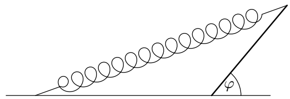
Úloha VI.3 ... neanalytická pružinka

6 bodů; (chybí statistiky)



Představme si tyč s délkou $b = 5\,\mathrm{cm}$ a hmotností $m = 1\,\mathrm{kg}$ a pružinku s klidovou délkou $c = 10\,\mathrm{cm}$, s tuhostí $k = 200\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ a se zanedbatelnou hmotností, které jsou na koncích spojeny. Druhé konce tyče a pružinky jsou upevněny ve stejné výšce ve vzdálenosti $a = 10\,\mathrm{cm}$ od sebe. Kolem obou upevnění i kolem spoje lze libovolně rotovat. Označme φ sklon tyče od horizontálního směru. Najděte všechny hodnoty φ, pro které je soustava v rovnovážné poloze. Které z těchto poloh jsou stabilní a které labilní?

Jáchym chtěl vymyslet jednoduchou úlohu.

Dĺžku pružinky určíme z kosínusovej vety ako

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi - \varphi)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}\,.$$

V rovnovážnej polohe musí byť splnená rovnováha momentov síl v bode uchytenia tyče. Tiažová sila tyče pôsobí momentom

$$M_1 = -mg\frac{b}{2}\cos\varphi\,,$$

kde znamienko $-$ značí, že ide o moment spôsobujúci pohyb v smere hodinových ručičiek. Pre silu, ktorou pôsobí pružinka, máme

$$F_2 = k\Delta l = k\,(d - c)\;,$$

teda pre moment dostávame

$$M_2 = F_2 b\sin\vartheta\,,$$

kde ϑ je uhol medzi tyčou a pružinkou. Veľkosť sínusu tohto uhla môžeme pomocou sínusovej vety vyjadriť ako

$$\sin\vartheta = \frac{d}{a}\sin(\pi - \varphi) = \frac{d}{a}\sin\varphi\,.$$

Po dosadení máme pre moment

$$M_2 = k\,(d - c)\,b\frac{a}{d}\sin\varphi\,.$$

Pre rovnováhu musí byť výsledný moment síl M rovný nule, teda

$$0 = M = M_1 + M_2 = -mg\frac{b}{2}\cos\varphi + k\,(d - c)\,b\frac{a}{d}\sin\varphi\,.$$

Po úprave a dosadení za d máme rovnosť

$$mg\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi}\cos\varphi = 2k\left(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi} - c\right)a\sin\varphi\,,$$

ktorá sa nedá riešiť analyticky, no napr. pomocou Wolframalpha alebo niektorej z metód diskutovanej v seriáli dostávame na intervale 0 až 2π riešenia

$$\varphi_1 \doteq 0{,}69\,,$$
$$\varphi_2 \doteq 2{,}05\,,$$
$$\varphi_3 \doteq 2{,}86\,,$$
$$\varphi_4 \doteq 4{,}55\,.$$

Zostáva rozhodnúť, ktoré z riešení predstavujú stabilnú, a ktoré labilnú rovnováhu. Toto sa dá zistiť napríklad z hodnoty potenciálnej energie - stabilnej rovnováhe zodpovedajú lokálne minimá, labilnej lokálne maximá. Inou možnosťou je zistiť znamienko výsledného momentu síl po malom vychýlení z rovnovážnej polohy. V prípade stabilnej rovnováhy bude výsledný moment pôsobiť proti smeru výchylky. Kedže je výsledný moment spojitá veličina vzhľadom na uhol φ, stačí určiť jej znamienka medzi bodmi rovnováhy:

$$\begin{aligned} M\left(0<\varphi<\varphi_1\right)&<0\,,\\ M\left(\varphi_1<\varphi<\varphi_2\right)&>0\,,\\ M\left(\varphi_2<\varphi<\varphi_3\right)&<0\,,\\ M\left(\varphi_3<\varphi<\varphi_4\right)&>0\,,\\ M\left(\varphi_4<\varphi<2\pi\right)&<0\,. \end{aligned}$$

