

ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV

# Fyzikální korespondenční seminář

XXVIII. ročník – 2014/15



Copyright © Aleš Flandera, 2015  
Copyright © **MATFYZPRESS**, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy v Praze, 2015

ISBN 978-80-7378-310-5



# Obsah

<b>Předmluva</b>	<b>4</b>
<b>Zadání teoretických úloh</b>	<b>7</b>
<b>Řešení teoretických úloh</b>	<b>15</b>
<b>Zadání experimentálních úloh</b>	<b>112</b>
<b>Řešení experimentálních úloh</b>	<b>113</b>
<b>Seriál o chaosu a numerických simulacích</b>	<b>144</b>
Kapitola 1: Jak okřídlit slepici . . . . .	144
Kapitola 2: Numerická kopaná . . . . .	148
Kapitola 3: Dynamické vaření . . . . .	153
Kapitola 4: Definujeme chaos! . . . . .	159
Kapitola 5: Rotor a jeho kopačky . . . . .	165
Kapitola 6: Zase na špičce propisky . . . . .	170
<b>Řešení úloh ze seriálu</b>	<b>177</b>
<b>Akce FYKOSu</b>	<b>194</b>
Podzimní soustředění v Obůrce . . . . .	194
Jarní soustředění v Zelené Lhotě . . . . .	196
FYKOSí Fyziklání . . . . .	198
Fyziklání online . . . . .	199
Týden s aplikovanou fyzikou . . . . .	201
Den s experimentální fyzikou . . . . .	204
Víkend s aplikovanou fyzikou . . . . .	205
Cyklus přednášek pro středoškoláky . . . . .	206
<b>Pořadí řešitelů</b>	<b>207</b>



## Předmluva

Milá čtenářko, milý čtenáři!

Do rukou se Ti dostala publikace, která shrnuje veškerou činnost Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v jeho XXVIII. ročníku, který probíhal ve školním roce 2014/15.

FYKOS je nejstarší a také největší fyzikálně zaměřenou korespondenční soutěží pro žáky středních škol v České republice. Je organizován studenty především Matematicko-fyzikální fakulty UK, ale i jiných fakult a škol v České republice i zahraničí, a podporován zaměstnanci Matematicko-fyzikální fakulty UK. Snaží se oslovit studenty se zájmem o fyziku, matematiku, techniku, zkrátka svět kolem nás. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože věříme, že člověk, který se umí zastavit a zamyslet (nejen nad fyzikálními problémy) a cítí touhu dobrat se řešení, se v životě vždy velmi dobře uplatní.

Během školního roku každý z řešitelů obdrží celkem sedm brožur, v nichž nalezneme šest sérií po osmi úlohách, z nichž dvě jsou „jednoduché“ (zaměřené především na první dva ročníky středních škol), jedna více problémová, jedna experimentální a jedna tzv. seriálová. Zbýlé tři úlohy se týkají libovolného fyzikálního tématu a tvoří jádro série. Zadávané úlohy však nejsou příliš podobné těm, které znáte z hodin fyziky. Vyžadují mnohdy poněkud hlubší úvahu, trochu důvtipu nebo něco z vyšší matematiky. Nezřídka je třeba zapátrat na internetu nebo v odborné literatuře. Účastníci si mohou vybrat, které úlohy nakonec vypracují a pošlou nám k opravení, ať už klasicky poštou, nebo přes internet. Opravující pak jejich řešení okomentují a vysvětlí případné chyby. To vše pošleme zpět řešitelům, včetně výsledkových listin, kde se každý může podívat, jak obstál v konkurenci svých vrstevníků. Na konci ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Mimo samotnou korespondenční soutěž pro řešitele připravujeme i další akce. Bezesporu nejpoblábnějšími jsou dvě týdenní soustředění v některém z malebných koutů české země. Jejich účastníci si užijí bohatý program, založený na dopoledních fyzikálních nebo matematických přednáškách a odpoledních aktivitách v přírodě. Nechybí ani prostor pro fyzikální experimenty a výlety na atraktivní místa.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém se spolupodílejí jednotlivé katedry MFF, ale i pracoviště Akademie věd ČR, resp. Ústav jaderného výzkumu v Řeži. Naším řešitelům tak umožňujeme navštívit velmi zajímavá výzkumná pracoviště, kde se dělá opravdová fyzika.

FYKOS umožňuje svým řešitelům podívat se také na špičkové zahraniční vědecké instituce formou poznávacího zájezdu, který se nazývá Týden s aplikovanou fyzikou. V letošním ročníku této nepravidelně pořádané akce jsme se zaměřili především na výzkumná centra v Německu.

Proběhl již devátý ročník tradičního FYKOSího Fyziklání, soutěže pětičlenných týmů v řešení fyzikálních úloh na čas. Vyhrává tým s největším bodovým ziskem,



přičemž rozhoduje jak správnost, tak i rychlost. V letošním roce se soutěže zúčastnilo 81 družstev z ČR i ze Slovenska. To je pro nás skvělým důkazem, že se fyzika a přírodní vědy obecně mezi středoškolskými studenty stále těší popularitě.

FYKOSím Fyzikláním je inspirovaná internetová soutěž Fyziklání online (v zahraniční verzi Online Physics Brawl). V prosinci 2014 proběhl její čtvrtý ročník a opět zaznamenala velký úspěch. Soutěž byla díky její elektronické formě otevřená všem zájemcům, nejenom středoškolákům, pro které je vytvořena především. Čtvrtého ročníku se zúčastnilo 103 středoškolských a 61 jiných týmů. To svědčí o narůstající popularitě soutěže, a nyní se již řadí mezi tradiční FYKOSí akce.

Kromě toho FYKOS organizuje i další menší akce, o nichž se dozvíte dále v této publikaci nebo na našich webových stránkách.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání i řešení jednotlivých úloh XXVIII. ročníku FYKOSu. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, abychom podnítli čtenáře k samostatnému zamyšlení nad možným řešením problému. Příklady jsou navíc pro snazší orientaci rozděleny na teoretické a experimentální. Další částí knihy je Seriál o teorii chaosu, který je rovněž doplněn úlohami. Na konci publikace se nachází krátké ohlédnutí za letošními soustředěními a jinými akcemi a seznam nejlepších řešitelů ročníku.

