁶⁷<http://www.lpre.de/energomash/RD-170/index.htm>

⁶⁸www.quora.com/How-much-does-NASA-pay-per-kg-for-hydrogen-and-oxygen-in-rocket-fuel

⁶⁹www.dla.mil/Portals/104/Documents/Energy/Standard%20Prices/Aerospace%20Prices/E-20170ct1AerospaceStandardPrices_170913.pdf?ver=2017-09-13-145335-477

⁷⁰www.worldenergy.org/data/resources/resource/oil/

Namiesto petroleja môžeme však použiť tekutý vodík, ktorý je 10-krát lacnejší ako petrolej a pri danom prietoku paliva dokáže vyvinúť väčší ťah,⁷¹ ale vodíkové motory sú podstatne zložitejšie, čo sa prejaví aj na cene. Pokiaľ však chceme ušetriť palivo a náklady (ak uvažujeme, že motory budú bežať veľmi dlho, a teda cena za palivo prevýši obstarávacie náklady motorov), tak vodík je správna voľba. Cena tekutého vodíka je⁷² \$ 3,66 kg⁻¹. Teda celková cena spolu s kyslíkom je \$ 2,7 · 10⁶ s⁻¹, čo nám dáva celkovú cenu paliva \$ 2 · 10¹¹ denne. To je v porovnaní s prvým spôsobom asi desaťkrát drahšie. Cena jedného motora sa pohybuje rádovo v desiatkach miliónov eur, takže celková cena motorov sa pohybuje na úrovni 10¹⁰, čo je porovnateľné s cenou paliva. Tieto odhady ceny však neberú do úvahy vplyv samotného projektu na cenu komodít. Dá sa predpokladať, že ceny by vďaka obrovskému dopytu prudko vzrástli.

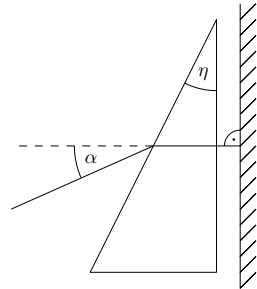
Nakoniec záleží na tom, či chceme spomaliť rotáciu čo najrýchlejšie alebo pri tom chceme čo najviac ušetriť. Pokiaľ nám ide o peniaze, najlepšie bude vytvárať ťadovce. Ale ak nechceme byť na dôchodku a mať ohromné ťadovce a vysušené veľké oblasti mora, tak si chceme zaobstaráť tisíc raketových motorov a veľa paliva.

Úloha VI.1 ... sebeosvícení

Svítime na zrcadlo pod úhľom $\alpha = 15^\circ$ vŕči kolmici. Chceme, aby sa nám paprsek vracel späť do zdroja. Máme sklenený hranol s indexem lomu $n = 1,8$. Jaký musí byť lámavý úhel η v závislosti na α a n , pokud situace vypadá jako obrázku? Předpokládejte, že okolní prostředí tvoří vzduch s indexem lomu n_0 .

Nápověda

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right), \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right). \end{aligned}$$



Klíčem k řešení úlohy je uvědomit si, jak můžeme na rozhraní vzduch-sklo využít Snellův zákon lomu. Na obrázku 17 je tečkovanou čarou vyznačena kolmice na povrch skla. Také tu jsou zakresleny další úhly s velikostí η . Můžeme psát

$$n_0 \sin(\alpha + \eta) = n \sin \eta,$$

⁷¹Veličina charakterizující ťah motora při jednotkovém hmotnostním prietoku paliva sa nazýva špecifický impulz. Je rovný efektívnej výtokovej rýchlosti spalín. V anglosaskej literatúre sa niekedy udáva v s, čo vzniklo vydelením výtokovej rýchlosti tiažovým zrýchlením.

⁷²www.quora.com/How-much-does-NASA-pay-per-kg-for-hydrogen-and-oxygen-in-rocket-fuel

kde jsme ještě pro pořádek uvedli index lomu vzduchu n_0 , který ale můžeme vzhledem k přesnosti dalších zadaných veličin⁷³ považovat za 1,00. Levou stranu rovnice rozepíšeme podle součtového vzorce pro sinus a postupně obecně upravujeme

$$\begin{aligned} n_0 (\sin \alpha \cos \eta + \cos \alpha \sin \eta) &= n \sin \eta, \\ n_0 \sin \alpha \cos \eta &= (n - n_0 \cos \alpha) \sin \eta, \\ \operatorname{tg} \eta &= \frac{n_0 \sin \alpha}{n - n_0 \cos \alpha}, \\ \eta &= \operatorname{arctg} \left(\frac{n_0 \sin \alpha}{n - n_0 \cos \alpha} \right). \end{aligned}$$

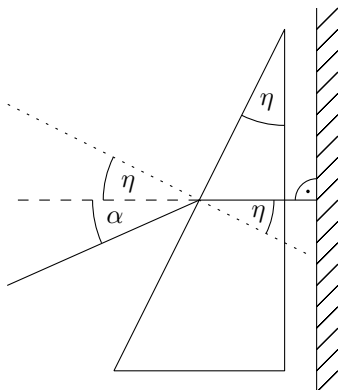
Pro zadané hodnoty úhlu a indexu lomu dostáváme hledaný lámavý úhel $17,2^\circ$, při kterém se nám bude světlo vracet zpět do zdroje.

Ještě poznamenejme, že naše řešení platí pro situaci, kde $\alpha + \eta \leq 90^\circ$, protože úhel dopadu nemůže být větší, než 90° . Pokud by zadané hodnoty α a n nespĺňovaly nerovnost

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{n_0 \sin \alpha}{n - n_0 \cos \alpha} \right) \leq 90^\circ - \alpha,$$

pak nelze najít takový lámavý úhel η , aby se nám paprsek vracel zpět. Nicméně v našem případě tato nerovnost splněna je.

Více součtových vzorců jsme do nápovědy uvedli proto, aby nebylo okamžitě jasné, který je nutné použít. Dále aby se o nich případně dozvěděli i ti, kteří se s nimi ještě nesetkali.

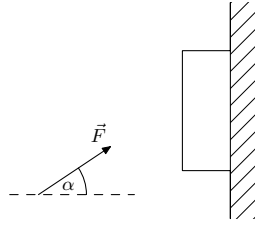


Obr. 17: Nákres situace.

⁷³Index lomu vzduchu na 5 platných cifer je $n_0 = 1,0003$. Úhel paprsku a index lomu skla máme zadané pouze na dvě platné cifry, takže zaokrouhlení na 1,00 je korektní.

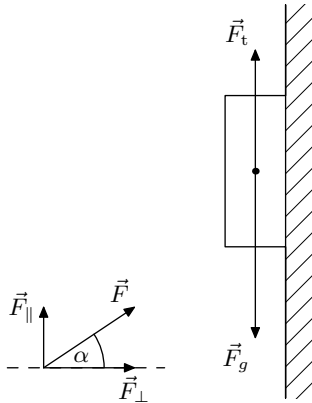
Úloha VI.2 . . . knihomol

Vítek trávil čas v knihovně. Kvůli jeho neobratnosti jed-
na kniha spadla z regálu a on ji rychlým pohybem ruky
stačil přimáčknout ke stěně. Na knihu působí silou F
pod úhlem α , viz obrázek. Kniha má hmotnost M a sou-
činitel smykového tření mezi knihou a zdí je μ . Nalezněte
podmínku pro sílu, při které kniha zůstane nehybná,
a určete hraniční úhel α_0 , po jehož překročení již není
možné knihu udržet.



Úlohu začneme řešit tak, že si rozmyslíme, jaké síly v systému působí. Vedle tíhové
síly knihy zde máme Vítkovu externí sílu F a třecí sílu mezi knihou a zdí. V ho-
rizontálním směru nám působí horizontální složka síly F a ve vertikálním směru
pak třecí síla, tíhová síla a vertikální složka síly F .

Nyní diskutujme velikost třecí síly. Ta je obecně dána vztahem $F_t \leq N\mu$, kde N



Obr. 18: Rozklad sil.

je normálová síla (vzhledem ke stěně). V našem případě je dána součtem všech sil
působících v horizontálním směru, tedy pouze horizontální složkou síly F . Z ob-
rázku 18 je patrné, že $F_{\perp} = F \cos \alpha$. Maximální třecí síla potom bude

$$F_t = \mu F \cos \alpha.$$

Chceme, aby kniha zůstala ve vertikální poloze, proto musí silová podmínka ve

vertikálním směru vypadat následovně (kladný směr volíme vzhůru)

$$\begin{aligned} F_t + F_{\parallel} - F_g &\geq 0, \\ \mu F \cos \alpha + F \sin \alpha - Mg &\geq 0, \\ F &\geq \frac{Mg}{\mu \cos \alpha + \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Nalezli jsme hledanou podmínku pro sílu, úloha se nicméně ptá ještě na hraniční úhel. Můžeme si všimnout, že když pošleme jmenovatel zlomku k nule, síla F půjde do nekonečna. Je zřejmé, že nejsme schopni vyvinout nekonečnou sílu. K nalezení hraničního úhlu tedy stačí položit jmenovatel rovný nule

$$\begin{aligned} \mu \cos \alpha + \sin \alpha &= 0, \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\mu, \\ \alpha_0 &= \operatorname{arctg}(-\mu) = -\operatorname{arctg} \mu. \end{aligned}$$

Můžeme si všimnout, že hraniční úhel je vždy záporný.

Úloha VI.3 . . . dostřík

Hladina 98% kyseliny sírové v lahvi sahá do výšky h . V určitém místě kolmo na stěnu nádoby vyvrtáme velmi malý otvor a kapalina začne vytékat ven. Do jaké maximální vzdálenosti od lahve může kyselina dostříknout ze všech možných poloh díry? Nádoba stojí na vodorovné rovině.

Označme výšku otvoru od dna nádoby jako y . Pro místo, kde je do stěny vyvrtaná díra, můžeme psát Bernoulliho rovnici ve tvaru

$$(h - y)\rho g = \frac{1}{2}\rho v^2,$$

kde ρ je hustota kapaliny. Potom rychlost výtoku kapaliny z otvoru je

$$v = \sqrt{2(h - y)g}.$$

Za čas t od opuštění lahve dopadne kapalina do vzdálenosti x od nádoby. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{2y}{g}}, \\ x &= vt = 2\sqrt{y(h - y)}. \end{aligned}$$

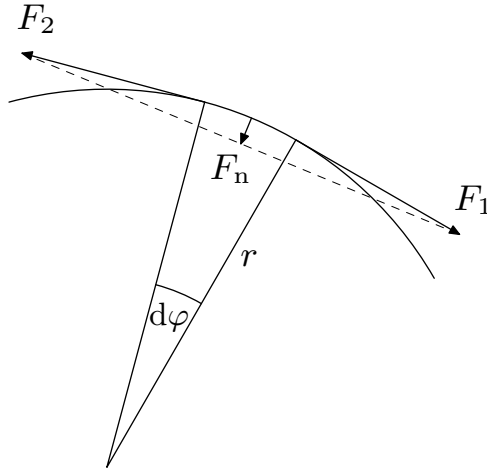
Nás zajímá maximální možné x , tedy maximální možná hodnota výrazu $y(h - y)$. To je ale parabola, jejíž vrchol, který je hledaným maximem, musí ležet uprostřed mezi oběma kořeny, kterými jsou 0 a h , tedy

$$y = \frac{1}{2}h.$$

Dosazením do vztahu pro x dostáváme, že maximální vzdálenost, do které může kyselina sírová dostříknout, je h , tedy výška hladiny kapaliny v nádobě.

Úloha VI.4 . . . lano

Přes břevno fotbalové branky (vodorovnou válcovou tyč) přehodíme dlouhé lano. Když bude jeden konec lana právě třikrát delší než druhý (přičemž oba budou viset volně ve vzduchu), lano samovolně sklouzne. Nyní lano kolem břevna jednou obtočíme (čili bude „ohnuté“ o úhel 540°). Kolikrát teď může být jeden konec delší než druhý, aby lano neskouzlo?



Obr. 19: Přiblížení části namotaného lana.

Nejprve si uvědomíme, jak se chová lano namotané na válci. Předpokládáme-li, že na prvním konci lana působí určitá napěťová síla F_1 , jaká síla F_2 bude působit na druhém konci, je-li lano namotáno úhlem φ ?

V každé části dotyku lana a válce je lano určitou silou přitlačováno k válci a tedy vzniká statická třecí síla, která mění napěťovou sílu lana. Dále víme, že se lano nachází v *kritické* situaci, tedy při malém zvýšení síly F_1 už sklouzne. To znamená, že veškerá síla statického tření působí proti síle F_1 . Situaci si zjednodušíme a uvažujeme velmi malý úhel $d\varphi$. Na začátku (viz obrázek 19) bude působit síla F_1 . Na druhé straně působí síla F_2 , která je jen o malinko menší ($F_2 = F_1 - dF$). Složku síly F_1 (resp. F_2) kolmo k povrchu válce označíme F_n . Pro malé $d\varphi$ platí

$$F_n = F_1 \sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{F_1 d\varphi}{2} \approx \frac{F_2 d\varphi}{2}.$$

Lano je tedy přitlačováno silou

$$2F_n \approx \frac{(F_1 + F_2) d\varphi}{2} \approx F d\varphi,$$

kde F je napěťová síla na daném úseku lana a pro požadovanou přesnost výpočtu F_n nám pro dostatečně malá $d\varphi$ stačí aproximace $F_1 \approx F_2 \approx F$. Třecí síla potom bude

$$F_t = 2fF_n \approx fFd\varphi,$$

kde f značí koeficient statického tření mezi lanem a válcem. Velikost této třecí síly je rovna rozdílu velikostí sil F_1 a F_2 , což je právě změna napěťové síly mezi počátečním a koncovým bodem daného úseku lana. Odtud dostáváme jednoduchou rovnici

$$dF = fFd\varphi,$$

Rovnici lze řešit například separací proměnných

$$\frac{dF}{F} = f d\varphi,$$

$$\ln(F) = f\varphi + C,$$

$$F(\varphi) = Ke^{f\varphi},$$

kde $K = e^C$ je integrační konstanta. Dosazením $\varphi = 0$ zjistíme, že K má význam počáteční napěťové síle F_0 . Pro napěťovou sílu po úseku lana s úhlem φ potom platí

$$F(\varphi) = F_0 e^{f\varphi}.$$

Zbytek výpočtu je už poměrně jednoduchý. Při přehození lana přes břevno na jedné straně působí síla $F_A = F(0)$ a na druhé straně působí síla $3F_A = F(\pi)$, protože působící síly jsou přímo úměrné hmotnosti a tedy i délce volných konců lana. Z těchto rovnic vyplývá

$$3F_A = F_A e^{f\pi},$$

$$f = \frac{\ln 3}{\pi}.$$

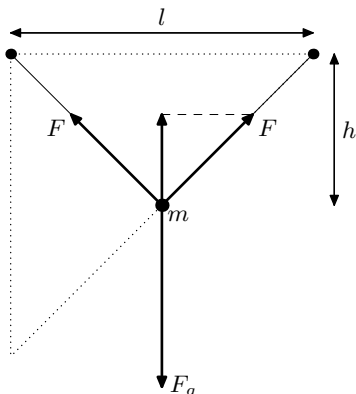
Po obtočení lana o úhel 3π bude na jedné straně opět působit síla $F_A = F(0)$, zatímco na druhé straně bude působit neznámá síla $F_B = F(3\pi)$. Nyní už jen snadno dosadíme za f do vzorce pro $F(\varphi)$ výše a dostáváme

$$F_B = F(3\pi) = F_A e^{3 \ln 3} = F_A e^{\ln 3^3} = 3^3 F_A = 27 F_A.$$

To znamená, že při jednom obtočení lana může být druhý konec až 27krát delší a lano stále samovolně nepadne.

Úloha VI.5 ... gumová houpačka

Matěje začaly nudit klasické houpačky, které jsou na dětských hřištích a lze se na nich houpat pouze dopředu a dozadu. Proto vymyslel vlastní atrakci, na které se bude houpat nahoru a dolů. Mezi dva stejně vysoké body ve vzdálenosti l natáhne gumu s klidovou délkou l . Následně se pomalu posadí přesně doprostřed gumy, přičemž se její střed vychýlí dolů o vzdálenost h . Nyní se velmi lehce odstrčí směrem nahoru a začne se houpat. Určete periodu malých kmitů.



Obr. 20: Schéma gumové houpačky

Výpočet hmotnosti

Abychom mohli sestavit pohybovou rovnici, potřebujeme znát Matějovu hmotnost. Tu si můžeme dopočítat z tuhosti gumy k a ze zadaných údajů, jelikož víme, jak hluboko se houpačka prohнула. S použitím Pythagorovy věty lze spočítat, že pokud se střed gumy posunul o h dolů, zvětšila se její celková délka na $\sqrt{l^2 + 4h^2}$ (přepona tečkovaného trojúhelníka na obrázku 20). Guma je napínána silou

$$F = k \left(\sqrt{l^2 + 4h^2} - l \right). \quad (9)$$

Tato síla působí ve směru gumy. V bodě, kde sedí Matěj, se mění její směr o určitý úhel. Síly F na Matěje působí dvě (jedna z každého směru), přičemž je nadnášen pouze jejich svislými složkami. Jejich součtem je

$$F_y = 2F \frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} = \frac{4hk}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \left(\sqrt{l^2 + 4h^2} - l \right) = 4hk \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \right), \quad (10)$$

kde $\frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}}$ je kosinus úhlu, který svírají obě síly F se svislicí, a za F jsme dosadili ze vztahu (9). Tuto sílu položíme rovnou tíhové síle mg , odkud pro Matějovu hmotnost dostáváme

$$m = \frac{4hk}{g} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \right).$$

Výpočet periody

Když se Matěj odrazí o kousek nahoru, síla gumiček bude menší než tíhová síla a Matěj začne zrychlovat zpět k zemi. Po průchodu rovnovážnou polohou se gumičky natáhnou více, čímž ho znovu vytáhnou nahoru. Proto bude oscilovat tam a zpět.

Hledáme závislost síly F_y na výchylce z rovnovážné polohy y . Vzdálenost h v rovnici (10) může být obecně libovolná a vzorec bude stále platný. Místo zadané hodnoty h tak můžeme dosadit souřadnici $h + \Delta h$, čímž dostaneme

$$F_y = 4(h + \Delta h)k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h + \Delta h)^2}} \right).$$

Nyní označme $y = -\Delta h$, což je svislá souřadnice udávající Matějovu výchylku z rovnovážné polohy

$$F_y = 4(h - y)k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h - y)^2}} \right).$$

Sestavíme pohybovou rovnici

$$m\ddot{y} = -mg + F_y(y),$$

kde \ddot{y} je Matějovo aktuální zrychlení a tíhová síla $-mg$ má znaménko mínus, protože působí směrem dolů proti síle F_y . Dosadíme za $F_y(y)$ a upravíme

$$\ddot{y} = -g + \frac{4(h - y)k}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4(h - y)^2}} \right). \quad (11)$$

To je poměrně nehezky vypadající diferenciální rovnice a proto se jí radši nebudeme snažit vyřešit přesně. Stačí si uvědomit, že nás zajímá pouze perioda *malých* kmitů, což znamená, že výchylka může být libovolně malá. Výraz pro sílu tedy rozvineme pomocí Taylorova rozvoje kolem bodu $y = 0$ a členy obsahující vyšší mocniny y zanedbáme, protože po celou dobu pohybu budou oproti y dostatečně malé

$$\begin{aligned} F_y(y) &= F_y(0) + \frac{dF_y}{dy}(0)(y - 0) + \dots \approx \\ &\approx 4hk \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \right) - 4k \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} + \frac{4h^2l}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) y, \\ \ddot{y} &= -\frac{4k}{m} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} + \frac{4h^2l}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) y = -\frac{g}{h} \left(1 + \frac{l^3}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}}} \right) y = \\ &= -\frac{g}{h} \left(1 + \frac{4hl}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}} - l(l^2 + 4h^2)} \right) y = \\ &= -Ky. \end{aligned}$$

To už je klasická rovnice harmonického oscilátoru

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Periodu už snadno vyjádříme z úhlové frekvence jako

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &= \frac{2\pi}{\sqrt{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \left(1 + \frac{4h^2l}{(l^2 + 4h^2)^{\frac{3}{2}} - l(l^2 + 4h^2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \left(\frac{4h^2 + l^2}{4h^2 + 2l^2 + l\sqrt{4h^2 + l^2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Povšimněme si, že perioda vůbec nezávisí na tuhosti gumy k . Zato ale závisí na rozměrech l i h , nelze proto uvažovat pouze jejich poměr. To je z toho důvodu, že pro pružiny ze stejného materiálu se stejným průřezem závisí tuhost na ještě i na jejich délce.

Úloha VI.P . . . dálničně-bezpečnostní problém

- Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby byla silnice pod auty suchá, pokud prší?
- Kolik aut musí projet za jednotku času po silnici či dálnici, aby na silnici nebyl žádný sníh a led, pokud sněží? Teplota dopadajícího sněhu je konstantní a srovnatelná s okolím, několik málo K pod 0°C .

Uvažujte, že prší nebo sněží nějaký konstantní objem vody na jednotku plochy za jednotku času.

Nejdříve si zavedme veličinu q , udávající, kolik metrů vody naprší za jednu sekundu. Samozřejmě předpokládáme, že voda padá zcela spojitě a rovnoměrně. Jistě můžeme najít takovou hodnotu q_0 , pro kterou se veškerá dopadající voda ihned vypaří. Velkou roli zde hraje vlhkost a teplota vzduchu a také fakt, že projíždějící auta způsobují pohyb vzduchu v okolí vozovky.

Dále musíme vytvořit model interakce aut s padající vodou. Část padající vody, do které narazí předek auta, se odrazí do stran a zbytek se odrazí na střechu. Někjaká voda ze střechy steče na strany auta a zbytek steče za auto.

Necht' mají všechna auta výšku h a délku l , pohybují se rychlostí u a za sekundu jich libovolným bodem silnice projede f . Tuto veličinu můžeme označit jako frekvenci projíždějících aut, její převrácená hodnota pak bude perioda T . Na vozovku může pršet maximálně q_0 vody, což je ale velmi malé množství vody, takže většina vody musí být zachycena projíždějícími auty. Můžeme si to představit tak, že než libovolná kapka urazí vzdálenost h , projede daným bodem silnice nějaké auto.

K dešti se samozřejmě přidává voda, která stéká ze střech aut, jak jsme zmínili výše. Ta však bude padat mnohem menší rychlostí, než dešťové kapky, a proto musí stejně jako ony vždy narazit do projíždějících aut. Veškerá voda, která narazí do aut, se tak buď odrazí na stranu, nebo za auta – ale voda odražená za opět narazí do dalšího auta, kde se celý proces opakuje. Ve výsledku je to stejné, jako by se veškerá voda dopadající na auta odrazila na stranu.

Pojďme předchozí úvahy vyjádřit pomocí rovnic. Mezi zadním koncem jednoho auta a předním koncem následujícího auta je vzdálenost

$$x = uT - l,$$

kterou projíždějící auta urazí za čas

$$t = \frac{x}{u} = T - \frac{l}{u}.$$

Padající dešť urazí vzdálenost výšky auta za čas

$$\tau = \frac{h}{v}.$$

Předpokládejme, že auta mají takový vhodný tvar, že veškerá voda, do které svým předkem narazí, se buď rozstříkne do stran a nebo začne vlivem proudění vzduchu stoupat na střechu vozu. Z toho vyplývá, že za každou periodu T dopadne na vozovku $q(t - \tau)$ deště. Celkový dopad vody na vozovku tak je

$$q_v = q \frac{(t - \tau)}{T} = q \left(1 - f \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v} \right) \right).$$

Jak jsme odvodili výše, tato hodnota se musí rovnat maximálnímu přípustnému dopadu q_0 . V zadání se nás ptají na frekvenci projíždějících aut, jejíž vyjádření je už snadné

$$f = \frac{q - q_0}{q} \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v} \right)^{-1}.$$

Všechny neznámé samozřejmě záleží na situaci, ale obecně by je neměl být problém změřit či odhadnout. Výjimku představuje hodnota q_0 , ale zde se nedopustíme nijak velké chyby (v porovnání s nepřesnostmi odhadů ostatních veličin), pokud budeme předpokládat $q_0 \approx 0$. Potom už výsledek zřejmě nebude záviset na vydatnosti deště. Dosazením nějakých rozměrných hodnot ($u = 130 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$, $v = 9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $l = 3 \text{ m}$ a $h = 1,5 \text{ m}$) dostáváme $f = 4 \text{ Hz}$. Toto číslo vůbec neodpovídá běžnému provozu, kde je typická frekvence několikrát nižší. Je však pravda, že jsme dosadili horní hranici rychlosti dešťových kapek, při nižších rychlostech bychom se už mohli dostat na frekvence, kterými se na dálnici běžně jezdí.

Dále se můžeme bavit například o tom, že proudění vzduchu způsobuje, že část vody z boků automobilů bude sklouzávat na vozovku za ně. V úvahu připadá také spousta dalších jevů a nepřesností našeho modelu. Je však rozumné předpokládat, že všechny tyto drobné nedostatky se dají opravit vhodnou volbou konstant.

Co se nedá opravit je například fakt, že auta rozhodně nejezdí se stálou frekvencí. Nami spočítaná frekvence je nejmenší frekvence, při které ještě zem zůstane suchá. Její převrácená hodnota představuje největší možnou periodu mezi auty, při které na zem nedopadne ani kapka. Museli bychom tedy zajistit, aby všechny časové rozestupy mezi auty byly menší. K tomu bychom potřebovali znát rozdělení period (lze očekávat, že to bude normální rozdělení), a především jeho parametry. Odtud bychom už snadno (integrálem) spočítali závislost množství vody, co dopadne na vozovku, na parametrech daného rozdělení.

Sněží

Na vozovce jistě nebude snít, pokud tam ani žádný nedopadne. Můžeme tak použít výsledky předchozí části s tím rozdílem, že snít zřejmě padá výrazně pomaleji, než déšť. Pokud tedy najdeme frekvenci, při které na silnici neprší, rozhodně při ní ani nebude sněžit. Dále, sněhové vločky, padající ze střechy auta, se velmi brzy urychlí na terminální rychlost a potom budou padat stejně rychle jako nově padající snít. Díky tomu část ze sněhu, který dopadne na auta, nezmezí do stran, ale opět začne padat na vozovku.

Počáteční vydatnost sněžení budeme značit jako u deště q . V okolí automobilů však bude vyšší, a sice q_s , protože přičítáme ještě část sněhu (označme jí k), dopadajícího na auta. Na vozovku dopadá q_v , které jsme odvodili výše (akorát musíme v rovnici místo q použít q_s , protože to je množství sněhu, padajícího v okolí aut). Na auta tak dopadá

$$q_a = q_s - q_v,$$

přičemž platí

$$q_s = q + kq_a.$$

Dosazením první rovnice do druhé dostáváme

$$\begin{aligned} q_s &= q + k(q_s - q_v), \\ q_s &= q + kq_s - kq_s \left(1 - f \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right), \\ q_s &= q \left(1 - kf \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Celkové množství sněhu, dopadajícího na vozovku, tak je

$$q_v = q_s \left(1 - f \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right) = q \frac{1 - f \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)}{1 - kf \left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)}.$$

Dosazením $k = 1$ dostáváme,⁷⁴ že $q_v = q$, tedy že veškerý snít dříve či později dopadne na vozovku. Ve skutečnosti bude k samozřejmě menší než 1, takže q_v bude o něco nižší než q .

Nakonec ještě můžeme spočítat, kolik sněhu se díky projíždějícím autům rozpustí. Předpokládejme, že každé auto má stejný výkon P_0 . Otázkou je, jaká část tohoto výkonu se použije na tavení sněhu. Toto není vůbec snadné spočítat (v úvahu připadá ohromné množství vlivů, které bychom museli do výpočtu zahrnout), proto řekněme, že každé auto k tavení sněhu přispěje výkonem P , jehož hodnotu už nějak změříme.

Časové rozestupy mezi auty jsou T . To znamená, že každý úsek silnice o délce uT „vytápí“ jedno auto. Měrné skupenské teplo tání sněhu je $l_t = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

⁷⁴Což by odpovídalo situaci, ve které by veškerý snít, dopadající na auta, časem opět začal padat na vozovku za auty. Jinak řečeno, žádný snít by nepadal do stran.

a protože už máme obsazené písmenko T , které běžně patří termodynamické teplotě, předpokládejme že teplota sněhu je přesně 0°C . Potom jedno auto za čas t roztaví hmotnost sněhu

$$m = \frac{Pt}{l_t}.$$

Nyní si definujeme šířku jednoho auta s . Z hustoty sněhu $\rho = 200 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ spočítáme, že hmotnost m odpovídá množství sněhu

$$q_0 = \frac{m}{uTst\rho} = \frac{P}{uTs\rho l_t} = \frac{Pf}{us\rho l_t}.$$

Projíždějící auta tedy roztaví q_0 dopadajícího sněhu. Pro výkon běžného auta $P = 100 \text{ kW}$ o šířce $s = 2 \text{ m}$ a frekvenci $f = 1 \text{ Hz}$ odhadneme $q_0 \approx 2\cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 7 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$.

Pokud bychom chtěli potřebnou frekvenci spočítat, dosazením $q_0 = q_v$ dostáváme

$$\frac{Pf}{us\rho l_t} = q \frac{1 - f\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)}{1 - kf\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)},$$

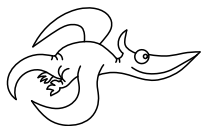
což je vlastně kvadratická rovnice

$$Pk\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right) f^2 - \left(P + qus\rho l_t\left(\frac{l}{u} + \frac{h}{v}\right)\right) f + qus\rho l_t = 0.$$

Nás zajímá kořen $s -$, tedy nejnižší frekvence, při které bude vozovka bez sněhu. Mohlo by se zdát, že kořen $s +$ představuje nejvyšší frekvenci, při které ještě stihne roztát všechno, co nasněží a že tedy pro vyšší frekvence se už na silnici začne opět hromadit sníh. Tyto frekvence však nemají fyzikální význam, protože jsou vyšší, než maximální možná frekvence aut na silnici. Tu můžeme určit z délky a rychlosti aut jako

$$f_{\max} = \frac{u}{l}.$$

Rychlost padajícího sněhu bude zřejmě menší než rychlost vodních kapek v dešti, uvažujme tedy $v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Nechť sněží vydatně $q = 3 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$, potom vychází přibližně $f \doteq 0,4 \text{ Hz}$, což je pořád trochu moc. Snížíme-li ale vydatnost sněžení na $1 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1}$, dostaneme se k hodnotám frekvence $0,12 \text{ Hz}$, což už vypadá realisticky.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I.E ... hodinová

12 bodů

Změřte délku jednoho dne. Jedno souvislé měření však nemůže trvat déle než jednu hodinu (pro statistickou přesnost však měření opakujte). (řešení str. 89)

Úloha II.E ... listopad

12 bodů

Změřte průměrnou vertikální rychlost padajícího listí. Použijte listy z několika různých stromů a diskutujte, jaký vliv má tvar listu na rychlost pádu. Jak by měl vypadat ideální list, pokud bychom chtěli, aby padal co nejpomaleji?

(řešení str. 94)

Úloha III.E ... indexovaný kondenzátor

12 bodů

Poštou vám přišel elektrolytický kondenzátor a rezistor. Změřte kapacitu kondenzátoru a odpor rezistoru, neměřte je však přímo. Součin kapacity kondenzátoru a odporu rezistoru je přibližně $RC \approx 20$ s.

Varování Elektrolytický kondenzátor má kladnou a zápornou elektrodu, při zapojení opačně ho můžete zničit. Maximální dovolené napětí je 10 V.

(řešení str. 99)

Úloha IV.E ... papírová izolační

12 bodů

Změřte, jak moc dokáže papír stínit zvuk. K měření stačí použít např. mobilní telefon jako generátor zvuku a mikrofon v počítači jako detektor (Audacity). Použijte papíry různých druhů a tvarů.

(řešení str. 105)

Úloha V.E ... třiceticentimetrový tón

12 bodů

Každý někdy z nudy zkusil brknat na dlouhé pravítko vystrčené přes okraj lavice. Zvolte vhodný model závislosti frekvence na délce vysunutí za okraj lavice a experimentálně jej ověřte. Popište i další parametry pravítka.

Poznámka Pravítko ke stolu přitlačte tak, aby kmitala jen jeho vysunutá část.

(řešení str. 111)

Úloha VI.E ... kluzká

12 bodů

Najděte dvě rovné plochy ze stejného materiálu a změřte, jaký je mezi nimi koeficient tření. Následně zjistěte, jak se tento koeficient změní, když mezi plochy dáte nějakou sypkou nebo kapalnou látku. Můžete použít vše od vody a oleje, přes med a roztavenou čokoládu až po mouku a písek. Měřte pro alespoň 4 různé látky.

Hodně pozornosti věnujte diskuzi výsledků a především toho, které vlastnosti použitých látek měly na výsledek největší vliv. *(řešení str. 115)*



Řešení experimentálních úloh

Úloha I.E ... hodinová

Změřte délku jednoho dne. Jedno souvislé měření však nemůže trvat déle než jednu hodinu (pro statistickou přesnost však měření opakujte).

Úvod

Rozvoj fyziky i vedy ako takej bol spojený s každodenným životom našich predkov. Práve potreba poznania striedania sa dňa a noci, ročných období či ročného cyklu prinútili ľudí merať čas a zostaviť kalendár. Vďaka jeho jednoduchému určeniu sa stal základnou časovou jednotkou deň. Nový deň sa začínal s východom, alebo západom Slnka. Pohyb Slnka po oblohe sme použili na určenie dĺžky dňa aj my. Merali sme v podstate uhlovú rýchlosť Slnka na oblohe, z čoho sme následne určili, koľko trvá jeho jeden celý obeh (resp. jedno otočenie Zeme okolo osi).

Postup merania

Základom experimentu bolo meranie uhlu, o ktorý sa posunul (tj. otočil) tieň špajdle za daný čas. K meraniu sme použili papier ako podložku, na ktorú sme značili polohu tieňa, a vhodne dlhú špajdlu, ktorú sme zabodli do zeme, aby sa jej poloha (tj. vrchol uhla) nemenila a zároveň bola kolmá k podložke. Podložku sme umiestnili vodorovne. Použitá špajdla mala po zapichnutí do zeme výšku $l = (25,80 \pm 0,05)$ cm (medzná chyba merania je daná použitým pravítkom ako polovica najmenšieho dieliku) od miesta prieniku s papierovou podložkou (päty).

Samotné meranie prebiehalo tak, že sme na papierovú podložku zakresľovali polohu tieňa špajdle a ku každému meraniu sme si poznačili presný čas. Z toho sme potom určili, o aký uhol sa tieň posunul za daný časový úsek.

Namerané dáta

Je viacero spôsobov, ako môžeme k zberu dát pristúpiť. Jedna možnosť je zmerať, o aký uhol sa posunie tieň špajdle za 1 hodinu. Pre získanie presného výsledku však budeme musieť meranie opakovať. Vďaka štatistickému spracovaniu potom dostaneme dostatočne presnú hodnotu výsledku. Druhou variantou je spraviť niekoľko meraní polohy tieňa v krátkych intervaloch počas jednej hodiny.

My sme zvolili druhú možnosť. Od 14:50 do 16:15 sme spravili 13 meraní v časových intervaloch 5 až 9 minút (viď. tabuľka 2). Z tohto súboru dát sme vybrali ten hodinový úsek, ktorého dáta boli najlepšie namerané (tj. neovplyvnené napríklad silným vetrom). Išlo konkrétne o dáta namerané v čase od 15:09 do 16:09 (viď tabuľka 3).

Spracovanie merania

Uhol posunu tieňa sme pre väčšiu presnosť merali trigonometricky. Na zakreslených tieňoch špajdle ako priamkách sme vyznačili body, ktoré sa od päty špajdle (tj. vrcholu uhla) nachádzali v rovnakej vzdialenosti, v našom prípade to bolo $a = (45,2 \pm 0,2)$ cm (medzná chyba je väčšia kvôli použitiu nepresnejšieho pravítka a motúziku). Uhol α , o ktorý sa tieň posunul, sme tak určili ako

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{a}, \quad (12)$$

kde x je vzdialenosť vyznačených bodov na úsečkách dvoch susediacich polôh tieňa špajdle. Nakoľko posunutie bolo vždy menšie ako 3° , mohli sme použiť aproximáciu $\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$. Chybu určenia uhlu α sme odhadli na 10%. Táto chyba je výrazne väčšia ako štatistická chyba merania a k jej hodnote sme dospeli uvážením nepresnosti pri zakresľovaní polohy tieňa (papier bol na zemi mierne nerovný, pri zakresľovaní fúkal vietor, ktorý mierne kýval špajdlou i podložkou).

Vybraný súbor dát (tabuľka 3) sme spracovali do grafu 21, ktorý zobrazuje, ako s veľkosťou časového intervalu narastá odklon tieňa špajdle od počiatočnej polohy. Tento nárast má jasnú lineárnu tendenciu. Graf sme preto nafitovali lineárnou funkciou

$$\alpha = At + B, \quad (13)$$

pričom nás zaujíma predovšetkým parameter A . Ten hovorí o závislosti pootočenia tieňa na čase. Parameter B má predovšetkým korekčný charakter. Fitovaním sme určili ich hodnoty ako

$$A = (0,2310 \pm 0,0017)^\circ \cdot \operatorname{min}^{-1},$$

$$B = (0,126 \pm 0,045)^\circ.$$

Z hodnoty parametru A je zrejmé, že tieň Slnka sa na papieri posunie o $0,231^\circ$ za minútu. Z toho jednoducho určíme, že otočenie o celých 360° , tj. jeden (synodický) deň bude trvať $\frac{360^\circ}{0,231^\circ \cdot \operatorname{min}^{-1}} = 1558,44$ minút, čo je 25,97 hodín.

Táto hodnota však ešte nie je konečná. Uhol α , ktorý sme merali, totiž vyjadruje otočenie okolo päty špajdle, a nie jej vrcholu. Preto musíme hodnotu α prepočítať vzhľadom na otočenie okolo vrcholu špajdle. Pre zjednodušenie sme uvažovali, že výška Slnka nad obzorom je nemenná.

Vrchol špajdle sme si označili V a jej päťu P . Vrchol špajdle V sa premietol na papier ako koniec tieňa, označili sme ho A , reps. B na začiatku a konci časového intervalu jedného merania. V takomto značení sme teda chceli prepočítať uhol $\alpha = |\angle APB|$ na uhol $\delta = |\angle AVB|$.

V prípade konštantnej výšky Slnka nad obzorom je úsečka $|AB|$ kolmá na rovinu APV . Potom z trigonometrie platí $\alpha = |AB|/|AP|$ a $\delta = |AB|/|AV|$ (nakoľko ide o malé uhly, aproximovali sme $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, resp. $\operatorname{tg} \delta \approx \delta$). Uhol δ sme vyjadrili pomocou uhlu α ako

$$\delta = \alpha \frac{|AP|}{|AV|}. \quad (14)$$

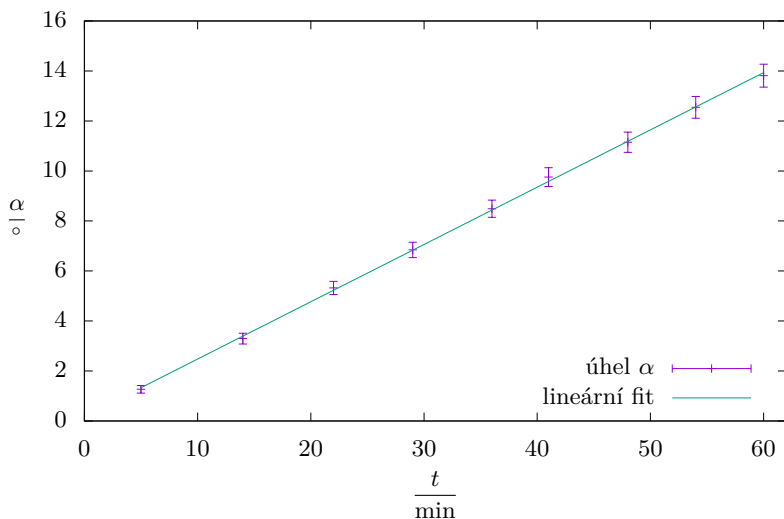
Do vztahu (14) tak už len dosadíme namerané hodnoty. Vzdialenosť $|AP| = (57,4 \pm 0,3)$ cm (vyjadruje dĺžku tieňa špajdle) sme priamo namerali. Vzdialenosť $|AV| = (62,9 \pm 0,4)$ cm sme vypočítali pomocou Pytagorovej vety z dĺžky špajdle l a z dĺžky jej tieňa. Z toho pokiaľ za uhol α dosadíme uhlový posun Slnka za jednu minútu (tj. hodnotu parameteru A z rovnice (13), dostaneme uhol $\delta = (0,2108 \pm 0,0021)^\circ$ vyjadrujúci hodnotu uhlového posunu Slnka korigovanú k vrcholu špajdle. Nami nameraná výsledná hodnota dĺžky dňa tak vychádza $(28,5 \pm 2,8)$ hodín.