Ukážme, že poloha 1 je labilná. Ak sa vychýlime do nižších hodnôt φ (v smere hodinových ručičiek), bude mať výsledný moment záporné znamienko, bude teda výchylku zväčšovať. Podobne pri výchylke do vyšších hodnôt bude výsledný moment s kladným znamienkom výchylku zväčšovať. Rovnako preskúmeme polohy 2, 3, 4. Zistíme, že polohy 1 a 3 sú labilné a polohy 2 a 4 sú stabilné.

Úloha sa dala riešiť aj energetickým prístupom. Náš systém má jeden voľný parameter, uhol φ. Pre celkovú energiu systému máme

$$E=E_\mathrm{e}+E_\mathrm{g}\,,$$

kde E_e je elastická energia pružiny a E_g je potenciálna energia v tiažovom poli. Pre energie máme

$$\begin{aligned} E_\mathrm{e}&=\frac{k\left(\Delta l\right)^2}{2}\,,\\ E_\mathrm{g}&=mgh\,, \end{aligned}$$

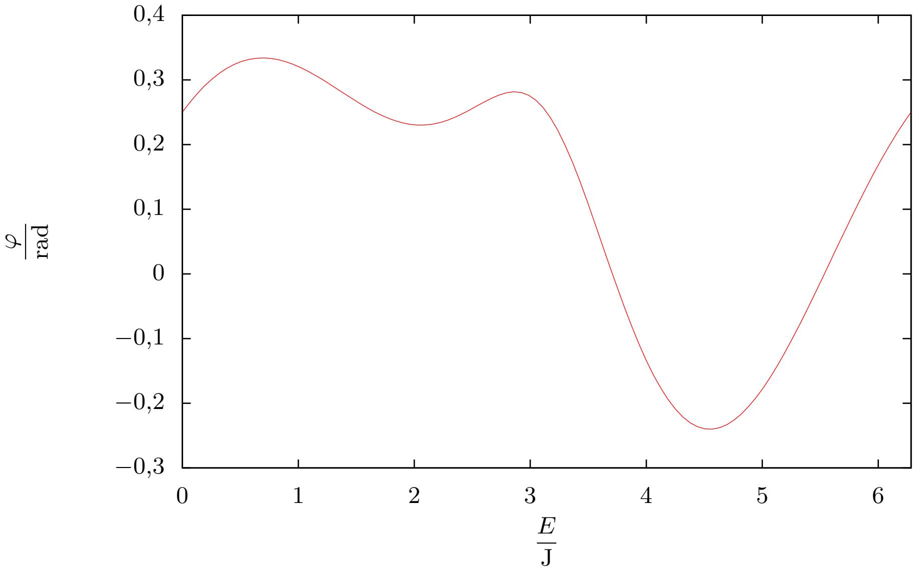
kde Δl je predĺženie pružiny a h je výška ťažiska tyče nad spojnicou bodov úchytov. Po dosadení dostávame

$$E=\frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\varphi}-c\right)^2+mg\frac{b}{2}\sin\varphi\,.$$

V rovnováhe musí platiť

$$\frac{\partial E}{\partial\varphi}=0\,.$$

Po zderivovaní dostávame rovnakú podmienku ako v prvom riešení prostredníctvom momentov. O stabilite sa môžeme presvedčiť hodnotou druhej derivácie v nulových bodoch prvej derivácie. Ak je druhá derivácia kladná, jedná sa o lokálne minimum energie, teda o stabilnú rovnovážnu polohu, a naopak. Najjednoduchší spôsob je však nechať si závislosť energie sústavy na uhle vykresliť, tak ako môžeme vidieť na obrázku 1.



Obr. 1: Závislosť celkovej energie systému E na uhle φ.

Jozef Lipták
`liptak.j@fykos.cz`