Úloha IV.5 ... nemožnost nakažení

7 bodů; průměr 4,24; řešilo 34 studentů

Představme si, že roztlačíme nějakou bakterii obvyklé velikosti na rychlost $v = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ ve vodorovném směru a necháme ji volně letět ve vzduchu. Jakou vzdálenost zhruba urazí, než se zastaví?

Výsledek vás možná překvapí. Jak je tedy možné se infikovat tímto způsobem bakteriální infekcí? Diskutujte, proč je to možné i přes takový výsledek.

Karel se díval na Youtube na TED-Ed.

Bakterie se v čase t bude nacházet na vodorovné souřadnici $x(t)$ a bude mít vodorovnou rychlost $\dot{x}(t)$. Vzhledem k rychlostem a velikosti bakterie můžeme proudění vzduchu okolo považovat za laminární. Odporovou sílu působící na bakterii spočítáme ze Stokesova vztahu

$$F = -6\pi\eta r\dot{x}\,,$$

kde η je dynamická viskozita a r je charakteristický rozměr bakterie. Po dosazení do pohybové rovnice $F = m\ddot{x}$ dostaneme lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} = 0\,,$$

kterou řešíme určením charakteristického polynomu.[1] Jeho kořeny jsou

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_2 = -k\,,$$

kde

$$k = \frac{6\pi\eta r}{m}\,.$$

Řešení rovnice potom hledáme ve tvaru

$$x = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t} = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-kt}\,.$$

V čase $t = 0$ je celková uražená dráha nulová, tedy

$$C_1 + C_2 = 0\,.$$

Rychlost v čase t získáme derivací

$$\dot{x} = -C_2 k\mathrm{e}^{-kt}\,,$$

což v kombinaci s druhou počáteční podmínkou $\dot{x}(0) = v_0$ vede na rovnici

$$v_0 = -C_2 k\,.$$

Jednoduchou algebrou vyjádříme jednotlivé konstanty

$$C_1 = \frac{v_0}{k}\,,$$
$$C_2 = -\frac{v_0}{k}\,.$$

[1] Můžeme použít i separaci proměnných, ale užití charakteristického polynomu je v tomto případě jednodušší.

Dosazením získáme parametrickou rovnici pohybu

$$x(t) = \frac{v_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) .$$

Z rovnice je vidět, že bakterie ve skutečnosti nikdy nezastaví, ale bude se limitně blížit do bodu

$$x_{\max} = \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{v_0}{k} ,$$

který tak představuje maximální vzdálenost, kterou může bakterie urazit, než se zastaví.

Dále bychom mohli uvažovat pohyb bakterie ve svislé ose. Díky tomu, že odporová síla je v rychlosti lineární, můžeme oba pohyby počítat zvlášť a výsledek získáme součtem jednotlivých pohybů.

Označme svislou souřadnici bakterie $y(t)$. Tíhová síla potom bude $F_g = -mg$, pro odporovou sílu platí $F = -mk\dot{y}$. V úlohách jako je tato těleso typicky velmi rychle dosáhne terminální rychlosti,[2] kterou můžeme z podmínky nulové výslednice sil určit jako

$$\dot{y}_{\mathrm{term}} = -\frac{g}{k} ,$$

Dále už bakterie zrychlovat nebude. Nic nám však nebrání tento odhad ověřit výpočtem. Dosazením do pohybové rovnice dostáváme nehomogenní diferenciální rovnici

$$\ddot{y} + k\dot{y} = -g ,$$

kterou opět řešíme pomocí charakteristického polynomu. Jak už asi tušíte, získáme tím řešení homogenní rovnice, které je stejné jako u rovnice vodorovného pohybu. K tomu ještě musíme přičíst partikulární řešení, které v tomto případě najdeme snadno,[3] bude to lineární funkce t. Řešení hledáme ve tvaru

