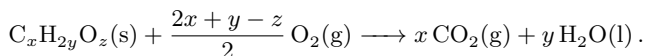


Úloha IV.P ... nejmenovaná tyčinka 4 body; průměr 2,15; řešilo 26 studentů

Na základě biochemických dějů v lidském těle a jeho mechaniky odhadněte, kolik energie spotřebuje cyklista na překonání tisíce výškových metrů, je-li průměrné stoupání 5%.

Michal s Tomášem přemýšleli na kolik kopců stačí jedna tyčinka (která FYKOS nesponzoruje, a proto zde neuvedeme její název!).

Najprv si ujasníme, čo budeme myslieť pod pojmom energia (pri stravovaní). Názov úlohy napovedá, že by sa hodilo dačo ako to číslo (energetická hodnota), ktoré je napísané na obaloch od jedla. Proste maximálna energia, ktorú vieme z jedla získať. V organizme sa získava spaľovaním uhlíkatých zlúčenín s O_2 na H_2O (kvapalnú) a CO_2 , je teda rozumné priradiť jedlu energiu rovnú teplu uvoľnenému v reakcii



Každý látke vieme priradiť tzv. štandardnú zlučovaciu entalpiu ΔH_f° , ktorá vyjadruje reakčné teplo spotrebované pri jej vzniku z prvkov pri štandardných podmienkach – obvykle atmosférický tlak a izbová teplota – (v ľudskom tele sú tlak a teplota trochu iné, ale to môžeme zanedbať). Reakcii potom môžeme priradiť jej štandardnú reakčnú entalpiu ΔH_r° ako stechiometrický súčet štandardných zlučovacích entalpií produktov mínus reaktantov. Takže $\Delta H_{r,1}^\circ(C_xH_{2y}O_z)$ je práve reakčné teplo spotrebované pri spálení daného množstva (typicky jedného molu) látky $C_xH_{2y}O_z$; s mínusom dostaneme uvoľnené reakčné teplo.

Prevýšeníu 1 km zo zadania zodpovedá vzdialenosť zhruba 20 km a navyše to je dosť do kopca. Predpokladajme, že cyklista je chytrý a nechce sa úplne zabiť. Šprint a dlhšia jazda totiž využívajú úplne iné zdroje energie a mechanizmy ich premeny na energiu (tzv. metabolické dráhy). Dokonca sa na ne špecializujú aj rôzne druhy svalových vlákien. Menší výkon, ale väčšiu výdrž má aeróbne (v reakcii vystupuje kyslík) spaľovanie tukov. Zvoľme si teda ako zdroj energie bežný tripalmitoylglycerol. Entalpia jeho spálenia je $^1 \Delta H_{r,1}^\circ(C_{51}H_{98}O_6) = -32 \text{ MJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Keďže je záporná, uvoľní sa z 1 molu spáleného $C_{51}H_{98}O_6$ teplo 32 MJ. Teraz potrebujeme zistiť, aká práca sa z neho dá vykonať.

Biochémia

Základnou „energetickou jednotkou“ v metabolických dráhach je adenzíntrifosfát (ATP). Väčšinou sa hydrolyzuje na adenzín difosfát (ADP) a fosfát (Pi), pričom sa uvoľňuje energia pre iné energeticky náročné biochemické reakcie, alebo sa z ADP a Pi skladá pomocou energie uvoľnenej v biochemických reakciách. Niekedy sa naraz odtrhnú dve fosfátové skupiny ako difosfát (PPi), čo je ale energeticky ekvivalentné dvom reakciám $ATP + H_2O \longrightarrow ADP + Pi$. A niekedy sa použije iný nukleotid, napr. guanozíntrifosfát (GTP), ale prenáša prakticky rovnaké množstvo energie. Môžeme preto hovoriť o ekvivalentoch ATP potrebných/vzniknutých pri reakcii z ADP ako o jednotkách energie.