Pokud Tě FYKOS zaujal natolik, že by ses chtěl stát řešitelem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky, či studia na MFF, neváhej a napiš nám.



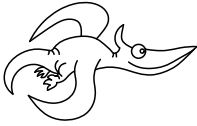
**FYKOS**  
**UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta**  
**Ústav teoretické fyziky**  
**V Holešovičkách 2**  
**180 00 Praha 8**

www: <http://fykos.cz>  
 e-mail: [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz)

A jak vypadal XXVIII. ročník očima statistiků? FYKOS řešilo 147 studentů z 102 středních škol z České a Slovenské republiky. Přehled škol podle úspěšnosti jejich studentů uvádíme níže. Pro zajímavost ještě dodejme, že organizátoři opravili celkem 2 253 došlých řešení a udělili 6 147 bodů.

Pořadí škol

Škola	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Jana Keplera, Praha	4	109	<b>435</b>
G, Havlíčkův Brod	2	166	<b>332</b>
G J. Ressela, Chrudim	3	80	<b>239</b>
Wichterlovo G, Ostrava	2	107	<b>213</b>
G Opatov, Praha	3	68	<b>205</b>
G Dašická, Pardubice	3	60	<b>181</b>
Masarykovo G, Plzeň	2	85	<b>169</b>
G J. Škody, Přerov	5	33	<b>164</b>
G Golianova, Nitra	2	80	<b>159</b>
G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	34	<b>134</b>
G, Pelhřimov	1	129	<b>129</b>
G, Žamberk	1	128	<b>128</b>
G, Lovosice	1	126	<b>126</b>
G L. Svobodu, Humenné	1	123	<b>123</b>
G, Třeboň	1	122	<b>122</b>
G, Třinec	1	122	<b>122</b>
G J. Slowackiego, Český Těšín	2	54	<b>107</b>
G, Tanvald	1	107	<b>107</b>
G A. Bernoláka, Námestovo	1	97	<b>97</b>
G P. de Coubertina, Tábor	2	48	<b>96</b>
G dr. A. Hrdličky, Humpolec	1	92	<b>92</b>
G Z. Wintra, Rakovník	2	46	<b>91</b>
G, Uherské Hradiště	4	23	<b>90</b>
G B. Němcové, HK	2	43	<b>86</b>
G, Kysucké Nové Mesto	1	86	<b>86</b>
G Komenského, Havířov	1	85	<b>85</b>
G PdC, Piešťany	1	85	<b>85</b>
G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	2	42	<b>84</b>
G Ludovíta Štúra, Trenčín	1	83	<b>83</b>
G, Nymburk	1	83	<b>83</b>
G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	41	<b>82</b>
Církevní G, Plzeň	1	81	<b>81</b>
G, Olomouc-Hejčín	3	27	<b>81</b>
G a SOŠZZE, Vyškov	1	63	<b>63</b>
G O. Havlové, Ostrava	1	63	<b>63</b>
G F. Palackého, Val. Mez.	2	29	<b>58</b>
G, Benešov	1	58	<b>58</b>
G, Mostecká, Chomutov	1	52	<b>52</b>
G, Brandýs n. L.	2	26	<b>51</b>
G, Dvůr Králové n. L.	1	51	<b>51</b>
G, Nové Zámky	1	51	<b>51</b>
G, Litomyšl	2	25	<b>50</b>



## Zadání teoretických úloh

### Úloha I.1 ... spotřeba antihmoty

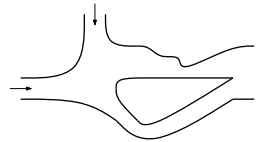
2 body

Jakou hmotnost antihmoty bychom potřebovali ročně, abychom pokryli spotřebu elektrické energie České republiky? Normální hmoty máme dost a uvažujme, že by se nám energii podařilo na elektrickou převádět beze ztrát. (řešení str. 15)

### Úloha I.2 ... proudivé proudnice

2 body

Nakreslete do obrázku proudnice. Do obou otvorů s šipkou vtéká stejné množství vody, všechna voda pak vytéká jediným, třetím otvorem. Proudění je ustálené a probíhá dostatečně pomalu, abychom ho mohli považovat za nevířivé. Při kreslení dbejte na pravidla, jimiž se tvar proudnic řídí, a tato pravidla napište jako komentář k obrázku. Neočekáváme, že bude problém spočítán.



(řešení str. 15)

### Úloha I.3 ... zrychlujeme

3 body

Vysvětlete, proč a jak se odehrají následující situace:

- V cisterně tvaru kvádrů s vodou plove na hladině míček. Popište pohyb míčku, začne-li se cisterna rozjíždět s konstantním zrychlením dostatečně malým, aby voda nepřetekla přes okraj.
- V cisterně tvaru kvádrů naplněné vodou se vznáší balonek naplněný vodou. Popište pohyb balonku, začne-li se cisterna rozjíždět s konstantním zrychlením dostatečně malým, aby voda nepřetekla přes okraj.
- V uzavřeném autobusu se vznáší u stropu balonek. Popište jeho pohyb, začne-li se autobus rozjíždět s konstantním zrychlením. (řešení str. 17)

### Úloha I.4 ... zkáza Titaniku

4 body

Náry si vždy přál mít loďku, a tak si jednoho krásného dne pořídil jednu ve tvaru kvádrů bez horní podstavy (jako vana) s vnějšími rozměry  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a tloušťkou stěny  $d$ , která byla vyrobena z voňavého dřeva o hustotě  $\rho$  (větší než hustota vody). Druhého krásného dne loďku spustil na vodu, ale zjistil, že má na dně díрку, kterou voda přitéká s průtokem  $Q_1$ . To bylo nemilé, a protože je mužem činu, začal počítat, za jak dlouho se mu do loďky začne valit voda vrchem. Stejnou otázku klade i tato úloha. Zvažte i situaci, kdy by Náry o hmotnosti  $m$  v loďce seděl a mezi výpočty zoufale vyléval vodu svou botou s průtokem  $Q_2$ . Loďka je celou dobu vodorovně. (řešení str. 18)