$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-kt} + C_3 t .$$

Opět vyjdeme z počátečních podmínek, $y(0)$ a $\dot{y}(0) = 0$, tedy $C_1 + C_2 = 0$. Pro derivaci y podle času platí

$$\dot{y} = -C_2 k\mathrm{e}^{-kt} + C_3 ,$$

což vede na vztah $-C_2 k + C_3 = 0$. Poslední podmínku získáme spočítáním druhé derivace y a dosazením do původní diferenciální rovnice

$$0 = \ddot{y} + k\dot{y} + g = C_2 k^2 \mathrm{e}^{-kt} - C_2 k\mathrm{e}^{-kt} + C_3 + g ,$$

ze které vyplývá $C_2 k(k-1) + C_3 + g = 0$. Nyní už trošku pracnější, ale stále jednoduchou algebrou vyjádříme

$$C_1 = \frac{g}{k^2}$$

$$C_2 = -\frac{g}{k^2}$$

$$C_3 = -\frac{g}{k} .$$

[2] Teoreticky nebude terminální rychlosti dosaženo nikdy, nicméně to můžeme považovat za dobrou aproximaci.

[3] Jedná se o rovnici se speciální pravou stranou.

Konečně tak můžeme napsat parametrickou rovnici pro pohyb ve svislém směru

$$y\,(t) = \frac{g}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t\,.$$

Vidíme, že náš odhad byl správný. Rychlost se velmi brzy přiblíží hodnotě $\dot{y}_{\mathrm{term}}$, protože hodnota k je vysoká (jak ukážeme níže) a člen e^{-kt} tedy velmi rychle konverguje k nule. Bakterie předtím sice urazí jistou vzdálenost, ta je však vzhledem k velikosti k^{-2} téměř zanedbatelná.

Nyní už nezbývá než dosadit číselné hodnoty. Dynamická viskozita vzduchu je při normálních podmínkách přibližně $\eta = 1{,}8\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$. Bakterie jsou co do velikosti velmi rozmanité, ale můžeme odhadnout $r = 1\,\mu\mathrm{m} = 1\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$. Hmotnost typické bakterie odhadneme jako $m = 4\,\mathrm{pg} = 4\cdot 10^{-15}\,\mathrm{kg}$. Dosazením číselných hodnot zjistíme, že $k \doteq 8{,}5\cdot 10^{4}\,\mathrm{s^{-1}}$.

Pro vodorovnou vzdálenost, kterou bakterie urazí, dostáváme $x_{\max} \doteq 1{,}6\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. To skutečně není daleko. Na druhou stranu, velikost terminální rychlosti ve svislém směru bude $\dot{y}_{\mathrm{term}} \doteq -1{,}2\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Bakterie tedy po výstřelu nedoletí téměř nikam, ale také prakticky nebude padat na zem. Může se tak pohybovat díky větru, čímž dokáže urazit daleko větší vzdálenosti.

Ve skutečnosti to však není tak jednoduché, protože bakterie se typicky šíří v malých kapičkách s poloměrem řádově $r' = 100\,\mu\mathrm{m} = 1\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$. Pokud předpokládáme, že se jedná o koule s hustotou podobnou hustotě vody, pro jejich hmotnost platí

$$m' = \frac{4}{3}\pi r_{\mathrm{k}}^3 \varrho\,,$$

z čehož pro neznámou konstantu dostáváme

$$k' = \frac{9\eta}{2r_{\mathrm{k}}^2\varrho}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází $k' \doteq 8\,\mathrm{s^{-1}}$, což vede na vzdálenost $x' \doteq 1{,}7\,\mathrm{m}$. To už je docela reálný odhad toho, jak daleko běžně kýcháme. Pro rychlost klesání pak dostáváme $\dot{y}'_{\mathrm{term}} \doteq -1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Shrneme-li výsledky předchozích výpočtů, dojdeme k závěru, že jednotlivé bakterie ve stojícím vzduchu urazí jen minimální vzdálenost. Díky tomu se ale dokáží efektivně šířit větrem. Oproti tomu větší kapičky brzy spadnou na zem, ale předtím se stihnou dostat do vzdálenosti, která bezpečně stačí k nakažení všech lidí v blízkém okolí.

Poznámky k došlým řešením

Základem této úlohy bylo uvědomit si, jaká odporová síla bude na bakterii působit. Z běžného života známe dva vzorce pro odporovou sílu – Stokesův pro laminární proudění a Newtonův pro turbulentní proudění. Pro velké rychlosti je sice proudění typicky turbulentní, ale co je to "velká rychlost" závisí mimo jiné na rozměrech tělesa. O jaký druh proudění jde zjistíme z hodnoty

Reynoldsova čísla. V tomto případě vychází, že proudění bude laminární, tedy musíme použít Stokesův vzorec.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.