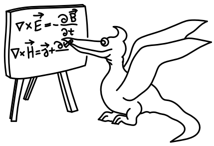
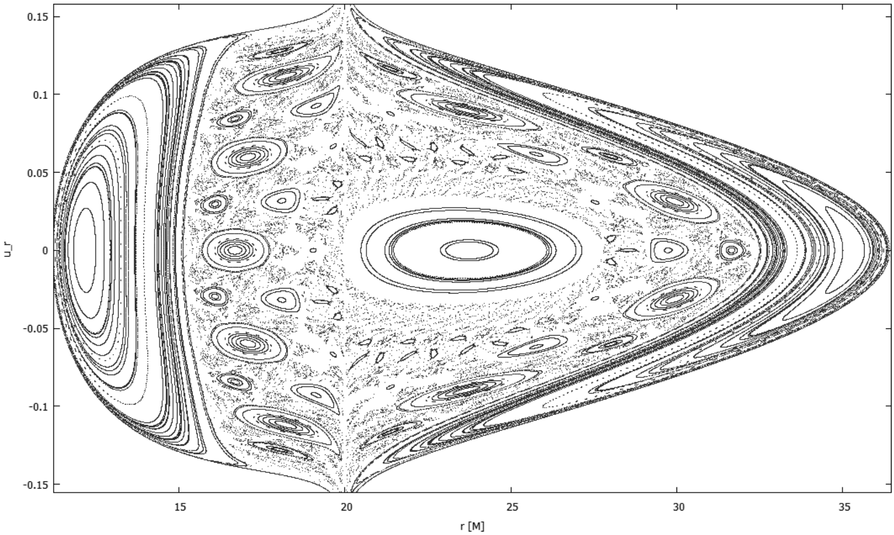


Seriál: Jak okřídlit slepici

Ve škole se učíte o sféricky symetrických slepicích ve vakuu a pak najednou vyběhnete ven a vidíte jen velmi nesymetrické slepice úplně normálně vnořené do vzduchu. Učíte se o vzduchu jako o ideálním plynu, který nikdy nezkapalní, a na akcích FYKOSu vidíte experimenty s jeho hlavní složkou, dusíkem, v kapalné formě. Při studiu pohybu hmotného bodu v homogenním gravitačním poli dojdete k závěru, že nejdále dohodíte pod úhlem 45°, ale při golfovém turnaji byste s takovou taktikou pohořeli.

Zmíněné modely se ve škole učíme hlavně proto, že jsou jednoduché. Podávají nám kompaktní „vzorečky“, do nichž dosadíme čísla a dostaneme výsledek. Umožňují nám přímo a jednoduše dohlédnout k důsledku nějaké volby parametrů. Ale je to vlastně trochu neuspokojivé a matoucí. Proč je to ve vakuu, proč homogenní, proč můžeme tohle zanedbat a tohle ne? Můžeme nějak určit, jak moc se bude předpověď našeho idealizovaného modelu odchylovat od reality? A kdy nastává ten okamžik, kdy se takové jednoduché přiblížení úplně zhroutí a je úplně k ničemu?



Obr. 1: Poincarého řez orbitami okolo černé díry s prstencem. Řez vznikl vložením plochy do roviny prstence a poznamenáním vzdálenosti od černé díry r a rychlost směrem k díře u_r při každém protnutí orbity. Různá kolečka odpovídají různým kvaziperiodickým trajektoriím a „rozsypaný čaj“ odpovídá protnutím chaotických trajektorií.

Na tyto a na další otázky narazíme v letošním seriálu. Budeme totiž mluvit o chaosu, to jest o systémech, kde mávnutí motýlího křídla v Brazílii způsobí tornádo v Texasu. V našich zjednodušeních a přiblíženích je to tedy docela bomba, protože malá změna může způsobit zhroucení celého modelu. Po cestě si také ukážeme, jak na naše sféricky symetrické slepice alespoň namontovat elipsoidální křidýlka a připustit jim trochu vzduchu. Chaos na nás totiž čeká sotva za rohem od všech těch idealizovaných systémů ze školy. K výpočtům nám ale už nebude stačit obyčejná kalkulačka a naučíme se sestavovat a pouštět jednoduché simulace.

Numerické simulace nám odemykají svět neuvěřitelné bohatosti složitých vývojů systémů. Vždyť sama příroda je tak bohatá a právě takovéto studium nám umožní alespoň zhruba vidět proč. Už žádné nudné Keplerovy zákony o eliptických orbitách! Už žádné paraboly volného pádu! Už žádná předpověď počasí platná na víc než tři dny! A tak podobně. Alespoň zběžnou představu o tom, jak může jen lehké zkomplikování modelu způsobit nesmírnou rozmanitost pohybů, si můžete udělat z obrázku 1. Ukazuje jakousi mapu možných trajektorií poblíž černé díry s prstencem, ve které najdete nasázené vedle sebe trajektorie všech možných povah i period.

