

Úloha II.5 ... skleněný déšť

7 bodů; průměr 4,00; řešilo 30 studentů

Dělník si na stavbu mrakodrapu přinesl vak se skleněnkami, aby se s nimi mohl pochlubit svým kolegům. A co se nestane – vak se vysype a kuličky padají skrze lešení směrem k zemi. Lešení se skládá z jednotlivých poschodí o výšce h . Podlaha každého poschodí se skládá ze stejných mříží, ve kterých díry zaujímají $k\%$ z celkové plochy mříže. Uvažujme zjednodušený model propadávání kuliček lešením, kdy, pokud kulička spadne na díru v lešení, tak projde bez ovlivnění, a pokud spadne na pevnou část mříže, tak se její rychlost sníží na 0 a ihned začne dále padat (tj. velikost kuliček je zanedbatelná vůči velikosti děr v lešení, kuličky se od lešení nijak neodráží a po dopadu na pevnou část mříže se ihned skutálí do díry a dále začínají padat). Nakonec neuvážujme ani potenciální srážky kuliček mezi sebou. Předpokládejte, že kuličky se z tašky sypou s konstantním hmotnostním průtokem Q . Jakou silou budou kuličky působit na každé patro lešení, až se situace ustálí? Mirek chtěl převést Ohmův zákon do mechaniky.

Patro, ve kterém dělník upustí kuličky, označíme číslem 0. Zároveň předpokládáme, že počáteční rychlost všech kuliček je nulová. Pro maximální rychlost kuličky v n tém patře (v žádném z předchozích pater se nezpomalila o lešení) potom platí rovnice

$$v_n = gt_n,$$

$$nh = \frac{1}{2}gt_n^2,$$

jejichž řešením je vztah $v_n = \sqrt{2ngh}$.

Každá kulička může v každém patře buď narazit na lešení, nebo propadnout dírou a pokračovat dál. To znamená, že její cestu až do n tého patra můžeme jednoznačně popsat pomocí řetězce jedniček a nul o délce $n - 1$. Například 0100 bude znamenat, že kulička v prvním patře propadla dírou, ve druhém narazila na mříž, ve třetím znovu propadla a ve čtvrtém také. Do n tého patra se tak každá kulička mohla dostat 2^{n-1} způsoby. Vydělme k stovkou; pravděpodobnost, že kulička propadne patrem, pak je k , zatímco pravděpodobnost, že narazí, je $(1 - k)$. Pro pravděpodobnost cesty do n tého patra ve tvaru 0100 tak platí $P(0100) = k(1 - k)k \cdot k = k^3(1 - k)$. V praxi to znamená, že cestou 0100 se vydá hmotnostní tok $Q_{0100} = P(0100)Q = k^3(1 - k)Q$.

Počet nul na konci zápisu cesty kuličky do n tého patra označíme d . V našem případě tedy platí $d(0100) = 2$. Odtud vidíme, že daná kulička, která dopadla do n tého patra touto cestou, narazila naposledy přesně v $(n - d - 1)$ tém patře. Její rychlost v n tém patře tedy bude v_{d+1} . Je zřejmé, že $d \in \langle 0, n - 1 \rangle$.

Jestliže kulička narazí, veškerá její hybnost se změní na nulu. Pokud tedy za čas t dopadnou na patro lešení kuličky s celkovou hmotností $m = Q't$ a rychlostí v , působí tím silou

$$F = m \frac{v}{t} = Q'v.$$

Hmotnostní tok pro kuličky popsané řetězcem i je rovný $Q' = QP(i)$.

Nyní už dokážeme popsat všechny možné cesty kuliček do n tého patra a víme, jaký hmotnostní tok jimi bude proudit. Zároveň umíme vyjádřit rychlost, kterou se dané kuličky budou pohybovat, a víme, jak z toho spočítat výslednou sílu. Ještě je potřeba dodat, že jen $(1 - k)$

kuliček se v nt ém patře zastaví, takže celkovou sílu působící na dané patro můžeme spočítat sumou

$$F_n = Q(1-k) \sum_{i \in M_{n-1}} P(i) v_{d(i)+1}, \quad (1)$$

kde M_{n-1} je množina všech řetězců jedniček a nul s délkou $n-1$.