Tab. 2: Namerané hodnoty otočenia tieňa špajdle α za zvolené časové intervaly t .

Meranie	$\frac{t}{\text{min}}$	$\frac{\alpha}{^\circ}$
1	7	1,774
2	5	1,141
3	7	1,774
4	5	1,267
5	9	2,027
6	8	2,027
7	7	1,521
8	7	1,647
9	5	1,267
10	7	1,394
11	6	1,394
12	6	1,267
13	6	1,141

Tab. 3: Otočenie tieňa špajdle α od počiatočnej polohy v priebehu 1 hodiny.

Meranie	$\frac{t}{\text{min}}$	$\frac{\alpha}{^\circ}$
1	5	1,27
2	14	3,29
3	22	5,32
4	29	6,84
5	36	8,49
6	41	9,76
7	48	11,15
8	54	12,55
9	60	13,81



Obr. 21: Závislosť otočenia tieňa špajdle na dĺžke časového intervalu.

Diskusia

Je zrejmé, že výsledná hodnota sa výrazne líši od reálneho synodického dňa (tj. 24 hodín). Túto diskrepanciu pravdepodobne spôsobuje hrubá systematická chyba. Ako hneď prvú musíme zohľadniť chybu, ktorú spôsobila úvaha, že Slnko sa pohybuje počas celého merania v rovnakej výške nad obzorom.

Ďalšiu veľkú nepresnosť spôsobila nestabilne umiestnená podložka. Vzhľadom na to, že podložka tvorená tvrdým výkresom bola položená na trávinatej ploche, nerovnosti spôsobovali problém pri správnom zakreslení tieňa špajdle. Problémy tiež spôsoboval vietor, ktorý jednak rozkýval špajdlu a mohol mierne zmeniť jej smer vzhľadom na podložku, zároveň tiež rozvlnil upevnenú podložku, čím opäť spôsoboval nepresnosti v zakreslení tieňa. Chybu do výsledku určite zanesla aj nie presne kolmá poloha špajdle.

Navyše, tieň špajdle bol hrubý, čo spôsobilo ďalšiu nepresnosť so zakreslením. Snažili sme sa značiť stred tieňa, čo sa nám však nie vždy mohlo rovnako podariť. Čas sme merali na celé minúty, pretože zakresľovanie trvalo niekoľko sekúnd (predovšetkým kvôli nedostatočne pevnej zemi pod podložkou), no meranie sme vždy vykonávali okolo celej minúty, teda chyba v meraní času sa nekumulovala.

Presnosť nášho výpočtu by sme mohli zvýšiť, keby sme pre každé meranie zaznamenali dĺžku tieňa špajdle, z čoho by bolo možné určiť výšku Slnka nad obzorom pre každé meranie. Išlo by však len o približné určenie, tieň konca špajdle bol totiž zle ohraničený. Pretože sme však použili relatívne dlhú špajdlu, ani pri použití dvoch výkresov sme sa nevyhli tomu, že koniec tieňa sa premietol mimo podložku určenú na jeho zakreslenie.

Presnosť nášho merania by sme mohli zvýšiť väčším súborom dát. Aby sme však neprekročili podmienku merania maximálne jednej hodiny, možnosti by boli dve. Jednou možnosťou je spraviť meranie, ktoré sme popísali vyššie, niekoľko krát po sebe a jeho výsledky štatisticky spracovať. Druhou možnosťou je nesčítat jednotlivé niekoľko minútové úseky merania spolu, ale spriemerovať veľký súbor meraní o dĺžke niekoľko minút. Teoreticky, pri veľkej snahe, môžeme úseky merať aj celú hodinu a potom priemerovať tieto merania. V oboch prípadoch by sme sa nedopustili porušenia podmienky, pokiaľ nepoužijeme časový interval dlhší ako 1 hodina, prípadne nebudeme jednotlivé intervaly sčítavať do intervalu väčšieho ako 1 hodina.

Alteratívne spôsoby určenia dĺžky dňa

Pri určovaní dĺžky dňa sme mohli taktiež použiť tieň nejakej budovy alebo väčšieho objektu. Meranie by však mohlo byť viac nepresné. Taktiež sme mohli zvoliť iné geometrické usporiadanie objektu, ktorý vrhá tieň, a tienidla. Bežne sa pri slnečných hodinách používa vodorovná podložka a oska sklonená v smere zemskej osi. Na výpočty najjednoduchšie je tieň osky rovnobežnej so zemskou osou premietat na súosú valcovú plochu, v tomto prípade netreba prevádzať žiadne korekcie a tieň by sa po povrchu valca mal pohybovať rovnomerne rýchlosťou $15^\circ \cdot \text{h}^{-1}$.

Ďalšou metódou je sledovanie pohybu hviezd. Princíp je podobný ako v nami zvolenom postupe so sledovaním Slnka. V tomto prípade by sme však merali priamo posun hviezd na oblohe. Spôsobov na to je viacero, napríklad merať čas medzi hornými kulmináciami dvoch hviezd o známych rektascenziách. Tu sa ale ako problém ukazuje nezávisle zmerať uhlové vzdialenosti na oblohe, dajú sa však nájst vo hviezdnych mapách.

Na záver spomenieme metódu využívajúcu Foucaultovo kyvadlo. Jeho konštrukcia však nie je úplne jednoduchá a ľahko sa môžeme dopustiť veľkej chyby merania. Foucaultovo kyvadlo poukazuje na rotáciu Zeme, ktorej dôsledkom je Coriolisova sila. Tá bude zdanlivo stáčať rovinu kmitov kyvadla, čo môžeme namať. Veľkosť tohto stáčania však závisí na zemepisnej šírke, na rovníku sa rovina kmitov vôbec nestáča. V našich zemepisných šírkach je posun dostatočne veľký už pri hodinovom meraní. Meranie by sme však i tak museli opakovať pre získanie dostatočne veľkého štatistického súboru dát a pre presné určenie chyby nášho merania.

Poznámka na záver

Autor tohto riešenia je presvedčený o tom, že keby mal deň naozaj 28 hodín, konečne by stíhal aspoň polovicu zo svojich plánov.

Úloha II.E . . . listopad

Změřte průměrnou vertikální rychlost padajícího listí. Použijte listy z několika různých stromů a diskutujte, jaký vliv má tvar listu na rychlost pádu. Jak by měl vypadat ideální list, pokud bychom chtěli, aby padal co nejpomaleji?

Teória

Ak padá teleso v homogénnom gravitačnom poli, ktoré sa nachádza pri povrchu Zeme, zvyčajne uvažujeme voľný pád. Aby boli splnené predpoklady voľného pádu, musí byť odporová sila vzduchu, ktorá pôsobí na padajúce teleso, zanedbateľne malá oproti tiažovej sile. V prípade padajúceho listu však toto neplatí.

List má príliš veľkú plochu v pomere k svojej hmotnosti. Pri analýze pádu listu teda nemôžeme zanedbať odporovú silu. Pre turbulentné prúdenie vzduchu okolo listu platí vzorec pre odporovú silu

$$F_o = \frac{1}{2} C \rho S v^2 ,$$

kde C je činiteľ odporu, ktorý zohľadňuje tvar a kvalitu povrchu telesa, ρ je hustota vzduchu, S je plocha priečného prierezu telesa kolmá na smer pohybu a v je rýchlosť pohybu telesa.

Ak by mal list vhodný tvar, aby sa netočil počas pádu, v istom okamihu by sa tiažová sila vyrovnala odporovej a list by padal rovnomerne priamočiario. Avšak keďže listy majú rôzne zvláštne tvary, ktoré nie sú ani zďaleka ideálne na nastolenie dynamickej rovnováhy síl, list sa počas pádu otáča, mení svoju rýchlosť a pohybuje sa po veľmi zložitej trajektórii.

Rýchlosť pádu tiež závisí od toho, ako veľmi je list suchý, či je skrútený a či môže bez poškodenia meniť svoj tvar pri páde. Trajektória pádu, otáčanie listu a teda aj priemerná rýchlosť bude pre konkrétny list závisieť na jeho počiatocnom natočení, spôsobe vypustenia, prípadných záchvevov vzduchu a ďalších faktoroch, ktoré nemôžeme spoľahlivo ovplyvniť. Budeme sa teda spoliehať na to, že meranie pre každý list bude dostatočne početné, aby sme získali rozumnú štatistiku, z ktorej dostaneme priemernú rýchlosť s primeranou odchýlkou.

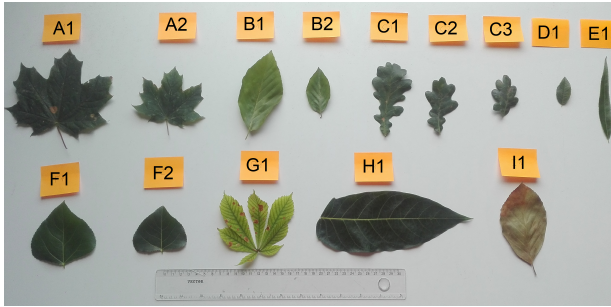
Postup pri experimente

Natrhali sme si listy zo stromov, prípade nazbierali už opadané, ale zachované. Vyberali sme listy z 8 stromov a kríkov, pričom sme sa snažili o diverzitu veľkostí.

Potom sme listy odvážili na laboratórnych váhach, výsledky sú v tabuľke 5. Zdokumentovali sme ich rozmery pomocou obrázku 22.

Jednotlivé listy sú označené písmenami, pričom písmenom im priradujeme druh podľa legendy v tabuľke 4.

Následne sme si pripravili bod na stene vo výške $h = 1,95$ m nad podložkou a nahrávaciu aparatúru s kamerou. Z výšky určenej značkou na stene sme voľne púšťali list (snažili sme sa neudelieť listu žiadnu počiatocnú rýchlosť) a celý pád nahrávali. Potom sme postup opakovali, približne desať krát pre každý list.



Obr. 22: Listy aj s meradlom dĺžky.

Tab. 4: Legenda označenia stromov.

označení	strom
A	javor
B	buk
C	dub
D	šípka
E	vřba
F	topoľ
G	pagašťan
H	pajaseň
I	buk (suchý)

Tab. 5: Hmotnosti použitých listov.

list	$\frac{m}{g}$
A1	0,89
A2	0,31
B1	0,29
C1	0,31
D1	0,07
E1	0,18
F1	0,79
G1	0,53
H1	2,00
I1	0,28

Nahrávky pádov listov sme spracovali pomocou programu Tracker. Jeho použitím sme zistili počet snímkov n , na ktorých bol list v stave pádu. Zo znalosti snímkovacej frekvencie kamery f^1 sme vypočítali dobu trvania jedného snímku T podľa vzťahu $T = f^{-1}$. Pomocou nej sme dopočítali celkový čas pádu ako $t = nT$. Zo znalosti výšky h , z ktorej list padal, sme podľa vzťahu

$$v = \frac{h}{t} = \frac{h}{nT} = \frac{hf}{n}$$

vypočítali rýchlosť pádu.

Priemernú rýchlosť pádu každého listu sme vypočítali rovnakým spôsobom, akurát sme namiesto n dosadzovali priemerný počet snímkov \bar{n} . Zkúste si rozmyslieť, prečo sme dostali mierne odlišné (ale presnejšie) výsledky, ako kebyže vypočítame aritmetický priemer rýchlostí.

¹Počet snímkov za sekundu. Hodnoty použité pre každé meranie sú uvedené v tabuľke 6.

Tab. 6: Použité frekvencie merania.

list	\bar{f} Hz
A1	29,7
A2	29,7
B1	29,8
C1	29,7
D1	29,6
E1	29,7
F1	29,8
G1	29,7
H1	29,8
I1	29,7

Výsledky merania

V tabuľke 7 sú uvedené namerané počty snímkov, cez ktoré padali jednotlivé listy. Rovno sme z nich vypočítali aritmetický priemer a štandardnú odchýlku podľa vzťahu

$$u_{nA} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (n_i - \bar{n})^2},$$

kde N označuje počet meraných pádov daného listu. Celková neistota merania sa vypočíta zo štatistickej odchýlky u_{nA} a systematickej odchýlky u_{nB} spôsobenej nepresnosťou meracích prístrojov, prípadne ľudským faktorom ako

$$u_n = \sqrt{u_{nA}^2 + u_{nB}^2}.$$

Neistota určenia presnej snímky, na ktorej bol list vypustený a na ktorej dopadol na podložku, vyústila v nepresnosť určenia počtu snímkov zachytávajúcich pád na $u_{nB} = 3$.

Nás však zaujíma, ako sa táto chyba prejavila v chybe merania rýchlosti. Podľa zákona šírenia neistôt máme

$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial n} u_n\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial n} u_h\right)^2} = v \sqrt{\left(\frac{u_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{u_h}{h}\right)^2},$$

kde neistota merania výšky vypustenia nad podložkou bola $u_h = 2$ cm.

Vypočítané priemerné hodnoty rýchlosti pádu jednotlivých listov a celkové neistoty merania rýchlostí sú uvedené v tabuľke 8.

Diskusia

Relatívna odchýlka merania rýchlosti sa pohybuje v rozmedzí od 5 do 11 %, čo považujeme za rozumne presné. Väčší podiel na celkovej odchýlke mala systematická

Tab. 7: Namerané počty snímkov pre pády jednotlivých listov a ich priemery a smerodajné odchýlky priemerov.

list	n										\bar{n}	$u_{n\Delta}$
A1	61	74	63	57	55	56	69	63	51	66	61,5	2,2
A2	74	71	62	59	70	59	47	55	54	65	61,6	2,7
B1	62	65	58	66	60	60	61	62	59		61,4	0,9
C1	50	43	48	51	53	48	43	46			47,8	1,3
D1	32	36	41	33	36	41	32	33	38	38	36,0	1,1
E1	47	44	40	34	40	33	38	42	34	37	38,9	1,5
F1	41	43	46	46	37	41	37	45	45	45	42,6	1,1
G1	58	51	54	57	59	54	58	51	41	48	53,1	1,8
H1	38	42	50	46	40	41	42	40	36	37	41,2	1,3
I1	71	61	63	61	67	61	65	67	58	61	63,5	1,2

Tab. 8: Priemerné rýchlosti pádu a ich neistoty.

list	\bar{v} m·s ⁻¹	u_v m·s ⁻¹
A1	0,94	0,06
A2	0,94	0,06
B1	0,95	0,05
C1	1,21	0,08
D1	1,60	0,14
E1	1,49	0,13
F1	1,36	0,10
G1	1,09	0,07
H1	1,41	0,11
I1	0,91	0,05

chyba merania. Aby bola menšia, museli by sme napríklad zabezpečiť vypúšťanie listu zo stále rovnakej výšky. Najväčší problém bolo však určenie presnej snímky, na ktorej bol list vypustený, resp. na ktorej už dopadol. V počítačových fázach pádu sa totiž list hýbe veľmi pomaly a je ťažké rozoznať zmenu jeho polohy na jednotlivých snímkach. Taktiež na konci pohybu je náročné presne určiť, kedy sa už list nehýbe. Ako riešenie tohto problému vidíme sledovať len fázu pádu mimo jeho začiatok a koniec. V praxi to znamená vyznačiť si polohu pár centimetrov pod výškou vypustenia a pár nad podložkou a do úvahy brať len pád medzi nimi. V tomto prípade môžeme naraziť na problém, že list sa bude hýbať príliš rýchlo, aby sme zachytili presne jeho prechod vyznačenou polohou. Vtedy by pomohla len vysokorýchlostná kamera. Otázkou by ale ostalo rozhodnúť, ktorú časť listu vlastne chceme merať.

Ak sa pozrieme na veľkosť relatívnej odchýlky rýchlosti v závislosti na samotnej rýchlosti, vidíme, že vo väčšine prípadov s rastúcou rýchlosťou rastie aj jej relatívna odchýlka. Príčinou je menší počet snímkov zachycujúcich pohyb, čo zvyšuje relatívnu odchýlku n .

Keď porovnáme priemerné rýchlosti pádu jednotlivých listov, dospejeme k záveru, že najmenšiu rýchlosť má list I1. Tento list je ako jediný z použitých listov už vysušený. Zaujímavé je porovnanie s listom B1, ktorý je toho istého druhu, veľmi podobnej veľkosti a má zhruba rovnakú hmotnosť. Pravdepodobne sa však počas pádu ohýbal menej, čo mohlo spôsobiť väčší odpor vzduchu.

Najväčšiu rýchlosť má list H1, ktorý mal tiež najväčšiu hmotnosť, no zároveň aj plochu. Pravdepodobne jeho hmotnosť a tiež poddajnosť tvaru pri páde spôsobili, že padal najrýchlejšie. Len o niečo pomalšie padal list F1, ktorý je ale podstatne menší a ľahší. S listom H1 má spoločnú veľkú ochotu sa ohýbať. Budí to v nás dojem, že tento faktor do značnej miery ovplyvňuje rýchlosť pádu. Je ale pravda, že listie padajúce zo stromov samovoľne je zväčša už vyschnuté, a teda tvar počas pádu mení len minimálne.

Keď porovnáme rýchlosti pádu listov A1 a A2, ktoré sa líšia vo veľkosti a hmotnosti, môžeme vidieť, že rozdiel rýchlostí je v rámci odchýlky naozaj takmer zanedbateľný. Je logické uvažovať, že ich hustota bude zrejme podobná. Vedie nás to k záveru, že veľkosť listu v rámci toho istého druhu zásadne neovplyvňuje priemernú rýchlosť pádu.

Z pozorovania pádu jednotlivých listov by bolo vhodné ešte poznamenať, že najmenej sa počas pádu točil list G1. To je spôsobené pravdepodobne jeho špecifickým tvarom, ktorý umožňuje obtekanie vzduchu aj pomedzi jeho články, čo zrejme stabilizuje jeho pád.

Vo výsledku z hľadiska najpomalšieho pádu vyhrávajú listy A a B z javora a buku. Vzhľadom na to, že tvar týchto listov sa výrazne líši, zrejme neexistuje nič ako ideálny tvar listu pre najpomalší pád. Avšak asi je možné optimalizovať parametre listu - zmenšiť jeho hmotnosť, zväčšiť plochu, zabezpečiť vnútorné obtekanie ako stabilizáciu pri páde. A hlavne nechať list prirodzene vyschnúť na znemožnenie zmeny tvaru počas pádu.

Záver

Namerané rýchlosti pádu jednotlivých listov sú v tabuľke 8.

Rýchlosť pádu zrejme ovplyvňuje viacero faktorov než len samotný tvar listu. Najmenšiu rýchlosť pádu mal vysušený bukový list, teda rýchlosť je závislá na možnosti listu meniť tvar počas pádu. Z hľadiska druhu stromu mali najmešiu rýchlosť javor a buk, teda ich parametre sú najideálnejšie pre náš účel, najšť čo najpomalšie padajúci list.

Ideálny list by mal podľa nášho merania mať čo najmenšiu hmotnosť, najväčšiu plochu, tvarom zabezpečenú stabilizáciu počas pádu a hlavne by mal byť suchý.

Úloha III.E . . . indexovaný kondenzátor

Poštou vám prišiel elektrolytický kondenzátor a rezistor. Zmeřte kapacitu kondenzátoru a odpor rezistoru, neměřte je však přímo. Součin kapacity kondenzátoru a odporu rezistoru je přibližně $RC \approx 20$ s.

Varování Elektrolytický kondenzátor má kladnou a zápornou elektrodu, při zapojení opačně ho můžete zničit. Maximální dovolené napětí je 10 V.

Odpor rezistoru

Najskôr si zistíme odpor rezistoru. Máme ale zakázané merať ho priamo, nezostáva nám teda nič iné, než použiť Ohmov zákon. Pripojíme rezistor ku zdroju, odmeriame napätie na jeho koncoch a prúd, ktorý ním preteká, a dosadíme do známeho vzťahu.

Pri napätí treba pripojiť multimeter k tým dvom bodom obvodu, medzi ktorými chceme vedieť napätie, a teda paralelne k rezistoru. Keďže batéria uvádza 4,5 V nastavíme na multimetri rozsah 20 V (pretože 2 V by bolo zjavne málo a nič medzi tým nemáme k dispozícii).

Pri meraní prúdu zas treba, aby tento prúd multimetrom priamo pretekal, a teda ho zapojíme sériovo. Ak sa bojíte, že prepálite multimetru poistky, tak ho najprv nastavte na najväčší rozsah prúdu a postupne uberajte (zvyšujte presnosť), dokým sa dá.

My sme pri meraní použili vzorku 5 rezistorov, pričom sa dalo čakať, že možno medzi nimi budú nejaké drobné rozdiely, ale ukázalo sa, že pri všetkých rezistoroch sme dostali napätie $U = 4,84$ V a prúd $I = 96$ μ A. Čo z toho vyplýva? Štatistická chyba odporov rezistorov vo výrobe je zanedbateľná v porovnaní s nepresnosťou merania. Tá je v prípade nášho multimetra $\pm(1\% + 2\text{digit})$ pri meraní prúdu a $\pm(0,5\% + 2\text{digit})$ pri meraní napätia. Čiže $\Delta I = 3$ μ A a $\Delta U = 0,04$ V. Pri delení dvoch veličín sa sčítajú štvorce ich relatívnych chýb. Takže odpor rezistoru je

$$R = \frac{U}{I} \left(1 \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2} \right) = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega.$$

Trochu teórie

Kapacita kondenzátoru C udáva pomer medzi nábojom Q v ňom uloženým a napätím U na jeho svorkách, teda $C = Q/U$. Podobne, odpor rezistoru R vyjadruje pomer napätia a prúdu, ktorý ním preteká, $R = U/I$. Čo je to prúd? Usporiadaný pohyb nabitých častíc. Jeho veľkosť udáva, aký náboj prešiel vodičom za jednotku času, čiže $I = Q/t$.

Čo sa teda stane, keď spojíme konce nabitého kondenzátoru rezistorom? Na svorkách rezistoru bude rovnaké napätie ako na kondenzátore a teda ním začne tiecť prúd veľkosti

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Q}{RC}.$$

Tento prúd tvoria elektróny bežiacie zo záporne nabitej elektródy kondenzátora na tú druhú (resp. hypotetické kladné náboje bežiacie presne opačným smerom). Čiže náboj Q a s ním teda aj napätie na kondenzátore bude postupne klesať. Tým pádom bude klesať aj prúd, čiže dostávame diferenciálnu rovnicu

$$-\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{RC},$$

kde sme len za prúd z predchádzajúceho vzťahu dosadili zmenu náboja za čas. Mínus je tam preto, lebo náboj na kondenzátore týmto procesom klesá.

Táto rovnica sa dá riešiť jednoducho separáciou premenných, ktorej výsledkom je

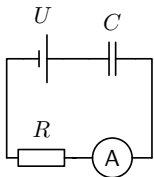
$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Lenže náboj merať nevieme (minimálne bežne multimeter takú možnosť neponúka). Zato vieme merať prúd a napätie, čiže máme dve možnosti: buď vydeliť obe strany kapacitou, alebo obe strany zderivovať podľa času. Tým dostaneme časový vývoj napätia na kondenzátore, resp. prúdu tečúceho vodičom

$$\begin{aligned} U(t) &= U(0)e^{-\frac{t}{RC}}, \\ I(t) &= I(0)e^{-\frac{t}{RC}}. \end{aligned} \tag{15}$$

Vidíme, že oba vzťahy sú analogické, takže je vlastne jedno, ktorý z nich použijeme. Ukážeme si samozrejme oba.

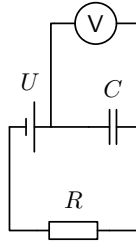
Zostáva otázka, ako vlastne zapojiť obvod. Schémy zapojenia sa nachádzajú na obrázkoch 23 a 24.



Obr. 23: Zapojenie pri meraní prúdu

Meranie prúdu

V tomto prípade rovno za kondenzátor zapojíme multimeter. Z predchádzajúceho merania už vieme aký prúd máme očakávať. Multimeter teda momentálne ukazuje, ako rýchlo sa kondenzátor nabíja. Tento prúd tiež exponenciálne klesá, takže je dôležité určiť si hodnotu prúdu, pri ktorej nabíjanie ukončíme. Nie je až tak dôležité akú, ale hlavne musí byť pri každom meraní rovnaká. My sme sa rozhodli, že nabíjanie ukončíme pri $3\mu\text{A}$. Takto trvalo nabíjanie niečo cez 2 minúty.



Obr. 24: Zapojenie pri meraní napätia

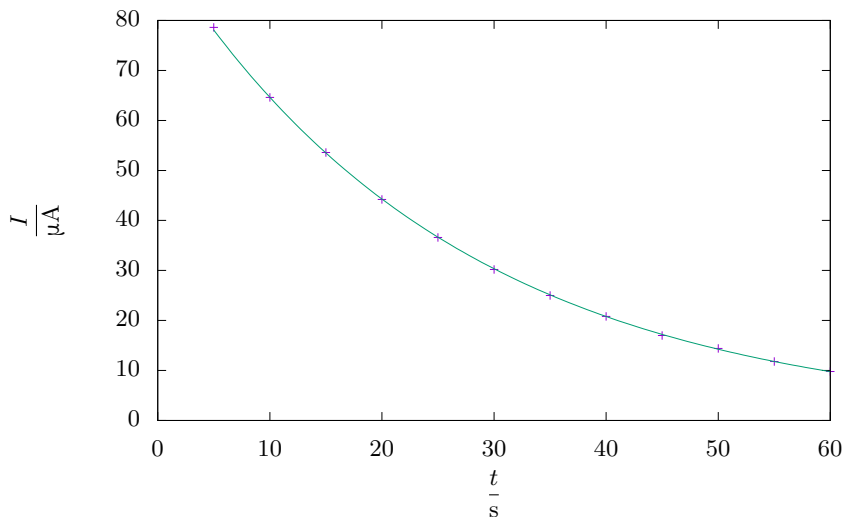
Keď donabíjame, treba spraviť súčasne dve veci - odpojiť baterku (stačí jeden kábel) a spustiť stopky. Potom už len sledujeme stopky a každých 5 sekúnd pozrieme na multimeter a poznačíme si hodnotu prúdu. Meranie sme vykonali pre päť kondenzátorov tak, že sme tento postup zopakovali pre každý z nich, ale ako vidno z tabuľky 9, štatistická chyba je opäť rozumne malá.

Tab. 9: Namerané časové priebehy prúdu

t s	I μA		\bar{I} μA			
5	78	78	80	78	79	78,6
10	65	65	65	64	64	64,6
15	54	53	54	53	54	53,6
20	44	44	44	44	45	44,2
25	36	37	36	37	37	36,6
30	30	30	30	30	31	30,2
35	25	25	25	25	25	25,0
40	20	21	21	21	21	20,8
45	17	17	17	17	17	17,0
50	14	14	14	15	15	14,4
55	11	12	12	12	12	11,8
60	9	10	10	10	10	9,8

Takže sme zmerali vývoj prúdu v čase. Otázka znie, ako z toho určiť kapaci-

tu. Najjednoduchší spôsob je použiť nejaký software, ktorý nám naše dáta fitne exponenciálou²



Obr. 25: Závislosť prúdu v obvode na čase pri vybíjaní kondenzátora

Okrem toho, že sa môžeme na grafe 25 pokochať, ako všetky body ležia na danej krivke, sa dozvieme aj to, aký má táto krivka predpis. V našom prípade dostávame $f(x) = 94,3 \cdot \exp(-0,0378x)$. Čo keď porovnáme s (15) zistujeme, že

$$\begin{aligned}
 -\frac{t}{RC} &= -0,0378, \\
 RC &= 26,5 \text{ s}, \\
 C &= 525 \mu\text{F}.
 \end{aligned}$$

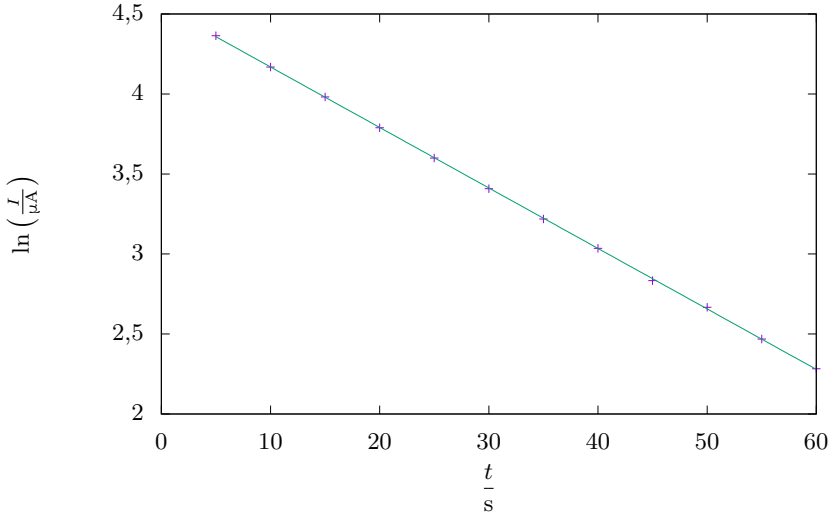
Zároveň si môžeme všimnúť, že $I(0) = 94,3 \mu\text{A}$, čo je o pár mikroampérov menej, než prúd, ktorý sme namerali v prvej časti. Náhoda? Samozrejme, že nie. K tejto skutočnosti sa na záver vrátíme.

Ak ale nechceme fitovať namerané dáta pomocou nejakého „black boxu“, môžeme to spraviť aj sami pomocou linearizácie. Keď zlogaritmujeme obe strany (15) dostávame, že

$$\ln I(t) = \ln I(0) - \frac{t}{RC},$$

čiže ak si nakreslíme graf závislosti logaritmu prúdu (keďže do argumentu logaritmu by malo ísť bezrozmerné číslo, budeme logaritmováť I/I_n , kde sme si zvolili $I_n = 1 \mu\text{A}$) na čase, mal by byť lineárny, so smernicou $-(RC)^{-1}$, viď graf 26.

²RStudio, gnuplot, ...



Obr. 26: Linearizovaná závislost

Smernicu určíme z krajných bodov

$$k = \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = -0,0379 \text{ s}^{-1}.$$

Z toho vyplýva, že $C = 524 \mu\text{F}$, čo je vlastne to isté, ako pri použití „black boxu“. Presnejšie by ale bolo vykonať lineárnu regresiu.

Ďalej by bolo vhodné určiť chybu. Štvorec relatívnej chyby kapacity je súčet štvorcov relatívnych chýb odporu (tú sme určili v prvej časti) a relatívnej chyby, s ktorou sme určili smernicu.

Keď si za oba prúdy, ktoré používame na určenie smernice dosadíme $I + u_I$, kde pod u_I myslíme absolútnu chybu daného prúdu, po chvíli hrania sa s logaritmi a limitami sa dá dôjsť k záveru, že absolútna chyba smernice je

$$u_k = \frac{1}{u_t} \left(\frac{u_{I_1}}{I_1} + \frac{u_{I_2}}{I_2} \right),$$

čiže súčet relatívnych chýb prúdov deleno časový rozdiel. Ako absolútnu chybu prúdu opäť použijeme dva krát najmenší dielik plus percento nameranej hodnoty a dostávame, že relatívna chyba smernice je $\delta_s = 0,004$. To spolu s relatívnou chybou odporu dáva $u_C = 0,03$. Po vynásobení kapacitou, dostaneme $C = (520 \pm 20) \mu\text{F}$.

Meranie napätia

Tentokrát treba zapojiť multimeter ku kondenzátoru paralelne. Rozhodli sme sa nabíjať, dokým nebolo napätie 4,83 V, čo trvalo asi sekundu.

Dalo by sa samozrejme postupovať úplne rovnako ako minule a v pevne stanovených časoch merať hodnotu napätia. Pre zmenu to ale spravíme naopak. A síce, zmeriame časový rozdiel medzi dvoma pevne stanovenými hodnotami napätia. Tie sme si stanovili ako $U_1 = 4\text{ V}$ a $U_2 = 2\text{ V}$. Dôležitý je hlavne ich pomer. Dosadením do (15) zisťujeme, že ak čas, ktorý uplynie medzi tým, kým klesne napätie z U_1 na U_2 , označíme Δt , môžeme C vyjadriť ako

$$C = \frac{\Delta t}{R \ln 2}.$$

Spravili sme 5 meraní (opäť jedno pre každý kondenzátor) a určili priemer a smerodajnú odchýlku $\Delta t = (16,9 \pm 0,4)\text{ s}$.

Po dosadení do vzťahu vyššie dostávame $C = (480 \pm 20)\text{ }\mu\text{F}$.

Diskusia

Prúžky na rezistore majú postupne farby: zelená, hnedá, čierna, červená, hnedá. Na internete sa dá nájsť veľa rôznych možností ako ich dekodovať³ Zisťujeme, že výrobca udáva, že rezistor by mal mať odpor $R_v = (51,0 \pm 0,5)\text{ k}\Omega$. Tento interval je celý vnútri intervalu, ktorý sme určili našim meraním, čiže hodnotu odporu sme určili správne.

Výsledky kapacity získané meraním prúdu a meraním napätia sa dosť výrazne líšia. Môže nás napadnúť, či to nemôže byť spôsobené inou použitou metódou. Tak sme skúsili aplikovať metódu merania napätia aj na meranie prúdov. Prúd klesol na polovicu (z $80\text{ }\mu\text{A}$ na $40\text{ }\mu\text{A}$) v priemere za $18,2\text{ s}$, čo zodpovedá kapacite $C = 520\text{ }\mu\text{F}$ (čiže takej istej ako sme pri meraní prúdu určili pôvodne), takže je problém niekde inde.

Hodnota kapacity, ktorú udáva výrobca je $C = 470\text{ }\mu\text{F}$. Tá spadá do intervalu chyby pri meraní napätia, avšak nie pri meraní prúdu. To nám teda dáva nápovedu, ktoré z meraní je vlastne zle.

A kde konkrétne je tá chyba? Vráťme sa späť k odvodeniu vzťahu (15). Tam sme si povedali, že R je odpor, ktorý stojí medzi svorkami rezistoru. Pri meraní sme predpokladali, že tento odpor je $R = (50,4 \pm 1,6)\text{ k}\Omega$, čo však nebola tak úplne pravda. Sériovo s našim rezistorom bol totiž zapojený multimeter! Bol zapojený ako ampérmeter, takže jeho vnútorný odpor bol veľmi malý (preto sme namerali skoro správnu hodnotu), ale stále bol dosť veľký na to, aby nezanedbateľne ovplyvnil meranie.

Keď sa ale pozrieme na meranie napätia, vidíme, že aj tam mohol multimeter ovplyvniť meranie. Tentokrát presne opačným spôsobom. Keďže bol zapojený ako voltmeter paralelne s našim rezistorom, skutočný odpor, cez ktorý sa kondenzátor vybíjal bol menší, než sme počítali, čiže by sme mali pre zmenu dostať hodnotu kapacity nižšiu ako reálna hodnota. Ale ostatné chyby v tomto prípade prevážili nad nedokonalosťou voltmetru.

S použitím ďalšieho multimetru by sme mohli odmerať vnútorný odpor v jednotlivých prípadoch a použiť ho na korekciu výsledkov. Do hry však vstupujú aj

³<https://tinyurl.com/o74f2tk>

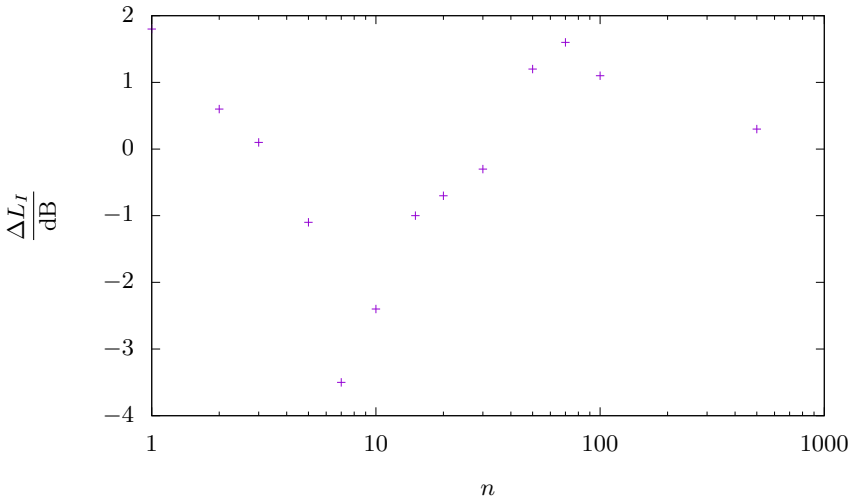
prechodové odpory v miestach zapojení jednotlivých súčiastiek, či vnútorný odpor samotného kondenzátora. Určiť presne kapacitu kondenzátora týmito metódami je teda pomerne komplikované, najlepšie je totižto použiť striedavý prúd a zmerať indukčnosť kondenzátora, alebo určiť priamo rezonančnú frekvenciu kmitov príslušného RC zapojenia.

Záver

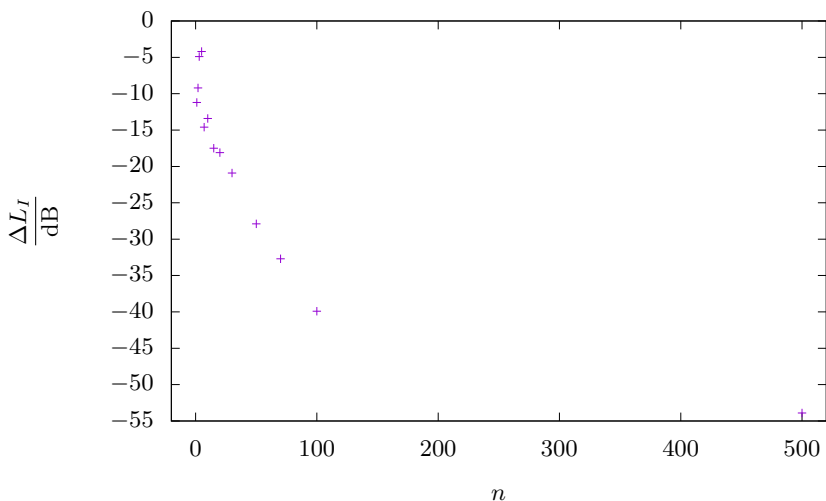
Hodnotu odporu rezistoru sme určili ako $R = (50,4 \pm 1,6) \text{ k}\Omega$, čo sa zhoduje s hodnotou zadanou výrobcom $R_v = (51,0 \pm 0,5) \text{ k}\Omega$. Meraním vývoja prúdu v čase sme dostali kapacitu $C = (520 \pm 20) \text{ }\mu\text{F}$. Meraním vývoja napätia v čase sme dostali kapacitu $C = (480 \pm 20) \text{ }\mu\text{F}$. Výrobca udáva $C = 470 \text{ }\mu\text{F}$, čo znamená, že meraním napätia sme dostali správny výsledok, zatiaľ čo meraním prúdu sme dostali výrazne chybný výsledok, dôvodom bol nenulový vnútorný odpor ampérmetra.

Úloha IV.E ... papírová izolační

Změřte, jak moc dokáže papír stímit zvuk. K měření stačí použít např. mobilní telefon jako generátor zvuku a mikrofon v počítači jako detektor (Audacity). Použijte papíry různých druhů a tvarů.



Obr. 27: Závislost rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině na počtu listů papíru pro frekvenci 660 Hz. Osa x je logaritmická.



Obr. 28: Závislost rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině na počtu listů papíru pro frekvenci 8 500 Hz.