### Úloha I.5 ... tisícročná včela

5 bodů

Spočítejte, jaký výkon potřebuje včela, aby se udržela ve vzduchu, a odhadněte, jak dlouho se vydrží najedená včela vznášet v konstantní výšce. (řešení str. 19)

### Úloha I.P ... Měsíc z Marsu

5 bodů

Může být někdy vidět Měsíc z Marsu pouhým okem? Svou odpověď podpořte náležitými výpočty. (řešení str. 23)

### Úloha II.1 ... svatá Anna chladna z rána

2 body

V chladném ranním oparu odcházíte z domu a zahradní branka funguje tak, jak má – na zmáčknutí kliky se otevře, po zavření a puštění kliky zůstane zavřená, zaklapnutá. Odpoledne se vracíte a říkáte si, který lump zase nezavřel... A ejhle, ono zavřít nejde. Ani po stisknutí kliky nezaleze ocelový jazýček natolik, aby prošel kolem hliníkového rámu. Branka je také z hliníku. Kde je problém? Co zapomněl výrobce při navrhování branky uvažovat? Navrhněte, jaké rozměry by měla mít branka při 20 °C, jestliže uvažujeme, že teplota během roku neklesá pod –30 °C a nepřesahuje 50 °C. (řešení str. 26)

### Úloha II.2 ... poživací buňka

2 body

Odhadněte na základě znalostí pouze makroskopicky měřitelných veličin, počtu buněk v lidském těle a počtu částic v látkovém množství jednoho molu, kolik molekul kyslíku „spotřebuje“ denně jedna lidská buňka. Potřebné údaje k výpočtu si nalezněte a svoje zdroje nezapomeňte citovat. (řešení str. 27)

### Úloha II.3 ... nedočkavé jádro

4 body

Jádro bismutu  $^{209}\text{Bi}$  sedí nedočkavě v pokoji na místě. V jednom okamžiku to nevydrží a rozpadne se. Zůstane nám z něj jádro thalia  $^{205}\text{Tl}$  a od něho letí pryč  $\alpha$  částice. Jakou rychlostí by se pohybovala  $\alpha$  částice, pokud by se energie uvolněná při rozpadu přeměnila pouze na její kinetickou energii? Jakou rychlostí se bude  $\alpha$  částice pohybovat ve skutečnosti? Výsledky porovnejte. Klidové hmotnosti atomů jsou  $M = m(^{209}\text{Bi}) = 208,980\,399\text{ u}$ ,  $M' = m(^{205}\text{Tl}) = 204,974\,428\text{ u}$ ,  $m = m(^4\text{He}) = 4,002\,602\text{ u}$ . Nezapomeňte ověřit, jestli není potřeba používat relativistické vztahy. (řešení str. 29)

### Úloha II.4 ... Boeing

4 body

Uvažujte pneumatiku válcovitého tvaru o poloměru  $R$  s vnitřním otvorem o poloměru  $r$  šířky  $d$  huštěnou na tlak  $p$ . Pneumatiku zatížíme silou  $F$ . Při tomto zatížení se změní tvar pneumatiky z válce na válcovou úseč se stejným vnitřním i vnějším poloměrem. Předpokládejte, že se teplota pneumatiky zatížením nezmění. Určete plochu styku pneumatiky s vozovkou. (řešení str. 31)

**Úloha II.5 ... gravitační manévry**

5 bodů

Máme družici, která obíhá Slunce po eliptické dráze. Pokud zmenšíme rychlost v afelu  $v_a$  na  $4/5$  původní rychlosti (tj. na  $(4/5)v_a$ ), jak se změní rychlost družice v periheliu? Vyjádřete novou rychlost za pomoci původní rychlosti  $v_p$  a parametrů elipsy (hlavní poloosa  $a$  a relativní excentricita  $\varepsilon$ ). (řešení str. 34)

**Úloha II.P ... problém obchodního cestujícího**

5 bodů

Když se začínaly prosazovat digitální mobilní telefony, byl často problém se příjmem hovorů v automobilu. Nyní se to nejvíce týká vlaků. Jaké faktory ovlivňují přenos dat v GSM síti a jak mohou ovlivnit dostupnost signálu operátora? Jak by se proti tomu dalo bojovat? (řešení str. 37)

**Úloha III.1 ... těžký vzduch**

2 body

Jakou hmotnost má zemská atmosféra? Jakou část hmotnosti Země tvoří? Pro potřeby výpočtu znáte pouze hmotnost Země  $M_Z$  a poloměr Země  $R_Z$ , gravitační zrychlení  $a_g$  na povrchu Země, hustotu vody  $\rho$  a víte, že blízko povrchu Země v hloubce  $h_1 = 10$  m má hydrostatický tlak vody hodnotu zhruba jedné atmosféry  $p_a = 10^5$  Pa.

*Nápověda* Jedná se o jednoduchou úlohu. Nejde nám o dokonale přesné řešení, ale o kvalifikovaný odhad podložený výpočtem. (řešení str. 39)

**Úloha III.2 ... bubliny**

2 body

Určete rozdíl potenciální povrchové energie blány kulaté bubliny a bubliny ve tvaru pravidelného čtyřstěnu. Oba útvary mají stejný vnitřní objem  $V$ . (řešení str. 39)

**Úloha III.3 ... jedeme do zatáčky**

4 body

Jak známo, vlaky nemají diferenciál, tedy při průjezdu zatáčkou se obě kola musí otáčet stejnou úhlovou rychlostí. Předpokládejte nyní, že kola mají válcový tvar. Proto při jízdě zatáčkou pojede jedno kolo po delší trajektorii než druhé. Osička bude namáhána na krut a v jistý okamžik již třecí síla mezi kolem a kolejnicí nebude dostatečně velká a dojde k prokluzu jednoho z kol, čímž napětí v osičce klesne na nulu. Určete vzdálenost mezi jednotlivými prokluzy v závislosti na poloměru zatáčky  $R_z$ . Kolo má poloměr  $R$ , osa má poloměr  $r$ , délka osy je  $L$ , modul pružnosti materiálu osy ve smyku je  $G$  (ocel), vagon s  $N$  koly má hmotnost  $M$  a koeficient statického tření mezi kolem a kolejnicí je  $f$ . Nakonec můžete dosadit realistické hodnoty.

