

Úloha III.S ... entropická

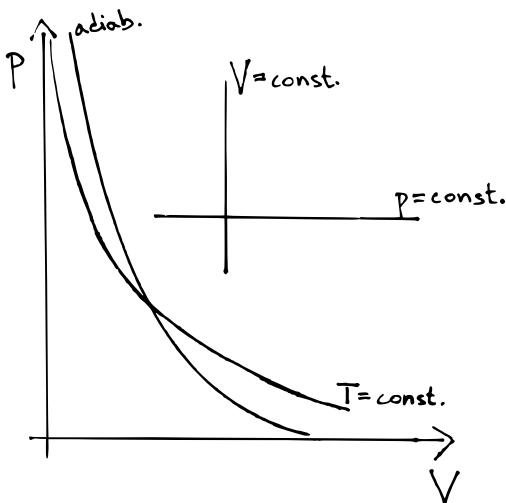
6 bodů; průměr 3,50; řešilo 56 studentů

- a) Všechny stavy ideálního plynu umíme nakreslit do různých diagramů: pV diagram, pT diagram a tak dále. Na svislou osu se vynáší první veličina, na vodorovnou osu se vynáší druhá veličina. Každý bod tedy určuje dva parametry.

Načrtněte do pV diagramu čtyři děje s ideálním plynem, které znáte. Udělejte to samé pro Tp diagram. Jak by vypadal UT diagram? Vysvětlete, jak se nevhodnost těchto dvou proměnných projeví na tomto obrázku.

- b) Jaké jednotky má entropie? Jaké jiné veličiny s těmito jednotkami znáte?
- c) V seriálu jsme rozebrali případ nárůstu entropie, když plyn přijímal teplo. Provedte obdobnou úvahu pro plyn odevzdávající teplo.
- d) Víte, že při adiabatickém ději se entropie nemění. Proto entropie jako funkce objemu a tlaku $S(p, V)$ může obsahovat jen takovou kombinaci objemu a tlaku, která se též nemění při adiabatickém procesu. Jaký je to výraz? Nakreslete do pV diagramu (svislá osa je p , vodorovná V) křivky, na nichž je entropie konstantní. Souhlasí výsledek této úvahy se vzorcem, který jsme pro entropii odvodili?
- e) Vyjádřete entropii ideálního plynu jako funkci $S(p, V)$, $S(T, V)$, a $S(U, V)$.

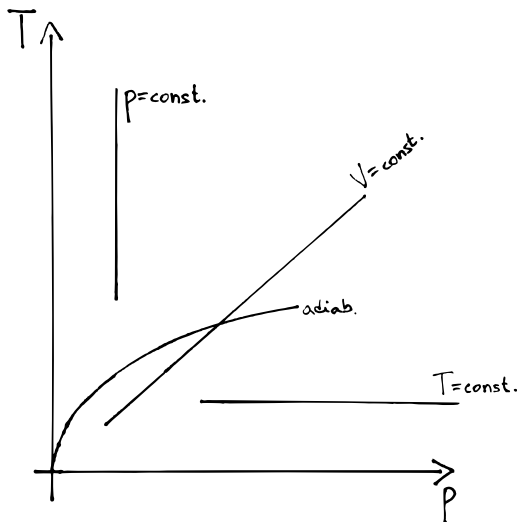
Jančímu bylo líto, jak málo se učil o entropii.



Obr. 1: pV diagram a načrtnuté procesy

- a) pV diagram je dobře známý. Pre izotermický proces je konštantné pV , kreslíme teda hyperbolu. Pri adiabate je $p \propto 1/V^\kappa$, $\kappa > 1$, teda¹ v porovnaní s izotermou rýchlejšie klesá do nuly pre väčšie V , no pre malé objemy je tlak ešte väčší. Celkovo je teda adiabata *strmšia* ako izoterma. V Tp diagrame sú izotermický a izobarický proces veľmi jednoduché, sú to

¹Symbol \propto sa číta *úmerný*. $p \propto 1/V$ znamená, že existuje taká konštanta A , že $p = A/V$.

