Úloha V.P ... sklíčka

8 bodů; průměr 4,90; řešilo 29 studentů

Popište zobrazovací soustavy mikroskop (složený ze 2 spojek) a Keplerův dalekohled. Vysvětlete rozdíl ve funkci a konstrukci mikroskopu a dalekohledu a načrtněte průchod paprsků. Jak se dá smysluplně definovat zvětšení pro dané optické prvky? Odvoďte pro zvětšení konkrétní vzorce.

Kuba konečně pochopil, jak to všechno funguje!

Nejprve se podívejme, co musí obraz předmětu splňovat, abychom ho mohli vidět. V oku je spojná čočka, která z rozbíhajících se paprsků vytvoří sktečný obraz na sítnici. Současně je pro oko nejpohodlnější, když je obraz v dáli, protože nemusí být akomodováno. Proto, abychom něco v libovolné zobrazovací soustavě viděli, měl by být obraz ideálně virtuální a v nekonečnu. Jiný obraz (virtuální nebo reálný) můžeme také pozorovat, ale oko musí zaostřit tak, aby ho zobrazilo přesně na sítnici a nikam jinam.

Základní princip soustavy dvou spojek (Keplerův dalekohled se také skládá ze dvou spojek) tedy bude, že první čočka (objektiv) zobrazí předmět do ohniskové roviny druhé čočky (okuláru) a ta poté vytvoří obraz v nekonečnu[1]. Hlavní rozdíl je, že mikroskopem se zvětšují blízké předměty (tedy se jedná o zobrazení z blízka do nekonečna) a dalekohledem předměty vzdálené (zobrazení z nekonečna do nekonečna). Objektiv dalekohledu tedy vytvoří meziobraz ve své ohniskové rovině, kam musíme umístit také ohnisko okuláru.

Oproti tomu objektiv mikroskopu vytvoří meziobraz dále než ve své ohniskové rovině, a to podle zobrazovací rovnice

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1'} = \frac{1}{f_1}\,,$$

kde a_1 značí vzdálenost předmětu od objektivu, a_1' vzdálenost meziobrazu od objektivu a f_1 ohniskovou vzdálenost objektivu. Mikroskop má typicky fixní vzdálenost objektivu a okuláru, a co se dá měnit, je vzdálenost a_1. Označme Δ vzdálenost bližších ohnisek objektivu a okuláru tak, že je kladná, pokud je ohnisko F_1' nalevo od ohniska F_2 (pro dalekohled by platilo $\Delta = 0$). Potom můžeme zobrazovací rovnici psát ve tvaru

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{f_1 + \Delta} = \frac{1}{f_1}\,, \tag{1}$$

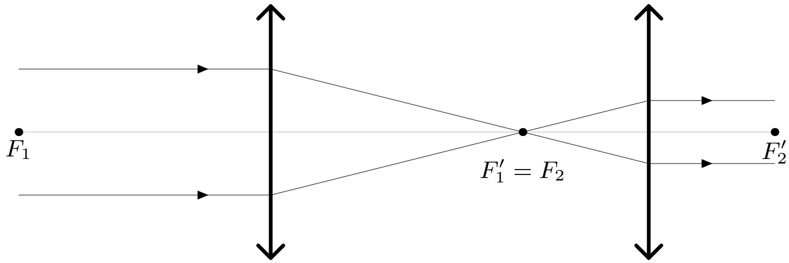
odkud lze vypočítat patřičnou vzdálenost a_1.

Kromě hvězdářských dalekohledů jsou ještě dalekohledy na pozemské vzdálenosti, které se však od obou soustav ze zadání liší – zobrazujeme předměty, ke kterým se můžeme dostat relativně blízko, a ohniska okuláru a objektivu nesplývají. Je tady jistá podobnost s mikroskopy. V tomto případě však nelze měnit vzdálenost a_1, proto se mění vzdálenost Δ, kterou můžeme vypočítat se stejné rovnice (1).

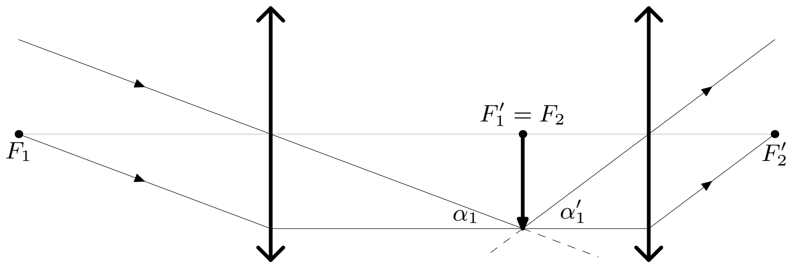
Na obr. 1 a 2 vidíme průchod paprsků dalekohledem a na obr. 3 průchod mikroskopem. Současně je na obrázcích vidět, že do dalekohledu přichází paprsky z nekonečna a ohniska objektivu a okuláru splývají. Dále je předmět blízko k mikroskopu a na obr. 3 je vyznačena vzdálenost Δ.

Smysluplné zvětšení je poměr úhlových velikostí, a to z jednoduchého důvodu. Velikost obrazu vytvořeného na sítnici oka závisí právě na úhlové velikosti předmětu. Pro mikroskop (lupu a další zobrazovací soustavy na blízko) se porovnává úhel obrazu v mikroskopu a úhel

[1] Takový obraz není virtuální v pravém slova smyslu, ale tento případ lze interpretovat jednak tak, že se vytvoří skutečný obraz v plus nekonečnu, nebo že se vytvoří virtuální obraz v minus nekonečnu, což je přesně to, co chceme.