Okrem ATP sa často objavujú aj ďalšie pomocné látky (kofaktory), napr. nikotínamidadenín dinukleotid (NAD^+) a jeho analógy ako flavínadenín dinukleotid (FAD). Majú aj svoje redukované formy ($NADH$, $FADH_2$), ktoré sú súčasťou tzv. elektrónového transportného reťazca, kde sa redukuje kyslík a vzniká voda. Pri tom sa uvoľní energia, ktorá sa v prípade $NADH$ využije na vznik 2,5 ekv. ATP (v prípade $FADH_2$ vznikne 1,5 ekv. ATP). Ďalším dôležitým biochemickým kofaktorom je koenzým A (CoA).

¹<https://archive.today/rwFII>

Pri trávení sa tuk rozloží na glycerol a mastné kyseliny, v našom prípade 3 ekv. kyseliny palmitovej ($C_{15}-COOH$; uhľovodíkový reťazec budeme len stručne značiť počtom uhlíkov). Tieto látky sa nejakou mierou musia dostať do bunky. Pritom sa síce regeneruje a zasa rozkladá tuk, ale tento proces nie je podstatný pre energetické úvahy. Pozrime sa na metabolizmus kyseliny palmitovej v bunke.

Prvý krok, v ktorom sa energia spotrebuje, je „aktivácia“ mastnej kyseliny jej pripojením na CoA. To si vyžiada spotrebu 2 ekvivalentov ATP (toto je príklad reakcie, v ktorej z ATP vzniká AMP). Vzniknutý $C_{15}CO-CoA$ pokračuje do β -oxidácie – cyklického procesu, v ktorom sa vždy z $C_{2n+1}CO-CoA$ odtrhne acetylkoenzým A ($Ac-CoA$, v našom značení $C_1CO-CoA$) za vzniku 1 ekv. $FADH_2$, 1 ekv. NADH (teda 4 ekv. ATP) a $C_{2n-1}CO-CoA$. Teraz vidíme, že sme si dobre zvolili kyselinu s párnym počtom uhlíkov: uhľovodíkový reťazec sa vždy skrúti o 2 a z $C_{15}CO-CoA$ vznikne 8 $Ac-CoA$ a 32 ekv. ATP²

$Ac-CoA$ pokračuje do citrátového cyklu, v ktorom z neho vznikne CO_2 , H_2O , 3 ekv. NADH, 1 ekv. GTP a 1 ekv. $FADH_2$. Celkový energetický zisk z kys. palmitovej je 110 ekv. ATP. Glycerol môže byť prevedený na glyceraldehyd-3-fosfát (spotrebuje sa 1 ekv. ATP a vznikne 1 ekv. NADH). Z neho vznikne v glykolýze $Ac-CoA$ (uvoľní sa 1 ekv. ATP a 2 ekv. NADH), ktorý zas pokračuje do citrátového cyklu. Z glycerolu získame teda 17,5 ekv. ATP a z tripalmitoylglycerolu asi 350 ekv. ATP.

Termodynamika

Teraz sa naskytuje otázka: akú prácu vedia svaly vykonať pomocou daného množstva ATP?

Najprv si ujasníme, ako sa vyráta entalpia. Nestačí zobrať len súčet energií chemických väzieb produktov mínus reaktantov – zmenu vnútornej energie molekúl ΔU v reakcii – lebo v reakcii vznikajú aj plyny, ktoré sa eventuálne uvoľňujú do vzduchu. Pri uvoľnení plynov s objemom V do prostredia s tlakom p (ktorý môžeme považovať za atmosférický) treba vykonať prácu pV , teplo spotrebované pri reakcii teda získame ako $\Delta H = \Delta U + pV \approx \Delta H^\circ$.

Mínus entalpia síce vyjadruje teplo, ktoré sa uvoľní v reakcii, ale nie všetko sa dá premeniť na prácu. Problém je v zmene entropie. Entropia sa totiž mení jednak tým, že sa uvoľňuje alebo spotrebuje teplo v prostredí, ale aj vznikáním a zaníkaním väzieb v molekulách. Entropia je „miera neusporiadanosti systému“, takže informácia o tom, že dva atómy sú spojené, do nej určite prispieva. 2. termodynamický zákon hovorí, že na to, aby entropia neklesala, sa musí časť energie uvoľnenej premeniť na teplo, a nie na prácu.