Na to si ale ještě počkejte, protože máte zrovna tělocvik. Dneska se hraje fotbal a na vás vyšla role brankáře. A to není vše, blíží se k vám totiž navíc hřmotná útočnice Alena z protějšího týmu…

Výkop se zákrutou

Stojíte v brance a Alena na vás zrovna vypálila míč. Máte sice výborné znalosti fyziky a dokážete přesně spočítat, kam dopadne hmotný bod vržený ve vakuu, ale docela najednou si nejste svými předpověďmi tak jistí. Dokážu přesně určit rychlost a polohu míče? A poletí opravdu jako hmotný bod ve vakuu? Neměl(a) bych zahrnout tření vzduchu? A co otáčení míče, to by mohlo mít také vliv, ne? Alena dala té meruně pěknou spinu.

Ale to není všechno, i když chceme zahrnout tření, hrají roli i takové faktory jako hmotnost míče, materiál povrchu, jeho přesný tvar, rozložení hmotnosti uvnitř... Stačí jej vymodelovat jako sférickou šlupku s rovnoměrným povrchem? Vždyť je ten míč sešitý z koženkových pěti a šestiúhelníků, kde některé už mají dost sedřený povrch. A co deformace? Alena nám totiž do té naší dokonalé sféry také naloží kopačkou pořádnou ďahu.

Než se vám však tyto myšlenky stihnou domihnout hlavou, míč se blíží. Co se zdálo jako dráha mířící nad brankou se najednou stočilo dolů a hrozí vám „šibenicí“ – gólem tečovaným o břevno. Na přemýšlení už není čas, vrhnete se směrem k míči se zdviženýma rukama a spoléháte na instinktivní odhad a štěstí. Podařilo se – za cenu téměř zlomených prstů se míč vychýlil vzhůru a odrazil od branky. Pumelici jste vykryli a hra pokračuje.

Síla, která náhlé zahnutí míče směrem do branky zapříčinila, je takzvaná Magnusova síla. Jedná se o sílu, která souhrou proudícího vzduchu okolo míče a jeho otáčení působí téměř kolmo na směr pohybu a způsobí jeho „faleš“ (pozor, neplést s Falešem, fykosím organizátorem). Vše ale není tak jednoduché, protože pokud by Magnusova síla působila během pohybu rovnoměrně, byl by poměrně předvídatelný. Magnusova síla však závisí na kvadrátu rychlosti míče a na frekvenci jeho otáčení. Obojí rychlost i otáčení míče však podléhají tření okolního vzduchu, takže prostá předpověď rychlosti na základě gravitace může být úplně mimo.

A jak to spočítat?

Mohli bychom mávat rukama a vypotit ze sebe kvalitativní argument, proč bude mít nakonec dráha míče typický hákovitý tvar, který se málem zabodnul dovnitř naší branky. To by ale nebylo úplně ono, fyzika je také o počítání. Pokusíme se tedy situaci alespoň zhruba popsat pomocí několika efektivních sil a Newtonova zákona pohybu

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{Magn}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Odpor}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{Grav}}\,,$$

kde gravitační síla působí konstantní zrychlení g dolů ve směru osy z, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Grav}} = -mg\boldsymbol{e}_z$ a efekty tření vzduchu vůči míči můžeme efektivně rozložit na Magnusovu sílu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Magn}}$ a odpor vzduchu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{Odpor}}$. Experimenty ukazují, že Magnusova síla splňuje pro uvažované rozmezí rychlostí

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Magn}} = \alpha v(\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v})\,,$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ je vektor úhlové rychlosti, který získáte tak, že stočíte prsty pravé ruky po směru otáčení míče a palec vám ukazuje v jeho směru. Velikost tohoto vektoru je pak počet radiánů otočených míčem za sekundu. α je pak nějaká konstanta závislá na vlastnostech okolního vzduchu a hladkosti povrchu míče. Odpor vzduchu pak můžeme vyjádřit jako