*Nápověda* Pro zkrut  $\varphi$  válce o poloměru  $R$ , délce  $l$  a modulu pružnosti ve smyku  $G$ , na který působíme momentem  $\mathcal{M}$ , platí

$$\varphi = \frac{2\mathcal{M}l}{G\pi R^4}.$$

(řešení str. 41)

### Úloha III.4 ... rychlá kráska

4 body

Terka se ve svém autě blíží relativistickou rychlostí  $v$  k rovinnému zrcadlu. Blíží se kolmo na rovinu zrcadla v kolizním kurzu. Přitom se samozřejmě dívá na sebe, jak se k zrcadlu blíží. Jaká je rychlost, kterou se Terka blíží ke svému neskutečnému obrazu, a jakou rychlost ona pozoruje svým zrakem?

*Bonus* Zrcadlo není rovinné, ale kulové.

(řešení str. 42)

### Úloha III.5 ... sféricky symetrické kuře ve vakuu

5 bodů

Do nádoby o objemu  $V = 1 \text{ m}^3$ , ve které je velmi nízký tlak (prakticky dokonalé vakuum), umístíme  $V_0 = 11$  vody o pokojové teplotě  $t_0$ . Jaký bude konečný stav, ve kterém se bude nacházet nádoba a voda v ní? Pro účely výpočtu předpokládejte, že nádoba je dokonale tepelně izolovaná od okolního prostředí a má zanedbatelnou tepelnou kapacitu.

(řešení str. 45)

### Úloha III.P ... zahvizdej mi něco

5 bodů

Vysvětlete, na jakém principu funguje hvízdání pomocí úst. Uvažujte přitom nejprve jednoduché modely a postupně přejděte ke složitějším. Pak vyberte nejlepší z nich a na základě něj odhadněte, v jakém rozsahu se může pohybovat základní frekvence hvízdny. (Pokud umíte hvízdát, můžete zkusit posoudit přesnost vašeho odhadu pomocí experimentu.)

(řešení str. 48)

### Úloha IV.1 ... čtvercátý odpor

2 body

Jak závisí elektrický odpor čtverce na délce jeho strany  $a$ ? Všechny čtverce, o které se zajímáme, jsou samozřejmě vodiče vyrobené z tenkého materiálu o tloušťce  $h$  a měrném elektrickém odporu  $\rho$ . Zajímáme se o odpor mezi protilehlými stranami čtverce.

(řešení str. 53)

### Úloha IV.2 ... rychlá kráska reloaded

2 body

Terka si zase jednou vyjela na výlet. Tentokrát se prochází o rovnodennosti v pravé poledne na zemském rovníku. Jakou vzájemnou rychlost by měla vůči Alešovi, pokud by ji Aleš chtěl (bláhově) pozorovat z povrchu Slunce na rovníku v bodě nejbližším jeho objektu zájmu (Terce)? Sklon sluneční osy vůči rovině ekliptiky můžete považovat za zanedbatelně malý.

(řešení str. 54)

### Úloha IV.3 ... nerozlučné pouto

4 body

Dva sešity 460 zasuneme do sebe tak, že se střídají listy jednoho a druhého sešitu, a položíme je na vodorovný stůl. Jakou práci musíme vykonat, abychom sešity od sebe oddělili, jestliže na sebe listy působí pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že taháme v rovině sešitů kolmo na hřbet jednoho z nich a že se na začátku listy zcela překrývají.

(řešení str. 57)

**Úloha IV.4 ... ach ta tíže**

4 body

Určete, jaké je tíhové zrychlení na povrchu neutronové hvězdy v závislosti na rovnoběžce. Jak velká slapová síla by působila na předmět vysoký  $h = 1$  m a s hmotností  $m = 1$  kg v blízkosti jejího povrchu? S jakou energií by dopadl na povrch neutronové hvězdy marshmallow upuštěný z výšky  $h$ ? Neutronová hvězda má poloměr  $R$  a rotuje s periodou rotace  $T$ . Můžete ji považovat za kulovou, i když přesně kulová není. Najděte si hodnoty pro typickou neutronovou hvězdu a udejte jak obecné, tak konkrétní číselné výsledky. (řešení str. 58)

**Úloha IV.5 ... vrhač nožů**

4 body

Vrhací nůž opustí ruku ve chvíli, kdy je jeho těžiště ve výšce  $h$  a má pouze horizontální složku rychlosti  $v_0$ . Jakou musí mít úhlovou rychlost rotace  $\omega$ , aby se zasekl do svislé desky vzdálené  $d$  od místa vypuštění? Pro zjednodušení uvažujte, že těžiště nože je přesně v polovině jeho délky  $l$  a že se nůž zasekne vždy, když se jeho čepel dotkne desky dříve než rukojeť. (řešení str. 63)

**Úloha IV.P ... nejmenovaná tyčinka**

4 body

Na základě biochemických dějů v lidském těle a jeho mechaniky odhadněte, kolik energie spotřebuje cyklista na překonání tisíce výškových metrů, je-li průměrné stoupání 5%. (řešení str. 68)