Teória

Dopadá-li zvuková vlna na rozhraní dvou materiálů (v našem případě vzduchu a papíru), část intenzity se odrazí zpět, zatímco zbytek projde. Následuje opačné rozhraní, přes které opět projde jen část intenzity. Vlnění, které se odrazí od druhého rozhraní, se ale ještě může částečně odrazit od prvního rozhraní a následně se může znovu pokusit projít druhým rozhraním.

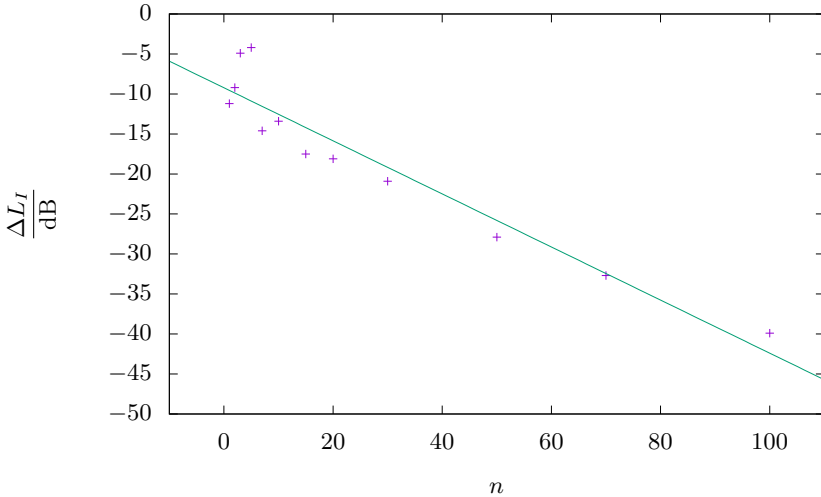
Poměry jednotlivých intenzit závisí na materiálu a na frekvenci vlnění. Například kovy či sklo velkou část energie zvuku odrazí, zatímco přes rozhraní pórovitých materiálů většina energie projde. Závislost na frekvenci už tak jednoduchá není a u různých materiálů může být jiná.

Část energie zvuku je při průchodu prostředím pohlcena a přeměněna na teplo. Také tento jev závisí na frekvenci vlnění a na materiálu.

V tomto experimentu jsme použili dva druhy papírů – homogenní papír a lepenku, která se skládá z papíru a vzduchu. Klasický papír je i ve více vrstvách velmi tenký, proto lze útlum způsobený prostředím zanedbat. Jednotlivé listy však na sebe nedoléhají zcela přesně, takže výsledný blok papírů bude obsahovat vnitřní rozhraní, na kterých bude docházet k odrazům.

Každý další papír přidá dvě nová rozhraní a každé z nich má nějaký koeficient propustnosti. Výsledná propustnost bloku se tak s každým dalším papírem znovu vynásobí nějakým koeficientem. Z toho se dá usuzovat, že celková prošlá intenzita bude exponenciálně klesat s počtem listů papíru.

Lepenka se bude chovat podobně s tím rozdílem, že její tloušťka už nebude



Obr. 29: Závislost rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině na počtu listů papíru pro frekvenci 8 500 Hz bez hodnoty pro 500 listů, proložená lineární funkcí $f(x) = ax + b$. Koeficienty fitu jsou $a = (-0,33 \pm 0,03)$ dB a $b = (-9,2 \pm 1,3)$ dB.

zanedbatelná a zřejmě tak bude docházet k pohlcování energie přímo v jednotlivých vrstvách lepenky. Lze ukázat, že i tento útlum probíhá exponenciálně⁴.

Papír zřejmě pohltí pouze tu část zvuku, která by procházela přímo přes něj. Zvuk je však způsoben vlněním a proto se může ohýbat okolo překážek. Ohyb je výrazný tehdy, pokud je vlnová délka srovnatelná s rozměry překážky nebo menší, což je v případě tohoto experimentu splněno. Vždy tak bude existovat nějaká minimální hladina zvuku, kterou bychom naměřili, i kdyby papír všechnu zvuk odstínil.

Dále si musíme uvědomit, že veličina, kterou běžně vnímáme jako „hlasitost“, se ve skutečnosti jmenuje hladina intenzity a je definovaná vztahem

$$L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right),$$

kde $I_0 = 1 \cdot 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ je nějaká minimální slyšitelná intenzita. Zvýšení hlasitosti o 10 dB tak odpovídá desetinásobnému zvýšení intenzity zvuku. Výše jsme odhadli, že závislost prošlé intenzity na počtu papírů bude exponenciální, neboli

$$I = Ae^{-an},$$

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Acoustic_attenuation

kde $A > 0 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$ a $a > 0$ jsou nějaké konstanty a n je počet listů papíru. Potom pro měřenou hlasitost dostáváme

$$L_I = 10 \log_{10} \left(\frac{A}{I_0} e^{-an} \right) = 10 \log_{10}(e) \left(\ln \left(\frac{A}{I_0} \right) - an \right) = B(1 - bn),$$

což je lineární funkce.

Postup pri experimente

Ako generátor zvuku sme použili mobilný telefón. Ako detektor zvuku bolo potrebné zvoliť citlivé zariadenie, preto sme použili hlukomer. Hlukomer meria intenzitu zvuku v decibeloch.

Generátor zvuku a hlukomer boli položené tak, aby vzdialenosť medzi nimi bola konštantná a zároveň nie príliš veľká, aby boli výsledky badateľne rozdielne.

Použili sme niekoľko druhov papiera, pričom sa menila veľkosť papiera, materiál, tvar a hrúbka. Každý papier bol vložený medzi generátor zvuku – ktorý generoval vždy rovnakú frekvenciu – a hlukomer. Pre každý papier sme prevedli 3 merania, ktoré sú uvedené v tabuľke 10.

V druhej časti experimentu jsme zvuk opět generovali pomocí mobilního telefonu, ale měřili jsme ho pomocí mikrofону a počítače. Použili jsme klasický kancelářský papír formátu A4 s plošnou hustotou $80 \text{ g}\cdot\text{m}^{-2}$. Z důvodu velkého množství listů papíru byl experiment uspořádán vertikálně (nejnižší zdroj, nad ním papíry a nahoře mikrofon). Vzdálenost mikrofону a zdroje byla konstantní.

Výsledky merania

Generátor zvuku vysielal zvuk s frekvenciou 660 Hz. Vzdialenosť medzi generátorom zvuku a hlukomerom bola 16 mm. Bez tienenia zvuku papierom, hlukomer nameral priemernú intenzitu 90,6 dB so štandardnou odchýlkou $\pm 0,2$ dB. Štandardná odchýlka sa vypočíta podľa vzťahu

$$u = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (L_{I_i} - \bar{L}_I)^2},$$

kde pre jeden druh papiera N je počet meraní, L_{I_i} je tlmená hladina intenzity a \bar{L}_I je priemerná hodnota tlmenej hladiny intenzity. Namerané hodnoty su v tabuľke 10 spolu so štandardnou odchýlkou.

V druhém měření byla vzdálenost zdroje a mikrofону přibližně 40 cm. Vzhledem k tomu, že nás zajímala závislost hlasitosti na počtu listů papíru, měřili jsme pouze rozdíl hlasitosti vůči referenční hladině intenzity, kterou jsme zvolili nulovou pro nula listů papíru. V tabulce 11 jsou výsledky měření pro frekvence 660 Hz a 8500 Hz. Tyto hodnoty jsme dále vynesli do logaritmického grafu 27 a dále do grafů 28 a 29. V posledním jmenovaném grafu jsme zobrazili všechny hodnoty kromě poslední, abychom je mohli rozumně proložit lineární funkcí.

Tab. 10: Tlmenie zvuku rôznymi typmi papiera.

papier	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{S}{\text{cm}^2}$	$\frac{L_I}{\text{dB}}$	\bar{L}_I dB	$\frac{u}{\text{dB}}$	$\frac{\Delta \bar{L}_I}{\text{dB}}$	$\frac{u}{\text{dB}}$		
kriedový papier	0,12	623,7	86,9	85,5	86,9	86,4	0,5	4,2	0,6
2 kriedové papiere	0,215	623,7	85,4	84,8	84,9	85,0	0,2	5,6	0,3
hladká lepenka 1	0,597	603,8	84,9	84,3	84,6	84,6	0,2	6,0	0,3
hladká lepenka 2	0,327	621,6	85,6	85,1	84,7	85,1	0,3	5,5	0,4
2 hladké lep. 2	0,589	621,6	82,5	81,2	81,2	81,6	0,4	9,0	0,5
toaletný papier	0,123	107,0	89,8	89,5	89,6	89,6	0,1	1,0	0,3
2 toaletné papiere	0,197	107,0	88,4	89,3	89,4	89,0	0,3	1,6	0,4
3 toaletné papiere	0,28	107,0	88,2	88,4	89,0	88,5	0,2	2,1	0,3
lepenka 1	0,28	832,5	85,7	86,3	86,1	86,0	0,2	4,6	0,3
lepenka 2	0,538	832,5	81,8	82,3	83,7	82,6	0,6	8,0	0,6
hladká lep. 3	2,116	700,8	71,0	72,2	68,0	70,4	1,2	20,2	1,2
hladká lep. 4	0,703	275,1	85,9	84,5	85,3	85,2	0,4	5,4	0,5
vlnitá lep. 1-vrst.	2,408	307,2	85,3	84,7	84,3	84,8	0,3	5,8	0,4
vlnitá lep. 2-vrst.	5,54	310,5	83,9	84,3	83,1	83,8	0,4	6,8	0,5

Diskusia

Z merania môžeme pozorovať, že rôzne papiere (typ, hrúbka, atď.) zvuk tlmili rôzne. Keď porovnáme tlmenú intenzitu jednou vrstvou daného materiálu s rovnakým materiálom ale dvojvrstvovým, tak dvojvrstvový materiál tlmil zvuk viac. Z meraní, kde sme menili počet vrstiev, môžeme povedať, že čím hrubší materiál, tým viac tlmí zvuk. Typ papiera hrá tiež veľkú rolu, ako sme sa presvedčili, lepenka tlmí zvuk inak (lepšie) ako obyčajný papier. Je to preto, že zvuk je najlepšie pohlcovaný pórovitými materiálmi, obsahujúcimi vzduchové vačky (zvuk je v kontakte s časticami plynu, ktoré môže rozkmitať ľahko a odovzdať im viac energie ako časticiam pevnej látky). Z nášho experimentu pozorujeme, že rôzny obsah papiera má badateľný vplyv na tlmenie zvuku až pri veľkých zmenách obsahu papiera. Odchýlky merania boli pri niektorých papieroch výraznejšie, avšak celkové pozorovanie neovplyvnili. Chyby merania vznikli kvôli nepresnosti hlukomeru, nepresnému umiestneniu papiera, použitiu všesmerového mikrofónu (čiže zachytával zvuk zo všetkých strán), všesmerovému zdroju zvuku a šumu okolia. Tieto chyby môžu byť (pri lepších podmienkach experimentu) odstránené použitím smerového mikrofónu a zdroju zvuku a izoláciou od okolitých zvukov.

Jak môžeme vidieť v tabuľke 11, pro frekvenci 660 Hz se hlasitost snížila maximálně o jednotky decibelů. Můžeme z toho usuzovat, že zvuk se velmi účinně ohnul kolem papírové překážky a snadno dorazil do mikrofónu, který byl navíc výrazně dál od papírů než v první části měření. Podle grafu 27 se navíc zdá, že jsme neměřili jen náhodné fluktuace kolem nuly, ale že je v datech nějaká pravidelnost. Pravděpodobně je to způsobeno nějakou netriviální interferencí zvukových vln,

Tab. 11: Naměřené hodnoty rozdílu hlasitosti zvuku vůči referenční hladině pro různé počty listů papíru.

n	660 Hz	8 500 Hz
	$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$	$\frac{\Delta L}{\text{dB}}$
1	1,8	-11,2
2	0,6	-9,2
3	0,1	-4,9
5	-1,1	-4,2
7	-3,5	-14,6
10	-2,4	-13,4
15	-1,0	-17,5
20	-0,7	-18,1
30	-0,3	-20,9
50	1,2	-27,9
70	1,6	-32,7
100	1,1	-39,9
500	0,3	-53,9

kteří se ohnuly kolem bloku papírů. Bohužel, výpočet difrakce vlnění na překážce není úplně snadnou záležitostí, takže naměřenou závislost nemůžeme podpořit teoretickým modelem.

Pro frekvenci 8 500 Hz už je situace o něco zajímavější. Vlnová délka zvuku vychází přibližně 4 cm, což je výrazně menší hodnota, než jsou rozměry papíru. Difrakce proto nehraje takovou roli a můžeme tak pozorovat skutečný útlum hlasitosti zvuku. Naměřené hodnoty sice nesedí zcela přesně na přímce, ale všechny hodnoty kromě poslední mají zřejmý lineárně klesající trend, což je v souladu s předpovědí našeho modelu. To je dobře vidět v grafu 29.

Rozdíl hlasitosti pro 500 listů papíru se nápadně vymyká předchozí závislosti, takže se zřejmě projevil nějaký jev, který jsme neuvažovali. Opět se nabízí vysvětlení pomocí difrakce vlnění. Ta sice měla výrazně menší vliv, než v případě pro 660 Hz, ale jelikož se propustnost bloku papírů neustále snižuje, musí prošlá intenzita dříve či později klesnout pod hodnotu intenzity způsobené difrakcí. Potom už nebude počet papírů hrát žádnou výraznou roli, protože pokaždé naměříme podobnou minimální hodnotu difrakčního pozadí.

Vzhledem k tomu, že vlnová délka byla menší než výška pěti set listů papíru, se také mohly projevit ještě zajímavější jevy typu interference vlnění na jednotlivých rozhraních papírů.

Záver

Experimentálne sme overili teoretické predpoklady tienenia zvuku papierom, ktoré závisí na niekoľkých parametroch. Hrúbka papiera – hrubší papier tlmí zvuk lepšie,

vrstvení papiera – viac vrstiev pohlcuje zvuk lepšie, materiál papiera – rôzne druhy papiera tlmia zvuk rôzne. Obsah papiera ovplyvňuje tienie zvuku, avšak až pri väčšom zmenšení obsahu je rozdiel badateľný.

Dále jsme zjistili, že při zanedbání difrakce a interference je útlum hlasitosti zvuku přibližně přímo úměrný počtu listů papíru, které k tomu použijeme. Pokud difrakci a interferenci nelze zanedbat, výsledky mohou být ještě daleko zajímavější.

Úloha V.E ... třiceticentimetrový tón

Každý někdy z nudy zkusil brknat na dlouhé pravítko vystrčené přes okraj lavice. Zvolte vhodný model závislosti frekvence na délce vysunutí za okraj lavice a experimentálně jej ověřte. Popište i další parametry pravítka.

Poznámka Pravítko ke stolu přitlačte tak, aby kmitala jen jeho vysunutá část.

Teória

Po krátkom zmyslení sa nad problémom si môžeme uvedomiť, že rovnaký vzťah ako pre kmitajúce pravítko platí aj pre ladičku či konzolový nosník. Napríklad na⁵ môžeme nájsť hľadaný vzťah závislosti uhlovej frekvencie ω kmitov na dĺžke vysunutia L pravítka

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}},$$

kde E je Youngov modul pružnosti a ρ hustota materiálu, z ktorého je pravítko zhotovené, A je plocha kolmého prierezu pravítka, I je moment zotrvačnosti prierezu pravítka a $\alpha_n = \{1,875; 4,694; 7,885; \dots\}$ je číselná konštanta zodpovedajúca módu kmitov. Pre I podľa článku máme

$$I = \frac{bd^3}{12},$$

kde b je šírka a d je hrúbka pravítka. Pre frekvenciu kmitov potom máme

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\alpha_n^2}{4\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{3\rho L^4}}.$$

Frekvencia by teda na dĺžke vysunutia mala závisieť ako $f \propto L^{-2}$.

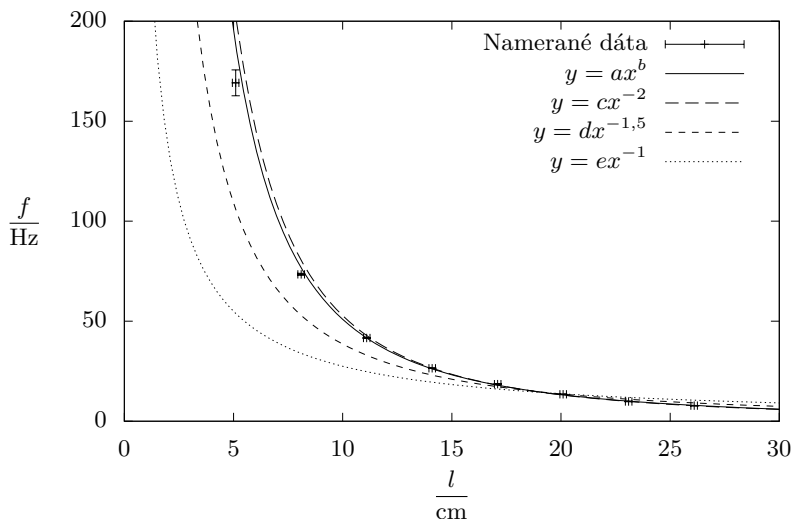
Meranie

Pri meraní bolo použité pravítko s „dĺžkou“ 30 cm šírky $s = (3,6 \pm 0,1)$ cm, hrúbky $d = (1,9 \pm 0,1)$ mm a hmotnosti $m = (23 \pm 1)$ g. Pri meraní sme ho položili na stôl tak, aby sa hrana stola nachádzala na dĺžke \tilde{l} stupnice, kde nula stupnice bola mimo stola. Vzďialenosť nuly stupnice od konca pravítka bola určená ako $\Delta l = (1,1 \pm 0,1)$ cm. Na stôl sme následne položili závažie (knihy), ktorého hrana

⁵<http://vlab.amrita.edu/?sub=3&brch=175&sim=1080&cnt=1>

koincidovala s hranou stola, čím sme pravítku v oblasti nad stolom zamedzili pohyb. Celkovo odhadujeme chybu merania dĺžky voľne kmitajúcej vysunutej časti pravítka na $l = \tilde{l} + \Delta l$ na $\sigma_l = 1,5$ mm.

Meranie samotné sme vykonali pomocou programu *Audacity* a mikrofónu na počítači, ktorý sme umiestnili tesne pod pravítko k hrane stola. Zaznamenávali sme teda zvuk úderov kmitajúceho pravítka do stola. Zo získaného záznamu intenzity na čase sme odčítali čas t medzi n po sebe idúcimi nárazmi, z čoho sme určili periódu kmitov ako $T = t/n$. Pre každú dĺžku vysunutia boli vykonané štyri merania. Namerané hodnoty sú zanesené do tabuľky 12 spolu s vypočítanými priemernými hodnotami periódy \bar{T} a jej štandardnou odchýlkou $\sigma_{\bar{T}}$.



Obr. 30: Závislosť frekvencie f kmitov pravítka na dĺžke vysunutia l .

Z periódy kmitov bola určená ich frekvencia ako

$$f = \frac{1}{T},$$

$$\sigma_f = \frac{\sigma_T}{T^2},$$

ktorej závislosť bola vynesená do grafu 30. Týmito bodmi boli pomocou metódy najmenších štvorcov preložené nasledujúce závislosti

$$y_1 = ax^b,$$

$$y_2 = cx^{-2},$$

$$y_3 = dx^{-1,5},$$

$$y_4 = ex^{-1},$$

Tab. 12: Namerané periody kmitov pravitka.

\tilde{l} cm	l cm	n	t ms	T ms	\bar{T} ms	$\sigma_{\bar{T}}$ ms
25,0	26,1	9	1157	128,6	128,4	0,4
		7	898	128,3		
		8	1 031	128,9		
		9	1 151	127,9		
22,0	23,1	5	517	103,4	101,5	1,3
		7	708	101,1		
		3	303	101,0		
		9	905	100,6		
19,0	20,1	4	301	75,3	74,4	0,7
		4	299	74,8		
		1	74	74,0		
		3	221	73,7		
16,0	17,1	5	273	54,6	53,8	0,8
		16	849	53,1		
		13	693	53,3		
		5	272	54,4		
13,0	14,1	14	526	37,57	37,73	0,15
		14	527	37,64		
		6	227	37,83		
		9	341	37,89		
10,0	11,1	21	504	24,00	24,04	0,11
		17	411	24,18		
		18	433	24,06		
		25	598	23,92		
7,0	8,1	18	246	13,67	13,62	0,09
		18	244	13,56		
		19	257	13,53		
		14	192	13,71		
4,0	5,1	24	143	5,96	5,9	0,2
		11	68	6,18		
		22	129	5,86		
		22	124	5,64		

kde za x bola braná dĺžka v centimetroch a y frekvencia v kilohertzoch. Prvý fit vyjadruje všeobecný tvar hľadanej závislosti, druhá závislosť je závislosť nášho modelu, tretia a štvrtá sú pre porovnanie závislosti, ktoré sa objavovali v prišliých

riešeníach. Hodnoty parametrov boli určené nasledovne

$$\begin{aligned} a &= 4,44 \pm 0,36, \\ b &= -1,94 \pm 0,03, \\ c &= 5,28 \pm 0,06, \\ d &= 1,22 \pm 0,07, \\ e &= 0,275 \pm 0,04. \end{aligned}$$

Vhodnosť fitu sa dá popísať napríklad pomocou *RMS*, strednej hodnoty kvadrátu reziduí, t.j. odchýlok nameraných hodnôt od fitu. Pre prvú závislosť $RMS = 1,392$, pre druhú $RMS = 1,56$, tretiu $RMS = 10,7$ a štvrtú $RMS = 33$.

Diskusia

Z hodnôt *RMS*, ale aj z grafu samotného, vidíme, že za správne sa dajú pokladať prvé dve závislosti. Exponent *b* prvej závislosti je ale značne nefyzikálny, preto ako správnu volíme druhú závislosť. Pre koeficient *c* máme po prevode do základných jednotiek $c = (0,528 \pm 0,006) \text{ m}^2 \cdot \text{Hz}$. Po porovnaní so vzťahom z teoretického úvodu by malo platiť

$$c_{\text{teor}} = \frac{1,875^2}{4\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{3\rho}}.$$

PVC, z ktorého je pravítko zhotovené, má modul pružnosti $E = 2,2 - 3,3 \text{ GPa}$ a hustotu⁶ $\rho = 1,15 - 1,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Z rozmerov pravítka a jeho hmotnosti vychádza hustota ako $\rho = (1\,280 \pm 90) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Po dosadení krajných hodnôt dostávame $c_{\text{teor}} = 0,36 - 0,53 \text{ m}^2 \cdot \text{Hz}$, teda nameraná hodnota zodpovedá PVC s vysokým Youngovým modulom, nízkou hustotou a hrubšiemu pravítku.

Nami nameraná závislosť je teda celkom dobre popísaná teoretickým modelom, no ako si z grafu môžeme všimnúť, pre malé dĺžky vysunutia teoretická závislosť neprechádza nameranými hodnotami. Toto môže byť spôsobené javmi odohrávajúcimi sa na hrane stola a pod závažím, ktoré by sa dali odstrániť pevnejším uchytením, čo by ale zamedzilo vzniku zvuku, pomocou ktorého sme závislosť merali. Lepšie uchytenie by znížilo aj chybu určenia *l*. Frekvencia kmitov sa dala merať s pomerne vyššou presnosťou. Pri určení teoretickej hodnoty konštanty *c* spôsobuje veľký problém značný rozptyl hustôt a Youngových modulov PVC. Tento problém by sa dal vyriešiť zmeraním týchto veličín priamo pre pravítko.

Záver

Závislosť frekvencie kmitov pravítka *f* na dĺžke jeho vysunutia *l* sme určili ako

$$\begin{aligned} f &= \frac{c}{l^2}, \\ c &= (0,528 \pm 0,006) \text{ m}^2 \cdot \text{Hz}, \end{aligned}$$

⁶WolframAlpha

čo sa zhoduje s teoretickou závislosťou

$$f = \frac{1,875^2}{4\pi} \sqrt{\frac{Ed^2}{3\rho L^4}},$$

pre základný mód kmitov.

Úloha VI.E . . . kluzká

Najdte dve rovné plochy ze stejného materiálu a změřte, jaký je mezi nimi koeficient tření. Následně zjistěte, jak se tento koeficient změní, když mezi plochy dáte nějakou sypkou nebo kapalnou látku. Můžete použít vše od vody a oleje, přes med a roztavenou čokoládu až po mouku a písek. Měřte pro alespoň 4 různé látky. Hodně pozornosti věnujte diskuzi výsledků a především toho, které vlastnosti použitých látek měly na výsledek největší vliv.

Teorie

Jako smykové tření označujeme vznik tečné síly na rozhraní dvou těles, působící proti směru jejich vzájemného pohybu. Rozlišujeme tření statické, které brání tělesům v uvedení do pohybu, a tření kinematické, působící na již se pohybující tělesa. Je podstatné tyto dva případy rozlišovat, protože velikost kinematické třecí síly je obecně jiná než u tření statického, obvykle je cca o 20-25% nižší. Ve většině případů lze předpokládat platnost Amontonsových zákonů, které říkají, že velikost třecí síly je přímo úměrná normálové složce síly působící na těleso a nezávisí na velikosti styčné plochy obou těles. Tedy platí

$$F_t = \mu F_n,$$

kde F_t značí velikost třecí síly, F_n velikost normálově síly a koeficient úměrnosti μ se nazývá součinitel smykového tření. Pokud uvažujeme statické tření, označuje se koeficient μ_0 a nazývá se součinitel klidového tření.⁷ Tyto koeficienty závisí obecně na obou styčných materiálech i na površích obou materiálů. Máme-li těleso na nakloněné rovině, existuje nějaký mezní úhel naklonění α , při kterém jej již třecí síla neudrží a těleso se začne pohybovat. Jednoduchou geometrickou úvahou lze dojít ke vztahu

$$F_g \mu_0 \cos(\alpha) = F_g \sin(\alpha),$$

kde F_g je celková tíhová síla působící na těleso. Z něj pak můžeme vyjádřit μ_0

$$\mu_0 = \operatorname{tg}(\alpha).$$

Výhoda měření mezního úhlu je, že přímo nezávisí na normálové síle, což nám výrazně zjednoduší postup.

⁷ V české literatuře se však obvykle setkáte se značením f resp. f_0 .

Tab. 13: Výsledné koeficienty tření, plusová znaménka značí zátěž navíc danou úpravou.

Úprava	μ_0
Bez úpravy	0.56 ± 0.03
+	0.56 ± 0.04
++	0.56 ± 0.02
Písek	0.43 ± 0.05
+	0.45 ± 0.11
Sůl	0.43 ± 0.05
Mouka	0.43 ± 0.04
Voda	0.70 ± 0.10
Mýdlo	0.65 ± 0.06
Olej	0.45 ± 0.04

Postup měření

Jako zkoumaný vzorek jsme zvolili dvě stejné cihly. Jednu jsme pevně připevnili na kus prkna, druhou jsme pak volně položili na ní. Postupně jsme pak prkno nakláněli, dokud se cihla nedala do pohybu. Pak jsme odečetli výšku konce prkna nad vodorovnou podložkou, která byla tvořena druhým prknem.⁸ Ze znalosti této výšky a délky prkna jsme již dokázali určit sklon prkna, ze kterého jsme pak určili i součinitel μ_0 . Pro každý povrch jsme měření opakovali minimálně pětkrát a z nich jsme určili průměrnou hodnotu i směrodatnou odchylku. Pro samotné tření cihly o cihlu jsme zkusili přidat na cihlu dvě různé zátěže a zkoumat, jestli se mění hodnota μ_0 , a tím ověřit platnost Amontonsových zákonů. Pak jsme ještě pro písek zkusili přidat zátěž, ale pro další úpravy jsme již zátěž nepřidávali. Další použité úpravy byly posypání solí, moukou, namočení, namýdlení a naolejování.

Výsledky a diskuze

Získané výsledky jsou v tabulce 13. Vidíme, že výsledky jsou zatíženy velkou chybou, protože dosti záleží na tom, jak si na sebe obě cihly „sednou“. Na druhou stranu, výsledné koeficienty pro různá zatížení se příliš neliší, dokonce jejich rozdíly jsou výrazně menší, než statistická chyba. To ale může být způsobeno neúmyslným zkreslením výsledků osobou experimentátora. Dále vidíme, že pro všechny přidané sypké materiály je výsledný koeficient velmi podobný. To bude dáno tím, že tyto materiály mají tendenci působit jako „ložisko“ a převádět smykové tření na valivý odpor. Tím způsobují přesně opačný efekt na výsledný koeficient, než bychom intuitivně očekávali. Naopak po namočení se koeficient výrazně zvýšil, což opět neodpovídá našemu očekávání. Zde mohlo dojít k odmytí cihelného prachu, čímž došlo ke zvýšení výsledného koeficientu. Navíc cihla je relativně porézní a tedy

⁸To že je vodorovně, jsme ověřili vodováhou.

savý materiál, takže se na ní tolik nevytváří vodní film, který je zodpovědný za snížení třecí síly u jiných materiálů. Namydlení též nesnížilo třecí sílu. To je překvapivé, ale pravděpodobně došlo k tomu, že jsme použili tvrdou vodu k namočení mýdla, navíc jsme si příliš nedávali pozor na to, abychom nekontaminovali vodu solí z předchozího měření. To by vedlo k vysolení⁹ mýdla, které by pak ztrácelo efekt, a celkový efekt by se blížil efektu vody samotné. Nakonec ale kuchyňský olej koeficient podle očekávání snížil. Jeden z pravděpodobných důvodů, proč se jeho efekt liší od vody je, že narozdíl od vody je nepolární, čímž se výrazně méně váže na materiál, ze kterého se cihla skládá.¹⁰ Navíc, ač jsme se snažili aby cihla byla před naolejováním suchá, nějaká vlhkost v ní zůstat mohla, což by též ovlivnilo sílu vazby na olej.

Při samotném měření se cihla postupně obrušovala, takže mohlo dojít ke změně jejího povrchu, což mohlo mít i vliv na hodnotu μ_0 . Zároveň byl problém občas přes veškerou snahu z cihly odstranit zbytek nějaké látky, což též mohlo mít nepříznivý vliv na další měření.¹¹

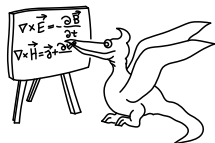
Závěr

Změřili jsme součinitel klidového tření μ_0 mezi dvěma cihlami a jeho změny při několika různých úpravách povrchu. Mnohé provedené úpravy měly opačný výsledek na změny μ_0 , než bychom očekávali.

⁹Vysolení mýdla je proces, kdy přidáním iontů do vody dosáhneme roztrhání micel, čímž se rozpuštěné mýdlo vysráží. Tohoto se využívá například při jeho výrobě.

¹⁰Vypálený jíl, tedy kombinace oxidu křemičitého a hlinitého.

¹¹Proto jsme si taky měření naolejované cihly nechali až nakonec.



Seriál o teoretické mechanike

Kapitola 1: Úvod, Newtonovská mechanika

Úvod

Tento rok bude seriál o mechanike. Mechanika je jedna z najstarších častí fyziky a zároveň je prvou fyzikálnou disciplínou, ktorá bola uspokojivo matematicky popísaná. Keďže mechanika ako taká sa zaoberá vo všeobecnosti pohybmi hmotných telies a príčinami týchto pohybov, od chvíle, keď sa začali ľudia zamýšľať nad fungovaním prírody a hľadať v ňom nejaké zákonitosti či pravidlá, bolo pre nich prirodzené študovať pohyby ako také.

V tohtoročnom seriáli sa budeme zaoberať ale prevažne takou formuláciou mechaniky, ktorá bola vymyslená koncom 18. storočia a v 19. storočí. V súčasnosti sa nazýva teoretickou alebo analytickou mechanikou. Na rozdiel od klasickej - newtonovskej mechaniky - úplne vypustí prácu s komplikovanými objektmi ako sú vektory (bavíme sa len o mechanike hmotného bodu) a všetky výpočty sa dejú v skalárnych rovniciach, respektíve sústavách rovníc. Riešenie úloh v tomto seriáli sa spravidla skončí diferenciálnou rovnicou, ktorej riešenie ale ponecháme na elektronických pomocníkov, ako napríklad Wolfram Alpha. Napriek tomu je ale pre dobré pochopenie seriálu takmer nutné ovládať diferenciálny a integrálny počet. Pod tým rozumieme najmä vedieť, aký je význam operácií derivácia a integrál, a to nielen matematický (sklon funkcie, primitívna funkcia), ale aj fyzikálny (napríklad, že derivácia polohy podľa času je rýchlosť). Samotné zručnosti v derivovaní či integrovaní nie sú také potrebné, nakoľko si znovu môžete pomôcť s Wolfram Alpha, ale určite vám to zlepší alebo aspoň zrýchli porozumenie textu.

Na úvod prvého dielu seriálu, ktorý bude predprípravou pred analytickou mechanikou, využijeme opakovanie klasickej mechaniky na to, aby sme zaviedli značenie, ktoré budeme používať v celom seriáli. Ešte predtým si ale v skratke povieme, ako sa mechanika vyvíjala pred príchodom Lagrangea (čítaj Lagranža). Čitateľ mi snád odpustí, že nebudem postupovať rigorózne historicky, ale zmienim najmä pár pre mňa zaujímavých faktov.

Historický úvod

Antika

V 4. storočí pred Kristom Aristoteles v jednom zo svojich spisov skúmal napríklad ako sa pohybuje kameň, ktorý hodíme smerom nahor. Pri pohybe kolmo nahor pozorujeme, že kameň sa pohybuje, až v jednom okamihu zastane. Aristotelovými slovami po preklade a miernej parafráze môžeme povedať, že stratí svoju „prudkosť“ a potom začne padať kolmo k zemi. Keďže vtedajšia veda však nebola založená na experimentoch, ale na úvahách, Aristoteles nesprávne zovšeobecnil tento správny

popis situácie pri vrhu kolmo nahor, na situáciu všeobecného šikmého vrhu. Počas celého stredoveku Európa pokladala Aristotelove diela za niečo absolútne pravdivé, takže ho opravil až v 17. storočí Galileo Galilei. To znamená, že mnoho rokov medzi tým sa predmety „pohybovali“ ako v rozprávke Tom a Jerry.

Mechanika, ako aj zvyšok fyziky v podobe takej, ako ju poznáme dnes, sa teda začal vyvíjať až v období renesancie. Aby sme ale uviedli veci na pravú mieru, starovekí Gréci mali s nebeskou mechanikou veľké skúsenosti, avšak všetky výpočty boli geometrického charakteru. Ptolemaiov model slnečnej sústavy bol mechanicky tak náročný systém, že pre človeka je dnes až nepredstaviteľné, ako presne dokázali spočítať Gréci polomery jednotlivých do seba zapadajúcich kolies, napriek obmedzenosti ich matematiky oproti terajšej. Keď Mikuláš Kopernik prišiel so svojou heliocentrickou sústavou, v ktorej ale stále figurovali obežné dráhy v tvare kružníc, dávala jeho sústava v princípe rovnako dobré, ak nie horšie predpovede polôh planét. To bol mimochodom jeden z dôvodov, prečo Tycho Brahe neprijal Kopernikovu sústavu za svoju, ale nahradil ju vlastnou semiheliocentrickou. Tychova sústava bola dokonca taká dobrá, že dávala predpovede, ktoré boli v rámci vtedajšej presnosti rovnako dobré ako pri použití súčasných modelov.

Všetci týto myslitelia ale pohyby nebeských telies len popisovali a vôbec sa nesažili prísť na dôvod, prečo sa pohybujú, ako sa pohybujú. V skutočnosti si všetci predstavovali (s menšími obmenami), že za hranicou Zemskej atmosféry sa nachádzajú ďalšie sféry zložené z éteru, ktoré sa nazývali podľa svojich „obyvateľov“: sféra Mesiaca, sféra Slnka, sféra hviezd. . . Ďalší si predstavovali, že napríklad sa Slnko pohybuje v okružnej píšťale v ktorej sú otvory a keď Slnko prechádza popred otvor, je deň, inokedy je noc. Niekedy sa otvor upchá a vtedy nastane zatmenie Slnka. . . To, prečo sa vesmírne telesá pohybujú tak ako sa pohybujú, ako aj zistenie, že sa riadia rovnakými zákonmi ako veci pozemské, zistilo ľudstvo až v novoveku.

Novovek

Ako som už vyššie spomenul, prvý, kto začal k tak intelektuálnej disciplíne ako je skúmanie prírody pristupovať aj experimentálne, bol na prelome 16. a 17. storočia Galileo Galilei. Galileo pomocou svojich experimentov na naklonenej rovine, či slávnych pokusov s voľným pádom guľí rôznych veľkostí a hmotností na veži v Padove ukázal, že teleso pri pohybe smerom kolmo k Zemi padá so zrýchlením, ktoré nezávisí od toho, z akého je materiálu, alebo z akej výšky padá, ba dokonca ani od toho aká je jeho hmotnosť. Toto zistenie je blízko k uvedomeniu si, že to musí súvisieť len s našou Zemou. Keďže sa ukazuje, že zrýchlenie nezávisí od telesa urýchľovaného, dá sa veľmi rýchlo prísť nato, že mechanizmus urýchľovania je rovnaký, a to nás privádza k uvahám o súvisi so silovým poľom Zeme. Odtiaľ je už len na krok k teórii gravitácie, napriek čomu s ňou Isaac Newton prišiel až o viac ako 50 rokov neskôr. Dôvodom mohlo byť aj to, že Galileo bol jedným z malého množstva ľudí s podobným uvažovaním.

To, že keď vyhodíme kameň do vzduchu, tak spadne späť na zem, sa v tej dobe vysvetľovalo pomocou „teórie štyroch (piatich) živlov“. Podľa klasickej antickej filozofie totižto v strede vesmíru je zem (kamene, hlina), lebo sú najťažšie. Toto je veľmi elegantný príklad filozoficky vytvorenej tautológie: to najťažšie klesá do

stredu, najviac klesá zem (voči vzduchu, ohňu aj vode, zem vždy klesá), teda zem je v strede vesmíru čo vieme z toho, že je ťažšia ako oheň vzduch aj voda. Ak sa vrátíme k myšlienke, ktorú som začal pár riadkov vyššie, tak si ešte spomenieme, že dokončená bude ak dodám, že voda je ľahšia ako zem, ale ťažšia ako vzduch, preto na zemi sú moria a rieky, a dážď padá zo vzduchu dole. Nad vzduchom bola sféra ohňa, keďže plamene vo vzduchu stúpajú nahor. Nadtým je nebeský éter, ktorým je tvorené Slnko, hviezdy, planéty. . .

Ďalším z dôvodov mohlo byť aj to, že ľuďom, ktorí mali podobné myšlienky ako Galileo a Kopernik, cirkev nebola vôbec naklonená a ich diela sa dostávali častokrát na zoznamy zakázaných kníh. Dôležité je ešte spomenúť, že takmer simultánne s Galileiho pozorovaniami, v Prahe a v Linze Johannes Kepler publikuje práce, v ktorých na základe niekoľkoročných pozorovaní planéty Mars formuluje svoje 3 zákony pohybu planét. Tie boli až do príchodu všeobecnej relativity najpresnejším modelom slnečnej sústavy (z mechanického hľadiska). Až 69 rokov potom, ako Kepler sformuloval svoj posledný zákon pohybu planét, prišiel Sir Isaac Newton s fyzikálnym vysvetlením pohybu planét a dokázal, že z jeho teórií (mechanických aj gravitačných) priamo vyplývajú Keplerove zákony.

Newtonove zákony mechaniky ale okrem vysvetlenia, prečo sa planéty hýbu ako sa hýbu, poskytli aj vysvetlenie rôznych situácií každodenného života a vedci dokázali pomocou nich robiť výpočty, ktoré dostali ľudstvo na Mesiac. Tieto zákony totižto naozaj až na veľmi extrémne prípady, kedy je potrebné započítať relativistické efekty, predpovedajú a vysvetľujú všetok pohyb, ktorý pozorujeme.