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Odpor}} = -\beta v\boldsymbol{v}\,,$$

kde β je opět nějaká konstanta závislá na vlastnostech vzduchu a míče. Daný vztah pro odpor vzduchu dobře funguje do rychlosti míče zhruba $20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Obě konstanty α i β by se ve skutečnosti mohly během letu lehce měnit, ale to pro teď zanedbáme. Víc nás znepokojuje skutečnost, že pokud míč svojí rotací způsobuje Magnusovu sílu, musí docházet třením i ke zpomalení tohoto otáčení. Pokud budeme předpokládat, že se rotace míče mění velmi pomalu, můžeme používat následující kroutivý moment τ

$$\tau = -\gamma v^3\boldsymbol{\Omega}\,,$$

kde γ je opět konstanta závislá na situaci. Ten pak ovlivňuje rotaci míče opět podle Newtonova zákona upraveného pro rotaci těles

$$\tau = I\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde I je moment setrvačnosti tělesa. Pro tenkou sféru o poměru r a celkové hmotnosti m je moment setrvačnosti $2mr^2/3$. Kroutivý moment τ je však pouze ve směru $\boldsymbol{\Omega}$, a tudíž nebude měnit natočení rotace, ale pouze její rychlost. Rovnici tedy můžeme psát pouze pro úhlovou rychlost Ω a o natočení vektoru se nestarat, protože zůstává konstantní. Když to pak všechno dáme dohromady a algebraicky upravíme, máme sadu dvou provázaných rovnic, jedné vektorové a jedné skalární (tj. pod vektorovou se schovávají tři a dohromady se jedná o čtyři rovnice)

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= -\frac{3\gamma|\dot{\boldsymbol{x}}|^3}{2mr^2}\Omega\,,\\ \ddot{\boldsymbol{x}} &= -g\boldsymbol{e}_z + \frac{|\dot{\boldsymbol{x}}|}{m}\left[\alpha(\boldsymbol{\Omega}\times\dot{\boldsymbol{x}}) + \beta\dot{\boldsymbol{x}}\right]\,,\end{aligned}$$

kde jsme časovou derivaci přeznačili pomocí teček. Tj. $\dot{\boldsymbol{x}}$ je rychlost první časová derivace polohy $\boldsymbol{x}$ a $\ddot{\boldsymbol{x}}$ je zrychlení, druhá časová derivace polohy – obdobně to platí pro úhlovou rychlost Ω.

Okřídlili jsme tedy naši slepici ve vakuu zjednodušenými křidýlky a nechali ji létat ve vzduchu. Při odvození této soustavy rovnic jsme ale dělali to všechno, na co jsme si stěžovali v úvodu. Zanedbávali jsme a zanedbávali, a to bez velkého vysvětlování. Pravda je taková, že jinak fyzika ani dělat nejde. Všechny vlivy vystihnout nemůžeme. Ale můžeme na ně pozapomenout, když nás zajímají pouze přibližné výsledky, a pokud platí jeden veledůležitý předpoklad. Ten předpoklad je, že malé odchylky mají jen malé důsledky. Naše přiblížení míče jako sférické slupky pro moment setrvačnosti se určitě liší jenom málo od opravdového míče, a tudíž se síla zpomalující otáčení míče bude lišit od té opravdové jen málo. Dokážeme ale vyargumentovat to, že to bude mít malý vliv i na chování celé trajektorie?

K řešení tohoto problému existují dvě možnosti – buď zformulujeme praktický model a pak jej otestujeme pozorováním, nebo propočítáme maximum všech možných dalších vlivů. V prvním případě nám funkčnost našeho modelu při experimentu napovídá, že jsme vystihli všechny podstatné vlivy. V druhém případě musíme nalézt a propočítat důsledky všech možných vlivů a zjistit, zda zásadně mění nebo nemění výsledek.

Naší soustavu rovnic ale neumí nikdo analyticky vyřešit – obsahuje totiž souhru mnoha komplikovaných členů, z nichž některé jsou nelineární (obsahují vyšší mocniny proměnných). To znamená, že nedokážeme změnit sílu brzdící otáčení míče a přímo si ověřit, že bude mít tato změna malý důsledek.

S tím se ale dokážeme popasovat numericky, což si ale ukážeme až v příštím díle. Díky své znalosti numerických simulací budete nakonec dozajista špičkovými brankáři. V příštím díle také načneme chaos, těšte se.

V mezičase si můžete nainstalovat program *Octave Forge* ze stránky: `http://sourceforge.net/projects/octave/files/OctaveWindowsbinaries`. Daný odkaz vede na stránky s instalačními soubory pro operační systém Windows, kde si můžete vybrat poslední verzi a instalovat. Pokud používáte raději Linux, jistě se odtud k instalaci také proklikáte. Při instalaci nezapomeňte kromě základních balíků zaškrtnout také balík *odepkg*, který se nám bude hodit pro řešení diferenciálních rovnic. Základního českého průvodce programem naleznete na webu `http://octave.cz`.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.