**Úloha V.1 ... tuhost pana Plancka**

2 body

Možná jste už někdy slyšeli o takzvaných Planckových jednotkách, tj. jednotkách vyjádřených na základě fundamentálních fyzikálních konstant – rychlosti světla  $c = 3,00 \cdot 10^8$  m·s<sup>-1</sup>, gravitační konstanty  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>·kg<sup>-1</sup>·s<sup>-2</sup> a redukované Planckovy konstanty  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  kg·m<sup>2</sup>·s<sup>-1</sup>. Takto bývá často zmiňován Planckův čas, Planckova délka a Planckova hmotnost. Co kdyby nás ale zajímala „Planckova tuhost pružiny“? Sestavte na základě rozměrové analýzy z  $c$ ,  $G$  a  $\hbar$  vzorec jednotky odpovídající tuhosti pružiny  $[k] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ . Pro určení vzorce uvažujte, že neznámá  $a$  z rozměrové analýzy neurčitelná multiplikativní bezrozměrná konstanta je rovna 1. (řešení str. 72)

**Úloha V.2 ... slyším dobře, to nemohu říct**

2 body

Ve vzdálenosti  $d = 5$  m od bodového zdroje zvuku slyšíme zvuk o hladině intenzity  $L_1 = 90$  dB. V jaké vzdálenosti od zdroje je hladina intenzity tohoto zvuku  $L_2 = 50$  dB? (řešení str. 73)

**Úloha V.3 ... matfyzácká honička**

4 body

$N$  lidí se rozhodne hrát na honěnou, ale ne jen tak ledajakou. Na začátku se rozmístí do vrcholů pravidelného  $N$ -úhelníku o straně délky  $a$ . Hra poté probíhá tak, že každý honí (to znamená běží přímo za ním) svého souseda po pravé ruce

(proti směru hodinových ručiček). Každý se přitom pohybuje rychlostí o konstantní velikosti  $v$ . Popište průběh hry (trajektorie, po kterých se hráči pohybují) a zjistěte, za jak dlouho hra skončí v závislosti na parametrech  $N$ ,  $a$ ,  $v$ . (řešení str. 74)

### Úloha V.4 ... lijavec

4 body

Podzimní počasí je občas stejně rozmařilé, jako to jarní, a tak nás nezřídka může na cestě zastihnout nečekaný liják. Někteří šťastlivci s sebou nosí deštník. Odhadněte, jak velkým tlakem dokáže hustý déšť na deštník působit a porovnejte tíhovou sílu deštníku s tlakovou silou deště. Parametry deštníku vhodně zvolte.

(řešení str. 77)

### Úloha V.5 ... plavala čočka po vodě

5 bodů

Na hladině vody plove tenká bikonvexní (dvojvypuklá) čočka z lehkého materiálu. Poloměry křivosti obou povrchů jsou  $R = 20$  cm. Určete vzdálenost mezi obrazovým a předmětovým ohniskem čočky, jestliže index lomu vzduchu nad čočkou je  $n_a = 1$ , index lomu materiálu čočky je  $n_l = 1,5$  a index lomu vody je  $n_w = 1,3$ . *Bonus* Předpokládejte, že se jedná o čočku tloušťky  $T = 3$  cm, uvnitř níž je symetricky umístěna vzduchová dutina tvaru bikonkávní čočky s poloměry křivosti  $r = 50$  cm a tloušťkou  $t = 1$  cm.

(řešení str. 81)

### Úloha V.P ... vycákaná

5 bodů

Bylo by možné plavat v bazénu, kdyby se voda v něm chovala jako dokonale nestlačitelná kapalina, jejíž viskozita se limitně blíží nule? Jak by se pohyb plavce odlišoval od plavání v běžné vodě? Co by se dělo s energií soustavy plavec a bazén v případě, že voda z bazénu může vytékat přes okraj? Na počátku je hladina vody zarovnaná s okrajem.

(řešení str. 89)

### Úloha VI.1 ... ..au

2 body

Želva A'Tuin, na jejímž krunýři stojí čtyři sloni nesoucí na svých hřbetech Zeměplochu, není žádný drobeček. Předpokládejme, že bychom byli znudění kulatostí naší Země a chtěli ji vyměnit za kruhovou placku se stejnou hmotností a hustotou a s tloušťkou  $h = 1$  km nesenou vlastní želvo-sloní partou. V případě, že by naše želva cestou vesmírem vrazila špičkou ocasu do planetky, za jak dlouho by si uvědomila bolestivý podnět, jestliže její ocas s centrální nervovou soustavou spojuje jediný dlouhý neuron a délka tohoto neuronu je přibližně stejná jako průměr naší placky? O kolik dříve/později by si bolest ve stejném případě uvědomila A'Tuin (délku neuronu považujte za ekvivalentní její délce, která činí 18 000 km)? Pro číselný odhad předpokládejme, že rychlost šíření vzruchu v nervové soustavě poněkud nadměrných tvorů je stejná jako u pozemských živočichů, u nichž činí  $v = 120 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

(řešení str. 92)



**Úloha VI.2 . . . dýchej zhluboka**

2 body

Mág Šedomil oslavil sté narozeniny již před drahnou dobou a začíná se pomalu obávat, že ho Smrt poctí svou dlouhou odkládanou návštěvou. Rozhodne se proto, že se nechá zatlouct do kouzelné truhly, kam se k němu Smrt nedostane. Bohužel zapomněl řemeslníkům říci, aby přidali dýchačí otvory. Vzduch v truhle zaujímá objem  $V_0 = 400\text{l}$ , objemový zlomek kyslíku je  $\varphi_0 = 0,21$ . Při každém nádechu a výdechu se zužitkuje pouze  $k = 20\%$  objemových kyslíku v dechovém objemu  $V_d = 0,5\text{l}$ . Dechová frekvence mága po uzavření truhly postupně roste podle vztahu  $f(t) = f_0\varphi_0/\varphi(t)$ , kde  $f_0 = 15\text{ dech}\cdot\text{min}^{-1}$  je počáteční dechová frekvence a  $\varphi(t)$  objemový zlomek kyslíku v čase  $t$ . Určete, za jak dlouho si pro Šedomila přijde Smrt, jestliže minimální obsah kyslíku ve vzduchu potřebný pro přežití je  $\varphi_s = 0,06$ . (řešení str. 92)

**Úloha VI.3 . . . pracovní pohovor**

4 body

Jedna z pracoven lorda Vetinariho má kruhový půdorys o poloměru  $R$  a je umístěna na ložiscích, díky nimž se může otáčet kolem své osy. Pro zajištění otáčení se používá motor, který může působit libovolným momentem síly. Při otáčení působí na podlahu místnosti třecí moment  $M_0$ , nezávislý na rychlosti, který je shodný se statickým třecím momentem. Židle pro návštěvy je umístěna tak, že člověk na ní sedící pocítí účinky rotace pouze tehdy, přesáhne-li úhlové zrychlení hodnotu  $\varepsilon_0$ . Určete, za jakou nejkratší dobu se může místnost otočit o  $180^\circ$ , aby návštěva nic nepoznala, a jaká práce je k tomuto otočení potřeba. Celková hmotnost místnosti, kterou můžete považovat za homogenní disk, je  $m$ .