Newtonovská mechanika

Značenie

V úvode každého väčšieho textu vedeckého charakteru je potrebné sa dohodnúť, aké značenie bude použité. Pre začiatok je potrebné povedať, že pri rátaní príkladov v klasickej mechanike budeme uvažovať, že všetky deje sa odohrávajú v trojrozmernom euklidovskom priestore. V tomto priestore máme 3 na seba kolmé kartézské osi: x , y a z . Vektory značíme hrubým písmom. Ak budeme mať nejaký všeobecný polohový vektor \mathbf{r} , tak jeho tri kartézské zložky budú: r_x , r_y a r_z . Ak je \mathbf{r} polohový vektor nejakého hmotného bodu, potom je jeho rýchlosť \mathbf{v} priamo z definície

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}.$$

Potom samozrejme pre zložky tejto rýchlosti platí

$$v_x = \dot{r}_x, \quad v_y = \dot{r}_y, \quad v_z = \dot{r}_z.$$

Analogicky pre zrýchlenie \mathbf{a} platí

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}.$$

Potom zložky zrýchlenia sú

$$a_x = \ddot{r}_x, \quad a_y = \ddot{r}_y, \quad a_z = \ddot{r}_z.$$

Ako sa dá ľahko vydedukovať z predošlých riadkov, časovú deriváciu nejakej funkcie, či už vektorovej alebo skalárnej, značíme bodkou nad danou funkciou. Ak budeme potrebovať zderivovať nejakú funkciu $f(x, y, z)$ podľa ľubovoľnej kartézskej osi (budeme chcieť zistiť, ako sa daná priestorová funkcia mení, ak sa pohybuje v priestore v smere osi), zapíšeme to pomocou parciálnych derivácií. Derivácia podľa osi x by teda vyzerala takto

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}.$$

Toto značenie je presnejšie ako

$$\frac{df(x, y, z)}{dx},$$

pretože samotná súradnica x (nejakého konkrétneho objektu) môže byť funkciou času. Parciálne derivovanie používame, aby sme zdôraznili, že chceme vedieť len to, ako sa mení daná funkcia na okolí daného bodu.

V neskorších dieloch seriálu sa stretneme s popisom euklidovského priestoru v iných ako kartézskych súradniciach. Takýto popis je výhodný najmä ak dané súradnice vystihujú symetriu daného problému. Samotná analytická mechanika je ale umením zvolenia správnych súradníc, ktoré vystihujú symetriu daného problému. To znamená nájsť taký transformačný vzťah medzi našimi súradnicami a súradnicami kartézskymi, ktorý nám dovoľí úlohu šikovne vyriešiť. Teraz sa nebudeme venovať vzťahom rôznych súradnicových systémov medzi sebou, pretože to je vlastne hlavnou úlohou seriálu počas celého roka.

Newtonove zákony

Predtým ako sa dostaneme k analytickej mechanike, zopakujeme si základné princípy mechaniky newtonovskej. Ako bolo naznačené na začiatku seriálu, newtonovská (klasická) mechanika sa pozerá na svet klasickým spôsobom. Skúma rôzne silové pôsobenia vyjadrené vektormi. Na riešenie problémov „newtonovsky“ je potrebný správny rozbor toho, aké sily ako pôsobia, správne používanie zákona akcie a reakcie a rôznych ďalších pravidiel odvoditeľných z Newtonových zákonov, impulzových viet a podobne. Občas sa použije trik, v ktorom sa využije nejaký zákon zachovania, ktorého platnosť musíme ale častokrát len uhádnuť. Nehovoriac o prechádzaní medzi inerciálnymi a neinerciálnymi systémami tak, že často nie je vôbec jasné, ktoré sily sú fyzikálneho charakteru a ktoré sú nepravé (napríklad odstredivá sila).

Ako som ale spomenul, všetko toto je postavené na troch Newtonových zákonoch, z ktorých budeme vychádzať aj pri formulácii mechaniky iným spôsobom. Tieto tri zákony sformuloval Isaac Newton v krátkom čase publikujúc ich v diele *Matematické princípy prírodnej filozofie*. Pohybové zákony, ako aj zákon gravitácie, boli formulované v prvom dieli tohto trojzväzkového diela *O pohybe telies (De motu corporum)*. Tieto zákony týkajúce sa mechaniky postupne popisujú ako sa správajú voľné objekty, čo sa stane pri pôsobení sily na nejaký objekt (kde Newton implicitne definuje hmotnosť) a na záver, ako sa správajú telesá, ktoré na seba pôsobia silami navzájom. Takto postupne teda zákony znejú:

1. Každé teleso zotrúva v pokoji alebo v rovnomernom priamočiarom pohybe, pokiaľ nie je donútené svoj stav zmeniť v dôsledku síl na neho pôsobiacich.
2. Zmena hybnosti je úmerná pôsobiacej sile a má rovnaký smer ako táto sila.
3. Proti každej akcii vždy pôsobí rovnako veľká reakcia, alebo: vzájomné pôsobenie dvoch telies je vždy rovnako veľké a má opačný smer.

Zákony je ale možné preformulovať do inej podoby, a to takej, aby sme lepšie vystihli ich fundamentálny obsah. Prvý zákon bude potom znieť:

Existuje vzťažný systém (nazývame ho inerciálny), voči ktorému sa každý izolovaný hmotný bod pohybuje rovnomerne priamočiaro.

Ako vidíme, jedná sa o akúsi definíciu inerciálneho systému. Najprv si ale musíme povedať čo je to ten izolovaný hmotný bod. Tak si sem uvedme ďalšiu definíciu: Izolovaný hmotný bod, je taký, na ktorý nepôsobia žiadne sily. Prípadne je celkové silové pôsobenie naň nulové.

Majme teda hmotné body vo vákuu, ktoré sa voči sebe pohybujú, avšak gravitačnú interakciu medzi nimi môžeme zanedbať. Potom ak spojíme vzťažnú sústavu s ktorýmkoľvek z nich. Predstaviť si to môžeme tak, že do jedného z týchto pohybujúcich sa bodov postavíme tri na seba kolmé kartézské osy a z tohto hmotného bodu pozorujeme ostatné a popisujeme ich pohyb v tejto súradnicovej sústave. V inerciálnej sústave nadobúda druhý Newtonov zákon pre hmotný bod, ktorého hmotnosť je v čase nepremenná, jednoduchý tvar:

Pre každý hmotný bod existuje konštanta m a vektorová funkcia F taká, že jeho pohyb voči inerciálnemu systému je určený diferenciálnou rovnicou

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

kde $\ddot{\mathbf{r}}$ je druhý diferenciál polohy, teda zrýchlenie. Ako sme už povedali, pomocou tohto zákona vieme definovať hmotnosť ako:

$$m = \frac{|\mathbf{F}|}{|\ddot{\mathbf{r}}|}.$$

Musíme ale poznamenať, že rátame s tým, že sila \mathbf{F} má rovnaký smer ako zrýchlenie $\ddot{\mathbf{r}}$. Z tohto vzťahu vidíme, aký je význam hmotnosti¹. Jedná sa o schopnosť telesa klásť odpor sile \mathbf{F} pri jeho urýchľovaní. Čím je hmotnosť väčšia, tým väčšia sila musí byť použitá, aby bolo telesu udelené potrebné zrýchlenie, prípadne naopak. Ak na teleso pôsobí nejaká sila, tak čím je ťažšie, tým menšie zrýchlenie mu bude touto silou udelené. Podstatné je podotknúť, že mechanika nerozlišuje, čo spôsobuje silu pôsobiacu na teleso, vo všeobecnosti môže ísť o silu nejakého pôsobenia na diaľku (gravitácia, elektromagnetická sila) alebo o silu, ktorá robí pevné predmety pevnými (tá, ktorá spôsobuje, že sa neprepadnete do vnútra Zeme, ale ostanete stáť pevne na Zemi). Budeme ju označovať ako väzbová sila.

Príklad na väzbovú silu môžeme nájsť v situácii telesa pohybujúceho sa v kruhovej trubici bez trenia konštantnou rýchlosťou. V takom prípade vieme nájsť silu \mathbf{F} , ktorá ak by pôsobila na izolovaný hmotný bod, ten by sa pohyboval po rovnakej

¹Takto definovanú hmotnosť nazývame niekedy aj zotrvačnou hmotnosťou.

dráhe ako ten v trubici. Takouto silou môže byť napríklad gravitačná sila Slnka, ktorá pôsobí na teleso obiehajúce po kruhovej dráhe.

Vidíme, že existuje takáto analógia medzi pohybmi, niekedy je pre nás jednoduchšie pri rátaní príkladu uvažovať, že sa teleso pohybuje ako Zem okolo Slnka, teda rátať príklad z klasickej fyziky. Inokedy, že sa pohybuje v trubici, teda využiť pri rátaní vhodne zavedené väzbové sily.² No a práve v ďalšom dieli seriálu si ukážeme, ako môžeme nami vymyslené väzbové sily použiť na rátanie skutočných príkladov (podobne tomu, ako to spravili starí Gréci, keď chceli predpovedať polohy planét). Máte sa načo tešiť.

Úloha I.S ... rozjezd

10 bodů

Předtím, než se začneme věnovat umění analytické mechaniky, je vhodné si zopakovat klasickou mechaniku na následující sérii příkladů.

- a) Na vrcholu křišťálové koule dřepí homogenní kulička s velmi malým poloměrem. Kulička udělíme libovolně malou rychlost a ta tak začne padat po povrchu koule. Kde se kulička odpojí od křišťálové koule? Uvažujte, že kulička neprokluzuje.
- b) Místo koule z předchozí úlohy máme křišťálový paraboloid, daný rovnicí $y = c - ax^2$. Opět nás zajímá, kde se kulička od paraboloidu odpojí.
- c) Cyklista odbočuje rychlostí v na cestu kolmou k té, po které právě jede. Zatáčku projede po části kružnice s poloměrem r . Jak moc se musí cyklista do zatáčky naklonit? Moment setrvačnosti kol bicyklu můžete zanedbat, cyklistu nahradte hmotným bodem.

Bonus Moment setrvačnosti kol nemůžete zanedbat.

(řešení str. 161)

Kapitola 2: Lagrangeovy rovnice I. druhu

Úvod

Na úvod vás vítam pri čítaní druhej časti seriálu FYKOSu. Začiatkom druhej série sa ešte raz vrátíme k značeniu, kde si rýchlo ukážeme ako fungujú indexy, ktoré nám umožnia písať jednu rovnicu namiesto troch. Potom sa dostaneme k pojmu „väzba“, ktorý bol už párkrát spomenutý v predchádzajúcej časti. Zadefinujeme si ho a ukážeme si rôzne druhy väzieb a príklady na ne. Potom bude nasledovať jadro tejto časti seriálu, kde zavedieme Lagrangeove rovnice 1. druhu, ktorých použitie budeme demonštrovať aj na príklade z predchádzajúceho seriálu. Nakoniec mám pre vás pripravenú ukážku zaujímavého prepojenia medzi Lagrangeovými rovnicami a zákonom zachovania energie.

Značenie po druhýkrát

V mechanike (alebo vo všeobecnosti vo fyzike) vyzerá problém v nejakej súradnicovej sústave veľmi podobne. Napríklad pohybové rovnice hmotného bodu vo vákuu,

²Toto spravili aj starí grécki filozofi, avšak oni si stotožnili výpočetnú matematickú metódu, ktorou pohyby planét popisovali, s realitou, čo ako vieme, nie je správne

na ktorý pôsobí nejaká vonkajšia sila F , vyzerajú

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

$$m\ddot{z} = F_z.$$

Prípadne, ak je tento bod v homogénnom gravitačnom poli v zápornom smere osy z , a navyše naň pôsobí sila F , budú vyzerat takto

$$m\ddot{x} = F_x,$$

$$m\ddot{y} = F_y,$$

$$m\ddot{z} = F_z - mg.$$

Častokrát chceme tento zápis zjednodušiť, lebo na vyjadrenie jednoduchšej fyzikálnej skutočnosti sme použili veľa miesta a zabralo nám to veľa času. Máme v zásade dve možnosti. Prvá je, že použijeme vektorový zápis

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F},$$

respektíve

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_g,$$

kde \mathbf{F}_g je vektor tiažovej sily, ktorého prvé dve zložky sú nulové a tretia je $-mg$.

Z rôznych dôvodov sa ale používa aj iný zápis, indexový. Má tú výhodu, že sa v ňom dajú po troche cviku jednoduchšie vidieť rovnice. Zároveň si človek nemusí dávať pozor na to, čo je vektor a čo nie je. (Čo je výhodou najmä ak sa majú nejaké dva vektory násobiť.) Totižto každý symbol v takto zapísanej rovnici chápeme ako skalár. Rovnica pre hmotný bod vo vákuu bez vonkajšieho gravitačného poľa by v tomto zápise vyzerala

$$m\ddot{x}_i = F_i.$$

V niektorých textoch sa môžete stretnúť s tým, že pozícia indexu hore a dole sa rozlišuje a znamená niečo iné. Pre naše potreby to ale rozlišovať nebudeme a budeme indexy písať vždy dole. V tomto prípade nie je ťažké prísť na to, čo presne znamená index i . Ak index i bude nadobúdať hodnoty od 1 do 3 (alebo ak chcete x, y, z), dostaneme postupne pre tri rôzne hodnoty indexu tri pohybové rovnice.

Hlavnú výhodu tohto formalizmu uvidíme vo chvíli, keď pomocou neho zapíšeme napríklad vektorový súčin. Vezmeme si ako príklad moment hybnosti. Podľa definície je moment hybnosti

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

kde \mathbf{r} je polohový vektor a \mathbf{p} je hybnosť. Po zložkách (ak x -ová zložka bude označená indexom 1 atď.) zapíšeme potom túto rovnicu

$$L_1 = r_2 p_3 - r_3 p_2,$$

$$L_2 = r_3 p_1 - r_1 p_3,$$

$$L_3 = r_1 p_2 - r_2 p_1.$$

Z čoho sa dá s trochou cviku uvidieť, ako by sa to zapísalo indexovo

$$L_i = r_j p_k - p_j r_k .$$

Odporúčam, aby ste si sami vyskúšali, že ak za (i, j, k) dosadíte postupne $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$ a $(3, 2, 1)$ dostanete pôvodné rovnice.

Tí, ktorí si to overili, snáď už vidia, ako funguje indexový zápis. My sa s ním stretne v prípadoch jednoduchších, ako je vektorový súčin, tak sa vám snáď čím skôr dostane pod kožu a bude pre vás zjednodušením.

Väzby

V predchádzajúcom dieli seriálu ako aj v úvode tohto sme viackrát spomenuli pojem väzba. Väzbou budeme myslieť nejakú podmienku, ktorá, okrem pohybových rovníc, obmedzuje pohyb nejakého telesa (v našom prípade hmotného bodu). Väzbou môže byť napríklad nejaká plocha, po ktorej sa hmotný bod pohybuje. Takýto bod sa teda bude riadiť pohybovými rovnicami, okrem toho sa ale musí pri pohybe vždy nachádzať na danej ploche. Vo všeobecnosti vieme väzbu matematicky zapísať. Obvykle zapisujeme väzbu pomocou jednej rovnice. Vo všeobecnosti môže väzba vyzeráť takto

$$U(x_i, \dot{x}_i, t) = 0 .$$

Teda nejaká rovnica plochy, prípadne krivky závislá od rýchlosti hmotného bodu na nej a taktiež časovo premenná. (Všimnite si index i pri polohe a jej časovej derivácii. To značí, že rovnica väzby môže závisieť od všetkých zložiek polohy aj rýchlosti.) V našich prípadoch budeme ale uvažovať časovo nepremenné plochy alebo krivky nezávislé od rýchlosti hmotného bodu. Takéto plochy a krivky budeme zapisovať

$$U(x_i) = 0 .$$

Typickým príkladom na väzbu môže byť napríklad auto pohybujúce sa po kruhovej pretekárskej dráhe. Ak je auto v porovnaní s veľkosťou dráhy zanedbateľne malé, môžeme sa baviť o hmotnom bode pohybujúcom sa po kružnici. Pohyb takéhoto auta ovplyvňujú vonkajšie vtisnuté sily (čo môže pôsobiť zavádzajúco, nakoľko sa v tomto prípade jedná o silu motora, ktorý pôsobí zvnútra auta) a zároveň aj väzbová sila, ktorá ho drží na pretekárskej dráhe v tvare kruhu. Nás momentálne zaujíma, ako napísať podmienku pre súradnice auta, teda väzbovú rovnicu pre pohyb auta. Bude sa evidentne jednať o rovnicu kružnice. Pre účely príkladu je irelevantné, aké bude mať stred kružnice súradnice. Ak predpokladáme, že jej polomer je r , je rovnica tejto kružnice v tvare, ktorý odpovedá nami uvedenému tvaru väzby

$$x_1^2 + x_2^2 - r^2 = 0 .$$

Ukážeme si ešte jeden veľmi častý príklad. Majme rovinu naklonenú pod uhlom α , po ktorej sa pohybuje hmotný bod. Zo základnej intuície je vidieť, že úlohu môžeme riešiť ako dvojrozmerný problém. Ďalej môžeme bez ujmy na všeobecnosti položiť začiatok súradnicovej sústavy do bodu $(0, 0)$ tak, aby prechádzal cez našu

naklonenú rovinu, po ktorej sa pohybuje hmotný bod, a zároveň aby rovina zvierala s osou x uhol α . Rovina je teraz popísateľná ako lineárna funkcia premennej x , so smernicou rovnou $\operatorname{tg}(\alpha)$. Väzbová podmienka bude teda

$$y - \operatorname{tg}(\alpha)x = 0.$$

Na ďalšie precvičenie tvorenia väzieb môžete využiť napríklad prepočítanie si príkladov k seriálu, kde budete musieť napísať väzbovú rovnicu pre sústavu dvoch hmotných bodov.

Lagrangeove rovnice prvého druhu

Kombináciou Newtonových pohybových rovníc pre hmotný bod podrobený väzbe s rovnicou tejto väzby dokážeme dostať sústavu pohybových rovníc, ktorých riešenie budú pohybové rovnice pre hmotný bod. Ako ale zostaviť zo znalosti Newtonových rovníc a väzbovej (väzbových) rovníc nami hľadanú sústavu? To si ukážeme v tejto časti.

Majme trojicu pohybových rovníc

$$m\ddot{x}_i = F_i + R_i.$$

Ľavá strana značí druhú časovú deriváciu postupne troch zložiek vektorovej funkcie polohy a pravá strana značí súčet zložky sily \mathbf{F} , ktorá zodpovedá všetkým vtisnutým silám (napr. gravitačnej, elektromagnetickej, etc.), a zložky sily \mathbf{R} zodpovedajúcej väzbovej sile. Nás bude práve zaujímať, ako vyzerajú zložky sily \mathbf{R} .

Pre začiatok nás bude zaujímať smer tejto sily. Táto sila je sila, ktorou na hmotný bod pôsobí plocha/priamka po ktorej sa pohybuje. V každom bode si vieme teda túto silu rozložiť na zložku kolmú a zložku dotyčnicovú k rovine. Vo všeobecnosti musíme rátať s oboma zložkami, ale obyčajne rátame v príkladoch so zjednodušením, že trecia sila medzi väzbovou plochou a hmotným bodom je nulová. (Častokrát je to aj preto, lebo väzba nie je nič fyzické, ale vystihuje len vlastnosti nejakého fyzikálneho pôsobenia.) Trecia sila je vždy rovnobežná s rovinou pohybu. Ale keďže predpokladáme, že trecia sila je nulová, má sila \mathbf{R} vždy len normálovú (kolmú) zložku.

Z predchádzajúcej úvahy teda vieme, že smer väzbovej sily je kolmý na väzbovú plochu (prípadne krivku). Našťastie nám teraz poslúži matematika, vďaka ktorej je známe, že ak máme zadanú nejakú väzbu (je jedno či v dvoch, troch alebo pokojne aj viacerých rozmeroch), tak po aplikovaní operátora *gradient* dostaneme vektor, ktorý je normálou – kolmicou k danej krivke/rovine v danom bode.

Jediné, čo o gradiente budeme potrebovať vedieť, je to, že sa jedná o operátor (niečo ako „nosiť matematickej operácie“), ktorý skalárnej funkcii priradí vektorovú funkciu. Tá hovorí o tom, v ktorom smere daná skalárna funkcia rastie najviac.³ Napríklad gradient teploty je smer, pri pohybe v ktorom sa teplota mení najviac. Gradient výšky terénu pri pohybe v horách je smer, v ktorom je

³ Na našej matematickej úrovni sa budeme tváriť, že operátor gradient aplikujeme *vždy* len na skalárnu funkciu a následne dostaneme vektorovú funkciu.

z daného miesta najstrmšie do kopca. Ako sme ale uviedli, gradient je zároveň aj normálovým vektorom. Gradient funkcie $f(x_i)$ sa počíta a značí

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Každá priestorová zložka gradientu nejakej funkcie je teda derivácia danej funkcie podľa zodpovedajúcej priestorovej súradnice.

Teraz musíme doriešiť otázku veľkosti sily. Prenásobíme gradient väzby funkciou λ tak, aby mal veľkosť práve takú, akú má normálová zložka sily. λ môže byť samozrejme funkciou polohy a sama o sebe nemá žiadny fyzikálny význam. Keďže máme ale tri neznáme funkcie pre súradnice, tri pohybové rovnice a jednu rovnicu väzby, teda dokopy štyri rovnice, potrebujeme ešte jednu neznámu funkciu, aby bola sústava jednoznačne riešiteľná. Práve funkcia λ je našou štvrtou neznámou funkciou.

Keď už vieme, ako by mala väzbová sila vyzerat', môžeme do rovnice

$$m\ddot{x}_i = F_i + R_i$$

dosadiť za R_i gradient väzby prenášobný neznámou skalárnou funkciou λ , čím dostaneme sústavu rovníc

$$m\ddot{x}_i = F_i + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Túto sústavu rovníc spolu s väzbovou rovnicou budeme označovať Lagrangeove rovnice prvého druhu. Počet neznámych je teraz rovnaký ako počet rovníc, teda sústava je riešiteľná. Ak nie analyticky, tak aspoň numericky. Riešenie týchto rovníc ale nie je nič priamočiare, čo by ste spravili bez zaváhania a na ničom sa nezasekli. Existuje ale návod, ktorý funguje pre riešenie tejto sústavy rovníc. Na príklade guľičky klzajúcej sa po guľi z predchádzajúcej série si ukážeme, ako sa takéto rovnice riešia.

Guľička na guľi

Sformulujme si teda odznova zadanie. Na vrchole guľe sa nachádza guľička veľmi malých rozmerov (môžeme ju teda považovať za hmotný bod). Po udelení ľubovoľne malého impulzu sa guľička začne zošmykovať smerom nadol bez trenia (guľička sa teda nekotúľa). Otázka znie, v akej výške nad povrchom, na ktorom je veľká guľa umiestnená, sa malá guľička od veľkej guľe oddelí.

Znova nám základná fyzikálna intuícia povie, že nezávisí na tom, po ktorom „poludníku“ sa guľička bude pohybovať, čo nám umožní úlohu riešiť v dvoch rozmeroch, teda ako bod zošmykujúci sa po kruhu. Naša väzba bude teda kružnica. Môžeme si všimnúť, že nastane čas, keď sa guľička od guľe oddelí. Čo môžeme povedať o väzbovej sile v tomto okamihu? Keďže sa jedná o bod, kedy sa guľička od svojej väzby oddelí, zrejme na ňu väzbová sila v tom okamihu prestane pôsobiť. Tento poznatok si zapamätáme, pretože sa nám bude hodiť.

Nech má guľa polomer r . Teraz vieme jednoducho zostaviť rovnicu väzby

$$f = x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Následne spočítame postupne obe parciálne derivácie tejto rovnice a zostavíme Lagrangeove rovnice prvého druhu. Musíme ale pamätať aj na to, že v smere osy y pôsobí na guľičku aj gravitačná sila. Ak má guľička hmotnosť m , budú rovnice vyzerat takto

$$m\ddot{x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 2x\lambda,$$

$$m\ddot{y} = -mg + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = -mg + 2y\lambda.$$

Teraz prichádza časť, keď musíme použiť prvý trik. Je užitočné si ho zapamätať, lebo sa používa vždy pri podobných príkladoch. Trikom je použiť druhú časovú deriváciu rovnice väzby. V tomto okamihu odporúčam všetkým „Studentom Pilným“, aby si to, ako aj ďalšie kroky, sami skúsili niekde na papieri vedľa. Ja uvediem pre vašu kontrolu prvú deriváciu

$$\dot{f} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0,$$

ako aj pre nás potrebnú druhú deriváciu

$$\ddot{f} = 2\dot{x}^2 + 2x\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0.$$

Do tejto dvakrát zderivovanej rovnice väzby dosadíme za \dot{x} a \dot{y} vyjadrenie týchto veličín z Lagrangeovych rovníc. Ďalej za súčet kvadrátov prvých derivácií súradníc dosadíme kvadrát rýchlosti

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Potom s využitím väzbovej podmienky $x^2 + y^2 = r^2$ vyjadríme z rovníc vyššie väzbovú silu

$$\lambda = \frac{m(gy - v^2)}{2r^2}.$$

Druhý trik, ktorý použijeme, je zákon zachovania mechanickej energie. Teda súčet kinetickej a polohovej energie guľičky položíme rovný počiatkovej energii.

$$mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mgy.$$

Z tohto vyjadríme v^2 , dosadením do predchádzajúcej rovnice pre λ dostávame

$$\lambda = \frac{mg(3y - 2r)}{2r^2}.$$

Následne vidíme, že väzbová sila bude nulová a guľička sa oddelí vo výške (nad stredom gule)

$$y = \frac{2}{3}r.$$

Čo je presne ten istý výsledok, ktorý by ste dostali pri použití klasického rozkladu síl.

Zákon zachovania energie

Na záver som si ešte pripravil pre čitateľov seriálu malú ukážku, ako tento matematický konštrukt väzieb vystihuje, ba dokonca až implikuje tak fundamentálnu fyzikálnu skutočnosť, akou je zákon zachovania energie. Ukážeme si to v dvoch rozmeroch, postup v trojrozmernom priestore je úplne analogický.

Vezmime Lagrangeove rovnice prvého druhu pre jeden hmotný bod v gravitačnom poli podrobený väzbe U .

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda \frac{\partial U}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= -mg + \lambda \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}$$

Znova si pomôžeme tak, že použijeme trik. A to taký, že prenásobíme prvú rovnicu \dot{x} a druhú \dot{y} . Následne rovnice sčítame, čím dostaneme rovnicu

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = -mg\dot{y} + \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} \right).$$

Ďalej spravíme trik, ktorý spočíva v tom, že celú ľavú stranu zapíšeme ako časovú deriváciu nejakej inej funkcie (schválne si skúste spočítať deriváciu podľa času, tak ako je to v rovnici (16) na ľavej strane, a uvidíte, že dostanete to, čo máme na ľavej strane v predchádzajúcej rovnici). Pravý člen pravej strany zapíšeme ako úplnú časovú deriváciu U prenášobení λ , pre funkciu dvoch premenných $f(x(t), y(t))$ totiž platí

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy(t)}{dt}.$$

Člen $-mg\dot{y}$ sa tiež ľahko zapíše ako časová derivácia, dostaneme teda

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right) = -\frac{d}{dt} (mgy) + \lambda \frac{dU}{dt}. \quad (16)$$

My ale vieme, že rovnica väzby je $U = 0$. Potom derivácia takejto väzby musí mať tiež hodnotu nula. Ak na zvyšné dva členy aplikujeme obrátene pravidlo pre deriváciu súčtu funkcií, dostaneme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \right) = 0.$$

Po preintegrovaní rovnice podľa času

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy &= \text{konst}, \\ \frac{1}{2} mv^2 + mgy &= \text{konst}. \end{aligned}$$

Čo je samozrejme zákon zachovania energie ako ho poznáme.

Dúfam, že táto séria seriálu vám po minulej opakovacej sérii dala niečo nové, čo jedného dňa vyhodnotíte ako užitočné. Ak si prerátate príklady k seriálu, mali

by ste si vďaka nim upevniť dnes nadobudnuté vedomosti. Chcel by som vás ale poprosiť, aby ste do vypracovaných úloh napísali spätnú väzbu na seriál, a to najmä v prípade, ak niečo nebolo vysvetlené dostatočne, prípadne sa vám zdá byť niečo nesprávne.

Úloha II.S ... zväzujúca

10 bodů

1. Majme činku tvorenú dvoma hmotnými bodmi s hmotnosťami m a M , ktoré sú spojené nehmotnou, ale veľmi pevnou tyčou. Táto činka padá voľným pádom. Napíšte väzbovú podmienku a zároveň aj Lagrangeove rovnice prvého druhu pre tento objekt.
2. Majme vodorovnú položku, na ktorej je umiestnený pravouhlý trojboký hranol s hmotnosťou M ako na obrázku 32. Po strane tohto hranolu, ktorá s podložkou zvierá uhol α , sa sklzáva hmotný bod s hmotnosťou m . V celom príklade neuvažujte trenie.
 - Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu.
 - Ukážte, že celková hybnosť sústavy v smere osi x je pri nulovej počiatočnej rýchlosti hmotného bodu nulová.
 - Postupným riešením sústavy rovníc určte veľkosti rýchlostí hmotného bodu a hranolu v závislosti od času.
 - Určte pomer veľkostí týchto rýchlostí.
3. Majme kyvadlo zavesené na závese. Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu a ukážte, že pre ňu platí zákon zachovania energie.

(řešení str. 165)

Kapitola 3: Lagrangeovy rovnice II. druhu

Úvod

V tejto časti začneme s novou témou, ktorá nás bude sprevádzať až do konca seriálu. Po troch dieloch seriálu sa na konci tohto dostaneme k Lagrangeovým rovniciam 2. druhu. Tieto rovnice predstavujú novú, pokročilejšiu formuláciu mechaniky, kde na popis fyzikálneho problému budeme potrebovať iba jednu jedinú skalárnu funkciu, z ktorej sa následne naučíme jednoducho určiť pohybové rovnice.

Zovšeobecnené súradnice

Pri riešení nejakého fyzikálneho problému musíme na úvod vždy, aj ke spravidla to robíme mimovoľne, učiniť rozhodnutie, v akých súradniciach budeme danú úlohu riešiť. V prípade pokročilejšej stredoškolskej úrovne fyziky je to obvykle tak, že volíme za tieto súradnice súradnice kartézske. Dokonca častokrát prirodzenú trojrozmernú trojicu súradníc x , y , z zredukujeme len na dvojicu x , y a problém riešime v jednej rovine. Mnohokrát je ale aj v tomto prípade úloha riešiteľná veľmi obtiažne.

Pri konštrukcii Lagrangeových rovníc je problém obtiažnosti systému eliminovaný do maximálnej možnej podoby hneď od začiatku, a to použitím zovšeobec-

nených súradníc. Jedná sa o sústavu súradníc, ktoré vystihujú symetriu daného problému tak, že berú ohľad na väzby, ktorým sú objekty podrobené.

Toto sa potom odráža na počte zovšeobecnených súradníc. Napríklad poloha planéty pohybujúcej sa okolo Slnka môže byť popísaná tromi kartézskymi súradnicami. Alebo, nakoľko na planétu pôsobia 2 väzby⁴ môže byť jej poloha popísaná jedinou súradnicou, a to napríklad uhlom (od 0° do 360°), ktorý zviaza spojnicu Slnka a planéty s hlavnou poloosou jej dráhy.

Podobne napríklad činku z úlohy k predchádzajúcemu dielu seriálu, ktorá sa pohybuje v 2D priestore, môžeme namiesto dvoch kartézskych súradníc pre každý bod popísať dvoma kartézskymi súradnicami ťažiska činky a súradnicou, ktorá zodpovedá uhlu natočenia činky voči osi x .

Nie je tak ťažké z týchto dvoch príkladov odpozorovať, koľko zovšeobecnených súradníc potrebujeme na popis systému. Ak N je počet kartézskych súradníc potrebných na popis všetkých hmotných bodov (obvykle troj- alebo dvojnásobok počtu hmotných bodov, podľa toho či riešime troj- alebo dvojrozmernú úlohu) a v je počet väzieb, tak potom

$$n = N - v$$

je počet zovšeobecnených súradníc potrebných pre popis systému. Tento počet je zároveň aj počet *stupňov voľnosti* telesa, čo je vlastne neprekvapujúce, nakoľko každej možnosti pohybu telesa vieme prisúdiť jednu súradnicu, v ktorej miere tohto pohybu, ako aj polohu, vieme odmerať.

Pre nás bude ďalej dôležité, že vždy vieme nájsť transformačný vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnenými súradnicami. Pre naše potreby bude dôležité vedieť najmä vyjadriť kartézské súradnice pomocou zovšeobecnených. Ako a aj prečo je to dôležité si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad: Aká je kinetická energia kyvadla?

Pokúsme sa nájsť vzťah pre kinetickú energiu matematického kyvadla s hmotnosťou m a dĺžkou závesu l . Vieme, že kinetická energia je definovaná ako

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

Čo po rozdelení rýchlosti do dvoch kartézskych zložiek a s vedomosťou, že zložka rýchlosti v nejakom smere je (v kartézskych súradniciach) časová derivácia danej súradnice vieme napísať ako

$$E_k = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2).$$

Dalo by sa argumentovať, že úloha je splnená, čo je samozrejme čiastočne pravda, avšak z nášho vzťahu nie je vidieť, že sa jedná o kyvadlo, nakoľko tento vzťah platí pre každý hmotný bod v 2D priestore. Na to, aby šlo o kinetickú energiu kyvadla, by sme museli ešte pridať väzbu v tvare $x^2 + y^2 = l^2$ a nejako ju do

⁴Planéta sa pohybuje v rovine, a zároveň po elipse. Obe tieto tvrdenia si v rámci seriálu dokážeme.

vzťahu pre E_k zakomponovať. Preto zavedieme zovšeobecnenú súradnicu φ , ktorá bude vyjadrovať uhol náklonu kyvadla od osi y meraný proti smeru hodinových ručičiek. Považujme bod závesu kyvadla za počiatok kartézskej sústavy súradníc. Ak je dĺžka závesu l , potom je prevod medzi kartézskymi súradnicami závažia na kyvadle x , y a našou zovšeobecnenou súradnicou φ

$$\begin{aligned}y &= l \cos \varphi, \\x &= l \sin \varphi.\end{aligned}$$

Z týchto vzťahov vieme derivovaním podľa času získať vzťahy pre jednotlivé kartézske zložky rýchlosti hmotného bodu vyjadrené pomocou zovšeobecnenej súradnice.

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -l \sin(\varphi)\dot{\varphi}, \\ \dot{x} &= l \cos(\varphi)\dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Po dosadení do rovnice pre kinetickú energiu dostávame

$$E_k = \frac{1}{2} m \left((l \sin(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (l \cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 \right).$$

Keďže vieme, že súčet kvadrátu sínusu a kosínusu rovnakého argumentu je rovný jednej, dostávame

$$E_k = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Keďže $\dot{\varphi}$ je vlastne uhlová rýchlosť, vidíme, že to čo sme dostali, je vlastne úplne očakávateľné, nakoľko ak do tohto vzťahu dosadíme

$$\dot{\varphi} = \frac{v}{l},$$

dostaneme pôvodný vzťah.

Vidíme teda, že zavedenie zovšeobecnených súradníc má svoju výhodu už aj na prvý pohľad, a to v tom, že dôležité fyzikálne vzťahy vyzerajú jednoduchšie a prirodzenejšie. Poďme si teraz pomocou nich ukázať, ako sa dajú zaviesť Lagrangeove pohybové rovnice.

Lagrangeove rovnice II. druhu

Lagrangeove rovnice si odvodíme v jednorozmernom priestore a pre jeden hmotný bod. Tento postup sme zvolili, aj keď je možno mierne neštandardný, preto, že je jednoduchší na uchopenie, a pritom je úplne rovnaký, ako kedy sme to robili pre n hmotných bodov a v 3D priestore. Celý postup postupne rozložíme do niekoľkých krokov a posnažíme sa ich popísať čo najviac zrozumiteľne. Tak si držíme palce.

Diferenciál polohy a kinetická energia

Majme v 1D priestore popisovanom súradnicou x zovšeobecnenú súradnicu q . Vo všeobecnosti je potom x nejakou funkciou našej súradnice q a času t , píšeme $x(q, t)$. Ak predpokladáme, že $x(q, t)$ je funkciou udávajúcou polohu nejakej konkrétnej častice, je pre nás veľmi cenná informácia vedieť určiť kinetickú energiu tejto častice, ktorej hmotnosť si môžeme pre naše potreby označiť m . Nato potrebujeme určiť rýchlosť danej častice, teda úplnú časovú deriváciu funkcie $x(q(t), t)$. To znamená derivovať najprv podľa jednej a potom podľa druhej premennej, pričom ak je jedna z premenných funkciou času, samozrejme musíme derivovať aj tú ako zloženú funkciu. V našom prípade to vyzerá nasledovne

$$\frac{dx(q, t)}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Prečo je pri derivácii q znak obyčajnej, a nie parciálnej derivácie? V tomto prípade sa jedná skutočne o úplnú časovú deriváciu tejto súradnice. Pravdou je ale aj to, že súradnica q nemá, tak ako sme si ju zadefinovali, žiadne iné závislosti ako časovú (čo vyplýva priamo z toho že je to súradnica pohybujúceho sa bodu), a teda pre tento konkrétny prípad platí

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} = \dot{q}.$$

Napriek tomu je ale formálne správnejšie písať to ako ozajstnú, a nie parciálnu deriváciu.

Teraz môžeme napísať vzťah pre kinetickú energiu nášho hmotného bodu. Zvolím značenie, na ktoré nie ste pravdepodobne zvyknutí, no budeme sa ho odteraz držať, nakoľko sa v analytickej mechanike používa vždy. Kinetickú energiu budeme značiť od tohto okamihu T . Potom platí

$$T(t) = \frac{1}{2}m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2.$$

Zastavenie času

Teraz náš hmotný bod v čase stojí. Inými slovami, pozeráme sa naň v jednom konkrétnom čase, v ktorom skúmame jeho vlastnosti. Jeho poloha a rýchlosť sú teda v konkrétnom časovom okamihu na sebe nezávislé. Keď budeme skúmať, ako by vyzerala energia tohto bodu v prípade, že trochu zmeníme jeho polohu alebo rýchlosť budeme predpokladať, že pri malej zmene polohy sa nezmení jeho rýchlosť a obrátene. V matematickej reči, keď budeme derivovať podľa polohy alebo rýchlosti, tak bude platiť

$$\frac{dq}{dq} = \frac{d\dot{q}}{dq} = 0.$$

čo je vlastne len matematický zápis toho čo sme povedali, teda že rýchlosť a poloha sú v konkrétnom časovom okamihu vnímané ako na sebe nezávislé.

To nám dovoľí spočítať parciálne derivácie kinetickej energie podľa polohy a podľa rýchlosti. Znova vám odporúčam, aby ste si to skúsili sami a výsledok

si iba skontrolovali. Pamätajte pri tom ale na to, že parciálne derivácie x podľa času aj podľa zovšeobecnenej súradnice q sú stále funkcie aj zovšeobecnenej súradnice q . Výsledok by vám mal vyjsť nasledovne:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial q},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t} \right).$$

Rozmrazenie času

Teraz všetky rovnice, ktorými disponujeme, môžeme znova chápať ako časovo závislé. Dovoľm si pre prehľadnosť ešte jednu úpravu, namiesto

$$\frac{\partial x}{\partial q} \frac{dq}{dt} + \frac{\partial x}{\partial t}$$

budeme písať kratšiu verziu

$$\frac{dx}{dt}.$$

Aplikujme na rovnicu pre $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ operáciu úplnej derivácie podľa času. Druhú rovnicu necháme nepozmenenú, čím dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial q} \right),$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = m \frac{dx}{dt} \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial q}.$$

Teraz spravíme trik – od prvej rovnice odčítame druhú. Vo všetkých prípadoch, ktoré sú pre fyziku užitočné, môžeme ďalej predpokladať, že platí

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Táto vlastnosť sa nazýva *zámennosť derivácií*. Až na malé výnimky je operácia derivácie sama so sebou komutatívna.