Tato suma obsahuje celkem 2^{n-1} sčítanců. Rozdělíme si je na n skupin tak, aby všechny členy v jedné skupině měly stejnou hodnotu d . Díky tomu můžeme člen v_{d+1} z každé skupiny vytknout a potom počítat jen sumu členů $P(i)$ v dané skupině. Všechny řetězce z jedné skupiny mají $n-1$ číslic a končí na číslici 1, následovanou d nulami.¹ To znamená, že ještě nemáme určených prvních $n-d-2$ číslic. V každé skupině budou přítomny jejich všechny možné kombinace. Sumu všech členů z jedné skupiny tak můžeme vyjádřit výrazem

$$S(d) = v_{d+1}(1-k)k^d \sum_{j \in M_{n-d-2}} P(j), \quad (2)$$

který ovšem neplatí pro skupinu s $d = n-1$. Ta obsahuje jen samé nuly, takže pro ni platí $S(n-1) = v_n k^{n-1}$.

Připomeňme si, že množina M_{n-d-2} obsahuje všechny možné řetězce jedniček a nul o celkové délce $n-d-2$. Pro každý řetězec j z této množiny potom platí $P(j) = k^\alpha(1-k)^\beta$, kde α je počet nul v této sekvenci a $\beta = n-d-2-\alpha$ je počet jedniček v této sekvenci. Jestliže známe binomickou větu, neměla by nás překvapit rovnost

$$\sum_{j \in M_{n-d-2}} P(j) = (k + (1-k))^{n-d-2} = 1,$$

která nám umožní přepsat vzorec (2) do tvaru $S(d) = v_{d+1}(1-k)k^d$ pro $d \neq n-1$ a $S(n-1) = v_n k^{n-1}$.

Všechny členy ze sumy ve vzorci (1) jsme si rozdělili do několika skupin podle d a poté jsme spočítali součet všech členů v každé této skupině. Celkovou sumu z (1) tak můžeme nahradit sumou těchto jednotlivých součtů a dostaneme

$$F_n = Q(1-k) \sum_{d=0}^{n-1} S(d) = Q(1-k) \left(v_n k^{n-1} + (1-k) \sum_{d=0}^{n-2} v_{d+1} k^d \right)$$

$$F_n = Q\sqrt{2gh}(1-k) \left(k^{n-1}\sqrt{n} + (1-k) \sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1}\sqrt{i} \right).$$

Tento vzorec je řešením úlohy, protože sumu v něm obsaženou už není možné dále zjednodušit².

Ačkoli se to na první pohled nezdá, tento výsledek je velmi intuitivní a dává smysl: první člen v závorce je případ, kdy kulička ani jednou nenarazí a dopadne až na nt é poschodí. Její hybnost je tedy úměrná \sqrt{n} . Druhý člen představuje případy, ve kterých kulička padá přímo

¹S výjimkou skupiny s $d = n-1$, ve které je jen jeden řetězec tvořený samými nulami.

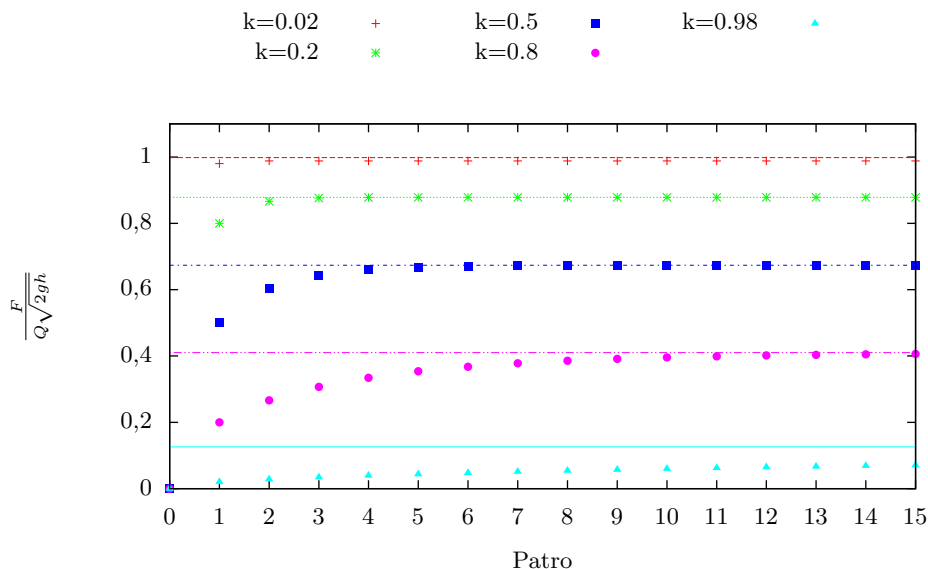
²lze ji pouze vyjádřit pomocí speciálních funkcí