*Bonus* Předpokládejte, že návštěvník pocítí vliv rotace tehdy, přesáhne-li úhlový ryv (změna zrychlení) hodnotu  $j_0$ . (řešení str. 93)

**Úloha VI.4 . . . těžkotonážní deska na želvě**

5 bodů

Předtím, než byl dosažen a překročen okraj Zeměplochy a začaly být podnikány vědecké výpravy za potvrzením existence čtyř slonů, želvy a určení jejího pohlaví, si některé primitivní kmeny myslely, že síla, která je drží na Zeměploše, je dána superhustou deskou z koncentrovaného bylonebylia. Byla to opravdu velice primitivní představa, protože jak dnes již víme, například výprava, která potvrdila existenci želvy, neslavně dopadla tak, že se jejich člun utrhł a upadł. Tedy vlastně nedopadł. . .

Nicméně by nás zajímalo – jakou plošnou hustotu  $\sigma$  by bývala byla musela taková deska mít, aby na povrchu Zeměplochy blízko jejímu středu byl obyčejný předmět, při zanedbání magie, přitahován stejnou silou, jakou je gravitační síla na povrchu Zeměplochy? Uvažujte, že superhustá deska je opravdu velice tenká, a jak tvrdí pověsti, je umístěna  $H = 8^4\text{ m} = 4096\text{ m}$  pod povrchem Zeměplochy. Deska má být dle bájí homogenní a hmotnosti jiných těles zanedbatelné.

Zanedbejte pohyby želvy a slonů. Za Zeměplochu si dosadte slovo Země, pokud jste nečetli dílo autora, pro kterého si přišel Smrt. Zeměplocha má pro účely této úlohy průměr přibližně přesně  $d = 10\,000\text{ km}$ . (řešení str. 98)

**Úloha VI.5 . . . hospodská rvačka**

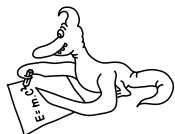
5 bodů

Při svém pobytu v Ankh-Morporku Dvoukvítek navštívil také hospodu. Nebyla by to dobrá hospoda, kdyby se tam nestrhla všeobecná rvačka, při které létají židle, flašky a další věci z jedné strany hospody na druhou. Dvoukvítek musí samozřejmě všechno pořádně zdokumentovat svým fotoaparátem. Teď zrovna fotí kuličku o poloměru  $R$ , která letí rychlostí  $v$  blízkou rychlosti světla  $c$ . I v takových hospodách platí teorie relativity, ze které vyplývá, že Dvoukvítek by ve své klidové soustavě změřil kontrakci kuličky ve směru pohybu o faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Jaký poloměr kuličky ve směru pohybu zaznamená na fotografii se zanedbatelně krátkou expozicí? Fotoaparát zaujímá vůči kuličce obecnou polohu. (řešení str. 101)

**Úloha VI.P . . . vody Zeměplochy**

5 bodů

Všichni moc dobře víme, že je dobře zařízeno zásobování Zeměplochy vodou. A nikdo z nás nepotřebuje vědět jak. Co kdyby se ale stalo něco závažného a magie by přestala dobře fungovat? Za jak dlouho by se ocitla Zeměplocha bez vody? Pro jednoduchost můžete uvažovat pesimistickou situaci, kdy by nikdo vodu nijak nezadržoval. Dobře víte, že Zeměplocha má průměr  $d = 10\,000$  km, panuje na ní homogenní tíhové zrychlení  $g \doteq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a je dokonale kruhová. Opravdový celkový objem a rozložení vody na Zeměploše ve skutečnosti nikdo stejně nezná, takže můžete uvažovat, že voda homogenně pokrývá Zeměplochu, která je rovná a voda má výšku  $H = 5$  m (to je hodně pesimistické, protože by pak všechno muselo stát pod vodou, nebo na kůlech nad vodou). Cílem úlohy je nalézt uspokojivě přibližný model, který dává dobrý odhad hledaného času – nečekáme přesné řešení. (řešení str. 105)



## Řešení teoretických úloh

### Úloha I.1 ... spotřeba antihmoty

*Jakou hmotnost antihmoty bychom potřebovali ročně, abychom pokryli spotřebu elektrické energie České republiky? Normální hmoty máme dost a uvažujme, že by se nám energii podařilo na elektrickou převádět beze ztrát.*

Pro zjištění, jaké množství antihmoty by bylo potřeba na roční pokrytí spotřeby elektrické energie České republiky, je třeba vyhledat alespoň přibližný údaj o tom, kolik tato spotřeba vlastně činí. Podle internetových zdrojů<sup>1</sup> se pro rok 2013 jednalo přibližně o  $E = 70\,177\text{ GWh} \doteq 2,53 \cdot 10^{17}\text{ J}$ .

Víme, že při anihilaci hmoty s antihmotou dojde k jejich úplné přeměně na energii dle notoricky známého vztahu  $E = mc^2$ , kde  $m$  je hmotnost toho, co anihiluje a  $c$  je rychlost světla. Nesmíme zapomenout pouze na to, že v našem případě  $m$  představuje součet hmotnosti antihmoty i hmoty, čili to, co vlastně chceme znát (jelikož se ptáme pouze na hmotnost antihmoty), bude  $x = m/2$ . Máme tedy

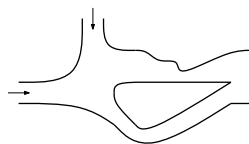
$$x = \frac{E}{2c^2},$$

číselně  $x = 1,40\text{ kg}$ .