Po už spomínanom odčítaní za použitia komutativity derivácií dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial q} \right).$$

Táto rovnica by sa už dala považovať za formuláciu Lagrangeových rovníc, avšak najmä jej pravá strana nie je veľmi dobre zrozumiteľná. Poďme sa teda pozrieť, aký význam má pravá strana tejto rovnice. Už na prvý pohľad je zrejmé že časť

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x, t)$$

je nejaká vonkajšia sila pôsobiacia na náš hmotný bod. K tomu, aký význam má časť $\frac{\partial x}{\partial q}$, si pripomenieme niečo z druhej série seriálu, a síce, aký tvar má gradient. V tomto prípade totižto, keďže sme len v jednorozmernom priestore, je gradient k danej krivke $x(t)$ iba číslo – jedna derivácia $\frac{\partial x}{\partial q}$. Celá pravá strana má potom význam zovšeobecnenej sily (prenásobenej konštantou závislou len na voľbe zovšeobecnených súradníc), ktorú si môžeme označiť Q . Dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q.$$

To ale ešte nie je podoba Lagrangeových rovníc tak, ako ju poznáme. Vieme ale, že so silami sa vo všeobecnosti spája skalárna veličina nazývaná potenciál. Ak máme konzervatívne pole⁵, v ktorom pôsobí na teleso sila \mathbf{F} , potom je potenciál V tohto poľa implicitne definovaný ako

$$F_i = -\nabla V_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Pre náš prípad bude mať sila len jednu zložku

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

a použitím pravidla pre derivovanie zloženej funkcie máme

$$Q(q, t) = -\frac{dV}{dx} \frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial V(q, t)}{\partial q}.$$

Dosadením tejto rovnice do Lagrangeových rovníc za predpokladu, že riešime pohyb v konzervatívnom poli, a následným presunutím všetkých členov na jednu stranu dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Keďže potenciál V nie je závislý na rýchlosti telesa⁶, platí

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0.$$

Teraz môžeme tento nulový výraz pripočítať k Lagrangeovej rovnici a po úprave dostaneme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q} = 0,$$

⁵Pole, v ktorom objekt nestráca mechanickú energiu, teda keď sa objekt v tomto poli bude pohybovať je celková zmena jeho kinetickej energie nezávislá na trajektórii pohybu, ale len na počiatočnom a koncovom bode. Ak sa takýto objekt v konzervatívnom poli pohybuje po uzavretej krivke, nestráca ani nežískava žiadnu energiu. Príkladom takéhoto poľa je napríklad pole gravitačné.

⁶Ak by bol, môže existovať tzv. zovšeobecnovaný potenciál, pre ktorý stále platia Lagrangeove rovnice v nasledujúcom tvare. Napríklad pri elektromagnetickej sile to platí len pri istej špeciálnej voľbe potenciálu, nazvanej Lorentzova kalibračná podmienka.

kde funkcia $T - V$ predstavuje rozdiel kinetickej a potenciálnej energie. Nazývame ju *Lagrangián* a značíme L . Rovnicu teda môžeme zapísať aj takto

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Čo by sa ale stalo vo viacerých rozmeroch? Pri pohľade na rovnicu vidíme, že jediné čo nejako závisí na počte rozmerov je súradnica q . Preto rozšírenie tejto rovnice na viacrozmerný prípad je veľmi triviálne, a síce len také, že pre viacero súradníc dostaneme viacero rovníc tak, že vždy budeme týmto spôsobom derivovať Lagrangián podľa príslušnej súradnice a rýchlosti. Preto počet rovníc zodpovedá počtu zovšeobecnených súradníc.⁷ Tím dostaneme najznámejší tvar Lagrangeových rovníc, s ktorým sa v tomto seriáli budeme stretávať ešte veľmi dlho

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Celá táto kapitola bola venovaná odvodeniu Lagrangeových rovníc. Berte ju skôr informatívne, rozhodne od vás nikto nebude vyžadovať, aby ste toto odvodenie ovládali.⁸ Dôvod prečo som to tu ukazoval je, aby ste mali predstavu, že k veľkým fyzikálnym zákonom sa dá prísť hraním sa s deriváciami rôznych vecí a sčítaním a odčítaním zdanlivo nesúvisiacich vecí od seba, až nakoniec vznikne niečo tak zásadné ako Lagrangeove rovnice. Z vášho pohľadu sme ale ešte len na začiatku. Práve ste dočítali odvodenie niečoho, čoho využiteľnosť pravdepodobne vôbec nevidíte. Že je to na niečo vôbec dobré mi zatiaľ musíte veriť. V seriáli sa ďalej postupne prepracujeme cez zostavenie a riešenie Lagrangeových rovníc pre rôzne prípady. V dnešnej sérii si ešte ukážeme prvý krok k riešeniu fyzikálneho problému.

Nájdenie Lagrangeovej funkcie

Priamo z definície Lagrangeovej funkcie vyplýva, ako ju treba hľadať. Musíme nájsť vzťah pre kinetickú a potenciálnu energiu systému. Keďže celý problém chceme riešiť v zovšeobecnených súradniciach, je azda najkľúčovejším krokom nájsť vhodné zovšeobecnené súradnice. To znamená popísať ich a nájsť vzťah medzi nimi a kartézskymi súradnicami. Potom deriváciou tohto vzťahu určíme, ako vyzerajú jednotlivé zložky rýchlostí, teda funkcií $\dot{q}(q, t)$. Tieto vzťahy dosadíme do vzťahov pre potenciálnu a kinetickú energiu, aby sme dostali Lagrangián, z ktorého už nie je problém určiť pohybové rovnice. Poďme sa na toto pozrieť krok po kroku a simultánne s tým hľadať Lagrangián pre matematické kyvadlo.

1. Zavedenie zovšeobecnených súradníc

V našom prípade, ako sme už spomínali skôr, bude zovšeobecnenou súradnicou uhol vychýlenia φ . To, že nám stačí jedna súradnica, je vidieť z toho, že

⁷Dôležitou poznámkou je, aj keď je to možno zjavné, že zovšeobecnené súradnice môžu samozrejme byť súradnice *viacerých* hmotných bodov, ktorých pohyb vyšetrujeme.

⁸Samozrejme len pokiaľ nepôjdete študovať všeobecnú fyziku.

kyvadlo riešime ako dvojrozmerný problém, pričom je v ňom jedna väzba – hmotný bod musí byť vždy v rovnakej vzdialenosti l od bodu závesu.

2. *Vyjadrenie kartézskych súradníc pomocou zovšeobecnených*

Ako sme uviedli skôr, vzťah medzi zovšeobecnenou súradnicou a kartézskymi súradnicami x, y je

$$\begin{aligned} y &= l \cos \varphi, \\ x &= l \sin \varphi. \end{aligned}$$

3. *Spočítanie kartézskych rýchlostí*

V našom prípade musíme len usilovne derivovať, čo dopadne presne tak ako na začiatku seriálu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -l \sin(\varphi) \dot{\varphi}, \\ \dot{x} &= l \cos(\varphi) \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

4. *Dosadením do definície T a V vypočítame kinetickú energiu a potenciál v zovšeobecnených súradniciach*

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \left((l \sin(\varphi) \dot{\varphi})^2 + (l \cos(\varphi) \dot{\varphi})^2 \right) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2, \\ V &= -mgy = -mgl \cos(\varphi). \end{aligned}$$

5. *Zostavíme Lagrangeovu funkciu*

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi).$$

6. *Postupným usilovným derivovaním zostavíme Lagrangeove rovnice*

Toto je časť, ku ktorej sa dostaneme v ďalšom diele seriálu. Zostavenie rovníc totižto súvisí s ich riešením, preto je konzistentnejšie urobiť to spolu v jednom diele seriálu.

Dúfam, že ste si z tohto dielu odniesli niečo nové. Zároveň dúfam, že vás to more vysokoškolskej matematiky neodradilo a pri riešení úloh k seriálu použijete svoj dôvtip, a nájdete tie správne zovšeobecnené súradnice, a následne sa doderivujete úspešne až k správnej Lagrangeovej funkcii.

Úloha III.S ... zobecněná

10 bodů

1. Mějme vodorovnou desku, ve které je malá dírka. Přes tuto dírku je provlečený provázek o délce l , na jehož spodním konci je zavěšeno závaží o hmotnosti M . Toto závaží lze považovat za hmotný bod. Na druhém konci provázku na rovné desce je druhý hmotný bod (kulička) o hmotnosti m . Provázek mezi nimi je napnutý díky závaží o hmotnosti M . Celou soustavu držíme v klidu tak, že část provázku pod deskou je ve svislém směru. Poté druhému

hmotnému bodu, kuličce, udělíme rychlost v ve vodorovném směru kolmém na provázek ve chvíli, kdy soustavu uvolníme. V tomto příkladu neuvažujte žádné tření. Zvolte vhodné souřadnice a sestavte Lagrangeovu funkci pro tuto soustavu.

- Mějme železnou tyč ohnutou do tvaru paraboly tak, že pokud v kartézské soustavě působí tíhové zrychlení v záporném směru osy y , pak tyč má stejný tvar jako funkce $y = x^2$. Po tyči se může volně pohybovat hmotný bod o hmotnosti M , ke kterému je pevnou nehmotnou tyčkou o délce l připevněno závaží o hmotnosti m . Takto jsme vytvořili kyvadlo se závěsem klouzajícím podél ohnuté tyče. Konstrukce dovoluje pohyb celé soustavy pouze v rovině paraboly. Určete vhodné zobecněné souřadnice a najděte Lagrangeovu funkci této soustavy.
- Mějme přímkou nakloněnou pod úhlem α vzhledem k vodorovné rovině, po které se pohybuje bez tření hmotný bod o hmotnosti m . Najděte vhodné zobecněné souřadnice této soustavy a sestavte Lagrangeovu funkci. Poté sestavte i Lagrangeovy rovnice, dvakrát je zintegrujte, a tak najděte řešení. Zkontrolujte si, zda vaše řešení vychází stejně, jako řešení, které byste získali středoškolskou metodou výpočtu. Při integraci nezapomeňte na integrační konstanty a vysvětlete jejich význam. Jaké budou jejich hodnoty, pokud se bod spustí z klidu z výšky h ?

(řešení str. 169)

Kapitola 4: Integrály pohybu

V tejto časti seriálu dokončíme príklad, ktorý sme minule začali – výpočet matematického kyvadla. K tomu ale budeme potrebovať vedieť, čo je to Taylorov rozvoj. Ďalej si ukážeme, ako sa dajú s pomocou Taylorovho rozvoja vyriešiť úlohy, ktoré analyticky riešiteľné nie sú. Potom sa pozrieme na to, aké nenumerické metódy riešenia Lagrangeových rovníc existujú, a začneme sa venovať použitiu teoretickej mechaniky v nebeskej mechanike, čo bola historicky hlavná motivácia, kvôli ktorej bol Lagrangeov formalizmus vyvíjaný.

Taylorov rozvoj

Toto bude trochu matematická vsuvka do seriálu, kde sa čitateľom, čo vedia derivovať, pokúsím intuitívne vysvetliť, čo to je Taylorov rozvoj. Tiež ukážem, ako sa počíta, ale najmä uvediem základné vzťahy pre Taylorov rozvoj, ktoré sa v teoretickej mechanike zídu pri počítaní príkladov.

Asi najintuitívnejší spôsob, ako chápať a predstavovať si funkcie, je predstaviť si ich graf. Z grafu človek jasne vidí, ako sa funkcia správa, kde klesá alebo stúpa, ako veľmi klesá alebo stúpa, aké má korene a podobne. Mnohé funkcie sú ale veľmi náročné na analýzu a výpočet ich presných hodnôt, prípadne sa veľmi náročne integrujú (čo nám znemožňuje, či výrazne sťažuje riešenie diferenciálnych rovníc, ktoré obsahujú takéto funkcie). Na druhej strane, existuje trieda funkcií, ktoré sa dajú veľmi triviálne integrovať a derivovať - polynómy (mnohočleny). S týmito

funkciami ste sa už všetci stretli na konci základnej alebo začiatku strednej školy. Vlastnosti a rôzne manipulácie s lineárnymi a kvadratickými funkciami sú vám teda určite veľmi dobre známe a netreba vás presviedčať, že vypočítať hodnotu ľubovoľného polynómu v danom bode bez kalkulačky vie s ľubovoľnou presnosťou každý z vás. Keby som vám dal ale za úlohu zrátať na papieri $\sin(0,82)$, nikto (kto nepozná Taylorov rozvoj) by to nijako nedokázal.

Možno ste sa niekedy hrali s nejakým programom na vykresľovanie grafov funkcií a všimli si, že mnohé funkcie majú podobný tvar. Exponenciála je napríklad funkcia, ktorá veľmi rýchlo rastie. Aj x^2 , x^3 alebo iné vyššie stupne polynómov rýchlo rastú. Ak si napríklad exponenciálu v takomto programe (napríklad Wolfram Alpha) vykreslíte a vo vedľajšom okne sa budete hrať so sčítaním polynómov rôznych stupňov, s trochou šikovnosti a investovaného času sa dostanete k polynómu, ktorého graf sa bude veľmi podobáť na graf exponenciály (aspoň vo vykreslenej oblasti, pre veľké x exponenciála začne rásť oveľa rýchlejšie ako akýkoľvek polynóm).

Tento fakt si ľudia všimli už oveľa skôr. Na takejto podobnosti správne zvolených polynómov a danej funkcie je postavený Taylorov rozvoj. V skratke sa jedná o to, že ľubovoľnú (dostatočne slušnú) funkciu vieme na nejakom intervale ľubovoľne dobre aproximovať určitým polynómom. Táto vlasnosť je veľmi užitočná, pretože častokrát nás funkcie zaujímajú len na nejakých krátkych intervaloch. Napríklad sínus. Sínus má periódu, takže pre ľubovoľne veľké číslo ho vieme spočítať, ak dokážeme spočítať sínus všetkých čísel na intervale o dĺžke periódy sínu 2π (napr. $(-\pi, \pi)$). Sínus by nám teda teoreticky stačilo dobre aproximovať len na tomto krátkom intervale. V prípade sínusu, ktorý chceme aproximovať v okolí nuly, môžeme použiť polynóm pozostávajúci napríklad z piatich členov

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Nie je ťažké si všimnúť vzor v správaní tohto polynómu. Ak by sme chceli aproximovať túto funkciu na celom intervale presne, mohli by sme pokračovať v pridávaní členov polynómu až do nekonečna. Ukazuje sa, že takýto nekonečný polynóm sa naozaj bude rovnať funkcii sínus dokonca na celom jej definičnom obore, teda všetkých reálnych číslach. V "modernej matematike" je práve takýto nekonečný polynóm (rad, súčet postupnosti) definíciou funkcie sínus (spolu s inými definíciami, ktoré sú tejto ekvivalentné). Sínus vieme potom zapísať pomocou nekonečného *Taylorovho radu* nasledovne

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Pre usilovného čitateľa zadávam úlohu rozmyslieť si, najlepšie rozpísať na papier, že prvých 5 členov radu je naozaj rovnakých ako sú členy v polynóme aproximujúcom sínus uvedenom skôr. Ďalej môžem taktiež odporučiť usilovnému čitateľovi, aby si vyčísľil hore uvedený polynóm v bode π a zároveň si vyčísľil v bode π aj sínus. Budete mať lepšiu predstavu, ako dobre Taylorov rad aproximuje sínus.

Usilovní čitatelia mi určite môžu potvrdiť, že výsledok bol v oboch prípadoch veľmi podobný. Pre sínus to bola nula, pre polynóm to neprezradím, ale prezradím, že koreň tohto polynómu je $\sim 3,1487$, čo sa k číslu π blíži veľmi pôsobivo.

Častokrát nie je jednoduché zistiť Taylorov rad trikom alebo pozorovaním (aj v tých málo prípadoch, keď sa to dá, to chce veľmi veľkú skúsenosť a veľa napočítaných príkladov). Existuje ale metóda, ako vieme postupne dopočítavať jeden za druhým členy Taylorovho radu. Uvedieme rovno jeho vzorec a jedným dychom dodávame, že si môžete všimnúť, že daný rad je zvolený tak, aby mal všetky derivácie v danom bode rovnaké ako pôvodná funkcia.

Zoberme ľubovoľnú funkciu $f(x)$ v bode ($x = a$), ktorá má v tomto bode všetky derivácie a všetky sú konečné (dôvod je jasný zo samotného vzťahu - ak by derivácie neexistovali, nemal by zmysel). Na intervale obsahujúcom bod a je potom Taylorov rad tejto funkcie

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!},$$

kde $f^{(n)}(a)$ je n -tá derivácia našej funkcie v bode a .

Každú normálnu (tzv. analytickú) funkciu f vieme potom zapísať ako $f(x) = T_f(x)$. Existujú aj funkcie, pre ktoré to neplatí, ale s nimi sa nestretáme. Overte si, prosím, že ak tento vzorec aplikujeme na sínus v bode $a = 0$, dostaneme postupne polynóm, ktorý sme uviedli ako aproximáciu sínusu. Použijeme tento vzorec ešte pre odvodenie Taylorovho radu pre exponenciálu e^x v bode $a = 0$. Derivácia exponenciály je exponenciála. Exponenciála v bode 0 je rovná jednej. Taylorov rad exponenciály bude teda vyzeráť nasledovne

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ako cvičenie odporúčam odvodiť si zo vzorčeka Taylorov rad pre $\cos(x)$ a $\ln(1+x)$ so stredom v bode $a = 0$.

Matematické kyvadlo – *In medias res*

V minulej časti sme si ukazovali, ako postupne nájsť zovšeobecnené súradnice, z nich čisto mechanicky zostaviť Lagrangeovu funkciu a z nej postupným derivovaním zostaviť Lagrangeove rovnice. To sme si ale neukázali na našom príklade matematického kyvadla. Dokončíme to teraz. Pre pripomenutie, Lagrangeova funkcia kyvadla mala tvar

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos(\varphi)$$

a Lagrangeove rovnice zostavujeme nasledovne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Dosadíme za L Lagrangeovu funkciu matematického kyvadla a po prederivovaní dostaneme

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin(\varphi) = 0.$$

Vidíme, že sa jedná o obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu, pretože najvyššia derivácia našej hľadanej funkcie $\varphi(t)$ je druhá derivácia. Čo je ale oveľa väčší problém, rovnica je zároveň aj *nelineárna*, a to práve jej druhý člen, ktorý je tvorený sínusom nami hľadanej funkcie. Štandardne sa nedajú podobné diferenciálne rovnice riešiť analyticky, tj. pomocou známych dobre definovaných funkcií. Riešiť ich môžeme napríklad numericky s presnosťou, akú uznáme za vhodnú. Inou možnosťou je riešiť rovnicu analyticky tak, že pred tým, ako sa pustíme do riešenia, danú nelineánu⁹ funkciu aproximujeme. Toto je okamih, keď prvýkrát v praxi použijeme Taylorov rozvoj. Rozvinieme našu funkciu do Taylorovho radu. Vieme, že čím sa od bodu, v ktorom funkciu rozvíjame, nachádzame ďalej, tým viac členov jej rozvoja potrebujeme pre dosiahnutie požadovanej presnosti. Naopak, keď sme blízko stredu tohto rozvoja, stačí nám členov menej. V istej malej vzdialenosti nám dáva dostatočnú presnosť (čím vyššiu presnosť požadujeme, tým menšie je okolie bodu, kde je aproximácia presná) aj prvý člen Taylorovho rozvoja. Ten je obvykle lineárny, prípadne konštantný (v prípade konštantného člena vezmeme prvé dva členy). V tomto prípade vezmeme z rozvoja sínusu len prvý lineárny člen. Dostávame *linearizovanú* diferenciálnu rovnicu

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0.$$

Táto rovnica sa dá jednoducho riešiť. Na riešenie diferenciálnych rovníc sa však v tomto seriáli nebudeme sústreďovať, ale necháme ich riešenie na počítač. Osobne preferujem, ako ste si už mohli všimnúť, na riešenie rovníc WolframAlpha, ktorý nám v tomto prípade dá výsledok

$$\varphi(t) = c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Kde c_1 a c_2 sú integračné konštanty. Ich hodnoty si vieme jednoducho dopočítať. Napríklad tak, že budeme požadovať, aby na začiatku malo kyvalo výchylku φ_0 a uhlovú (a teda aj klasickú) rýchlosť $\dot{\varphi} = 0$. Z prvej podmienky vidíme, že $c_1 = \varphi_0$, čo dostaneme po dosadení $t = 0$ do našej pohybovej rovnice.

Rýchlosť dopočítame tak, že prederivujeme rovnicu pre polohu kyvadla, aby sme dostali rovnicu pre uhlovú rýchlosť kyvadla

$$\dot{\varphi}(t) = c_2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) - \sqrt{\frac{g}{l}} \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

Z tejto rovnice a podmienky, že rýchlosť má byť na počiatku nulová, dopočítame druhú konštantu. Celý druhý člen rovnice bude po dosadení $t = 0$ rovný nule, zatiaľčo prvý bude nulový len ak $c_2 = 0$. Naše riešenie pre dané počiatkové podmienky bude teda vyzerať

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right).$$

⁹Medzi nelineárne funkcie samozrejme patria aj kvadratické, kubické a iné mocninné funkcie. Nemožnosť analyticky riešiť rovnice je však najmä pri nelineárnych rovniciach, kde nelinearita je spôsobená inou ako polynomiálnou funkciou.

Práve sme si podrobne ukázali jeden zo spôsobov riešenia Lagrangeových rovníc. Jedná sa o to najjednoduchšie, čo nám môže napadnúť. Hlavnou nevýhodou je ale to, že riešenie, ktoré takto nájdeme, nie je presným riešením, a správne výsledky dáva len pre body blízke nule (pretože spravidla linearizujeme funkciu v nule). Existuje ale ďalší trik použiteľný pri niektorých príkladoch, ktorý nám výrazne uľahčuje ich analytické riešenie.

Integrály pohybu

Jeden z trikov, ktoré môžeme pri riešení Lagrangeových rovníc použiť, je získať dodatočné rovnice, ktoré nám zjednodušia riešenie samotných Lagrangeových rovníc. Zo strednej školy viete, že pri riešení úloh z mechaniky ste častokrát využívali zákony zachovania. Univerzálny sa môže zdať zákon zachovania mechanickej energie, ktorý ale neplatí vždy. Ďalej sú užitočné aj zákony zachovania hybnosti a momentu hybnosti. Častokrát nebolo jednoduché zistiť, najmä pri veľmi komplexných problémoch, ktorá zložka hybnosti sa zachováva a prečo. Prípadne či sa zachováva alebo nezachováva energia. V Lagrangeovom formalizme je tento problém náležite ošetrený a z matematických vlastností Lagrangiánu (Lagrangeovej funkcie) vieme jednoducho určiť, ktoré veličiny sa zachovávajú počas celého deja. Tieto veličiny nazývame *integrály pohybu*. Matematickejšie povedané, integrál pohybu hľadáme ako funkciu $f(q_j, \dot{q}_j)$ zovšeobecných súradníc a zovšeobecných rýchlostí, pričom od tejto funkcie požadujeme, že na skutočnej trajektórii riešiacej Lagrangeove rovnice bude nadobúdať po celý čas jednu konštantnú hodnotu. Povedali sme si, že v praxi sa jedná napríklad o hybnosť telesa. Z Lagrangeových rovníc vidíme, kedy sa niečo ako „zovšeobecnená hybnosť“ zachováva, celkom rýchlo.

Predpokladajme, že Lagrangeova funkcia závisí na všetkých zovšeobecných súradniciach okrem nejakej jednej q_i . Potom i -tu Lagrangeovu rovnicu získame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Derivácia Lagrangiánu podľa tejto súradnice bude teda 0 (pretože pri zmene tejto súradnice sa Lagrangián nezmení). Z toho dostávame

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Na záver preintegrujeme podľa času

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{konst.}$$

Vidíme, že tento výraz sa bude stále zachovávať, nakoľko je po celej trajektórii konštantný. Na záver možno ešte poznamka k názvu „zovšeobecnená hybnosť“. Keďže Lagrangián má fyzikálny rozmer energie (jedná sa o rozdiel dvoch energií), keď zderivujeme „energiu“ podľa „rýchlosti“, dostaneme niečo, čo má fyzikálny rozmer hybnosti.

Okrem toho existuje ešte jeden integrál pohybu,¹⁰ a ten sa nazýva „zovšeobecnená energia“. Zaujímavejšie než jeho konštrukcia je, že k Lagrangianu existuje zachováajúca sa zovšeobecnená energia práve vtedy, keď Lagrangian explicitne nezávisí na čase (teda na čase závisí len prostredníctvom zovšeobecných súradníc a rýchlostí). Jej definícia je

$$h(q_i, \dot{q}_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L.$$

Znova si všimneme, že táto veličina má fyzikálny rozmer energie, takže jej názov dáva dobrý zmysel.

Ešte predtým, ako reálne začneme riešiť príklady, je podľa mňa dôležité ukázať (pre niektorých zopakovať) nový spôsob hľadania zovšeobecných súradníc.

Najčastejšie krivočiare súradnice

V mnohých úlohách sa stretávame s pohybom po povrchu sféry alebo po kružnici, alebo s problémom, ktorý má rotačnú symetriu. Hlboko v podstate prírody je totižto zakorenená jedna vlastnosť, ktorej sa snád budeme venovať v poslednom diele seriálu a z ktorej sa dá odvodiť celá fyzika. Zjednodušene by sa dalo povedať, že príroda je „lenivá“, a preto nechá planéty obiehať okolo Slnka po elipsách a nie po napríklad štvorcoch. Vďaka tejto podivuhodnej vlastnosti sa zakrivený pohyb najčastejšie odohráva po elipsách veľmi blízkych kružniciam (mimo mechaniky na Zemskom povrchu, kde uvažujeme homogénne gravitačné pole). Preto je častokrát výhodnejšie počítat v súradniciach, ktoré dobre vystihujú symetriu danej sféry alebo kružnice. Zavádzajú sa preto polárne a sférické súradnice.

Polárne súradnice definujeme

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi), \\y &= r \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Ak si v rovine nakreslíme kartézsku mriežku, potom bod s kartézskymi súradnicami $[x, y]$ môžeme popísať aj pomocou uhlu φ zovretého medzi kladným smerom osy x a polpriamkou z počiatku do nášho bodu; uhol meriame proti smeru hodinových ručičiek (smerom od osi x k osi y). Súradnica r je potom vzdialenosť tohto bodu od nuly meraná po ich spojnici.

Druhé, o čosi ťažšie na predstavu, sú sférické súradnice. Prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami je nasledovný

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta), \\y &= r \sin(\varphi) \sin(\vartheta), \\z &= r \cos(\vartheta).\end{aligned}$$

¹⁰V skutočnosti môžu existovať aj iné integrály pohybu, spomenuté sa však dajú najst pomerne jednoducho.

Môžeme si všimnúť, že je to podobné ako pri polárnych súradniciach, len ešte prenasobené sínusom a kosínusom ďalšieho uhla, ktorý sme si označili ϑ . To, že vzdialenosť bodu od počiatku je r je zrejme zjavné. Ostatné dva uhly si vieme jednoducho predstaviť, keď si predstavíme, ako to vyzerá v planetáriu (tam sa nad nami nachádza sféra). V tomto prípade je polomer sféry pevný a nemení sa. Ak stojíme v strede, tak spojnica nás a nejakého význačného bodu (v planetáriu sa používa juh) je naša kartézská os x . Súradnice nejakej hviezdy vieme určiť pomocou sférických súradníc: hviezdu spojíme najkratšou možnou čiarou po sfére s horizontom. Teda spravíme jej priemet na „horizont“. Potom odčítame uhol medzi týmto jej priemetom a nami zavedenou osou x proti smeru hodinových ručičiek, čo bude naša súradnica φ . Na záver určíme súradnicu ϑ tak, že od 90° odčítame uhol medzi horizontom a hviezdou po nami nájdenej najkratšej spojnici.

Snažil som sa to vysvetliť zrozumiteľne a názorne, na internete sa ale nachádza množstvo obrázkov pre tých z vás, ktorí veci potrebujú vidieť, a nestačí im vizualizovať si ich. A možno ešte jedna poznámočka k zavedeniu sférických súradníc. Možno vám prišlo neintuitívne, ako som v poslednom kroku odčítal uhol medzi hviezdou a obzorom od 90° . Samozrejme, dostaneme rovnako dobre použiteľné súradnice, ak ϑ definujeme priamo ako uhol medzi (pre náš prípad) horizontom a hviezdou. Prevodné vzťahy sa potom trochu pozmenia. Ak ste zvyknutí na túto definíciu sférických súradníc, pokojne ich používajte, no pamätajte, že nemusí byť na prvý pohľad jasné, že vzťahy získané pri týchto rôznych zavedeniach sú totožné.

Na záver tejto časti si spomenieme ešte jeden príklad, z ktorého výsledkov budeme intenzívne ťažiť nabudúce.

Pohyb hmotnej častice v gravitačnom poli

V roku 1889 Nórsko-Švédsky kráľ Oskar II. vyhlásil k príležitosti svojich 60-tych narodenín súťaž o nájdenie analytického riešenia problému troch telies vo forme konvergujúceho mocninného radu, ktorú sám označil za (vo voľnom preklade): „Súťaž o dôležitý objav v ríši vysokej matematickej analýzy“. Už nasledujúci rok Henry Poincaré publikoval článok v časopise Acta Mathematica, v ktorom dokázal, že neexistuje dostatok integrálov pohybu na analytické vyriešenie problému troch telies, čo kráľa uspokojilo a odmena za "výhru" v súťaži mu bola udelená.

Až v roku 1912 sa Fínskemu matematikovi Karlovi Sundmanovi podarilo vyriešiť tento problém, avšak formou radu s exponentmi, ktoré sú celočíselným násobkom $\frac{1}{3}$. Tento rad však konverguje veľmi pomaly, a aby dosahoval presnosť porovnateľnú s numerickými výpočtami, je nutné vziať približne jeho prvých $10^{8000000}$ členov. Problém troch telies je tak prakticky riešiteľný iba numericky. Existujú však zjednodušené prípady, ktorých riešenia s rozumnou presnosťou môžeme získať aj analyticky. Takým je napríklad systém Slnko-Zem-Mesiak.

Než sa ale dostaneme k tomuto problému, musíme si prejsť cez problém dvoch telies. A predtým ako sa dostaneme k tomu, je potrebné si ukázať, ako vyzerá Lagrangian hmotného bodu, ktorý sa pohybuje v nejakom potenciálovom poli.

Budeme predpokladať, že naše skúmané teleso svojím pohybom toto potenciálové pole nijako neovplyvňuje.

Naše teleso sa bude pohybovať v centrálnom poli s potenciálom $V(r)$ a zo skúseností vieme, že sa bude pohybovať v jednej rovine (túto skúsenosť si v úlohách k seriálu budete mať možnosť overiť). Na jeho popis preto použijeme polárne súradnice. V nich bude jeho Lagrangián

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Teraz uvidíme silu integrálov pohybu. Vo všeobecnosti by boli Lagrangeove rovnice v tomto prípade 2 rovnice druhého rádu, kdežto ak určíme integrály pohybu, dokážeme z nich po úpravách zostaviť jedinú diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Pre premennú r bude naša výsledná diferenciálna rovnica

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

kde E je mechanická energia a l moment hybnosti telesa - dva integrály pohybu.

K riešeniu tejto rovnice sa dostaneme v seriálovej úlohe a ďalšom diele seriálu. Následne plynule prejdeme k problému dvoch telies, riešeniu Keplerovej úlohy a možno aj odvodeniu Keplerových zákonov.

Mnohým z vás ďakujem za reakcie na výzvu k spätnej väzbe, dojmy boli zatiaľ celkom pozitívne, za čo som rád, pretože je to pre mňa povzbudzujúce. Samozrejme naďalej platí, že budem rád za vaše návrhy, pripomienky a komentáre k seriálu. Som optimista a dúfam, že počet riešiteľov seriálu sa nebude znižovať, tak si všetci navzájom držíme palce.

Úloha IV.S . . . lagrangeovská

10 bodů

V závere seriálu ste si určite všimli Lagrangián a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby „spadli z neba“. To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

1. Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.

Návod Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súradnice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu $\vartheta = \pi/2$ a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.

2. Zostavte Lagrangián pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závere seriálu. Pre tento Lagrangián následne nájdite všetky integrály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú r . Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.

3. Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Sírirus, ktorých súradnice si nájdite.

Pomôcka Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.

(*řešení str. 173*)

Kapitola 5: Keplerovy zákony

Keď na začiatku 17. storočia Johannes Kepler sformuloval svoje zákony o obehoch planét okolo Slnka, dal svetu doposiaľ najlepší model Slnčnej sústavy. Popísal v ňom nielen to, po akých dráhach sa jednotlivé planéty pohybujú, ale aj ako rýchlo sa pohybujú v konkrétnom čase, teda v konkrétnej polohe voči Slnku. Kepler ale nepodal žiadne kvalitatívne vysvetlenie, prečo je to tak. Jeho zákony vychádzali čisto z napozorovaných dát. Príčinu tohto pohybu, gravitačnú silu, „objavil“ a fyzikálne popísal až o polstoročie neskôr Isaac Newton. Ten následne použitím rafinovanej starogréckej geometrie dokázal, že Keplerove zákony priamo plynú z jeho vlastných pohybových zákonov a zákona gravitácie.

Použitím silnejšieho matematického aparátu a niektorých výsledkov teoretickej mechaniky (ku ktorým sme sa už stihli dopracovať v tomto seriáli) sa dajú Keplerove zákony odvodiť pomerne rýchlym spôsobom, navyše dva z nich vo všeobecnejšom a užitočnejšom tvare. Pustime sa teda do toho!

Keplerove zákony

Na začiatok si pripomeňme závery z minulej časti seriálu, ktoré ste si mali možnosť overiť a dôkladne sa s nimi zoznámiť v minulej seriálovej úlohe. Majme teda lagrangián telesa pohybujúceho sa v rovine v sféricky symetrickom silovom poli s potenciálom $V(r)$.

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r),$$

kde kvôli symetrii úlohy je rozumné použitie radiálne symetrických polárnych súradníc.

Ďalej sme z integrálov pohybu tohto lagrangiánu našli diferenciálnu rovnicu pre súradnicu r v závislosti na celkovej energii E a momente hybnosti telesa l .

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

Riešenie takejto rovnice analyticky je možné, avšak len v prípade „jednoduchého“ potenciálu a len ako funkcia $t(r)$, ktorej invertovanie je náročné, prípadne nemožné. Dokážeme ale nájsť tvar trajektórie nášho telesa a to za použitia triku – takzvaného Binetovho vzorca. To, prečo $u(\varphi)$ vyhovujúce Binetovmu vzorcu rieši našu rovnicu, si môžete za bodovú odmenu rozmyslieť (viď zadanie seriálovej úlohy). Trik spočíva

v tom, že vieme nájsť riešenie nie pre funkciu $r(\varphi)$, ale pre funkciu $u(\varphi)$, kde $u = r^{-1}$. Postup spočíva jednoducho v tom, že do Binetovho vzorca, ktorý je

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{dV}{du},$$

dosadíme potenciál a dostaneme diferenciálnu rovnicu pre u , ktorú vyriešime a určíme funkciu $r(\varphi)$. V našom prípade sa jedná o štandardný potenciál gravitačného poľa $V(r) = -GMm/r$, kde G je gravitačná konštanta, M hmotnosť centrálneho telesa a m hmotnosť testovacieho telesa pohybujúceho sa v tomto potenciáli. Tento technický krok necháme na vás, niektorí z vás si precvičia počítanie diferenciálnych rovníc, iní prácu s Wolframom. Každý si snáď z toho niečo odnesie. Výsledkom je

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi)},$$

kde e je integračná konštanta a p je prevrátená hodnota pravej strany Binetovho vzorca

$$p = \frac{l^2}{GMm^2}.$$

Tento výsledok má fundamentálny obsah, nakoľko sme dostali všeobecnú rovnicu pre kuželošečky v polárnom tvare s počiatkom v ohnisku. Pre rôzne hodnoty parametra e (o ktorom ste už určite mnohokrát počuli, jedná sa o numerickú excentricitu) dostaneme rôzne typy kuželošeciek. Rýchlo si vieme overiť aspoň jednu z nich. Ak je $e = 0$, potom je $r(\varphi) = \text{konst}$, z čoho vyplýva, že sa jedná o množinu bodov s rovnakou vzdialenosťou od počiatku, čo je presne definícia kružnice.

Pre $e \in (0, 1)$ ide o elipsu. To si predstaviť úplne nevieme, ale dá sa vidieť, že v tomto prípade závisí r na φ . Extrémny prípad nastane, keď $e = 1$. Vtedy pre istý uhol φ dostaneme v menovateli nulu, a funkcia bude divergovať - rastie do nekonečna. To je presne prípad, kedy sa jedná o parabolu, tj. keď teleso, ktoré má v nekonečne nulovú rýchlosť, priletí k Slnku a znova odletí do „nekonečna“, kde „zastane“. Pre väčšie hodnoty excentricity sa bude jednáť o hyperbolickú dráhu.

Týmto sa nám podarilo dokázať prvý Keplerov zákon tak, ako bol formulovaný: „Planéty sa pohybujú po elipsách, v ktorých ohnisku sa nachádza Slnko.“ Zároveň sme ale ukázali, že vieme sformulovať oveľa všeobecnejšie tvrdenie o pohyboch hmotných telies v centrálnom gravitačnom poli, a že prípad, ktorým sú planéty v našej Slnčnej sústave, je len jedna z možností, ako sa nebeské telesá môžu pohybovať. (Dobrym príkladom pohybu po napríklad hyperbolických dráhach sú kométy, ktoré sa k Slnku dostanú len raz, prípadne telesá mimo slnčnej sústavy, ktoré sa náhodou jednorázovo „zatúlajú k nám“).

Určite nepočujete prvýkrát, že druhý zákon je len geometrickou interpretáciou zákona zachovania momentu hybnosti. Pripomeňme si pôvodnú Keplerovu formuláciu: „Spojnice Slnka a planéty opíše za rovnaké časové intervaly rovnako veľké plochy.“

Chceme vlastne ukázať, že plocha opísaná za nejaký čas (nazvime si túto veľičinu plošná rýchlosť) je konštantná. Nech za nejaký krátky časový úsek dt opíše

spojnica planéty a Slnka plochu dS . Keď je tento čas krátky, planéta vo vzdialenosti r sa posunie o uhol $d\varphi$, ktorý bude malý. Keďže bude uhol malý, môžeme predpokladať, že $\sin d\varphi = d\varphi$ a $r(t) \approx r(t + dt)$, preto plochu trojuholníka, ktorú za čas dt opíše spojnica planéty a Slnka vieme vyjadriť ako polovicu súčinu dĺžok dvoch jeho strán a sínusu uhla nimi zovretého

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

Po predelení výrazu časovým úsekom dt a za predpokladu, že daný časový úsek a následne aj uhol, o ktorý sa posunula planéta, a plocha, ktorú opísala spojnica, sú veľmi malé (formálne by sme počítali limitu, kde tieto premenné idú do nuly), môžeme zlomky $\frac{dS}{dt}$ a $\frac{d\varphi}{dt}$ vnímať ako časové derivácie S a φ . Dostali sme teda vzťah medzi plošnou rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou.

Ďalej si stačí spomenúť, že jeden z integrálov pohybu nášho lagrangiánu bol vlastne zákon zachovania momentu hybnosti l v tvare

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{konst} = l.$$

Vyjadrením uhlovej rýchlosti z tohto vzťahu a dosadením do vzťahu pre plošnú rýchlosť dostaneme

$$\frac{dS}{dt} = \frac{l}{2m}.$$

Vidíme, že plošná rýchlosť je konštantou, čím sme dokázali platnosť druhého Keplerovho zákona. Ak si spomenieme, aká je definícia momentu hybnosti, zistíme, že plošná rýchlosť vôbec nezávisí na hmotnosti planéty, ale len na jej polohe a rýchlosti.

Teraz sme už len na skok od odvodenia (dôkazu) tretieho Keplerovho zákona. Dostaneme ho jednoducho tak, že preintegrujeme rovnicu pre plošnú rýchlosť cez celú periódu obehu planéty

$$\begin{aligned} dS &= \frac{l}{2m} dt, \\ S &= \frac{l}{2m} T, \end{aligned}$$

kde T je perióda obehu planéty okolo Slnka. Dosadíme za $S = \pi ab$, čo je vzorec pre výpočet plochy elipsy. Následne dosadíme známy vzťah pre malú poloos elipsy za znalosti excentricity

$$b = a\sqrt{1 - e^2}.$$

Celú rovnicu umocníme, aby sme ju zbavili odmocnín, a dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 a^4}{l^2} (1 - e^2).$$

Výraz je už skoro v tvare, ktorý možno poznáte z internetu alebo inej literatúry. Stačí len vhodne nahradiť niektoré konštanty. Ak výraz pre konštantu p skombinujeme so vzťahom

$$p = a(1 - e^2),$$

ktorý vieme vypozorovať z vlastností elipsy, dostaneme

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Z čoho je zrejmé Keplerovo presne 400 rokov staré tvrdenie: „Pomer druhej mocniny periódy a tretej mocniny jej veľkej polosy je pre všetky planéty konštantna.“ Nám sa ale podarilo zistiť aj to, že táto konštantna je nejakým násobkom hmotnosti nášho Slnka, prípadne iného telesa (telies) v ktorého/ých gravitačnom poli sa pohybujeme. Táto verzia tretieho Keplerovho zákona sa dá použiť na výpočty, ktoré by bez neho boli omnoho náročnejšie a využíva nenáročný stredoškolský matematický aparát. Ukážeme si to na nasledujúcom príklade. Ak by sa zrazu Mesiac voči Zemi zastavil (prestal by okolo nej obiehať), ako dlho by trvalo, kým by Mesiac spadol na Zem, alebo, lepšie povedané, sa zrazil so Zemou?

