Úloha II.3 ... fatální upuštění

3 body; (chybí statistiky)

Z rakety obíhající po kružnici ve výšce $h = 2\,000\,\mathrm{km}$ nad Zemí hodíme směrem k Zemi nebohý šroubovák rychlostí $v = 5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ vůči lodi. Za jak dlouho dopadne?

Karel nemá rád šroubováky.

Pred tým, ako skrutkovač hodíme, obieha spolu s nami po kruhovej dráhe. Rýchlosť v_0, ktorou obieha, určíme z rovnosti odstredivej a gravitačnej sily $mv_0^2/r_0 = GMm/r_0^2$, kde M je hmotnosť Zeme a r_0 polomer pôvodnej dráhy, čím dostávame

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}\,.$$

Keďže skrutkovač vrhneme smerom do stredu Zeme, voči osi kolmej na rovinu dráhy prechádzajúcu stredom Zeme sa moment hybnosti nezmení. Keďže v perigeu (najnižšom bode na novej, eliptickej dráhe skrutkovača) bude rýchlosť znova kolmá na sprievodič, zo zachovania momentu hybnosti dostaneme

$$v_0 r_0 = v_\mathrm{p} r_\mathrm{p}\,, \tag{1}$$

kde $v_0, r_0; v_\mathrm{p}, r_\mathrm{p}$ sú rýchlosti a vzdialenosti od stredu Zeme v momente pred hodením; resp. v perigeu. Tiež vieme, že na novej dráhe sa musí zachovávať energia. Pre energiu v momente po odhodení dostaneme

$$E_1 = \frac{m\left(v_0^2 + v^2\right)}{2} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2r_0}\,,$$

kde sme využili znalosť v_0. V perigeu bude energia vyzerať podobne a dostaneme podmienku zachovania energie

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{2r_0} = \frac{mv_\mathrm{p}^2}{2} - \frac{GMm}{r_\mathrm{p}}\,. \tag{2}$$

Čím už máme všetko, čo na riešenie potrebujeme. Stačí len vyriešiť sústavu rovníc (1) a (2), čím dostaneme kvadratickú rovnicu voči $1/r_\mathrm{p}$

$$0 = \frac{1}{r_\mathrm{p}^2} v_0^2 r_0^2 - 2GM\frac{1}{r_\mathrm{p}} + \frac{GM}{r_0} - v^2\,,$$

ktorej riešením po dosadení za v_0 dostaneme

$$\frac{1}{r_\mathrm{p}} = \frac{1}{r_0}\left(1 + \sqrt{\frac{r_0 v^2}{GM}}\right) = \frac{1}{r_0}\left(1 + \frac{v}{v_0}\right)\,,$$

kde sme vybrali riešenie so $+$, pretože ide o $1/r_\mathrm{p}$ a potrebujeme perigeum, teda nižšie r_p. Riešenie so znamienkom $-$ by nám dalo druhý bod, v ktorom platia všetky naše predpoklady, teda apogeum. Keďže vieme, že v našom prípade $v/v_0 \ll 1$, môžeme vzťah aproximovať

$$r_\mathrm{p} \approx r_0\left(1 - \sqrt{\frac{r_0 v^2}{GM}}\right)\,.$$

Sem už stačí len dosadiť hodnoty zo zadania a následne odečíst polomer Zeme r_Z, dostaneme $r_\mathrm{p} - r_\mathrm{Z} \doteq 1\,998\,\mathrm{km}$, takže vyhodenie má len minimálny vplyv na dráhu skrutkovača a na Zem nedopadne.

Ak by sme chceli, aby na Zem dopadol (teda aby sme dostali $r_\mathrm{p} = r_\mathrm{Z}$), potrebovali by sme výrazne väčšiu rýchlosť v, a teda naša aproximácia už nemusí platiť. Dostaneme

$$\frac{1}{r_\mathrm{Z}} = \frac{1}{r_\mathrm{Z} + h}\left[1 + \sqrt{\frac{(r_\mathrm{Z} + h)\, v^2}{GM}}\right] ,$$

z čoho vyjadríme potrebnú rýchlosť

$$v = \frac{h}{r_\mathrm{Z}}\sqrt{\frac{GM}{r_\mathrm{Z} + h}} = \frac{h}{r_\mathrm{Z}} v_0 \doteq 2{,}2\,\mathrm{km/s}\,.$$

Pre predstavu, keby sme takouto rýchlosťou hodili skrutkovač zo Zeme nahor, vyletel by do výšky skoro 250 km. Ešte zaujímavejšie ale je, že ak by sme takto aj dokázali skrutkovač odhodiť a ak by skrutkovač vážil 0,3 kg a my 60 kg, tak by nás spätný ráz vrazil do Zeme takou silou ako pád zo šiestich metrov.

Filip Ayazi
`filip@fykos.cz`