Obr. 1: Průchod horizontálních paprsků dalekohledem



Obr. 2: Průchod šikmých paprsků dalekohledem

předmětu v konvenční zrakové vzdálenosti $L = 25\,\mathrm{cm}$. Tato vzdálenost je zvolena proto, že čím blíže předmět je, tím větší ho vidíme (a zvětšení chceme porovnávat s nejlepším možným pozorováním pouhým okem), ale současně oko není schopné zaostřit libovolně blízké předměty. Konvenční zraková vzdálenost je blízkým bodem (nejbližší bod, na který jsme schopni zaostřit) průměrného lidského jedince.

V případě dalekohledu nemůžeme pozorovat předměty v konvenční zrakové vzdálenosti, proto je třeba zvětšení definovat jako poměr úhlových velikostí tělesa v dalekohledu a bez dalekohledu. To můžeme udělat díky tomu, že vzdálenost pozorovaných předmětů je výrazně vyšší, než jak moc jsme schopni se k těm předmětům přiblížit (tedy toto zvětšení nezávisí na naší poloze).

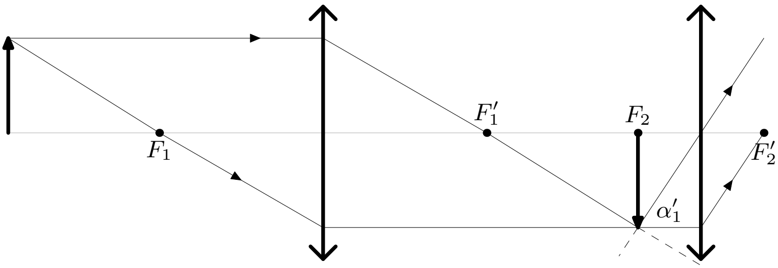
Při výpočtu zvětšení předpokládáme, že úhlové velikosti předmětu i obrazu jsou malé, tedy můžeme použít vzorce

$$\sin x \approx x\,,$$
$$\mathrm{tg}\, x \approx x\,.$$

Tuto aproximaci můžeme použít, protože mikroskopem koukáme na velice malé předměty a dalekohledem koukáme do velmi velké vzdálenosti. Jedná se o klasickou paraxiální aproximaci.

Spočtěme nyní zvětšení mikroskopu. Úhlová velikost předmětu je

$$\alpha = \frac{y}{L}\,,$$



Obr. 3: Průchod paprsků mikroskopem

kde y je jeho příčný rozměr. Dále z podobnosti trojúhelníků na obr. 3 vidíme

$$\frac{y}{f_1} = \frac{-h}{\Delta} = \frac{-f_2\alpha'}{\Delta}\,,$$

kde h je příčná velikost meziobrazu (který je převrácený). Teď už můžeme psát vzorec pro úhlové zvětšení mikroskopu

$$\Gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{-\frac{y\Delta}{f_1 f_2}}{\frac{y}{L}} = -\frac{L\Delta}{f_1 f_2}\,.$$

K výpočtu zvětšení dalekohledu využijeme obr. 2. Interpretovat ho můžeme dvojím způsobem, buď je předmět vycentrovaný na optické ose a paprsky přichází od jeho horního kraje (a y je tedy jeho poloměr), nebo dolní okraj předmětu je na optické ose, paprsky také přichází od jeho horního kraje, ale y je jeho celý průměr. Úhel paprsků a optické osy odpovídá úhlu α a úhel finálních paprsků, mířících do oka, s optickou osou je právě úhel α'. Z obrazku je vidět

$$h = f_1\alpha = f_2\alpha'\,,$$

kde jsme však nechali pro názornost pouze kladná znaménka. Protože bude obraz převrácený, musíme do vzorce pro zvětšení přidat minus. Nyní jednoduše vyjádříme zvětšení dalekohledu

$$\Gamma = -\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1}{f_2}\,.$$

Aby tedy dalekohled skutečně zvětšoval, musí mít okulár menší ohniskovou délku než objektiv. Nenechte se však zmást tím, že v tomto případě bude obraz předmětu dalekohledem příčně zmenšený (jak vidíme na obr. 1), záleží totiž především na úhlovém zvětšení.

Reálně využívané zobrazovací soustavy jsou složené z mnoha zrcadel, hranolů a čoček, které převrací obraz a především eliminují vady zobrazení – např. sférickou a chromatickou.

Komentáře k došlým řešením

Mnoho z vás řešilo úlohu jako běžnou číslovanou. Hlavní pointou zde bylo např. odůvodnit, že příčné zvětšení není určující, že ve skutečnosti nás zajímá úhlové, nebo v rámci lepšího pochopení zobrazovací optiky vztahy pro zvětšení odvodit (finální vzorec se běžně učí na středních školách). Také jste mohli vymyslet, že zaostřování mikroskopu spočívá v tom, že meziobraz musí vzniknout právě v ohnisku okuláru (nikoli např. v umístění předmětu do ohniska objektivu).

Další zajímavý problém je, kde se vzala konvenční zraková vzdálenost, a proč je pro zvětšení použitá právě vzdálenost blízkého bodu lidského oka.

Stejně tak mnoho z vás překreslilo (nebo zkopírovalo) schéma mikroskopu z wikipedie, aniž by ho řádně ocitovala. Ve skutečnosti si na něm ale můžete všimnout chyby, že pokud meziobraz vznikne v ohnisku okuláru, musí podle zobrazovací rovnice vzniknout obraz v nekonečnu, a tedy paprsky vycházející z mikroskopu musí být rovnoběžné. Lépe řečeno, toto je teoretická idea a prakticky se nám to nepovede nastavit přesně.

Jakub Dolejší
dolejsi@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.