Príklad: Armageddon

Chceme teda určiť čas, za ktorý sa zrazia dva telesá o „porovnateľných“ hmotnostiach (Zem je približne 81-krát ťažšia ako Mesiac). Riešenie absolventa matfyzu by vyzeralo asi tak, že by si zostavil diferenciálnu rovnicu, ktorá by tento pohyb popisovala, a následne by ju numericky vyriešil, pretože by zistil, že analyticky to nejde.

My sa ale pozrieme na iný postup, a to použitie tretieho Keplerovho zákona. Ak si predstavíme, že Mesiac a Zem by boli hmotné body a Mesiac by nepadal úplne priamo na Zem, ale mal by nejakú infinitezimálne malú počiatočnú rýchlosť kolmú na spojnicu so Zemou, tak by sa pri svojom najväčšom priblížení telesá nezrazili, ale jedno by obiehalo okolo druhého po elipse, ktorá by mala veľmi podlhovastý tvar. (V tomto myšlienkovom experimente môžeme pohyb Zeme zanedbať a predpokladať, že je taká ťažká, že sa vôbec nebude hýbať). Pre takúto elipsu samozrejme bude platiť tretí Keplerov zákon. Pri nulovej počiatočnej rýchlosti sa bude Mesiac pohybovať po priamke. Jeho „perióda obehu“ je potom dvojnásobok času, za ktorý sa zrazil so Zemou.

Ďalej je dôležité si uvedomiť, čo je „veľká poloos“ jeho trajektórie. Vieme, že veľká poloos je vlastne polovica najdlhšej tetivy, ktorú dokážeme v elipse zostrojiť. V našom prípade „elipsy extrémne sploštenej až na úsečku“ je dĺžkou najdlhšej tetivy práve dĺžka tejto úsečky. Veľká poloos je teda rovná jej polovici, to v našom prípade znamená polovici vzdialenosti Zem-Mesiac.

Posledné dôležité čo si treba uvedomiť je, čo budeme dosadzovať za hmotnosť M . Túto formu tretieho Keplerovho zákona sme formulovali pre potenciálové pole buďeného jedným veľmi hmotným telesom, ktorého rozmery sú vzhľadom na rozmery v úlohe zanedbateľné. V sústave Zem-Mesiac (jedná sa o jednorozmerný problém) je toto pole generované hmotnosťou Zeme a Mesiaca. Oba objekty sa budú pohybovať, akoby ich hmotnosť bola zanedbateľná a v ich ťažisku sedel hmotný bod s hmotnosťou rovnou súčtu ich hmotností.

Teraz ostáva len dosadiť hmotnosti Mesiaca a Zeme a vzdialenosť Zeme od Mesiaca (vezmeme strednú) a dostaneme, že Mesiacu by spadnúť na Zem trvalo

približne 4,9 dňa. V príklade sme samozrejme počítali s nulovými rozmermi telies, v skutočnosti by sa ale samozrejme zrazili trochu skôr. Dá sa ale vidieť, že to, že trasa bola o približne 10 000 km kratšia, nám nevádi, nakoľko v posledných chvíľach pred zrážkou sa pohybovali telesá veľmi rýchlo a väčšinu času trvalo Mesiacu (ale trochu aj Zemi) prejsť prvé časti trajektórie.

Aj keď sa seriál ako celok blíži ku koncu, stále máme pred sebou dve dôležité kapitoly. Prvú z nich stihneme ešte dnes.

Problém dvoch telies

Doteraz sme riešili, čo sa deje, keď sa teleso hýbe v gravitačnom poli toho druhého, nehybného. Na záver sme si spočítali veľmi špecifický prípad dvoch telies, ktoré síce mali „porovnateľnú hmotnosť“, ale hýbali sa po jednej priamke s nulovou počítateľnou rýchlosťou. Zároveň sme k riešeniu použili kanón vo forme 3. Keplerovho zákona, ktorý z inak náročného príkladu spravil príklad stredoškolský. Teraz sa ale poďme pozrieť na to, ako popísať pohyb dvoch telies pre ľubovoľné počítateľné hodnoty rýchlostí a ľubovoľný pomer rýchlostí.

Celý trik riešenia problému dvoch telies tak, aby to bolo pre nás pohodlné, spočíva ako pri všetkých príkladoch v analytickej mechanike v správnom zavedení súradníc. Naším cieľom bude využiť najpoužívanejší postup matematiky, a síce previesť náš problém na už známy prípad. Máme vyriešené, ako sa správa jedno teleso popísané polohovým vektorom r v silovom poli so sféricky symetrickým potenciálom (závislým len na r a nie na priestorových uhloch).

Ťažisková sústava sa vyznačuje vlasnosťou, že celková hybnosť (v našom prípade oboch) telies v tejto sústave je nulová. Ak poznáme pohybové rovnice jedného z dvoch telies v ich ťažiskovej sústave a hmotnosť druhého telesa, vieme určiť pohybové rovnice druhého telesa. Toto je veľmi zaujímavá vlasnosť, a preto sa pozrieme, ako by vyzeral lagrangián dvoch hmotných bodov v ich ťažiskovej sústave.

Nech majú na začiatku body polohové vektory \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Zavedieme si teda polohový vektor \mathbf{r} ako vektor ich vzájomnej polohy (polohy druhého telesa voči prvému) a vektor \mathbf{R} ako polohový vektor ich ťažiska

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},\end{aligned}$$

kde prvý vzťah je zrejímavý a druhý vyplýva z definície ťažiska, pričom usilovnímu čitateľovi, ktorý to hneď nevidí, odporúčam si to overiť.

Lagrangián si vyjadríme najprv v premenných r_1 a r_2 , pod ktorými rozumieme veľkosti vektorov \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 . Postupovať stačí intuitívne, bude sa jednať o kinetickú energiu prvého hmotného bodu v súčte s kinetickou energiou druhého hmotného bodu a vzájomnou potenciálnou energiou týchto bodov, ktorá je z Newtonovho gravitačného zákona rovná

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Lagrangian bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}.$$

Teraz si vyjadríme nové premenné ako funkcie tých starých. Po pár úpravách dostávame

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Po dosadení našich nových premenných, vzájomnej polohy objektov a polohového vektoru ťažiska dostávame lagrangian v tvare

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|}.$$

Na začiatku sme sa rozhodli použiť vyjadrenie v ťažiskovom systéme, lebo sme dúfali v nejaké zjednodušenie lagrangianu. Naše želania sa opierali o to, že ťažisková sústava má isté špeciálne vlastnosti a preto by mohol lagrangian v nej vyzerat jednoduchšie. Jednou z týchto vlastností v tomto prípade bude rýchlosť ťažiska $\dot{\mathbf{R}}$ nulová a celý tento člen z lagrangianu zmizne. Dostávame teda

$$L = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|},$$

čo sa nápadne podobá na pohyb jedného hmotného bodu v centrálnom poli. Už vieme, že tento pohyb sa odohráva v jednej rovine. Preto polohový vektor \mathbf{r} nahradíme jeho súradnicovou reprezentáciou v polárnych súradniciach. Zároveň zavedieme pre zjednodušenie zápisu premenných s názvom redukovaná hmotnosť

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2},$$

ktorú môžeme chápať ako „hmotnosť voči ťažisku“ čo znie mierne zavádzajúco. Zo skúsenosti viem, že niektorým ľuďom príde táto interpretácia užitočná a iným nie (ak patríte medzi nich, tak nato hneď teraz zabudnite). Potom dostane lagrangian tvar

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{G(m_1 + m_2)\mu}{r},$$

čo už je štandardný tvar lagrangianu až na konštanty, ktorý vieme riešiť z časti o pohybu hmotnej častice v gravitačnom poli. Podarilo sa nám teda previesť problém dvoch telies na už predtým vyriešený problém, čím ho môžeme taktiež považovať za vyriešený.

Problémom dvoch telies sme zakončili hlavnú časť teoretickej mechaniky. Ak ste to vydržali až sem, ste dobrí. Ak ste to vydržali až sem a máte pocit, že tomu, čo ste doteraz a aj dnes čítali, celkom rozumiete, tak ste veľmi dobrí a vaše vedomosti

vzhľadom na vaše oficiálne dosiahnuté vzdelanie sú vysoko nadpriemerné, štatisticky povedané neobvyklé. Toto vám tu teraz píšem, pretože si tú pochvalu zaslúžite a zároveň dúfam, že vás tým možno trochu motivujem neprestať v mimoškolských aktivitách, ktoré robíte.

Rovnako ako vždy v prípade otázok k seriálovým úlohám alebo textu seriálu nám neváhajte napísať mail, zároveň budeme radi za spätnú väzbu. Doteraz vždy prišla s riešením úlohy, tak v tom pokojne pokračujte ďalej touto cestou.

Zároveň vás chceme v závere znova trochu navadiť k ďalšiemu pokračovaniu seriálu, v ktorom si všetko čo sme si doteraz povedali zopakujeme a zároveň si ukážeme takzvaný variačný princíp, čo je niečo, čo mnohí ľudia označujú za najelegantnejšiu formuláciu celej fyziky.

Úloha V.S ... nebesko-mechanická

10 bodů

1. Mějme nějaké kosmické těleso s hmotností pěti Sluncí, okolo kterého se nachází sféricky symetrický homogenní oblak plynu a prachu s hmotností dvou Sluncí a s průměrem 1 ly. Oblak začne kolabovat do centrálního kosmického tělesa. Zanedbejte vzájemnou interakci částic oblaku (kromě gravitace). Určete, jak dlouho bude trvat, než celý oblak zkolabuje do centrálního tělesa. Úlohu neřešte numericky.
2. V úvodu seriálu jsme řešili diferenciální rovnici pro pohyb částic v centrálním poli, při jejímž řešení jsme použili takzvaný Binetův vzorec. Ukažte, že tento vzorec skutečně řeší zadanou diferenciální rovnici.
3. Sestavte lagrangjián pro soustavu Slunce-Země-Měsíc. Předpokládejte, že Slunce je nehybné. Země i Měsíc se pohybují jak pod vlivem Slunce, tak pod vlivem sebe navzájem. Při sestavování lagrangjiánu se zamyslete nad tím, jestli používáte správný počet zobecněných souřadnic.

(řešení str. 175)

Kapitola 6: Variační počet

Okrem Lagrangeovho formalizmu je ďalším pilierom, na ktorom stojí teoretická mechanika Hamiltonov formalizmus. V tomto seriáli sa nebudeme venovať Hamiltonovmu formalizmu. Dôvod, prečo ho ale vôbec spomínam, je ten, že sa budeme venovať niečomu, čo je akýmsi medzistupňom medzi Lagrangeovým a Hamiltonovým formalizmom. Tým je Hamiltonov variačný princíp. K pochopeniu Hamiltonovho variačného princípu ale budete potrebovať vedieť, čo je to Variačný počet a ako sa s ním pracuje. Pustime sa teda do toho.

Variačný počet

V roku 1696 Johann Bernoulli v časopise *Acta Eruditorum* sformuloval matematickú výzvu o nájdenie krivky spájajúcej dva body (neležiacie v jednej horizontálnej ani vertikálnej rovine) tak, aby sa po nej pohybujúci hmotný bod v homogénnom tiažovom poli bez trenia dostal z jedného bodu do druhého za najkratší čas. Z toho

je odvodený aj názov úlohy *Brachystochrona*, čo je z gréckych slov *brachyistos* = najkratší a *chronos* = čas.

Výzvu Johanna Bernoulliho prijalo mnoho matematikov, medzi inými aj Newton, Huygens či Leibnitz, a všetci, ktorí na výzvu odpovedali, ju vyriešili správne. Jedným z mnohých riešení je aj možnosť využiť variačný počet, ktorý vznikol práve popri hľadaní riešenia tejto úlohy vďaka Leonardovi Eulerovi. Variačný počet je (vtedy ešte neexistujúca) časť matematiky, ktorá sa zaoberá hľadaním takzvaných extrémál funkcionálov. Môžeme si všimnúť, že názvoslovie nie je použité veľmi kreatívne. Medzi pojмами funkcia – funkcionál a extrém – extrémála existuje analógia, ktorá je zároveň analógiou medzi klasickou analýzou funkcií (derivácie, hľadanie extrémov) a novou disciplínou, už viackrát spomínaným variačným počtom, ktorý skúma funkcionály, teda zobrazenia, ktoré funkciám priradzujú čísla.

Funkcionálom je teda (vo všeobecnej rovine) každé zobrazenie, ktoré funkciám priradzuje číslo. Teda napríklad, ak vezmete tabuľku a do jedného stĺpca budete vpisovať rôzne funkcie a do druhého rôzne čísla priradené týmto funkciám, definujete tak touto tabuľkou funkcionál. V praxi sa ale používajú funkcionály, ktoré majú nejaký lepší zmysel, a preto typickým príkladom funkcionálu je určitý integrál. Určitý integrál zrejme poznáte ako spôsob, akým počítať plochu pod nejakou krivkou. Počíta sa tak, že krivku vyjadrenú pomocou funkcie $y = f(x)$ najprv zintegrujeme v zmysle neurčitého integrálu. Následne od seba odčítame funkčnú hodnotu neurčitého integrálu odpovedajúcu hornej hranici intervalu od funkčnej hodnoty odpovedajúcej dolnej hranici intervalu, čím dostaneme číslo, ktoré sa rovná ploche pod danou krivkou na danom intervale.

Predstavme si ale, že máme nejaký interval, v ktorého krajných bodoch máme definované hodnoty, napríklad interval $(0,1)$, v nule hodnotu 0 a v jedničke hodnotu 1. Tieto dva body môžeme spojiť ľubovoľne veľa krivkami. Zadáme si teda úlohu nájsť spomedzi týchto kriviek takú, ktorá je zo všetkých možných kriviek najkratšia. Všetci z vás samozrejme viete, že riešením tejto úlohy je priamka, v tomto prípade priamka $y = x$. Táto úloha je ale typickou úlohou variačného počtu, to znamená úlohou, kde hľadáme, kedy je nejaký funkcionál extrémálny. Jednoduchšie povedané, vieme zostaviť funkcionál, ktorý zadanej krivke popísanej funkciou $y(x)$ na nejakom intervale (v našom prípade na $(0, 1)$) priradí dĺžku tejto krivky. Takýto funkcionál vie počítať dĺžku ľubovoľnej krivky, je teda dobrou analógiou funkcie. Líši sa akurát v tom, že funkcia je zobrazenie zobrazujúce z množiny reálnych čísel, kdežto tento funkcionál zobrazuje z množiny všetkých funkcií, ktoré majú na danom intervale pevne zadané hodnoty v krajných bodoch. Už všetci poznáme metódu, ako nájsť extrém funkcie - stačí položiť deriváciu tejto funkcie rovnú nule. Veľmi podobnej logiky využíva aj variačný počet. Vieme v ňom definovať takzvanú Gateauxovu (Gateaux čítaj „Gató“) deriváciu (názov je podľa mena matematika, nie je za tým nič hlbšie), ktorá je nulová pre funkciu ktorá maximalizuje/minimalizuje daný funkcionál.

Derivácia Gateaux

Definujeme si deriváciu Gateaux podobne ako klasickú deriváciu funkcie. Keď S je nejaký funkcionál, v našom prípade reprezentovaný vždy určitým intergalom nejakej funkcie $y(x)$, a t je nejaké reálne číslo, potom limitu

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{S[y(x) + t \cdot h(x)] - S[y(x)]}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_a^b f(y(x) + t \cdot h(x)) dx - \int_a^b f(y(x)) dx}{t}$$

nazveme deriváciu Gateaux v smere $h(x)$. Dôležité je, ako si takúto deriváciu predstaviť. Predstavme si to nasledovne. Máme dva pevné body, ktoré môže spájať ľubovoľné množstvo funkcií. Chceme nájsť napríklad takú, ktorá by spĺňala zadanie úlohy o brachistochrone. Vezmeme teda nejakú krivku spájajúcu tieto dva body (reprezentovanú nejakou funkciou) a skúšame k nej pričítať rôzne iné funkcie. Sledujeme, ako sa mení (v tomto prípade) čas, za ktorý prejde naša guľička po tejto krivke z jedného bodu do druhého. Pričítavanie funkcií je v limite reprezentované pričítaním malého násobku nejakej reálnej funkcie $h(x)$, čo môže byť pre pôvodnú predstavu zradné. Jednoduchšie je si to predstaviť tak, že máme nejakú krivku spájajúcu tieto dva body. Pustíme po nej guľičku a odmeriame čas, po ktorý pohyb tejto guľičky trval. Potom krivku máličko upravíme (niektoré jej body posunieme o trochu vyššie, iné trochu nižšie v zmysle osy y). Znova spustíme po krivke guľičku a znova odmeriame čas. Ak bol druhý nameraný čas kratší, znamená to, že naše „modifikácie dráhy“ boli úspešné a spôsob, ktorým sme ich realizovali, bol správny. Teda sa pokúsime znova realizovať úpravy podobným smerom, čo robíme až dovtedy, kým sa čas pohybu guľičky skracuje. Potom sa môžeme naďalej pokúšať modifikovať dráhu guľičky iným spôsobom, až nakoniec dospejeme do štádia, že akákoľvek ďalšia modifikácia dráhy by znamenala predĺženie doby putovania guľičky. Vtedy môžeme prehlásiť, že sme našli trajektóriu, ktorá rieši zadanie úlohy brachistochrony.

Podme sa teraz na to pozrieť z matematickejšieho hľadiska a vysvetliť si, ako nám matematika pomôže túto nekonečnú postupnosť naťahovaní špagátiku medzi dvoma bodmi zjednodušiť. Drobné zmeny v tvare dráhy guľičky sa dajú vyjadriť, ako už bolo spomenuté, tak, že k súčasnému tvaru špagátiku (reprezentovanému nejakou funkciou $y(x)$) prirátame nejakú „malú“ funkciu $h(x)$. Malú v zmysle, že sa na skoro celom nami uvažovanom intervale veľmi málo líši od nuly. Potom sčítaním $h(x)$ a $y(x)$ dostaneme funkciu, ktorá sa bude len veľmi málo líšiť od $y(x)$. Tieto drobné zmeny funkcie nazývame *variácie* funkcie, z čoho aj pochádza názov variačný počet.

Ak sa ďalej pozrieme na výslednú funkciu, ktorá v našom príklade minimalizovala dobu pohybu guľičky, zistíme, že ak k nej pričítame akúkoľvek malú funkciu, doba pohybu guľičky sa predĺži. To si vieme predstaviť aj tak, že zo všetkých okolitých kriviek je táto najoptimálnejšia pre riešenie našej úlohy. Nejakým spôsobom je „najminimálnejšia“ alebo „najextremálnejšia“. A práve na takomto princípe funguje variačný počet. Fyzikálne problémy sú častokrát formulované podmienkou

extremály.¹¹ My túto extrémálu nájdeme podobne ako pri hľadani extrémov funkcií. Položíme Gateaux deriváciu funkcionálu rovnú nule a nájdeme takú funkciu, ktorá tento zderivovaný funkcionál nuluje. Prečo je to tak si hovoriť nebudeme, ale dá sa to povšimnúť z analógie, ktorú som načrtol vyššie. Minimum funkcie je taký bod, že ak sa pohnem ľubovoľným smerom, hodnota tejto funkcie bude stále vyššia. *Minimizér* funkcionálu je taká funkcia, že akákoľvek jej malá zmena (kde znova opakujem, že túto zmenu si vieme najlepšie predstaviť ako natiahnutie danej krivky nejakým smerom) spôsobí to, že náš funkcionál jej priradí vyššiu hodnotu ako tej nezmenenej/nevariovej funkcii.

Dúfam, že teraz máte lepšiu predstavu o tom, ako variačný počet funguje. Vrhne sa teda k ďalšej časti. Vieme už, že ak je nejaká funkcia *minimizér*, príp. *maximizér* (význam tohoto slova asi nie je potrebné vysvetľovať) funkcionálu, tak je pre túto funkciu Gateaux derivácia nášho funkcionálu nulová. Teraz si ešte ukážeme, ako sa táto derivácia počíta jednoducho, len pomocou znalostí derivácií funkcií jednej premennej.

Ako sme už povedali mnohokrát, funkcionál je zobrazenie z množiny funkcií do reálnych čísel. Zadefinujem si pomocné zobrazenie pre konkrétny funkcionál S , ktoré bude funkcia $g(t)$ z reálnych čísel do reálnych čísel, a to čisto pre účely výpočtu derivácie Gateaux tohto konkrétneho funkcionálu S

$$g(t) = S(y(x) + t \cdot h(x)).$$

Vidíme, že sa skutočne jedná o funkciu reálnej premennej t , ktorá nám na výstupe vráti reálne číslo. Poprosím usilovných čitateľov seriálu, aby si za úlohu vyskúšali, že derivácia tejto funkcie v nule

$$\frac{dg}{dt}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t}$$

je rovná Gateaux derivácii funkcionálu v smere¹² $h(x)$. Poďme si toto všetko ukázať na nejakom konkrétnom príklade.

Príklad: Hľadanie najkratšej spojnice dvoch bodov

Využijeme príklad z úvodu seriálu: Nájdite najkratšiu možnú krivku spájajúcu bod $[0, 0]$ a bod $[1, 1]$.

Kľúčové pre riešenie tohto príkladu je poznať funkcionál, ktorý nám určí dĺžku nejakej krivky vyjadrenej pomocou funkcie $y(x)$. Odvodiť tvar tohto funkcionálu

¹¹Minimalizujeme energiu, svetlo sa pohybuje tak, aby mu dráha v priestore trvala čo najkratší čas (tzv. Fermatov princíp), kvapka vody má gulový tvar, pretože pri ňom má najnižšiu energiu. Na druhej strane, termodynamické deje sa dejú tak, aby sa maximalizovala entropia. To udávam ako veľmi dôležitý príklad, pretože mnoho ľudí to zjednodušuje tak, že príroda sa snaží veci minimalizovať. Toto ale nie je pravda, ako vidíme na príklade entropie. Pravdivý je teda skutočne princíp extremalizácie prírodných dejov, čo si ukážeme onedlho v tomto seriáli.

¹²Pojem v smere $h(x)$ si môžete predstaviť tak, že ak Gateaux derivácia nejakého funkcionálu nadobúda istú hodnotu, napríklad nulu, tak extrémála je to vtedy, ak nadobúda nulu pre všetky funkcie $h(x)$. Jednoduchšie povedané, ak je nejaká derivácia nulová, znamená to, že daný zderivovaný funkcionál je nula bez ohľadu na to, ako zvolím funkciu $h(x)$. To je niečo, čo si o chvíľku ukážeme na funkcionále v praxi.

je jednoduché. Dá sa to pri správne nakreslenom obrázku za použitia Pythagorovej vety.

Bonus Na tomto mieste vyhlasujeme bonusovú úlohu, a tou je odvodiť tvar nasledujúceho funkcionálu

$$l_y = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

kde l_y je dĺžka krivky vyjadrenej pomocou funkcie $y(x)$ ležiacej v intervale $[a, b]$ na osi x .

Potom vieme dĺžku krivky, ktorú hľadáme, zapísať ako

$$l_y = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Teraz chceme spočítať jej Gateaux deriváciu a položiť ju rovnú nule, aby sme našli extrémálne hodnoty dĺžky kriviek spájajúce body $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Zapíšeme si našu funkciu $g(t)$ a vypočítame jej deriváciu

$$\frac{dg}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(y + t \cdot h)\right)^2} dx \Big|_{t=0}.$$

Pre zjednodušenie zápisu si označíme pre ľubovoľnú funkciu $a(x)$ jej deriváciu podľa x ako $\dot{a}(x) = \dot{a}$. Potom sa nám výraz vizuálne zjednoduší. Zároveň rozpišeme dvojčlen umocnený na druhú, čím dostaneme

$$\frac{dg}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{y}^2 + 2t\dot{h}\dot{y} + t^2\dot{h}^2} dx \Big|_{t=0}.$$

Teraz zameníme integrál a deriváciu podľa¹³ t . Derivovaním výrazu pod integrálom dostaneme

$$\frac{dg}{dt}(0) = \int_0^1 \frac{\dot{h}\dot{y} + t\dot{h}^2}{\sqrt{1 + \dot{y}^2 + 2t\dot{h}\dot{y} + t^2\dot{h}^2}} dx \Big|_{t=0}.$$

Teraz nám stačí dosadiť za $t = 0$ a dostaneme

$$\frac{dg}{dt}(0) = \int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \dot{h} dx.$$

Extremála je taká funkcia, že pre ľubovoľnú funkciu $h(x)$ splňajúcu podmienky, ktoré sme spomínali vyššie, nuluje daný integrál. My máme pod funkcionálom ale niečo vynásobené deriváciou funkcie $h(x)$. Tejto derivácie sa zbavíme pomocou

¹³Z matematického hľadiska nie je jasné, či ak zameníme poradie derivácie a integrálu, tak dostaneme ten istý výsledok. Rozhodne totižto existujú funkcie, pre ktoré to neplatí. Jedná sa však skôr o výnimky a z fyzikálneho hľadiska, kde uvažujeme spojité a diferencovateľné (derivovateľné) funkcie, môžeme vymeniť poradie týchto dvoch operácií. Rovnako tak aj poradie limity a derivácie alebo limity a integrálu a podobne.

per-partes. Čitateľovi, ktorému nebude nasledujúci krok hneď jasný, odporúčam si to vedľa na papieri spočítat pomalšie

$$\int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} h dx = \left[h \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right) h dx.$$

My vieme, že funkcia $h(x)$ – variácia funkcie $y(x)$ – mení tvar funkcie $y(x)$ ale tak, aby krivka popísaná súčtom týchto funkcií spájala tie isté body ako spája samotná krivka $y(x)$. Z toho vieme, že funkcia $h(x)$ musí vždy spĺňať podmienku, že v hraných bodoch intervalu je nulová. Ak budeme vyčíslovať „preintegrovaný“ člen v per-partes, ktoré sme práve urobili, tak hodnoty v hraných bodoch budú nulové, pretože je tam nejaká funkcia prenasobená funkciou $h(x)$. Chceme teda riešiť rovnicu

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right) h dx = 0.$$

Hľadáme funkciu, pre ktorú je Gateaux derivácia funkcionálu nulová. Ako sme už naznačili vyššie, keďže táto rovnosť má platiť pre ľubovoľnú funkciu $h(x)$, musí platiť, že zvyšok pod integrálom je nulový (pre každé x). Potom máme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} \right) &= 0, \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} &= \text{konst} = c. \end{aligned}$$

Riešiť túto rovnicu je možné metódou separácie premenných. Môžeme si tiež všimnúť, že ju možno upraviť do tvaru $\dot{y} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$, teda \dot{y} je konštantné. Pre tých, ktorí nevedia riešiť diferenciálne rovnice, pomôže univerzálny nástroj Wolfram Alpha. Ako riešenie dostanete rovnicu všeobecnej priamky

$$y = ax + b.$$

Keďže v našom prípade sme chceli najkratšiu cestu z bodu $[0, 0]$ do $[1, 1]$, teda $y(0) = 0$ a $y(1) = 1$, vieme rýchlo dopočítať, že nami hľadaná extrémála je $y = x$.

Hamiltonov variačný princíp

V predchádzajúcej časti sme si ukázali, ako funguje variačný počet. V tejto časti sa vrátíme naspäť k fyzike. Bude to ale skôr rozprávacía časť o samotnej podstate toho, ako funguje svet (alebo ako sa nám na základe doterajších pozorovaní zdá, že funguje). Celé toto rozprávanie bude ale založené na pochopení toho, čo to je a aký význam má variačný počet. Preto ak si nie ste istí, či ste predchádzajúcu časť pochopili dostatočne správne, tak odporúčam si ju ešte raz prejsť predtým, ako sa vrhneme k fyzike.

Hamiltonov variačný princíp nám, zjednodušene, vraví o tom, že všetko, čo príroda robí, robí tak, aby pritom musela vynaložiť čo najmenej „námaľy“. V potenciálovom poli sa rozmiestnia hmotné objekty tak, aby mali čo najmenší potenciál. Svetlo sa medzi dvoma bodmi šíri vždy tak, aby mu to trvalo najkratší (alebo najdlhší) možný čas. Telesá si pri vzájomnom kontakte začínajú vymieňať teplo, až kým nedosiahnu tepelnú rovnováhu, a to preto, aby dosiahli najvyššiu možnú entropiu. Najvyššia entropia potom zároveň ale bude zodpovedať aj najnižšej možnej celkovej vnútornej energii telies, ktoré si vymieňali teplo. Všetky tieto fyzikálne zákonitosti má väčšina ľudí odpozorované a my si to teraz matematicky popíšeme. Ako sa dá vôbec vyjadriť „úsilie“ prírody veci minimalizovať?

Vo fyzike je definovaná veličina *akcia*. Ako už z názvu vyplýva, jedná sa akoby o množstvo „akcie“, ktoré bolo pri nejakom deji vykonané. Akcia S je definovaná ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t)) dt,$$

kde L je naša stará známa Lagrangeova funkcia. Pripomeňme si značenie $q(t)$ je zovšeobecnená súradnica lagrangiánu a jej derivácia je zovšeobecnená rýchlosť v smere tejto súradnice. Lagrangián môže samozrejme závisieť od viacerých súradníc.

Hamiltonov variačný princíp, alebo aj princíp najmenej akcie, hovorí o tom, že každý fyzikálny dej medzi časovými bodmi t_1 a t_2 sa deje tak, aby bola akcia minimálna. Keď formulujeme zákon o nejakej funkcii $f(x)$, ktorý spočíva v tom, že táto funkcia nadobúda za istých podmienok svojho minima, znamená to, že za tých daných podmienok je derivácia tejto funkcie nulová. Rovnako, ak chceme o funkcii definovanej pomocou integrálu (napríklad našej akcii) povedať, že nadobúda svoje minimum, povieme, že je to vtedy, keď je jej Gateaux derivácia nulová. Spomínali sme si, že o Gateaux derivácii sa hovorí aj ako o variácii nejakej funkcie pod integrálom, z čoho pochádza asi najznámejšia slovná formulácia tohto princípu, a síce: *Variácia akcie je nula*. (Znovu rozumej Gateaux derivácia funkcionálu nazvaného „akcia“ je nulová.) Z tejto formulácie je samozrejme odvodený aj názov „Hamiltonov variačný princíp“.

Variačné princípy sú vo fyzike veľmi obľúbené, lebo skúsenému fyzikovi dávajú pri znalosti lagrangiánu nejakého systému častokrát rýchly nástroj, ako odvodiť isté všeobecné závery. Dá sa napríklad jednoducho ukázať, že Lagrangeove rovnice druhého druhu plynú z princípu najmenej akcie, čo si my na úplný záver celého seriálu ukážeme.

Odvodenie Lagrangeových rovníc z Hamiltonovho variačného princípu

Ako z názvu a odseku predtým vyplýva, budeme chcieť z nejakého všeobecného lagrangiánu odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice. Ako uvidíme, bude sa jednať o matematicky omnoho korektnejšie a aj prirodzenejšie odvodenie Lagrangeových rovníc. Majme teda náš funkcionál, ktorého Gateaux deriváciu chceme mať nulovú

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}(t), q(t)) dt.$$

Parameter t pri Gateaux derivácii si preznačíme na s

$$0 = \frac{d}{ds} \int_{t_1}^{t_2} L \left(\frac{d}{dt} (q(t) + s \cdot h(t)), q(t) + s \cdot h(t) \right) dt = 0.$$

Prederivujeme podľa s (Lagrangeovu funkciu L derivujeme ako zloženú funkciu podľa retiazkového pravidla) a dosadíme za $s = 0$

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot h(x) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{h}(x) \right) dt.$$

Prvý člen je presne v tvare, v akom ho potrebujeme. Teda v tvare nejakej funkcie $\dot{q}(t)$ a $q(t)$ krát nejaká naša funkcia $h(x)$, ktorá je nulová na hranici nášho uvažovaného intervalu. Druhý člen ale neobsahuje funkciu $h(x)$, ale jej deriváciu. Správime preto znova per-partes, pričom preintegrovany člen znova zmizne, nakoľko bude obsahovať aj funkciu $h(x)$, ktorá je nulová na okrajoch intervalu, v ktorých sa celý člen vyčísluje. Usilovným čitateľom, tentokrát už naposledy, odporúčam si to prepísať a celé spočítať vedľa na papieri. Potom dostaneme

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \cdot h(x) dt.$$

My už ale vieme, že ak má byť pre všetky nami uvažované funkcie $h(x)$ integrál nulový, musí byť nulový zvyšok pod integrálom. Z toho hneď plynú Lagrangeove rovnice v tvare, ako ich poznáme

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right).$$

Záver

Po tom, ako sme v minulom seriáli ukončili kapitolu Lagrangeových rovníc, sme v tomto diele predstavili ešte mierne odlišný pohľad na mechaniku a na odvodenie Lagrangeových rovníc. Tento pohľad si vyžadoval hlbšie matematické znalosti, ktoré sme sa pokúsili čitateľovi sprostredkovať v natoľko stráviteľnej podobe, aby dokázal pochopiť záverečné odvodenie v seriáli. Toto odvodenie má totiž hlboký význam, nakoľko nám ukazuje, že tá „najelegantnejšia formulácia mechaniky“ vlastne nie je výsledkom nejakého vymysleného formalizmu, ktorý nemá reálny význam, ale je výsledkom princípu extremalizácie akcie, čo je... jednoducho povedané. Autor seriálu pevne dúfa, že to na vás spravilo rovnaký dojem ako naňho, keď sa to dozvedel.

Seriálové úlohy, ako zrejme mnohí z vás už vedia, sú zamerané na opakovanie toho, čo bolo spomenuté v predchádzajúcich častiach seriálu. To dáva možnosť precvičenia všetkého doteraz spomenutého. Zároveň sa vám chcem poďakovať za váš záujem a za vaše spätné väzby k seriálu a rád príjmem aj ďalšie, záverečné, aj keď tie už vývoj seriálu neovplyvnia. Samozrejme, nezabudnite riešiť FYKOS aj

další rok a s mnohými z vás sa určite uvidíme na sústrezení, kde môžeme niečo, ak by to z doterajšieho výkladu nebolo jasné, prekonzultovať.

Zároveň by som chcel nazáver poďakovať profesorovi Jiřímu Podolskému, nielen za vynikajúce skriptá ktoré ma inšpirovali pri vytvorení seriálu a z ktorých som čerpal mnoho odvodení v tomto seriály, ale aj za to, že odprednášal tento predmet z môjho pohľadu tak kvalitne, že ma oslovil a rozhodol som sa o časti tohto predmetu napísať seriál, ktorý ste práve dočítali.

Ďalšie poďakovanie patrí technickému tímu FYKOSu za všetky korektúry, najmä jazykové korektúry, ktoré trpezlivo aj keď s frflaním robili.

Na úplný záver ďakujem vám, riešiteľom, za riešenie seriálových úloh, za tých pár pozitívnych ohlasov a pochvál, ktoré človeka veľmi potešia. Síce len malé množstvo z vás odovzdalo aj poslednú sériu, to sa ale dá pochopiť, nakoľko to bolo náročné najmä z matematického hľadiska. Tým čo to celé zvládli úprimne gratulujem. Riešte ďalej FYKOS a študujte fyziku, lebo to má zmysel!

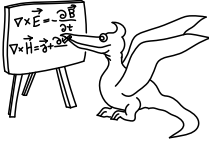
Jakub Jambrich

Úloha VI.S . . . opakovacia

10 bodů

1. Majme klasické matematické kyvadlo, ktoré vychýlime zo stabilnej polohy o 120° . Dĺžka závesu kyvadla je po celý čas konštantá, záves je nehmotný a na jeho konci je upevnený hmotný bod s hmotnosťou m . Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre kyvadlo a pomocou nich určte, kedy je sila pôsobiaca na vlákno kyvadla najväčšia.
2. Vezmime klasické kyvadlo, rovnaké ako v prvej časti úlohy. K jeho hmotnému bodu pripevníme ďalšie kyvadlo s rovnakou zavesenou hmotnosťou ako aj rovnakou dĺžkou závesu. Zostavte lagrangián pre túto situáciu a určte aj Lagrangeove pohybové rovnice (2. druhu).
3. Majme hmotný bod, ktorý je schopný sa voľne pohybovať v smere osy x . Ďalej majme matematické kyvadlo, ktorého záves je upevnený v tomto bode. Nájďte lagrangián tejto sústavy a pomocou Hamiltonovej variačnej metódy nájďte príslušné pohybové rovnice tak, že postupne budete Gateauxove derivácie podľa všetkých zovšeobecnených premenných pokladať rovné nule. Celkovo tak každá nulová Gateauxova derivácia dá jednu pohybovú rovnicu. Porovnajte, či ste touto metódou dostali rovnaké pohybové rovnice ako pri použití štandardného odvodenia Lagrangeových rovníc z lagrangiánu.

(řešení str. 179)



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I.S ... rozjezd

Předtím, než se začneme věnovat umění analytické mechaniky, je vhodné si zopakovat klasickou mechaniku na následující sérii příkladů.

- Na vrcholu křišťálové koule dřepí homogenní kulička s velmi malým poloměrem. Kuličku udělíme libovolně malou rychlost a ta tak začne padat po povrchu koule. Kde se kulička odpojí od křišťálové koule? Uvažujte, že kulička neprokluzuje.
- Místo koule z předchozí úlohy máme křišťálový paraboloid, daný rovnicí $y = c - ax^2$. Opět nás zajímá, kde se kulička od paraboloidu odpojí.
- Cyklista odbočuje rychlostí v na cestu kolmou k té, po které právě jede. Zatáčku projede po části kružnice s poloměrem r . Jak moc se musí cyklista do zatáčky naklonit? Moment setrvačnosti kol bicyklu můžete zanedbat, cyklistu nahradte hmotným bodem.

Bonus Moment setrvačnosti kol nemůžete zanedbat.

- Kulička o hmotnosti m se nejdříve kutálí po povrchu křišťálové koule, potom se odpojí a začne padat volným pádem. Necht φ je úhel, o který se kulička po kouli odvalila. Zaměříme se na normálové síly, které působí na kuličku hmotnosti m v první části pohybu. Jednak je to normálová složka tíhové síly, kterou spočítáme jako

$$F_{g_n} = mg \cos \varphi,$$

jednak je to reakční síla od velké koule. Dokud se kulička neodlepí, platí, že výslednice těchto sil je rovna dostředivé síle

$$F_d = \frac{mv^2}{R},$$

kde v je rychlost kuličky a R je poloměr křišťálové koule. Zde jsme zanedbali poloměr kuličky r , v případě přesnějšího výpočtu by ve jmenovateli byl samozřejmě výraz $R + r$. Rychlost kuličky v hloubce h pod původní polohou spočítáme ze zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\frac{v^2}{r^2} = mgh,$$

kde J je moment setrvačnosti kuličky vůči ose procházející těžištěm. Opět jsme využili faktu, že $r \ll R$, a proto pro úhlovou rychlost kuličky platí $\omega = v/r$. Jelikož je kulička homogenní, můžeme použít vzorec

$$J = \frac{2}{5}mr^2.$$

Pro rychlost kuličky tak dostáváme

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}} = \sqrt{\frac{10gR(1 - \cos \varphi)}{7}},$$

kde jsme si h vyjádřili z geometrie situace jako $h = R(1 - \cos \varphi)$ (v počáteční poloze platí $\varphi = 0$).