Maximálnu prácu (zasa s opačným znamienkom, ako pri entalpii), ktorá sa môže uvoľniť v reakcii, popisuje tzv. reakčná Gibbsova energia ΔG . V reakcii $ADP + Pi \longrightarrow ATP + H_2O$ sa dá vyjadriť ako

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = \Delta H - T\Delta S^\circ + RT \ln q \approx \Delta G^\circ + RT \ln q,$$

kde $q = [ADP][Pi]/[ATP]$ je stechiometrický súčin bezrozmerných koncentrácií (v jednotkách $\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$; koncentrácia rozpúšťadla – vody – sa doňho neráta). Výraz $\Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$ pri teplote 25°C ($T \doteq 298\text{ K}$) potom označujeme ako štandardnú zmenu Gibbsovej energie v danej reakcii. Pre hydrolyzu ATP poznáme³ $\Delta G^\circ \doteq -31\text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

²Pri odbúravaní mastných kyselín s nepárnym počtom uhlíkov sa β -oxidácia zastaví na trojuhlíkovom konci – propionylkoenzým A (v našom značení $C_2CO-CoA$). Ten ďalej prechádza biochemickými dráhami trojuhlíkatých a štvoruhlíkatých kyselín.

³<https://archive.today/jjCfY>

Entropia $\Delta S(M)$ jedného molu jedného typu molekúl M (teda hodnota, o ktorú sa zmení entropia tým, že tieto molekuly zaniknú) sa totiž dá rozpísať do dvoch členov – člen ΔS° zodpovedá entropii, ktorú by mali, ak by sa mohli voľne pohybovať v objeme 1 l a člen $-R \ln q$ prepočtu entropie na iný objem, v ktorom budú potom mať inú koncentráciu. ΔS° závisí zložito aj na vnútornom usporiadaní týchto molekúl, ide teda o experimentálne namerané hodnoty. Zmenu entropie v reakcii potom vypočítame z ΔS jednotlivých molekúl rovnako ako zmenu entalpie.

Vidíme, že ΔG_{ATP} závisí výrazne na koncentráciách ATP, ADP a Pi, ale aj rôznych látkach, ktoré tieto koncentrácie ovplyvňujú. Jej hodnotu je treba proste nmerať. Väčšina hodnôt ΔG_{ATP} nameraných v svaloch sa pohybuje okolo⁴ $-50 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, z čoho vieme prepočítať, že na prácu (teda ΔG , ktoré sa dá získať z 350 ekv. ATP) sa môže premeniť maximálne zhruba polovica tepla uvoľneného pri spálení $\text{C}_{51}\text{H}_{98}\text{O}_6$ (teda zmeny entalpie), $\Delta G_1 \doteq 18 \text{ MJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Takú dokonalú účinnosť sval samozrejme nemá. Ten istý zdroj uvádza, že v skutočnosti je získaná práca len zhruba 30 % ΔG_1 , teda 5,5 MJ z 1 molu tripalmitoylglycerolu.

Pozor, spočítali sme len max. prácu, ktorá sa dá teoreticky z ATP vyťažiť. V skutočnosti svaly nepremieňajú ATP na prácu, ale na napätie T . Doslova na to, aby sa posunuli svalové proteíny. Sila F , ktorú vie sval zložený z rovnakých vlákien vyvinúť, teda rastie s jeho prierezom S , lebo $F = TS$. Ak by sme človeka zväčšili k -krát, jeho objem a hmotnosť narastie k^3 -krát a max. sila len k^2 -krát. Väčší, resp. ťažší, človek teda na svoju hmotnosť vyvinie menšiu silu ako menší a ťažšie sa utiahne do kopca. To je dôvod, prečo sú profesionálni cyklisti relatívne chudí.

Mechanika

Áké sily cyklistu brzdia? Samozrejme tiažová, potom nejaký odpor vzduchu, trenie v ložiskách a valivý odpor. Odporová sila vzduchu rastie s rýchlosťou cyklistu, ktorá do kopca nie je veľmi veľká. Konkrétne ak by tých 20 km mal náš cyklista prejsť pohodovým tempom za 4 hodiny, bude mať rýchlosť $v = 5 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pri tomto tempe môžeme využiť vyššie spomenutý mechanizmus získavania energie. Plochu cyklistu odhadnime na $S = 0,5 \text{ m}^2$, koeficient odporu vzduchu nech je $C = 1$, hustota vzduchu $\rho \doteq 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Podľa vzorca