Na pokrytí roční spotřeby elektrické energie ČR by bylo teoreticky potřeba asi 1,40 kg antihmoty.

### Úloha I.2 ... proudivé proudnice

*Nakreslete do obrázku proudnice. Do obou otvorů s šipkou vtéká stejné množství vody, všechna voda pak vytéká jediným, třetím otvorem. Proudění je ustálené a probíhá dostatečně pomalu, abychom ho mohli považovat za nevířivé. Při kreslení dbejte na pravidla, jimiž se tvar proudnic řídí, a tato pravidla napište jako komentář k obrázku. Neočekáváme, že bude problém spočítán.*



Nejprve si musíme uvědomit, co je to vlastně proudnice. Za předpokladu, že tekutina, ve které proudnice pozorujeme, je nestlačitelná a proudění v ní je ustálené (jako v našem případě, kdy vodu považujeme za nestlačitelnou), potom je proudnice trajektorii pohybu částice v proudící kapalině. Každým bodem proudící kapaliny prochází právě jedna proudnice a vektor rychlosti částice je vždy tečnou k příslušné proudnici.

<sup>1</sup><http://energostat.cz/elektrina.html>

Když nyní víme, co to proudnice je, musíme si uvědomit, že platí několik základních podmínek, které v žádném případě nesmí být porušeny:

- Proudnice se nesmí vzájemně křížit ani dotýkat, protože částice kapaliny skrz sebe nemohou prostupovat (nesmí se dotýkat ani okrajů, jimiž je kapalina ohraničena).
- Proudnice jsou spojitě a „hladké“ křivky, rozhodně na nich nemohou být ostré zlomy (kapalina zatáčí postupně, ne skokově).
- Proudnice nikde nevznikají ani nezanikají, na začátku vstoupí do zkoumaného prostoru a stejný počet jich musí vystoupit. Jinak by to znamenalo, že se někde kapalina ztrácí a jinde se tvoří, když jako v našem případě neuvažujeme kapacitu prostředí (tzn. že by se někde mohla voda hromadit, aniž by odtud odtékala). Proudnice také nikdy neutvoří uzavřenou křivku (to by odpovídalo víru v kapalině).
- V užších místech jsou proudnice více nahuštěné, což odpovídá větší rychlosti proudění kapaliny.

Každému je jasné, že nemůžeme do obrázku zakreslit všechny proudnice (je jich příliš mnoho). Počet zakreslených proudnic proto volíme tak, aby byl obrázek přehledný a zároveň měl dostatečnou vypovídací hodnotu, přičemž proudnice musíme na vstupu do zkoumané oblasti rovnoměrně rozdělit, čímž zvyšujeme vypovídací hodnotu nákresu. V našem případě jsme zvolili osm proudnic, což je tak akorát (s menším počtem už by nákres neměl moc velkou vypovídací hodnotu a s větším počtem už začíná být nepřehledný).

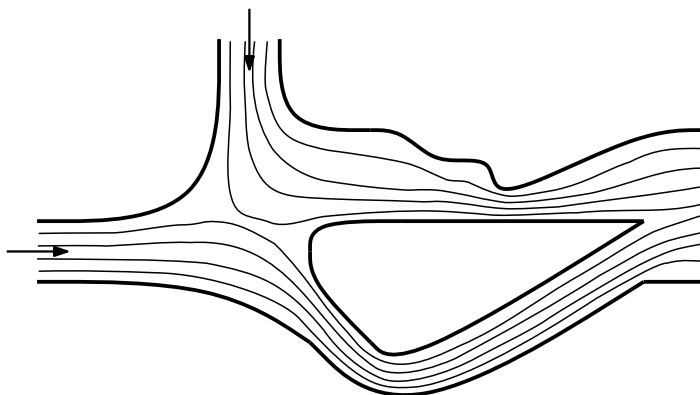
Poslední důležitá věc je, že když každým otvorem přitéká stejné množství vody, musí každým otvorem také vstupovat stejné množství proudnic (protože ty jsou na začátku rovnoměrně rozloženy).

Obtékání předmětů kapalinou je obecně velmi těžká úloha, není vůbec snadné vyřešit, jak přesně budou vypadat proudnice v zatáčkách nebo v okolí překážek, ale to ani nebylo smyslem této úlohy. Pro udělení plného počtu bodů stačí, když se při kreslení obrázku budete držet všech pravidel, která jsme doposud zmínili.

Nyní už můžeme začít kreslit obrázek. Proudnice kreslíme od ruky, žádná velká přesnost se nevyžaduje. Výsledek může vypadat například jako na obrázku 1.

V obrázku 1 je ostrůvek vprostřed obtékán rovnoměrně (nad ním i pod ním vedou 4 proudnice), je možné, že ve skutečnosti by tomu tak nebylo (provedení přesného výpočtu nebo simulace by bylo velmi náročné), proto bude za správné řešení považováno i nerovnoměrné obtékání ostrůvku, pokud se dodrží všechna už zmíněná pravidla.

Při naší úvaze jsme nebrali v potaz tření kapaliny o hrany (uvažujeme, že je velmi malé a jeho efekt můžeme tedy zanedbat), viskozitu kapaliny (předpokládáme, že je malá a rozměry trubic na obrázku dostatečně velké, aby se její vliv neprojevil), povrchové napětí kapaliny (jeho efekty budou velmi malé a také je zanedbáme) a mnoho dalších pro nás nedůležitých vlastností reálných kapalin.



Obr. 1: Znázornění vybraných proudnic.

### Úloha I.3 ... zrychlujeme

Vysvětlíte, proč a jak se odehrají následující situace:

- V cisterně tvaru kvádrů s vodou plove na hladině míček. Popište pohyb míčku, začne-li se cisterna rozjíždět s konstantním zrychlením dostatečně malým, aby voda nepřetekla přes okraj.
- V cisterně tvaru kvádrů naplněné vodou se vznáší balónek naplněný vodou. Popište pohyb balonku, začne-li se cisterna rozjíždět s konstantním zrychlením dostatečně malým, aby voda nepřetekla přes okraj.
- V uzavřeném autobusu se vznáší u stropu balónek. Popište jeho pohyb, začne-li se autobus rozjíždět s konstantním zrychlením.