Malá kulička se odpojí ve chvíli, kdy bude reakční síla od velké koule nulová, neboli když bude platit $F_{gn} = F_d$. Po dosazení ze vztahů výše dostaneme rovnici

$$\cos \varphi = \frac{10}{17}.$$

Kulička se tedy od křišťálové koule odpojí v hloubce

$$h = R(1 - \cos \varphi) = \frac{7}{17}R$$

pod původní polohou. Vidíme, že výsledek nezávisí na poloměru kuličky r .

- b) Budeme postupovat obdobně jako v předchozí úloze. Kulička se ale nepohybuje po kružnici, takže nemůžeme dostředivou sílu vyjádřit tak snadno. Můžeme si ale v každém bodě parabolu lokálně nahradit kružnicí. Vezmeme obecnou rovnici kružnice $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ a zkusíme jí napasovat na zadanou rovnici paraboly $y = c - ax^2$. Přitom však budeme chtít, aby se v daném bodě shodovaly nejen hodnoty obou funkcí, ale i jejich první a druhé derivace. Pro kružnici máme (v první rovnici jsme vhodně zvolili znaménko odmocniny)

$$\begin{aligned} y &= y_0 + \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= - (R^2 - (x - x_0)^2)^{-\frac{1}{2}} (x - x_0) = - \frac{x - x_0}{y - y_0}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= - \frac{(y - y_0) - (x - x_0) \frac{dy}{dx}}{(y - y_0)^2} = - \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(y - y_0)^3}. \end{aligned}$$

Pro parabolu máme o něco snazší práci a dostáváme

$$\begin{aligned} y &= c - ax^2, \\ \frac{dy}{dx} &= -2ax, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -2a. \end{aligned}$$

Máme tak soustavu tří rovnic pro tři neznámé R, x_0, y_0 , ze kterých vyjádříme

$$R = \frac{(1 + 4a^2x^2)^{3/2}}{2a} = \frac{(1 + 4a(c - y))^{3/2}}{2a} = \frac{(1 + 4ah)^{3/2}}{2a},$$

kde jsme zavedli hloubku pod původní polohou $h = c - y$. Pro dostředivou sílu platí

$$F_d = \frac{mv^2}{R},$$

kde rychlost opět spočítáme ze zákona zachování energie jako

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

Dále musíme spočítat normálovou složku tíhové síly. Platí pro ni

$$F_{g_n} = F_g \cos \varphi,$$

kde $-\operatorname{tg} \varphi$ je směrnice tečny k parabole. Odtud dostaneme

$$\operatorname{tg} \varphi = 2ax.$$

Po pár jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\cos \varphi = (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4a^2 x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4a(c - y))^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4ah)^{-\frac{1}{2}}.$$

Danou sílu tedy můžeme vyjádřit jako

$$F_{g_n} = mg(1 + 4ah)^{-\frac{1}{2}}.$$

Z rovnosti $F_d = F_{g_n}$, po dosazení ze vztahů výše, plyne

$$8ah + 7 = 0,$$

což nemá pro $a, h \geq 0$ řešení.

To znamená, že se kulička od paraboloidu nikdy neodlepí. K tomuto výsledku jsme mohli dojít i jednodušší úvahou: Pro vodorovný vrh určitou rychlostí se kulička bude pohybovat právě po dané parabole. V našem případě je ale počáteční energie nulová a navíc se část energie „ztrácí“ do valivého pohybu. Proto kulička nikdy během valení nebude mít dostatečnou energii na to, aby se od paraboloidu odlepila. Zadaná úloha tedy už od začátku neměla žádný fyzikální smysl.

- c) Popíšme situaci z pohledu cyklisty. Působí na něj tři síly – tíhová, odstředivá a reakce podložky. Jejich velikosti jsou

$$F_g = mg,$$

$$F_o = \frac{mv^2}{r}.$$

Tíhová síla působí svisle, odstředivá vodorovně. Cyklista se musí naklonit tak, aby jeho spojnice s místem, ve kterém se kolo dotýká země, byla rovnoběžná s výslednicí prvních dvou sil. Potom bude moment sil, co které na něj působí, nulový. Pro odklon cyklisty od svislého směru tak platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_o}{F_g},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{v^2}{gr}.$$

Bonus

Nyní je situace o něco složitější (viz. obrázek 31). Kola mají nějaký nenulový moment setrvačnosti, takže při pohybu vykazují moment hybnosti L . Jeho směr je samozřejmě kolmý na rovinu otáčení kol, takže je od země nakloněn o úhel φ . Vektor momentu hybnosti musí rotovat společně s otáčejícím se kolem. Svislá složka je stále stejně velká, zajímá nás tedy vodorovná složka, pro kterou platí

$$L_x = L \cos \varphi.$$

Za čas dt se cyklista pootočí o úhel $d\alpha = \omega dt$, kde pro úhlovou rychlost platí

$$\omega = \frac{v}{r}.$$

Tomu odpovídá přičtení vektoru změny momentu hybnosti o velikosti

$$|d\mathbf{L}| = L_x d\alpha = L_x \omega dt.$$

Z toho už můžeme spočítat velikost momentu síly, kterým na bicykl musíme působit, jako

$$|\mathbf{M}| = \left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right| = L_x \omega = \frac{Lv}{r} \cos \varphi.$$

Nechť se hmotný bod, kterým jsme nahradili cyklistu, nachází ve výšce h nad zemí (když cyklista jede rovně a tudíž není nakloněný). Potom tíhová a odstředivá síla vytváří moment (vzhledem k bodu dotyku kola a podložky ve směru jízdy)

$$M = M_g + M_o = F_g h \sin \varphi - F_o h \cos \varphi = mgh \sin \varphi - \frac{mv^2 h}{r} \cos \varphi.$$

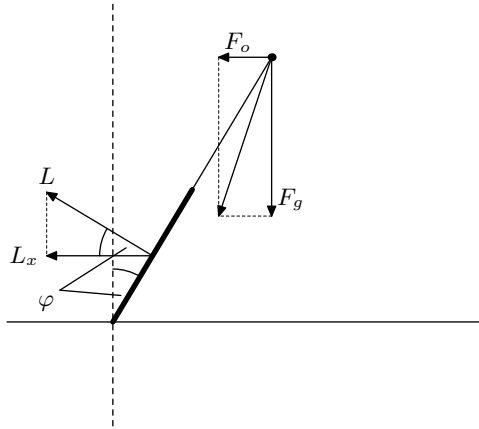
Proti těmto silám samozřejmě působí reakce podložky, která má stejnou velikost a opačný směr. Tato síla však působí v bodě dotyku kola a silnice, vůči kterému moment počítáme. Moment síly, kterým na kolo působí, tak bude nulový. Výslednice všech sil, působících na kolo, je tak stejně jako v předchozím případě nulová, ale výsledný moment nulový není. Máme tak rovnici

$$\frac{Lv}{r} \cos \varphi = mgh \sin \varphi - \frac{mv^2 h}{r} \cos \varphi,$$

ze které si už snadno vyjádříme hledaný úhel náklonu cyklisty v zatáčce

$$\varphi = \arctg \left(\frac{v^2}{gr} + \frac{Lv}{mghr} \right).$$

Vidíme, že dosazením $L = 0$ dostaneme stejný výsledek jako v základní části úlohy.



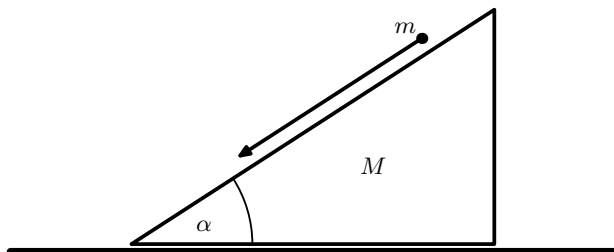
Obr. 31: Nákres situace z pohledu cyklisty.

Úloha II.S ... vzájemná

- Majme činku tvorenú dvoma hmotnými bodmi s hmotnosťami m a M , ktoré sú spojené nehmotnou, ale veľmi pevnou tyčou. Táto činka padá voľným pádom. Napíšte väzbovú podmienku a zároveň aj Lagrangeove rovnice prvého druhu pre tento objekt.
- Majme vodorovnú položku, na ktorej je umiestnený pravouhlý trojboký hranol s hmotnosťou M ako na obrázku 32. Po strane tohto hranolu, ktorá s podložkou zvierá uhol α , sa sklzáva hmotný bod s hmotnosťou m . V celom príklade neuvažujte trenie.
 - Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu.
 - Ukážte, že celková hybnosť sústavy v smere osi x je pri nulovej počiatočnej rýchlosti hmotného bodu nulová.
 - Postupným riešením sústavy rovníc určte veľkosti rýchlostí hmotného bodu a hranolu v závislosti od času.
 - Určte pomer veľkostí týchto rýchlostí.
- Majme kyvadlo zavesené na závese. Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre túto situáciu a ukážte, že pre ňu platí zákon zachovania energie.
- Činka pozostáva z dvoch hmotných bodov. Ak uvažujeme, že sa pohybuje v trojrozmernom priestore, bude sada Lagrangeových rovníc obsahovať dohromady 6 rovníc – tri rovnice pre oba konce činky. Nech súradnice hmotného bodu s hmotnosťou M sú X, Y, Z a súradnice hmotného bodu s hmotnosťou m sú x, y, z . Ďalej máme jednu väzbovú podmienku, ktorá vraví o tom, že vzdialenosť koncov činky je vždy rovnaká. Vzdialenosť l bodov m a M spočítame ako

$$l = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}.$$

Keďže ale vieme, že väzbovú podmienku budeme derivovať, zapíšeme si ju



Obr. 32: Naklonená rovina

jednoduchšie

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - l^2 = 0.$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme zvoliť smer gravitačnej sily v smere osy z . Potom budú Lagrangeove rovnice pre túto sústavu vyzerať

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda(x - X), \\ m\ddot{y} &= 2\lambda(y - Y), \\ m\ddot{z} &= 2\lambda(z - Z) + mg, \\ M\ddot{X} &= -2\lambda(x - X), \\ M\ddot{Y} &= -2\lambda(y - Y), \\ M\ddot{Z} &= -2\lambda(z - Z) + Mg. \end{aligned}$$

2. V tomto príklade je najdôležitejšie si správne predstaviť celú situáciu, potom už za nás všetku ťažkú prácu spravia pravidlá zavedené v tomto formalizme.

- Prezačiatok chceme zostaviť Lagrangeove rovnice prvého druhu. Keďže úlohu budeme riešiť dvojrozmerné, budeme mať 4 rovnice. Už na prvý pohľad ale vidíme, že kváder sa nebude pohybovať v smere osy y , takže sústava pohybových rovníc sa nám zredukuje na 3 rovnice. Ako prvé musíme nájsť správnu väzbu. Hmotný bod sa vzhľadom ku kváдру bude pohybovať po priamke so sklonom α . Bude sa teda jednať o lineárnu funkciu so smernicou $\operatorname{tg} \alpha$. Za premennú tejto funkcie musíme ale položiť nie x -ovú súradnicu hmotného bodu, ale túto súradnicu musíme posunúť ešte o súradnicu bodu, kde sa hrana kvádra dotýka podložky. Keďže kváder bude vykonávať len posuvný pohyb, môžeme bez ujmy na všeobecnosti umiestniť všetku jeho hmotnosť práve do tohto bodu, čo bude mať pre nás veľkú výhodu. Potom budem môcť túto súradnicu stotožniť s x -ovou súradnicou kvádra ako celku. Väzbová podmienka bude teda vyzerať

$$y_1 - (x_1 - x_2) \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

kde súradnice s indexom 1 sú súradnice hmotného bodu a súradnice s indexom 2 sú súradnice kvádra. Ďalej predpokladajme, že smer gravitačnej sily je totožný so smerom osy $-y$. Potom dostaneme Lagrangeove rovnice v tvare

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\lambda \operatorname{tg} \alpha, \\ m\dot{y}_1 &= \lambda - mg, \\ M\ddot{x}_1 &= \lambda \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

- Toto je úloha, ktorá vyžaduje trochu zamyslenia. Dôležité je uvedomiť si, že sila je časová zmena hybnosti. Z Lagrangeových rovníc je rýchlo vidieť, aká je výsledná sila pôsobiaca v smere osi x . Sčítaním prvej a tretej rovnice dostaneme

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 = 0.$$

Ak je sila pôsobiaca v smere osi x nulová, znamená to, že časová zmena hybnosti v tomto smere je nulová, teda že hybnosť v smere x je konštantná. Ak je konštantná, je teda rovnaká ako na začiatku. Na začiatku bola ale celá sústava v pokoji, keďže zo zadania vieme, že počiatočná rýchlosť je nulová. A teda aj celková hybnosť v smere x je po celý čas nulová.

- Pri riešení Lagrangeových rovníc použijeme prvý trik so seriálu, a dvakrát zderivujeme väzbu

$$\dot{y}_1 - \dot{x}_1 \operatorname{tg} \alpha + \dot{x}_2 \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Ďalej vyjadríme postupne všetky druhé derivácie z Lagrangeových rovníc a dosadíme ich do dvakrát zderivovanej väzbovej podmienky. Z tejto rovnice vyjadríme

$$\lambda = \frac{mMg}{M + M \operatorname{tg}^2 \alpha + m \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Nás až tak nezaujíma tvar λ , podstatné je skôr to, že je to konštanta. Lagrangeove pohybové rovnice teda nadobúdajú jednoduchý tvar typu hmotnosť krát zrýchlenie je nejaká konštanta. Preintegrovať takéto rovnice nebude preto vôbec problém. Dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{m} t, \\ \dot{y}_1 &= \left(\frac{\lambda}{m} - g \right) t, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\lambda \operatorname{tg} \alpha}{M} t. \end{aligned}$$

Integračné konštanty nie sú uvedené, nakoľko majú význam počiatočných rýchlostí a my vieme, že tie boli pre oba predmety nulové. Rýchlosť

hmotného bodu bude preto odmocnina zo súčtu kvadrátov zložiek jeho rýchlosti, čo je po dosadení

$$|\mathbf{v}_1| = t \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - g \left(\frac{2\lambda}{m} - g \right)}.$$

Rýchlosť hranola má len jednu zložku, teda jej veľkosť sa rovná tejto zložke.

- Pomer veľkostí rýchlostí (napríklad rýchlosť hmotného bodu ku rýchlosti hranola) je potom

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M}{\lambda \operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\frac{\lambda^2}{m^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - g \left(\frac{2\lambda}{m} - g \right)},$$

čo po dosadení za λ a úpravách dáva

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{M}{m} \sqrt{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

3. Úlohu budeme riešiť v dvoch rozmeroch. Pre kyvadlo platí väzbová rovnica

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

kde x, y sú súradnice závažia kyvadla s hmotnosťou m a l je dĺžka závesu kyvadla. Gravitačná sila nech má opäť smer $-y$. Potom budú Lagrangeove rovnice

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= 2\lambda y - mg. \end{aligned}$$

Najjednoduchšie ako ukázať, že kyvadlo spĺňa zákon zachovania energie, je použiť rovnaký trik ako v seriáli. Prenásobíme teda prvú rovnicu \dot{x} a druhú \dot{y} . Následne rovnice sčítame

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) = -mg\dot{y} + 2\lambda(x\dot{x} + y\dot{y}).$$

Toto si môžeme upraviť ako

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg \frac{dy}{dt} = \lambda \frac{d}{dt} (x^2 + y^2).$$

Z väzbovej podmienky vieme, že $x^2 + y^2 = l^2$, čo je vždy konštanta. Časová derivácia konštanty je nula. Rovnica potom vyzerá

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg \frac{dy}{dt} = 0.$$

Po preintegrovaní dostaneme

$$\frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = \text{konst},$$

čo je presne formulácia zákona zachovania energie.

Úloha III.S . . . zobecněná

1. Mějme vodorovnou desku, ve které je malá dírka. Přes tuto díрку je provlečený provázek o délce l , na jehož spodním konci je zavěšeno závaží o hmotnosti M . Toto závaží lze považovat za hmotný bod. Na druhém konci provázku na rovné desce je druhý hmotný bod (kulička) o hmotnosti m . Provázek mezi nimi je napnutý díky závaží o hmotnosti M . Celou soustavu držíme v klidu tak, že část provázku pod deskou je ve svislém směru. Poté druhému hmotnému bodu, kuličce, udělíme rychlost v ve vodorovném směru kolmém na provázek ve chvíli, kdy soustavu uvolníme. V tomto příkladu neuvažujte žádné tření. Zvolte vhodné souřadnice a sestavte Lagrangeovu funkci pro tuto soustavu.
2. Mějme železnou tyč ohnutou do tvaru paraboly tak, že pokud v kartézské soustavě působí tíhové zrychlení v záporném směru osy y , pak tyč má stejný tvar jako funkce $y = x^2$. Po tyči se může volně pohybovat hmotný bod o hmotnosti M , ke kterému je pevnou nehmotnou tyčkou o délce l připevněno závaží o hmotnosti m . Takto jsme vytvořili kyvadlo se závěsem klouzajícím podél ohnuté tyče. Konstrukce dovoluje pohyb celé soustavy pouze v rovině paraboly. Určete vhodné zobecněné souřadnice a najděte Lagrangeovu funkci této soustavy.
3. Mějme přímkou nakloněnou pod úhlem α vzhledem k vodorovné rovině, po které se pohybuje bez tření hmotný bod o hmotnosti m . Najděte vhodné zobecněné souřadnice této soustavy a sestavte Lagrangeovu funkci. Poté sestavte i Lagrangeovy rovnice, dvakrát je zintegrujte, a tak najděte řešení. Zkontrolujte si, zda vaše řešení vychází stejně, jako řešení, které byste získali středoškolskou metodou výpočtu. Při integraci nezapomeňte na integrační konstanty a vysvětlete jejich význam. Jaké budou jejich hodnoty, pokud se bod spustí z klidu z výšky h ?

1. Nazačiatok je dôležité určiť, koľko stupňov voľnosti má daná úloha, teda koľko zovšeobecnených súradníc budeme potrebovať na jej popis. Všimneme si, že guľička, pohybujúca sa po doske, má dva stupne voľnosti. Môže rotovať okolo dierky, cez ktorú je prevlečená niť, zároveň sa môže pohybovať v smere priamo ďalej alebo bližšie od dierky, nakoľko špagát sa cez dierku tiež pohybuje bez trenia.

Potom je tu závažie, ktoré tiež môžeme reprezentovať ako hmotný bod. Ten má ale len jeden stupeň voľnosti. Môže sa hýbať hore a dole, inak povedané, ak zvolíme osy x , y ležiace v rovine, tak sa závažie môže hýbať iba pozdĺž osi z (merané smerom nahor). Ďalej ale máme v tejto úlohe ešte jednu väzbu, tou je povrázok, ktorý spája hmotné body, a jeho dĺžka je nemenná. Súradnica r , ktorá udáva vzdialenosť guľičky od dierky, a súradnica z , ktorá udáva výšku závažia, budú zviazané pomocou vzťahu

$$l = r - z.$$

Na konštruovanie Lagrangeovej funkcie nám teda ostávajú už len dve nezávislé súradnice, a to z a súradnica vyjadrujúca uhol, ktorý zvierá špagát

medzi dierkou a guľičkou s osou x (voľba osi x je ľubovoľná vďaka symetrii problému).

Teraz nasleduje druhý krok konštrukcie Lagrangeových rovníc, vyjadrenie kartézskych súradníc pomocou zovšeobecných súradníc¹

$$\begin{aligned}x_m &= (l + z) \cos \varphi, \\y_m &= (l + z) \sin \varphi, \\z_M &= z.\end{aligned}$$

Časovým derivovaním jednotlivých súradníc nájdeme vzťahy pre jednotlivé zložky rýchlosti v zovšeobecných súradniciach. Následne určíme vzťah pre kinetickú energiu T

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + (l + z)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2.$$

Následne určíme potenciál. V tomto prípade sa jedná o potenciálnu energiu závažia (guľička má počas celého pohybu rovnakú potenciálnu energiu, nemusíme ju preto uvažovať)

$$V = Mgz.$$

Lagrangeova funkcia pre tento problém bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + (l + z)^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}M\dot{z}^2 - Mgz.$$

- Znova si najprv určíme zovšeobecnené súradnice. Keďže úlohu riešime ako rovinný problém a vieme, že trajektória bodu M je zadaná ako explicitná funkcia (konkrétne $y = ax^2$, kde a je nejaká konštanta, aby nám sedeli jednotky), budú jeho obe súradnice vyjadrené pomocou jedinej súradnice x . Čo sa týka zovšeobecných súradníc pre druhý bod správajúci sa ako kyvadlo, môžeme použiť súradnice, ktoré sme si ukázali v seriáli. Musíme však ale pamätať, že jeho kartézske súradnice budú nielen súradnice kývajúceho sa kyvadla, ale je nutné k nim pripočítať aj súradnice závesu kyvadla o hmotnosti M .

Vzťah medzi kartézskymi a zovšeobecnými súradnicami je teda

$$\begin{aligned}x_M &= x, \\y_M &= ax^2, \\x_m &= x + l \sin \varphi, \\y_m &= ax^2 - l \cos \varphi.\end{aligned}$$

¹Tento ako aj nasledujúce kroky nebudem zvlášť komentovať, nakoľko sa jedná o mechanické počítanie. Budem len uvádzať, čo robíme a ako vyzerá výsledok. Prečo to robíme (keby niekto nevedel), je uvedené v seriáli.

Časovým derivováním a dosazením do vztahu pro kinetickou energii dostaneme

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2} m (2l (\cos \varphi + 2ax \sin \varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) .$$

Potenciál bude potom součet potenciálních energií oboch těles, teda

$$V = Mga x^2 + mg (ax^2 - l \cos \varphi) .$$

Lagrangeova funkce bude jednoduše

$$L = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 (1 + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2} m (2l (\cos \varphi + 2ax \sin \varphi) \dot{\varphi} + l^2 \dot{\varphi}^2) - Mga x^2 - mg (ax^2 - l \cos \varphi) .$$

3. Z hlediska toho, ako zvolit' zovšeobecnené súradnice, je tento problém triviálny. Hmotný bod totižto kopíruje svojou trajektóriou lineárnu funkciu zo sklonom α . Prevod medzi kartézskymi a zovšeobecnými súradnicami bude preto

$$\begin{aligned} x_m &= x , \\ y_m &= x \operatorname{tg} \alpha . \end{aligned}$$

Čo nám dáva analogickým spôsobom ako v prvých dvoch úlohách vzťah pre kinetickú energiu

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) .$$

A takisto aj pre potenciálnu energiu

$$V = mgx \operatorname{tg} \alpha .$$

Lagrangeova funkcia bude potom samozrejme

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - mgx \operatorname{tg} \alpha .$$

Napriek tomu, že sme to v seriáli explicitne nepreriešili na príklade, bolo v ňom odvodené, ako majú Lagrangeove rovnice vyzerať, čo nám dáva návod, ako ich zostaviť, keď máme Lagrangeovu funkciu. V našom prípade najprv parciálne derivujeme L podľa \dot{x} a výsledok následne podľa času. Od toho ešte odčítame deriváciu L podľa x a celé to položíme rovné nule. Lagrangeova rovnica (bude samozrejme len jedna) má teda tvar

$$m\ddot{x} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + mg \operatorname{tg} \alpha = 0 .$$

Rovnicu upravíme

$$\ddot{x} = -\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = -g \sin \alpha \cos \alpha .$$

Tento vzťah stačí dvakrát preintegrovať, čím dostanem

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha + C_1 t + C_2,$$

kde C_1 má význam počiatočnej rýchlosti a C_2 má význam počiatočnej polohy. Ak počiatočná rýchlosť bola nulová a počiatočná výška nad zemou h , pričom sme počiatok súradnicovej sústavy položili do bodu, kde sa pretína naklonená rovina s podložkou, potom v kartézskych súradniciach pre $t = 0$ z rovnice pre y máme

$$h = x \operatorname{tg} \alpha,$$

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Kompletné riešenie tejto úlohy je

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha \cos \alpha + \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Teraz to v rýchlosti skontrolujeme so stredoškolským riešením. Rozložíme tiažovú silu v smere rovnobežnom a kolmom so šikmou rovinou. Vidíme, že na teleso pôsobí len sínusová zložka gravitačného zrýchlenia

$$a = g \sin \alpha,$$

z čoho je dráha prejdená z pokoja za čas t pri tomto konštantnom zrýchlení

$$a = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

Aby sme to ale mohli porovnať s našim výsledkom vypočítaným cez Lagranžeove rovnice, musíme to trochu upraviť. Našou zvolenou zovšeobecnou súradnicou bola x -ová súradnica telesa. Chceme teda vedieť posun telesa v x -ovom smere. Ten získame tak, že získanú dráhu prenásobíme kosínusom uhlu α . Teleso sa zároveň pohybuje v opačnom smere ako je smer osy x , preto bude tento člen záporný. Nazáver musíme ešte pripočítať x -ovú súradnicu východzieho bodu. Východzí bod je charakterizovaný výškou (y -novou súradnicou) h . Musí preto platiť

$$h = x_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Z toho jednoducho vyjadríme počiatočnú súradnicu x_0 a dosadíme do stredoškolsky získaného tvaru rovnice, čím dostaneme rovnaký výraz, ako pri výpočte skrz Lagranžeove rovnice.

Úloha IV.S . . . lagrangeovská

V závěre seriálu ste si určite všimli Lagrangián a diferenciálnu rovnicu, ktoré akoby „spadli z neba“. To nie je vôbec náhoda, veľkou časťou tejto seriálovej úlohy bude tieto dve rovnice odvodiť.

1. Ukážte, že ak máme pohyb častice v ľubovoľnom centrálnom poli, teda v poli, kde potenciál závisí len na vzdialenosti, bude sa častica zaručene pohybovať len v rovine.

Návod Zostavte Lagrangeove rovnice II. druhu pre túto situáciu, použite pri tom vhodné zovšeobecnené súradnice. Následne bez ujmy na všeobecnosti položte súradnicu $\vartheta = \pi/2$ a počiatočnú rýchlosť v smere tejto súradnice nulovú. Zamyslite sa a vysvetlite, prečo je takáto voľba v poriadku a nestratíme pri nej žiadne riešenie.

2. Zostavte Lagrangián pre hmotný bod pohybujúci sa v rovine v centrálnom poli. Mali by ste dostať ten istý, ako je uvedený v závěre seriálu. Pre tento Lagrangián následne nájdite všetky intergály pohybu a pomocou nich nájdite diferenciálnu rovnicu prvého rádu pre premennú r . Pre vašu kontrolu, mala by vám vyjsť rovnako ako na konci seriálu.
3. Zamyslite sa, ako určiť uhlovú vzdialenosť medzi dvoma bodmi na sfére, ak máte zadané ich sférické súradnice. Ukážte to napríklad pre hviezdy Betelgeuze a Sírirus, ktorých súradnice si nájdite.

Pomôcka Táto úloha sa dá jednoducho vyriešiť aj bez znalosti sférickej trigonometrie.

1. V prvej časti máme návod, ako máme postupovať, je teda rozumné sa ho držať. Najskôr si zostavíme lagrangián pre túto úlohu. Keďže sa jedná o centrálnne pole, teda pole so stredovou symetriou, využijeme ju a zavedieme zovšeobecnené sférické súradnice. Vyjadrenie kartézskych súradníc potom bude

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\z &= r \cos \vartheta.\end{aligned}$$

Označenie a význam súradníc je ako v seriáli. Následne určíme jednotlivé kartézske zložky rýchlostí postupným časovým derivovaním transformačných vzťahov pre kartézske súradnice. Dosadíme do vzťahu pre kinetickú energiu T , ktorý bude

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2).$$

Keďže potenciál V závisí len na vzdialenosti, bude funkciou len zovšeobecnenej súradnice r . Lagrangián bude potom vyzerat

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Teraz zostavíme sústavu Lagrangeovych rovníc. Keďže lagrangián nezávisí explicitne na φ , zapíšeme poslednú rovnicu rovno v preintegrovanom tvare

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - m\dot{r}\dot{\vartheta}^2 - mr\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} &= 0, \\ 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} + mr^2\ddot{\vartheta} - mr^2\sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 &= 0, \\ mr^2\sin^2\vartheta\dot{\varphi} &= C_1. \end{aligned}$$

Chceme ukázať že pohyb bude rovinný, potrebujeme preto, aby uhlová súradnica ϑ ostala konštantná počas celého deja. V nápovede je povedané, že ju máme na počiatku položiť rovnú vhodnej konštante, rovnako ako aj rýchlosť v tomto smere. Ak zvolíme $\vartheta(0) = \pi/2$ a $\dot{\vartheta}(0) = 0$, z druhej rovnice dostaneme

$$\ddot{\vartheta} = \sin\vartheta\cos\vartheta\dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{r}\dot{\vartheta}}{r} = 0.$$

Pretože je $\dot{\vartheta}$ nulová, nebude sa v ďalšom okamžiku ϑ meniť. A pretože je nulové i $\ddot{\vartheta}$, nebude sa meniť ani $\dot{\vartheta}$. Obe veličiny zostanú rovnaké, a preto sa ani $\ddot{\vartheta}$ nezmení.

Teraz si poďme v krátkosti odôvodniť, prečo bola vporiadku voľba $\vartheta = \pi/2$ a $\dot{\vartheta} = 0$. Vyplýva to jednoducho z ľubovôle zavedenia kartézskych súradníc. Ak mám danú počiatočnú polohu a rýchlosť našej častice, nič mi nebráni v tom zvoliť kartézske súradnice tak, aby častica aj vektor jej rýchlosti ležali v rovine xy . Počiatok kartézskych súradníc bude teda v strede nášho centrálného pola a polohový vektor častice ako aj vektor rýchlosti častice budú ležať v rovine xy , preto bude počiatočná rýchlosť v smere z nula, a teda nulová aj v smere ϑ . Ukázali sme teda, že pohyb bude nutne rovinný.

2. Teraz zostavíme lagrangián už len pre pohyb častice v rovine. Postačí nám použiť polárne súradnice

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Lagrangián bude potom pre centrálnu pole vyzeráť

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r).$$

Vidíme, že tento lagrangián nezávisí na súradnici φ . To nám vygeneruje jeden integrál pohybu. Ďalší integrál pohybu bude zovšeobecnená energia. Použitím vzorcov na výpočty týchto integrálov pohybu zo seriálu dostaneme prvý integrál pohybu akúsi „zovšeobecnenú hybnosť“

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{konst} = l$$

a druhý integrál pohybu „zovšeobecnenú energiu“

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E.$$

Z prvního integrálu pohybu vyjádříme $\dot{\varphi}$ a dosadíme do druhého, čím dostaneme diferenciální rovnici prvního řádu pro r

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right),$$

čo je presne rovnica, ktorá bola uvedená v texte seriálu.

3. Tretí príklad bol trochu na zamyslenie a aj keď mnohý z vás jednoducho použili sférickú kosínovú vetu, nezdôraznili sme, že vyžadujeme iný postup (aj keď sme iný postup odporučili), nebudú sa samozrejme za tento postup body strhávať.

Je potrebné si uvedomiť, že aj keď hviezdy sú od nás v rôznej vzdialenosti, pri určovaní ich uhlových vzdialeností uvažujeme, akoby boli všetky na sfére s polomerom r . Dva body na sfére, ktorých poloha je daná v sférických súradniciach nech sú od seba vzdialené na sfére o uhol α . Ak by sme poznali ich kartézské súradnice, tak by sme vedeli ich uhlovú vzdialenosť jednoducho určiť zo skalárneho súčinu ich polohových vektorov

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \alpha.$$

My ale vieme spraviť jednoducho prevod medzi sférickými a kartézskymi súradnicami. Ak budeme uvažovať body na sfére (hviezdy) vo vzdialenosti r , potom využijúc vyššie uvedených vzťahov na prevod súradníc a dosadením do vzorca pre skalárny súčin dostaneme po vykrátení vzdialenosti r vzťah

$$\cos \alpha = \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2 + \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2 + \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2,$$

ktorý je vlastne kosínusová veta pre sférický trojuholník. Ak to chceme vypočítať pre hviezdy Betelgeuze a Síríus, musíme si správne premeniť jednotky rektaztenzie a deklinácie napríklad na stupne (pri rektastenzii je 1 hodina 15° , minúta a sekunda sú príslušné zlomky ako štandardne). Ďalej musíme mať na pamäti, že súradnica ϑ tak, ako je definovaná v našej verzii sférických súradníc, sa meria od pólu sféry, kdežto deklinácia sa meria od nebeského rovníka, teda ak má Síríus deklináciu $-16,7^\circ$ jeho súradnica je $\vartheta = 106,7^\circ$. Po dosadení takto upravených a premenených súradníc do vzťahu odvodeného vyššie vypočítame, že uhol medzi týmito hviezdami je približne $27,1^\circ$.

Úloha V.S ... nebesko-mechanická

1. Mějme nějaké kosmické těleso s hmotností pěti Sluncí, okolo kterého se nachází sférický symetrický homogenní oblak plynu a prachu s hmotností dvou Sluncí a s průměrem 1 ly. Oblak začne kolabovat do centrálního kosmického tělesa. Zanedbejte vzájemnou interakci částic oblaku (kromě gravitace). Určete, jak dlouho bude trvat, než celý oblak zkolabuje do centrálního tělesa. Úlohu neřešte numericky.

2. V úvodu seriálu jsme řešili diferenciální rovnici pro pohyb částic v centrálním poli, při jejímž řešení jsme použili takzvaný Binetův vzorec. Ukažte, že tento vzorec skutečně řeší zadanou diferenciální rovnici.
3. Sestavte lagrangián pro soustavu Slunce-Země-Měsíc. Předpokládejte, že Slunce je nehybné. Země i Měsíc se pohybují jak pod vlivem Slunce, tak pod vlivem sebe navzájem. Při sestavování lagrangiánu se zamyslete nad tím, jestli používáte správný počet zobecněných souřadnic.

1. Představovat si celú situáciu budeme tak, že máme nejaký malý kúsok hmoty na okraji oblaku. Tento kúsok hmoty je priťahovaný gravitáciou centrálného telesa, ako aj gravitáciou zvyšku mraku. Keďže mrak je sféricky symetrický a homogénny, má ťažisko vo svojom strede, teda v centrálnom hmotnom telese. Celý oblak vieme teda nahradiť hmotným bodom umiestneným v jeho ťažisku. (K tomuto predpokladu stačí sférická symetria, teda aj ak sa počas pohybu bude homogenita meniť, naša úvaha platí.) Z hľadiska malého kúska hmoty na okraji oblaku je teda problém rovnaký ako keby sa pohyboval v centrálnom poli jedného hmotného bodu o hmotnosti 7 hmotností Slnka. V tomto prípade môžeme preto použiť 3. Keplerov zákon.

Kúsok hmoty sa teda bude podľa prvého keplerovho zákona pohybovať po elipse s ohniskom v centrálnom telese. Keďže má ale nulovú počiatočnú rýchlosť a pôsobí naň sila smerom do stredu, elipsa sa nám zredukuje na úsečku, ktorej ohniská budú na jej koncoch. Perióda „obehu“ nášho kúska hmoty bude podľa tretieho Keplerovho zákona

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 (0,25 \text{ ly})^3}{7GM_S}},$$

kde M_S je hmotnosť Slnka. Nesmieme samozrejme zabudnúť, že keďže priemer oblaku je jeden svetelný rok a táto elipsa (zredukováná na úsečku) má pol svetelného roka, tak potom je jej veľká poloos len štvrtina svetelného roka.

Polovica takto vypočítanej periódy je potom čas, ktorý zaberie kúsok hmoty dostať sa k centrálnemu telesu. Pre zadané hodnoty tento čas výjde 376 000 rokov.

Poznámka

Vzhľadom na to, že celý oblak má na počiatku obrovský priemer by sa mohlo zdať, že bude hrať rolu konečná rýchlosť šírenia svetla, keďže sa gravitačné účinky šíria práve touto rýchlosťou. Častica na okraji oblaku teda zistí až o rok, že sa častica na druhej strane pohla. Keďže z výpočtu vychádza celkový čas pozorovaného deja v stotísícoch rokov, môžeme oproti tomu 1 rok bezpečne zanedbať a pri riešení neuvažovať. Taktiež netreba uvažovať relativistické javy spôsobené veľkou rýchlosťou pohybu, ktoré budú mať vplyv v posledných fázach kolapsu, ktoré ale tvoria zanedbateľnú časť celého procesu. Z toho istého dôvodu sme pri výpočte zanedbali aj rozmer centrálného objektu.

2. Pri dôkaze budeme postupovať vcelku priamočiara. Vezmeme želanú diferenciálnu rovnicu

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)$$

a miesto premennej $r(\varphi)$ dosadíme premennú $u(\varphi)$, kde $r = u^{-1}$ ako bolo uvedené v texte seriálu. Dosadením vyjadríme diferenciálnu rovnicu pomocou novej premennej

$$\left(\frac{d}{dt} u^{-1} \right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m} u^2 \right).$$

Prederivujeme ľavú stranu podľa času. Nesmieme zabudnúť, že u je funkciou φ a to je funkciou t , tj. $u(\varphi(t))$. Dostaneme

$$\left(-\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \right)^2 = \frac{2}{m} \left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m} u^2 \right).$$

Za $\dot{\varphi}$ dosadíme vzťah zákona zachovania momentu hybnosti $\dot{\varphi} m r^2 = l$ (toto bola prvá triková časť úlohy), vďaka čomu sa nám pokráti u^2 v menovateli a už po umocnení ľavej strany dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 \frac{l^2}{m^2} = \frac{2}{m} \left(E - V(u) - \frac{l^2}{2m} u^2 \right).$$

Po vykrátení konštant a preusporiadaní členov dostaneme

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + u^2 = \frac{2m}{l^2} (E - V(u)).$$

Teraz prichádza druhá triková časť. Vieme, že na pravej strane chceme dostať deriváciu V a na ľavo chceme mať druhú deriváciu u . Preto nás môže rýchlo napadnúť skúsiť prederivovať celú rovnicu podľa φ . Po prederivovaní dostaneme

$$2 \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + 2u \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{2m}{l^2} \left(\frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Všimneme si, že derivácie u podľa φ sa vyskytuje v každom člene, preto môžeme tento člen z rovnice spolu s dvojkami vykrátiť, vďaka čomu dostaneme nami hľadaný Binetov vzorec

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u = -\frac{m}{l^2} \frac{\partial V}{\partial u}.$$

3. Určite existuje mnoho spôsobov, ako zvoliť súradnice tak, aby sme dostali správny lagrangián. Dôležité je, aby vo výslednom lagrangiáne vystupoval minimálny potrebný počet zovšeobecných súradníc. V tomto vzorovom riešení zvolíme také zovšeobecné súradnice, ktoré sme použili aj pri riešení

problému dvoch telies. Tentokrát vlastne riešime takisto len pohyb dvoch telies, ale v nejakom potenciálovom poli budenom tretím telesom (Slnkom), ktoré je nehybné v dôsledku toho, že má rádovo vyššiu hmotnosť, a teda sa vplyvom ostatných dvoch telies zdanlivo nepohybuje. Prvými súradnicami budú R a k nemu prislúchajúca uhlová súradnica φ_R vyjadrujúca polohu ťažiska sústavy Zem-Mesiace voči Slnku. Druhou bude r a k nemu prislúchajúca uhlová súradnica φ_r udávajúca polohu Zeme, respektíve Mesiaca voči ťažisku sústavy Zem-Mesiace, pričom samotná súradnica r udáva vzdialenosť Zeme a Mesiaca. Kinetická energia takejto sústavy bude potom mať rovnaký tvar ako kinetická energia pri probléme dvoch telies po zavedení obdobných súradníc. (Zmysel tohto príkladu bolo aj to, aby ste využili už predpočítané vzťahy pre problém dvoch telies. Samozrejme sa na to dalo ísť aj ináč.) Preto

$$T = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}_r^2) + \frac{1}{2} (m_Z + m_M) (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}_R^2),$$

kde $\mu = \frac{m_Z m_M}{m_Z + m_M}$ je redukovaná hmotnosť. Pridanou hodnotou tohto príkladu je spočítať, ako bude vyzerat' potenciál. Ten sa bude skladať z dvoch častí. Prvou je potenciálna energia Mesiaca a Zeme, ktorá je rovnako ako v prvom príklade

$$V = - \frac{G m_Z m_M}{r},$$

kde m_M a m_Z sú hmotnosti Mesiaca a Zeme. Jedná sa o klasický stredoškolský potenciál dvoch hmotných bodov vo vzdialenosti r . Čo sa týka potenciálu Zemi a Mesiaca voči Slnku, vieme si to predstaviť tak, že ich spoločný potenciál bude rovný potenciálu ich ťažiska. Analogicky postupujeme napríklad keď počítame potenciálnu energiu napríklad človeka voči Zemi. Človeka ako súbor hmotných bodov si predstavíme ako jediný hmotný bod umiestnený v jeho ťažisku. Preto bude potenciál Zeme a Mesiaca

$$V = - \frac{G (m_Z + m_M) M_S}{R}.$$

Je zásadné si ale uvedomiť, že táto analógia nie je celkom správna. Teleso na Zemi môžeme nahtadiť hmotným bodom čisto z dôvodu (takmer) homogénneho gravitačného poľa. V tomto prípade je ťažisko ako výsledné pôsobisko gravitačných síl zhodné s hmotným stredom telesa. V nehomogénnom gravitačnom poli (napríklad v našom centrálnom poli Slnka) sú však ťažisko a hmotný stred v rôznych bodoch. Ak ale uvažíme, že vzdialenosť R je o veľa väčšia ako vzdialenosť r , môžeme pole v okolí Zeme aproximovať homogénnym poľom. To nám dáva hľadaný lagrangián sústavy

$$L = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}_r^2) + \frac{1}{2} (m_Z + m_M) (\dot{R}^2 + R^2 \dot{\varphi}_R^2) + \frac{G m_Z m_M}{r} + \frac{G (m_Z + m_M) M_S}{R}.$$

V prípade bez tejto aproximácie by sme dostali tri potenciálové členy pre tri dvojice objektov. Tento presný lagrangián by nám poskytol napríklad vplyv slapových síl Slnka na sústavu Zem-Mesiace.