$$F_o = \frac{CS\rho v^2}{2}$$

dostaneme odhadom $F_o \doteq 0,5 \text{ N}$. Ak má cyklista s bicyklom hmotnosť $m = 80 \text{ kg}$ a uhol stúpania (pre malé hodnoty je uhol v rad. približne rovný stúpaniu v percentách) $\alpha = 0,05$, zložka tiažovej sily, ktorá ho ťahá dozadu, je $F_{g,\parallel} = mg \sin \alpha \doteq 40 \text{ N}$, odpor vzduchu je teda úplne zanedbateľný. Straty energie v ložiskách sa dajú výrazne minimalizovať dobrým namazaním a valivý odpor dofúkaním pneumatík⁵ (predpokladáme, že cyklista je chytrý), takže môžeme vplyv všetkých síl okrem gravitačnej zanedbať.

Existuje veľa techník bicyklovania do kopca. Niektoré sú lepšie (efektívnejšie), iné horšie. Nie všetka práca svalov sa totiž využije na prekonanie spomenutých síl. Časť sa spotrebuje na zrýchľovanie/spomaľovanie nôh, časť na udržanie polohy tela a bicykla (napr. ak cyklista na pedáloch stojí a bicykel sa viac kýve zo strany na stranu) a taktiež noha netlačí úplne kolmo na

⁴Nicholas P. Smith, Christopher J. Barclay, Denis S. Loiselle: The efficiency of muscle contraction. Progress in Biophysics and Molecular Biology 2005.

⁵<https://archive.today/JfUUV>

pedále, takže sa energia spotrebuje aj na napínanie svalov neúčinným tlačením rovnobežne s kľukou pedálov.⁶

Tento tretí efekt sa môžeme pokúsiť odhadnúť. Zoberme si jednoduchý model krútenia pedálov: uhlová rýchlosť pedálov je konštantná, cyklista tlačí na pedál v rozsahu uhlov (pedálu od kolmice) $\varphi \in (20^\circ, 160^\circ)$ konštantnou silou F zvislo dole. Môžeme predpokladať, že svaly spotrebujú rovnako veľa energie v oboch prípadoch. Akú prácu (W_1) vykoná oproti prípadu (W_0), keď by tlačil silou F vždy kolmo na kľuku pedálov?

Je jasné, že $W_0 = Fs = 140^\circ RF \doteq 2,4RF$, kde R je vzdialenosť pedálu od osi otáčania. Ak F pôsobí dole, analogicky s potenciálnou energiou v tiažovom poli môžeme povedať, že sa pedál pohol o $\Delta h = R(\cos 20^\circ - \cos 160^\circ) \doteq 1,9R$ dole a vykonaná práca $W_1 = \Delta h F \doteq 1,9RF$, čo je asi 80% W_0 . Skutočné straty energie závisia dosť na spôsobe pedálovania, ale použijeme tento výsledok pre finálny odhad.

Záver

Prevýšeníu $H = 1$ km zodpovedá potenciálna energia $E_p = Hmg \doteq 0,7$ MJ. Odhadli sme, že svaly musia spáliť aspoň $E_p/0,8 \doteq 0,9$ MJ. To zodpovedá 0,15 mol tripalmitoylglycerolu, resp. hľadanej energii $E = 5$ MJ $\doteq 1 \cdot 10^3$ kcal energie, resp. štyrom 50gramovým nemenovaným tyčinkám s energetickou hodnotou zhruba 250 kcal.

To je stále len pre dosť idealizovaný prípad. Ak by stúpanie nebolo rovnomerné, teda s krátkymi prudkými stúpaniami a rovinkami alebo sa cyklista ponáhlal, musel by zapojiť anaeróbne dýchanie, ktoré je menej efektívne, lebo nie je možné využiť elektrónový transportný reťazec. V skutočnosti aj pri miernom tempe budú svaly spaľovať aj glukózu. Celý organizmus potrebuje viac energie atď., proste je kopa bodov, v ktorých sa ešte môže stratiť energia. Jedna platná cifra v E je veľa, odhad je skôr zopár MJ a zopár tyčiniiek.

Jakub Šafin
xellos@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

⁶<https://archive.today/uXn09>