z výšky i nad nt ým poschodím. Aby spadla z výšky i , musela překonat $i - 1$ poschodí (proto se v sumě vyskytuje činitel k^{i-1}) a dopadnout na poschodí předtím, z čehož máme $(k - 1)$. Její hybnost je potom úměrná \sqrt{i} . Pro kontrolu, pokud ze závorky vypustíme členy s odmocninami (takže nebudeme počítat součet hybností, ale jen součet hmotností), dostaneme v závorce výraz

$$k^{n-1} + (1-k) \sum_{i=1}^{n-1} k^{i-1} = k^{n-1} + (1-k) \frac{k^{n-1} - 1}{k - 1} = 1.$$

To je ale jen jinak vyjádřený fakt, že se na nt é poschodí (a tím pádem na každé poschodí) dostanou všechny kuličky.

Můžeme si všimnout další zajímavé skutečnosti – pro velká n suma konverguje ke kladnému reálnému číslu, zatímco výraz $k^{n-1}\sqrt{n}$ konverguje k nule. Díky tomu se i F_n blíží k nějaké konkrétní hodnotě, což je přesně to, co bychom z fyzikálního hlediska čekali. Tohoto chování si můžeme všimnout v grafu 1 pro různé hodnoty k .

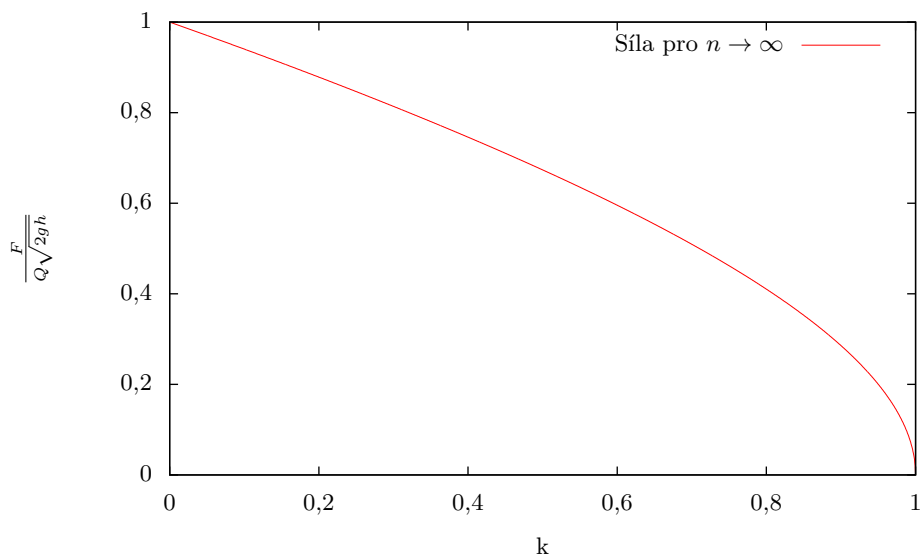


Obr. 1: Síla působící na jednotlivá patra pro různé hodnoty k . Vodorovné přímky ukazují teoretickou hodnotu, ke které síla konverguje v nekonečném patře.

Jáchym Bártík
tuaki@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

Obr. 2: Síla působící na patro $n \rightarrow \infty$ pro různé hodnoty k .