Úloha VI.S . . . opakovaná

1. Majme klasické matematické kyvadlo, ktoré vychýlime zo stabilnej polohy o 120° . Dĺžka závesu kyvadla je po celý čas konštantá, záves je nehmotný a na jeho konci je upevnený hmotný bod s hmotnosťou m . Zostavte Lagrangeove rovnice prvého druhu pre kyvadlo a pomocou nich určte, kedy je sila pôsobiaca na vlákno kyvadla najväčšia.
 2. Vezmeme klasické kyvadlo, rovnaké ako v prvej časti úlohy. K jeho hmotnému bodu pripevníme ďalšie kyvadlo s rovnakou zavesenou hmotnosťou ako aj rovnakou dĺžkou závesu. Zostavte lagrangián pre túto situáciu a určte aj Lagrangeove pohybové rovnice (2. druhu).
 3. Majme hmotný bod, ktorý je schopný sa voľne pohybovať v smere osy x . Ďalej majme matematické kyvadlo, ktorého záves je upevnený v tomto bode. Nájdite lagrangián tejto sústavy a pomocou Hamiltonovej variačnej metódy nájdite príslušné pohybové rovnice tak, že postupne budete Gateauxove derivácie podľa všetkých zovšeobecnených premenných pokladať rovné nule. Celkovo tak každá nulová Gateauxova derivácia dá jednu pohybovú rovnicu. Porovnajte, či ste touto metódou dostali rovnaké pohybové rovnice ako pri použití štandardného odvodenia Lagrangeových rovníc z lagrangiánu.
1. Zostavíme Lagrangeove rovnice prvého druhu. Vieme, že väzba bude mať tvar

$$\Phi = x^2 + y^2 - l^2 = 0,$$

pretože sa jedná o pohyb po kružnici a l predstavuje v našom prípade polomer tejto kružnice (dĺžku závesu). Lagrangeove rovnice prvého druhu budú mať potom tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2\lambda x, \\ m\ddot{y} &= 2\lambda y - mg, \end{aligned}$$

kde λ je nejaká funkcia polohy guľičky udávajúca veľkosť väzbovej sily. Ďalej je dôležité si uvedomiť, že veľkosť väzbovej sily nezávisí len od veľkosti λ ale aj od veľkosti gradientu väzby v danom mieste. Veľkosť gradientu je ale v každom bode trajektórie kružnice konštantná. Z výpočtu dostaneme hodnotu rovnú $2l$, čo nie je prekvapivé, nakoľko to vyjadruje to, že daná krivka má všade rovnakú „krivosť“. Stačí nám preto zistiť kde nadobúda $|\lambda|$ najväčšiu hodnotu.

Ďalej postupujeme štandardným postupom – dvakrát zderivujeme väzbu podľa času a dosadíme za druhé derivácie kartézskych súradníc ich vyjadrenia z Lagrangeových rovníc. S využitím rovnice väzby a toho, že súčet kvadrátov prvých derivácií súradníc si označíme ako v^2 (predstavujúc si pod tým kvadrát rýchlosti hmotného bodu) dostaneme rovnicu

$$\frac{2\lambda}{m}l^2 - gy + v^2 = 0.$$

Toto jednoducho upravíme na tvar

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}mgy - \frac{1}{2}mv^2.$$

Využívajúc štandardný trik pri tomto type príkladov, a síce zákon zachovania energie v tvare

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = E(0),$$

kde $E(0)$ je celková počiatočná energia, ktorú neskôr v prípade potreby vieme určiť z počiatočných podmienok. Dosadením za $\frac{1}{2}mv^2$ zo zákona zachovania energie dostaneme

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}mgy - E(0) + mgy,$$

$$\lambda^2 = \frac{3}{2}mgy - E(0).$$

Predelením členom l^2 dostaneme λ ako lineárnu funkciu jedinej súradnice y . Našou úlohou bude teda nájsť extrémny tejto funkcie. Spomenieme si, že funkcia môže nadobúdať extrémny buď na okrajoch svojho definičného oboru, alebo vo vnútri definičného oboru vo všetkých miestach, kde je derivácia funkcie rovná nule. Derivácia λ je

$$\frac{d\lambda}{dy} = \frac{3mg}{2l^2},$$

čo ako vidíme, nebude rovné nule. Extrémy sa budú nachádzať na okraji definičného oboru a nie je ťažké si uvedomiť, že najväčšia hodnota $|\lambda|$ bude pre $y = -l$, čo odpovedá kyvadlu smerujúcemu kolmo nadol. Ďalej vidíme, že miesto kde pôsobí na záves najväčšia sila bude vždy v tomto bode a od počiatočných podmienok bude závisieť len jej veľkosť, čo sa dá rýchlo vidieť z rovnice pre λ .

2. Druhý príklad je veľmi priamočiary. Je potrebné iba zvoliť správne zovšeobecnené súradnice a potom sa len nepomýliť pri prederivovaní. Autor vzorového riešenia zvolil ako súradnice uhlové polohy jedného a druhého závesu voči osi x (zvolenej štandardne v horizontálnom smere). Takéto natočenie súradníc nie je síce veľmi prirodzené, ale technicky je rovnako dobré ako akékoľvek iné, navyš nám dovoľuje využiť následne vzťahy medzi kartézskymi súradnicami a polárnymi súradnicami a nemusíme si tieto vzťahy odvodzovať. Pre identické dĺžky závesov l dostaneme prevody medzi súradnicami prvého a druhého závažia

$$x_1 = l \cos \varphi_1,$$

$$y_1 = l \sin \varphi_1,$$

$$x_2 = l \cos \varphi_1 + l \cos \varphi_2,$$

$$y_2 = l \sin \varphi_1 + l \sin \varphi_2.$$

Znáмым postupom dostanem tvar lagrangianu

$$L = ml^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}_2^2 + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - mgl(2 \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) .$$

Jeho prederivovaním postupne podľa súradníc získame dvojicu Lagrangeovych rovníc

$$\begin{aligned} 0 &= 2ml^2 \ddot{\varphi}_1 + ml^2 \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - ml^2 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ &\quad + ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + 2mgl \cos \varphi_1 , \\ 0 &= ml^2 \ddot{\varphi}_2 + ml^2 \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - ml^2 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ &\quad - ml^2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + mgl \cos \varphi_2 . \end{aligned}$$

3. V tejto úlohe riešime takzvané eliptické kyvadlo (názov vyplýva z toho, že hmotný bod umiestnený na závесе sa bude pohybovať po časti elipsy). Tento fakt je síce zaujímavý, ale nie je potrebný k vyriešeniu úlohy, preto sa od neho odprostíme a začneme zostavením Lagrangianu. Vzťah medzi zovšeobecnými súradnicami a kartézskymi bude triviálny nakoľko pre prvý hmotný bod upravený k osy x budú zovšeobecnené súradnice

$$\begin{aligned} x_1 &= x , \\ y_1 &= 0 . \end{aligned}$$

Pre druhý hmotný bod dostaneme vzťahy ako pre matematické kyvadlo, s tým rozdielom, že x -ová súradnica bude modifikovaná

$$\begin{aligned} x_2 &= x + l \cos \varphi , \\ y_2 &= l \sin \varphi . \end{aligned}$$

Z tohto prederivovaním jednoducho dostaneme Lagrangian

$$L = \frac{1}{2} (m_1 \dot{x}^2 + m_2 l^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 \dot{x}^2) - m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 gl \sin \varphi .$$

Podľa Hamiltonovho variačného princípu vieme, že akcia sa musí extremalizovať. Akcia S je definovaná ako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt .$$

Ak má mať v nejakej funkcii extrém, musí byť na tejto funkcii gateaux derivácia tohto funkcionálu nulová. Spočítame preto postupne gateaux derivácie podľa oboch zovšeobecných súradníc. Gateaux derivácie budeme

značit v tomto vzorovom riešení ako štandardné derivácie. Gateaux derivácie v smere $h(x)$ sú

$$\frac{dS}{dx} = \int_{t_1}^{t_2} (m_1 \dot{x} + m_2 \dot{x} - m_2 l \dot{\varphi} \sin \varphi) \dot{h} dt,$$

$$\frac{dS}{d\varphi} = \int_{t_1}^{t_2} ((m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{x} \sin \varphi) \dot{h} - (m_2 l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + m_2 g l \cos \varphi) h) dt.$$

Na prvom funcionále spravíme per partes aby sme presunuli deriváciu z funkcie $h(x)$, to isté aj v prvom člene druhého integrálu. To nám po prederivovaní dáva

$$\frac{dS}{dx} = \int_{t_1}^{t_2} - (m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) h dt,$$

$$\frac{dS}{d\varphi} = \int_{t_1}^{t_2} m_2 (-l^2 \ddot{\varphi} + l \ddot{x} \sin \varphi + l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi - g l \cos \varphi) h dt.$$

Z čoho vidíme hneď, že aby funkcionály boli nulové, musí byť nulový výraz v zátvorke, čo nám dáva dve hľadané Lagrangeove rovnice

$$0 = m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} - m_2 l \ddot{\varphi} \sin \varphi - m_2 l \dot{\varphi}^2 \cos \varphi,$$

$$0 = -m_2 l^2 \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{x} \sin \varphi - m_2 g l \cos \varphi.$$

Čo sú rovnaké rovnice ako by sme dostali použitím štandardného postupu pre zostavenie Lagrangeovych rovníc.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění v Karlovicích

Ve dnech 22.–30. 9. 2018 proběhlo tradiční podzimní soustředění, které se konalo v rekreačním středisku Karlovice u Vrba pod Pradědem. Soustředění se zúčastnilo 31 středoškoláků, pro které byla účast odměnou za půlroční výsledky ve FYKOSu.

Organizátoři

Filip Ayazi, Jáchym Bártík, Vít Beran, Markéta Calábková, Katarína Častulíková, Michal Červeňák – kápo a jednorozec, Tomáš Červeň, Jakub Dolejší, Daniel Dupkala – člověk s názorem, Karel Kolář – řidič, senior manager, Jozef Lipták, Mikuláš Matoušek, Matěj Mezera, Václav Mikeska, Daniela Pittnerová – objekt a bič, Štěpán Stenclák, Jan Střeleček, Jakub Šafin, Lukáš Timko.

Účastníci

Karel Balej, Jan Benda, Marko Bermell, Jiří Blaha, Sára Byšková, Lubor Čech, Martina Daňková, Robert Gemrot, Marie Grunová, Adam Grunt, Ivan Hudák, Soňa Husáková, Adam Húšťava, Marek Jankola, Jindřich Jelínek, Patrik Kašpárek, Vojtěch Klimeš, Jiří Kohl, Adam Krška, Radka Křížová, Karolína Letochová, Viktor Materna, Matej Moško, Aleš Opl, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Jakub Růžička, Marco Souza de Joode, Šárka Štěpánková, Martin Vavřík, Eva Vochozková, Jiří Zelenka.



Účastníci při další netradiční pohybové aktivitě.

Legenda

Stát se poslíčkem zásilkové společnosti FYKORAMA? Hned ze začátku si pro nás Fry připravil nelehkou zkoušku, doručit balík do minulosti za pomoci stroje času, a tak se účastníci najednou probudili v ranních hodinách 21. 8. 1968 v průběhu okupace vojsky Varšavské smlouvy. Zbytek legendy pokračoval připomínáním naší minulosti v období normalizace, přičemž závěr soustředění se nesl v duchu Sametové revoluce. Účastníci si tak mohli alespoň na týden vyzkoušet, jak se žilo jejich rodičům za dob komunismu, včetně náročnosti získání povolení k vycestování do Jugoslávie či výslechu StB.



Kostýmy se najdou vždycky.

Jarní soustředění v Domašově

Podzimní soustředění proběhlo v Domašově nad Bystřicí ve dnech 4. 5.–12. 5. 2019.

Organizátoři

Jáchym Bártík, Štěpán Stenclák, Matěj Mezera, Daniela Pittnerová, Vít Beran, Markéta Calábková, Daniel Dupkala, Jakub Jambrich, Karel Kolář, Jozef Lipták, Mikuláš Matoušek, Václav Mikeska, Šimon Pajger, Jan Střeleček, Jakub Šafin, Jiří Vala

Účastníci

Jan Benda, Lubor Čech, Barbora Čemanová, Martina Daňková, Robert Gemrot, Veronika Hendrychová, Jaroslav Herman, Ivan Hudák, Soňa Husáková, Elena Chochoňáková, Jindřich Jelínek, Patrik Kašpárek, Jan Klivan, David Kománek, Adam

Krška, Viktor Materna, Adam Mendl, Aleš Opl, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Jaroslav Scheinpflug, Marco Souza de Joode, Vojtěch Stránský, Jakub Strnad, Tomáš Tuleja, Martin Vaněk, Martin Vavřík, Eva Vochozková, Vojtěch Votruba



Účastníci v akci.



Nechť je vidět, kdo tu velí.

Legenda

Děj soustředění se odehrával ve třicátých letech dvacátého století. Do Spojených států právě dorazilo 29 italských přistěhovalců, kteří se po nesnázích s opatřováním

povolení k pobytu rozhodli vyhledat pomoc u místních mafiánckých bossů. Záhy se staly členy čtyř velkých rodin, které dohromady ovládaly celé východní pobřeží. Ať už si říkali Pescilenza, Cartesia, Mortiolli či Guerrero, účastníci dělali pro své bossy špinavou práci všeho druhu. Pašovali drogy, alkohol a zbraně, stavěli mosty a pevnosti, bojovali s ostatními rodinami nebo soutěžili v počítání fyzikálních příkladů.

Toto soustředění však bylo něčím speciální. Protože zločiny je snazší páchat v noci, museli si účastníci zvyknout na nový režim – budíček byl posunut na poledne a program končil ve tři v noci. Bylo tak více prostoru pro noční hry (celkem osm), od celonočních bojovek po krátké akční hry s lightsticky.

Fyziklání 2019

I tento rok se konalo FYKOSí Fyziklání, a to pod novým propagačním jménem Fyziklání 2019. Jednalo se již o 13. ročník a navzdory pověrám o kauzalitě tohoto čísla soutěž proběhla hladce. Tento ročník přinesl několik novinek. Prvním rokem se celá soutěž konala na jediném místě, a to v prostorách Top Hotelu Praha. Další novinkou byl odhlehčený název soutěže. Zároveň byl letošní ročník rekordní, a to nejen v celkovém počtu soutěžících, ale i v množství zahraničních týmů. Celkem se zúčastnilo 151 týmů a 724 soutěžících z Česka, Slovenska, ale i Srbska, Španělska, Bosny a Hercegoviny, Anglie a Lotyšska, kteří se 15. 2. mezi sebou utkali v napínavém fyzikálním souboji. Absolutním vítězem se stal tým Jaderný reaktor IV. generace složený ze studentů gymnázií Olomouc - Hejčín a Budějovická. V kategorii B byl nejlepší tým Teorie Všeho z Gymnázia Brno, třída Kapitána Jaroše a kategorii C ovládlo Gymnázium Jana Keplera s týmem Josephsonův Jev.



I letos byl o soutěž velký zájem.

K soutěži Fyziklání se přidala doprovodná víkendová akce. Pro účastníky byl v pátek večer připraven raut v prostorách fakulty. V sobotu je čekalo několik přednášek jak v českém, tak v anglickém jazyce, odpoledne zase prohlídku Prahou, Národní technické muzeum či Planetárium. Nedělnímu dopoledni patřily exkurze na pracoviště a do laboratoří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Pravidla

Soutěže se účastní družstva s nejvýše pěti členy. Na začátku soutěže dostane každé družstvo sedm příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo připíše počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů vyzvedne nový příklad. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny a jejím cílem je samozřejmě získat co největší počet bodů. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.

Výsledky

Středoškoláci A

- | | | |
|----|---|--------|
| 1. | Gymnázium Olomouc-Hejčín a Gymnázium Budějovická, Praha | 186 b. |
| 2. | Gymnázium G F. M. Pelcla, Rychnov n. Kn. | 165 b. |
| 3. | Gymnázium ŠpMNDaG, Bratislava | 156 b. |

Středoškoláci B

- | | | |
|----|-----------------------------------|--------|
| 1. | Gymnázium Brno, tř. Jaroše | 179 b. |
| 2. | Gymnázium Poštová, Košice | 169 b. |
| 3. | Gymnázium Ludovíta Štúra, Trenčín | 149 b. |

Středoškoláci C

- | | | |
|----|------------------------------------|--------|
| 1. | Gymnázium Jana Keplera, Praha | 145 b. |
| 2. | Slovanské Gymnázium, Olomouc | 123 b. |
| 3. | Gymnázium Grösslingova, Bratislava | 118 b. |

Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách (<https://fyziklani.cz/>).



Hlavní organizátor před předáváním cen.

Fyziklání online

Letos proběhl již osmý ročník internetové soutěže Fyziklání online. Konal se ve středu 28. 11. 2018. Do soutěže se aktivně zapojilo celkem 297 týmů sestávajících z 1347 účastníků ze 34 různých zemí. Tím se překonal loňský rekord v počtu zúčastněných o 38 týmů. Narozdíl od předchozích ročníků měli letos české a slovenské týmy možnost přímo porovnat své síly se zahraničními středoškoláky, kteří byli nově zařazeny do kategorií A, B a C. Účastníci se také setkali s novým formátem hurry-up série úloh.

Celkovým vítězem se stal česko-švýcarský tým *NOFY066* z kategorie open se ziskem 212 bodů. Na druhé příčce se umístil slovenský tým *FtáKopySk-fks.sk* z kategorie open se 198 body a třetí pozici obsadil estonský tým $e = \pi = \sqrt{g}$ se 195 body, který současně vyhrál kategorii A. Ziskem 159 bodů se tým *Stevenson* z USA dostal na první místo v kategorii B a celkové 15. místo. Z týmů kategorie C na první příčku dosáhl český tým *Holub pitomý*, který získal 107 bodů a celkově tedy skončil na 47. místě. Vítězem kategorie A z českých a slovenských středoškoláků se stal tým *Fanatická pětka* se 151 body, čímž se umístil na celkovém devatenáctém místě a dosáhl nejlepšího výsledku mezi českými a slovenskými středoškolskými týmy. Mezi českými a slovenskými týmy v kategorii B vyhrál český tým *Teorie všeho* se 144 body.

Nejlepší české i zahraniční týmy byli oceněni věcnými cenami podle svého výběru.



Účastnily se týmy domácí... .

Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel sedm úloh s jednoznačným číselným výsledkem. Po zadání správného výsledku do našeho webového systému získal tým zadání následující úlohy. Soutěž trvala 3 hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také hurry up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení každé úlohy bylo hodnoceno bonusovými body. Jelikož se soutěž konala online, byly všechny pomůcky povoleny. Zakázána však byla komunikace s lidmi mimo soutěžní tým.

Výsledky

Středoškoláci A

- | | |
|-----------------------------|--------|
| 1. $e = \pi = \sqrt{g} = 3$ | 195 b. |
| 2. Senioritis | 179 b. |
| 3. WWP South | 166 b. |

Středoškoláci B

- | | |
|----------------------------|--------|
| 1. Stevenson | 159 b. |
| 2. Teorie všeho | 144 b. |
| 3. Monta Vista High School | 140 b. |

Středoškoláci C

- | | |
|-----------------|--------|
| 1. Holub pitomý | 107 b. |
| 2. WIGYM | 100 b. |
| 3. Neutrína | 88 b. |

Středoškoláci A - CZ/SK

- | | |
|-----------------------|--------|
| 1. Fanatická pětka | 151 b. |
| 2. Lineárně Nezávislí | 147 b. |
| 3. Väliaikainen | 131 b. |

Středoškoláci B - CZ/SK

- | | |
|---------------------------|--------|
| 1. Teorie všeho | 144 b. |
| 2. Asymptotische Freiheit | 127 b. |
| 3. Špit | 117 b. |

Středoškoláci C - CZ/SK

- | | |
|-----------------|--------|
| 1. Holub pitomý | 107 b. |
| 2. WIGYM | 100 b. |
| 3. Neutrína | 88 b. |

Open

- | | |
|-----------------------|--------|
| 1. NOFY066 | 212 b. |
| 2. FtáKopySk-fks.sk | 198 b. |
| 3. Challenge accepted | 194 b. |
| 4. Veterani | 183 b. |
| 5. Five Ugly Faces | 181 b. |



... i zahraniční.

Ve výsledkové listině jsou uvedeny pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je k nalezení na webových stránkách soutěže <https://online.fyziklani.cz/cs/default/last-years>.

Fyzikální Náboj

Tradičně (čti počtvrté) i v tomto školním roce FYKOS organizoval ve spolupráci se slovenským FKS soutěž Fyzikální Náboj. Letos se konal v pátek 16. listopadu již 21. ročník. Náboj je soutěž, která probíhá podobně jako FYKOSí Fyziklání – 5členné týmy během dvou hodin řeší fyzikální úlohy, přičemž se snaží získat co nejvíce bodů za správná řešení. Kromě kratšího času na řešení úloh se Náboj od Fyziklání liší i počtem bodů za správný výsledek – za ten soutěžící získají vždy jen jeden bod a za špatnou odpověď nedostávají žádnou penalizaci. Soutěž probíhá současně na více místech, tento rok se konala v Praze, Ostravě, Bratislavě, Košicích, maďarské Budapešti, polském Gdaňsku a poprvé v Moskvě. V Praze jsme i tento rok soutěž organizovali na Gymnáziu Christiana Dopplera. Organizovali jsme také soutěž v Ostravě, a to na Gymnáziu Ostrava-Zábřeh.

Za Českou republiku soutěžilo celkem 63 (28 juniorských a 35 seniorních) týmů.

Vítězné týmy, kat. Senioři

1. (3.) Gymnázium, třída Kapitána Jaroše 14, Brno, B
2. (6.) Gymnázium M. Koperníka, 17. listopadu 526, Bílovec
3. (8.) Gymnázium Fr. M. Pelcla, Hrdinů odboje 36, Rychnov nad Kněžnou

Vítězné týmy, kat. Junioři

1. (4.) Gymnázium, Mikulášské nám. 23, Plzeň
2. (5.) Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 45, Praha 5 - Smíchov
3. (6.) Wichterlovo gymnázium, Čs. exilu 669, Ostrava - Poruba

V závorkách je uvedeno pořadí v rámci mezinárodního žebříčku. Kompletní výsledkovou listinu najdete na webu soutěže (<https://physics.naboj.org>).

Den s experimentální fyzikou

Den s experimentální fyzikou (DSEF) je každoroční akce FYKOSu, která umožňuje středoškolákům nahlédnout do fyzikálních laboratoří. Letošní Den s experimentální fyzikou proběhl v pátek 09. 11. 2018 v Praze, a to v rámci akce School Day organizované Mezinárodní asociací studentů fyziky IAPS.

Akce začala úvodním slovem, a pak si účastníci mohli vybrat, zda si poslechnou přednášku s názvem Od částic ke kosmologii nebo přednášku o diskretní symetrii fyzikálních zákonů. V dopoledních hodinách studenti navštívili laboratoře v budovách MFF UK v Troji (V Holešovičkách 2). Mohli se tak dozvědět mnohé, například o nukleární magnetické rezonanci, křemíkových detektorech částic v urychlovačích, měřicích přístrojích, které letěly do vesmíru, Mössbauerově spektroskopii, rentgenové fotoelektronové spektroskopii, skenovacím elektronovém mikroskopu nebo navštívili interaktivní fyzikální laboratoř.

Odpolední program si účastníci mohli vybrat z nabídky 3 exkurzí. První možnost byla urychlovače částic v Řeži u Prahy pod záštitou Ústavu jaderné fyziky - AVČR. Další exkurzia byla v Laboratoři vysokých napětí v Dejvicích (ČVUT). Posledná exkurze byla do Laserového centra Eli Beamlines v Dolních Břežanech.



Exkurze do ELI Beamlines.

Cyklus přednášek pro středoškoláky

Letošní cyklus streamovaných¹ přednášek se realizoval pouze v zimním semestru, a to v celkem pěti přednáškách. S obdobným rozvržením se mohli posluchači setkat naposledy v roce 2013. Témata byla letos více populární, pokrývající velmi různorodá odvětví fyziky.

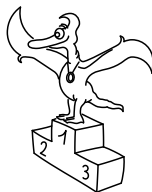
Přednášek samotných se ujali noví, současní i zasloužilí organizátoři semináře. Peter Ondáč představil základy fyziky plazmatu jako opomíjeného 4. skupenství hmoty. Jozef Lipták přehledně ukázal stručnou historii měření vzdáleností ve vesmíru spolu s řadou autentických pozorování. Václav Mikeska přiblížil, jak vzniká duha a na fotografiích předvedl tento jev v mnoha variacích. Čtvrtá přednáška ukazovala, jak fyziku a její správnost pojmají filmaři; filmové ukázky a jejich vysvětlení přinesl Jan Střeleček. Semestr uzavřel Ivo Vinklárek s podrobnou i názornou přednáškou o fyzice fotosyntézy.

V tomto roce došlo k výraznému zvýšení návštěvnosti oproti minulým dvěma rokům. V letním semestru byly na výběr také výjezdní přednášky jakožto možnost motivace studentů přímo na středních školách. Archiv proběhlých přednášek a další informace o chystaných akcích naleznete na našem webu: <http://prednasky.fykos.cz/>

¹<https://www.youtube.com/user/fykosak>



Václav Mikeska přednášející o duze.



Pořadí řešitelů

Kategorie prvních ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 396
1. <i>Eva Feldbabelová</i>	Katolické gymnázium Třebíč	233
2. <i>Jiří Kohl</i>	Biskupské G, Brno	219
3. <i>Adam Krška</i>	G, Mikulov	194
4. <i>Adam Hůštava</i>	European School Luxembourg II	123
5. <i>Vojtěch Stránský</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	115
6. <i>Benedíkt Bareš</i>	G Dobruška	91
7. <i>Aleš Opl</i>	Gymnázium Praha 3	84
8.–9. <i>Hynek Jakeš</i>	Slovanské G, Olomouc	82
8.–9. <i>Vojtěch Votruba</i>	G Jana Keplera, Praha	82
10. <i>Eliška Durstová</i>	G, Dvůr Králové n. L.	71
11. <i>Matěj Charousek</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	56
12. <i>Kristýna Jenčíková</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	46
13. <i>Barbora Čemanová</i>	G, Park mládeže, Košice	45
14. <i>Sára Byšková</i>	G Jana Keplera, Praha	33
15. <i>Adéla Kolembusová</i>	European School Luxembourg II	31
16. <i>Filip Zikeš</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	24
17.–18. <i>Zuzana Lisztwanová</i>	G J. Slowackiego, Český Těšín	18
17.–18. <i>Petr Šicho</i>	G Jana Keplera, Praha	18
19. <i>Meshkat KM</i>	RUMC, Dhaka, Bangladesh	17
20. <i>Milan Marek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	15
21. <i>Jan Ptáček</i>	G, Špitálská, Praha	11
22. <i>Adam Korbel</i>	G, Strakonice	9
23.–24. <i>Adam Seidl</i>	Nový PORG, Praha	8
23.–24. <i>Lukáš Veškrna</i>	G Jana Keplera, Praha	8
25.–26. <i>Natália Kalinová</i>	G, P. Horova, Michalovce	7
25.–26. <i>Bianka Tomaščíková</i>	G Varšavská, Žilina	7
27.–32. <i>Jiří Antoňů</i>	G, Špitálská, Praha	6
27.–32. <i>Tereza Preclíková</i>	G Dobruška	6
27.–32. <i>Radim Skála</i>	G, Hořovice	6
27.–32. <i>Matyáš Svoboda</i>	G, Mikulov	6
27.–32. <i>Adam Šebesta</i>	Masarykovo G, Plzeň	6
27.–32. <i>Jan Šuráň</i>	G, Špitálská, Praha	6
33. <i>Tomáš Nevrłka</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	2

Kategorie druhých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 396
1. <i>Robert Gemrot</i>	G Komenského, Havířov	297
2. <i>Patrik Kašpárek</i>	Katolické gymnázium Třebíč	220
3. <i>Soňa Husáková</i>	G, Českolipská, Praha	216
4. <i>Martina Daňková</i>	Klasické a španělské G, Brno	210
5. <i>Adam Mendl</i>	G P. de Coubertina, Tábor	204
6. <i>Lubor Čech</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	176
7. <i>Elena Chochoňáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	134
8. <i>Marco Souza de Joode</i>	G Nad Štolou, Praha	122
9. <i>Tomáš Tuleja</i>	G L. Svobodu, Humenné	114
10. <i>Jan Klivan</i>	G, Dačice	70
11. <i>Radek Lacko</i>	G Komenského, Havířov	47
12. <i>Daniël Perout</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	45
13. <i>Martin Polyácko</i>	G Alejová, Košice	43
14.–15. <i>Lucia Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	40
14.–15. <i>Duong Phan</i>	Cumberland Valley HS, USA	40
16. <i>Jan Červeňan</i>	G J. Pivečky, Slavičín	37
17. <i>Jarmila Terpáková</i>	G L. Svobodu, Humenné	28
18. <i>Karolína Letochová</i>	G, Šternberk	26
19. <i>Jan Vavřín</i>	PORG, Praha	20
20.–21. <i>Jakub Kliment</i>	G Tajovského, B. Bystrica	19
20.–21. <i>Šárka Štěpánková</i>	G J. Ressler, Chrudim	19
22. <i>Matěj Dvořák</i>	G Jana Keplera, Praha	18
23.–24. <i>Laura Hanousková</i>	G J. Wolkera, Prostějov	16
23.–24. <i>Kristýna Chlupáčová</i>	G J. Ressler, Chrudim	16
25. <i>Gabriel Ščurka</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	10
26. <i>Daniel Czinege</i>	SPŠ chemická, Ostrava	9
27. <i>Vojtěch Janota</i>	G, Strakonice	7
28. <i>František Krůs</i>	Masarykovo G, Plzeň	6

Kategorie třetích ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
1. <i>Viktor Materna</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	281
2. <i>Jakub Jobus</i>	G Jura Hronca, Bratislava	265
3.–4. <i>Jaroslav Herman</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	263
3.–4. <i>Martin Schmied</i>	G, Jihlava	263
5. <i>Jaroslav Scheinpflug</i>	G Jírovcova, České Budějovice	237
6. <i>David Kománek</i>	G, Špitálská, Praha	215
7. <i>Radka Křížová</i>	G J. Heyrovského, Praha	203
8. <i>Jan Benda</i>	G, Litoměřická, Praha	196
9. <i>Jakub Strnad</i>	Klvaňovo G Kyjov	154
10. <i>Jiří Zelenka</i>	G Z. Wintra, Rakovník	138
11. <i>Veronika Hendrychová</i>	G, Turnov	98
12. <i>Martin Vavřík</i>	G, Šumperk	95
13. <i>Samuel Jankových</i>	G Hubeného, Bratislava	72
14. <i>Lukáš Hronek</i>	G, Písek	64
15. <i>Jan Divila</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	52
16.–17. <i>Ronald Doboš</i>	G Poštová, Košice	51
16.–17. <i>Pavla Rudolfová</i>	G, Vídeňská, Brno	51
18. <i>Matěj Holubička</i>	Zemědělská akademie a Gymnázium	45
19. <i>Jana Večerková</i>	G, Šumperk	44
20. <i>Jan Obořil</i>	Klasické a španělské G, Brno	37
21. <i>Jakub Pravda</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	34
22. <i>Kateřina Barotová</i>	G, Olomouc-Hejčín	28
23. <i>Matěj Krátký</i>	PORG, Praha	27
24. <i>Jan Vondra</i>	G Týn nad Vltavou	26
25.–26. <i>Petra Pálkovácová</i>	G, Nové Zámky	23
25.–26. <i>Václav Zvoníček</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	23
27. <i>Josef Polášek</i>	G Jana Keplera, Praha	22
28. <i>Rachel Johnson</i>	Richardson High School, USA	21
29. <i>Milan Tichavský</i>	Slezské G, Opava	20
30. <i>Kryštof Jasenský</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	19
31. <i>Dipankar Mitra</i>	RUMC, Dhaka, Bangladesh	18
32.–33. <i>Minh Khoi Ho</i>	Hanoi - Amsterdam HS, Vietnam	16
32.–33. <i>Filip Zukal</i>	G, Blansko	16
34. <i>Eva Vochozková</i>	Biskupské G, Brno	13
35. <i>Domínika Kodlová</i>	PORG, Praha	11
36. <i>Daniel Krátký</i>	G, Trutnov	10
37.–38. <i>Kateřina Roupová</i>	G, Blansko	9
37.–38. <i>Zuzana Šimáčková</i>	NLCS, London, UK	9
39. <i>Erika Žitniaková</i>	Evanjelické G, Banská Bystrica	5
40.–41. <i>Lucia Krajčoviechová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	4
40.–41. <i>Martina Pivková</i>	Evanjelické G, Banská Bystrica	4
42. <i>Kateřina Vokálová</i>	G, Kolín	2

Kategorie čtvrtých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 360
1. <i>Martin Vaněk</i>	G, Vysoké Mýto	211
2. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	157
3. <i>Michal Jůza</i>	G, Benešov	133
4. <i>Ivan Hudák</i>	ESŠ, Lip. Mikuláš	130
5. <i>Kristián Matušík</i>	G, Benešov	88
6. <i>Jiří Blaha</i>	G, Uherské Hradiště	84
7.–8. <i>Vojtěch Ulman</i>	G Jaroslava Seiferta, Praha	80
7.–8. <i>Leonardo Wimmer</i>	Colégio pH, Tijuca, Brazil	80
9. <i>Marie Grunová</i>	G, Moravský Krumlov	78
10. <i>Filip Koňářík</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	72
11. <i>Jindřich Jelínek</i>	G, Olomouc-Hejčín	65
12. <i>Matej Moško</i>	G Grösslingova, Bratislava	59
13. <i>Vojtěch Klímeš</i>	G, Třeboň	40
14. <i>YUQING XU ARIA</i>	Dulles High School, USA	38
15. <i>Tomáš Drobil</i>	G, Dačice	36
16. <i>Kateřina Charvátová</i>	G B. Němcové, HK	35
17. <i>Jindřich Dušek</i>	G Jana Keplera, Praha	34
18. <i>Tadeáš Wilczek</i>	G F. Živného, Bohumín	32
19.–20. <i>Marek Jankola</i>	G M. Hattalu, Trstená	27
19.–20. <i>Tereza Prokopová</i>	G Jura Hronca, Bratislava	27
21.–22. <i>Andrej Rendek</i>	G, Dubnica n. Váhom	24
21.–22. <i>Jakub Růžička</i>	G, Nymburk	24
23. <i>Karel Balej</i>	G a SOŠ, Rokycany	17
24. <i>Miroslav Horský</i>	G, Českolipská, Praha	16
25. <i>Domínik Majkus</i>	G Na Vítězné pláni, Praha	13
26. <i>Jaromír Sladkovský</i>	PORG, Praha	12
27. <i>Bibiána Hroncová</i>	G Poštová, Košice	11
28.–30. <i>Bernadeta Maříková</i>	G, Český Krumlov	9
28.–30. <i>Štěpán Tichý</i>	G, Jateční, Ústí nad Labem	9
28.–30. <i>Marie Vaňáková</i>	G Botičská, Praha	9
31.–32. <i>Vratislav Besta</i>	G, Olomouc-Hejčín	6
31.–32. <i>Marek Talíř</i>	G, Český Krumlov	6
33. <i>Marek Božon</i>	G, Karviná	3

DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXII. ročník – 2018/19

Předmluva: Daniela Pittnerová

Náměty úloh:

Karel Kolář (I.5, I.P, II.2, II.P, III.3, IV.2, V.2, V.4, VI.1, VI.P), Jáchym Bártík (I.2, I.E, I.S, II.E, III.2, III.5, III.P, IV.5, VI.3), Matěj Mezera (I.3, I.4, II.1, IV.3, V.1, V.5, VI.4, VI.5), Jakub Jambrich (I.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Michal Koutný (II.3, II.4, IV.P, V.E), Vít Beran (III.4, VI.2), Jozef Lipták (II.4, III.E), Mikuláš Matoušek (III.1, VI.E), Michal Nožička (IV.E, V.3), Daniela Pittnerová (I.1, IV.1), Ivo Vinklárek (IV.4, V.4), Filip Ayazi (V.P), Michal Červeňák (V.P), Jakub Dolejší (V.3), Lubomír Grund (V.P), Miroslav Hanzelka (II.5)

Autoři řešení úloh:

Jáchym Bártík (I.2, I.S, II.5, III.2, III.5, IV.5, IV.E, V.3, V.P, VI.3, VI.P), Matěj Mezera (I.3, I.4, II.1, IV.3, V.1, V.5, VI.4, VI.5), Jozef Lipták (I.P, II.1, II.4, IV.2, V.P, V.E), Jakub Jambrich (II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Vít Beran (II.3, III.4, VI.2), Karel Kolář (I.5, V.2, VI.1), Václav Mikeska (II.2, III.3, V.4), Daniela Pittnerová (I.1, II.E, IV.1), Katarína Častulíková (III.1, IV.E), Mikuláš Matoušek (IV.P, VI.E), Daniel Dupkala (I.E), Matúš Kopunec (V.P), Šimon Pajger (III.E), Kateřina Rosická (II.P), Jan Střeleček (III.P), Ivo Vinklárek (IV.4)

Seriál o teoretické mechanice: Jakub Jambrich

Legenda podzimního soustředění: Michal Červeňák, Daniel Dupkala, Daniela Pittnerová

Legenda jarního soustředění: Jáchym Bártík, Matěj Mezera, Štěpán Stenclák

Sazba: Markéta Calábková, Matěj Rzehulka

Obrázky a grafy: Matěj Mezera, Mikuláš Matoušek, Karel Kolář

Jazykové korektury: Matěj Rzehulka, Kateřina Smítalová, Jozef Lipták, Daniela Pittnerová, Markéta Calábková, Katarína Častulíková

Odborné korektury: Jozef Lipták, Jáchym Bártík, Matěj Mezera, Vít Beran, Jakub Šafin, Matěj Rzehulka, Václav Mikeska, Šimon Pajger, Jan Střeleček, Kateřina Smítalová

DANIELA PITTNEROVÁ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XXXII. ročník – 2018/19

Vydal MatfyzPress
nakladatelství Matematicko-fyzikální fakulty
Univerzity Karlovy
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
jako svou 599. publikaci.

Vytiskl ReproStředisko MFF UK

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením.
Nakladatelství neodpovídá za kvalitu a obsah textu.
Vydáno pro interní potřebu MFF UK.
Neprodejná publikace

200 stran, 32 obrázků
Sazba písmem Latin Modern v programu X_YL^AT_EX
Vydání první
Náklad 400 výtisků

Praha 2020

ISBN 978-80-7378-405-8