Obr. 2: Tp diagram a načrtnuté procesy

vodorovná a zvislá čiara. Izochorický proces spĺňa $T = Vp/(nR)$, alebo $T \propto p$. Ide teda o priamku prechádzajúcu nulou tlaku a objemu. Adiabatický proces vyžaduje trochu počítania. Po dosadení do pV^κ za objem dostaneme, až na konštanty, $p^{1-\kappa}T^\kappa$, čo po umocnení na $1/\kappa$ dá

$$p^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} T.$$

Toto sa počas adiabatického procesu nemení, teda platí $T \propto p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$, alebo

$$T \propto p^{\frac{2}{s+2}}.$$

Pre jednoatómový plyn je $s = 3$ a $2/(s+2) = 0,4$, pre dvojátómový plyn máme $s = 5$ a $2/(s+2) \doteq 0,29$.

Na UT diagrame vieme znázorniť všetky stavy, no nie jednoznačne! Kvôli zvláštnosti ideálneho plynu totiž pri konštantnej teplote nezávisí vnútorná energia na tlaku či objeme. Všetky stavy ideálneho plynu sa teda scvrknú na priamku $U = snRT/2$, deje budú podmnožinami tejto priamky. Špeciálne izotermický dej bude len jeden bod.

b) Jednotky entropie ľahko vidíme zo vzťahu

$$dS = \frac{\delta Q}{T},$$

je to $J \cdot K^{-1}$, alebo v SI $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$. Rovnakú jednotku má aj (nie merná) tepelná kapacita a tiež Boltzmannova konštanta k_B .

c) Pozrieme sa na nevratný izobarický, či izochorický proces. Pri izotermickom a adiabatickom (ak sú realizované vratne) sa entropia nemení. Máme preskúmať prípad, keď plyn odovzdáva

teplo, teda $\delta Q < 0$. Teplota plynu musí byť vyššia ako teplota rezervoáru, $T_{\text{plyn}} > T_{\text{rez}}$. Zmena entropie je, rovnako ako pri prijímaní tepla

$$dS_{\text{celk}} = dS_{\text{plyn}} + dS_{\text{rez}} = \delta Q/T_{\text{plyn}} - \delta Q/T_{\text{rez}} = (T_{\text{rez}} - T_{\text{plyn}}) \frac{\delta Q}{T_{\text{plyn}} T_{\text{rez}}}.$$

Tu máme súčin dvoch záporných veličín: rozdielu $T_{\text{rez}} - T_{\text{plyn}}$ a δQ , teda entropia opäť rastie.

- d) Pri adiabatickom procese sa nemení pV^κ , na pV diagrame miesta s konštantnou entropiou sú práve adiabaty, aké sme kreslili v prvej podúlohe. Stačí sa teda pozrieť, aká kombinácia p a V vystupuje v $S(p, V)$ (toto vezmeme z nasledujúcej podúlohy)

$$S(p, V) = \frac{s}{2} nR \ln \left(\frac{pV^\kappa}{Rn^\kappa} \right) + nRs_0.$$

Skutočne, entropia závisí na tlaku a objeme len cez pV^κ a všetko spolu súhlasí.

- e) Tvar $S(T, V)$ máme už zo seriálu

$$S(T, V) = nR \ln \left(\frac{T^{\frac{s}{2}} V}{n} \right) + nRs_0.$$

Eliminovaním teploty pomocou $nRT = pV$ dostaneme

$$S(p, V) = nR \ln \left(\frac{(pV)^{\frac{s}{2}} V}{n(nR)^{\frac{s}{2}}} \right) + nRs_0.$$

Celý argument logaritmu upravíme ako niečo na $s/2$, takže dostaneme

$$S(p, V) = nR \ln \left(\frac{pV^{\frac{s+2}{s}}}{Rn^{\frac{s+2}{s}}} \right)^{\frac{s}{2}} + nRs_0 = \frac{s}{2} nR \ln \left(\frac{pV^\kappa}{Rn^\kappa} \right) + nRs_0,$$

kde sme si spomenuli na definičný vzorec pre κ

$$\kappa = \frac{s+2}{s}.$$

Dosadiť za teplotu z kalorickej rovnice je tiež jednoduché

$$S(U, V) = nR \ln \left(\frac{U^{\frac{s}{2}} V}{n(\frac{s}{2} nR)^{\frac{s}{2}}} \right) + nRs_0.$$

Po vyňatí exponentu vieme tento výraz upraviť na

$$S(U, V) = \frac{s}{2} nR \ln \left(\frac{UV^{\frac{2}{s}}}{\frac{s}{2} Rn^{\frac{s+2}{s}}} \right) + nRs_0 = \frac{s}{2} nR \ln \left(\frac{UV^{\kappa-1}}{\frac{s}{2} Rn^\kappa} \right) + nRs_0.$$

Ján Pulmann

janci@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.