Abyste mohli vyřešit tuto úlohu, je třeba znát 1. Newtonův zákon, jenž zní: *Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém.* Tedy jestliže se snažíme změnit stav tělesa z klidu nebo z pohybu rovnoměrného přímočarého, působí proti nám setrvačná síla tělesa. Úloha nám nabízí tři různé situace.

V prvním případě balónek plove na hladině cisterny s vodou. Vzhledem k tomu, že platí Archimédův zákon, je jeho hustota nižší než hustota vody, a tedy zůstane po celou dobu na hladině. Hladina se pod vlivem konstantního zrychlení nakloní tak, aby byla kolmá na výslednici tíhového zrychlení a zrychlení působící proti směru pohybu. Balónek bude v indiferentní poloze a nedojde k dalšímu pohybu. Předpokládá se, že nedošlo k výraznému „šplouchnutí“ v cisterně při rozjíždění.

Druhá část úlohy nám zadává balónek, který se vznáší v kapalině v cisterně zaplněné po okraj. Dle Archimédova zákona má vznášející se balónek a kapalina identickou hustotu. Z toho vyplývá, že setrvačná síla působí stejnou měrou jak na balónek, tak i na okolní prostředí. Balónek naplněný vodou můžeme brát jako element kapaliny (velkou molekulu vody). A tak ani v tomto případě nedojde k pohybu.

V poslední části úlohy se balonek vznáší u stropu v uzavřeném autobusu. Je tedy správně předpokládat, že má nižší hustotu nežli okolní vzduch. Začne-li se autobus rozjíždět s konstantním zrychlením, můžeme si představit, že potenciální hladina vzduchu se stejně jako v prvním případě nakloní a balónek bude mít tendenci stoupat kolmo na ni, tedy bude tlačěn dopředu.

## Úloha I.4 ... zkáza Titaniku

Náry si vždy přál mít loďku, a tak si jednoho krásného dne pořídil jednu ve tvaru kvádra bez horní podstavy (jako vana) s vnějšími rozměry  $a$ ,  $b$ ,  $c$  a tloušťkou stěny  $d$ , která byla vyrobena z voňavého dřeva o hustotě  $\rho$  (větší než hustota vody). Druhého krásného dne loďku spustil na vodu, ale zjistil, že má na dně díрку, kterou voda přitéká s průtokem  $Q_1$ . To bylo nemilé, a protože je mužem činu, začal počítat, za jak dlouho se mu do loďky začne valit voda vrchem. Stejnou otázku klade i tato úloha. Zvažte i situaci, kdy by Náry o hmotnosti  $m$  v loďce seděl a mezi výpočty zoufale vyléval vodu svou botou s průtokem  $Q_2$ . Loďka je celou dobu vodorovně.

Na Náryho loďku působí dvě důležité síly, tíhová a vztlaková. Rovno vieme povedať, že loď sa bude postupne ponárať, až kým sa nedostane jej horný okraj na úroveň hladiny. V tomto momente je vztlaková sila rovná

$$F_{vz} = V \rho_{voda} g,$$

kde sme označili  $V = abc$  vonkajší objem lode. Ak zanedbáme vertikálne zrychlenie lode,<sup>2</sup> platí v tomto momente pre tiažovú silu  $F_g$

$$F_{vz} + F_g = 0. \quad (1)$$

Hmotnosť lode  $M$  sa skladá z dreva a natečenej vody. Drevo má hmotnosť<sup>3</sup>

$$\rho[abc - (a - 2d)(b - 2d)(c - d)] = \rho V_{drevo}.$$

Natečená voda v čase  $t$  váži jednoducho  $Q_1 \rho_{voda} t$ . Tiažová sila je

$$F_g = g(Q_1 \rho_{voda} t + \rho V_{drevo})$$

a z podmienky (1) dostávame vzťah pre čas potopenia  $t_1$

$$\rho_{voda} abc = Q_1 \rho_{voda} t_1 + \rho V_{drevo},$$

alebo

$$t_1 = \frac{abc - \frac{\rho V_{drevo}}{\rho_{voda}}}{Q_1}.$$

---

<sup>2</sup>Správne by pohybová rovnica vyzerala  $F_{vz} + F_g = Ma_{hore}$ . My dúfame, že platí aproximácia  $F_g \gg Ma_{hore}$ , čo sa stane napríklad pre malé  $Q_1$ .

<sup>3</sup>Rozmer  $c$  sme si zvolili ako výšku lode. Uvedomte si, že vnútrajšok lode má vo vodorovných smeroch stenu hrúbky  $d$  na *oboch* stranách, no vo zvislom smere ho znižuje len dno.

Tiež vidíme, že ak je drevo príliš ťažké ( $\rho V_{\text{drevo}} > \rho_{\text{voda}} abc$ ), loď sa hneď potopí. V prípade s Nárym na palube je pridaná tiaž  $mg$ , no prítok vody je len  $Q_1 - Q_2$  (prípád  $Q_2 \geq Q_1$  je triviálny). Náryho hmotnosť pridáme ku hmotnosti dreva a rovno môžeme teda napísať, že sa loď potopí za čas

$$t_2 = \frac{abc - \frac{\rho V_{\text{drevo}} + m}{\rho_{\text{voda}}}}{Q_1 - Q_2}.$$

Pre zaujímavosť ešte dodajme, že podmienka  $t_2 > t_1$  sa dá upraviť na

$$m < \frac{Q_2}{Q_1} (\rho_{\text{voda}} abc - \rho V_{\text{drevo}}).$$

## Úloha 1.5 ... tisícročná včela

*Spočítajte, jaký výkon potrebuje včela, aby se udržela ve vzduchu, a odhadněte, jak dlouho se vydrží najedená včela vznášet v konstantní výšce.*

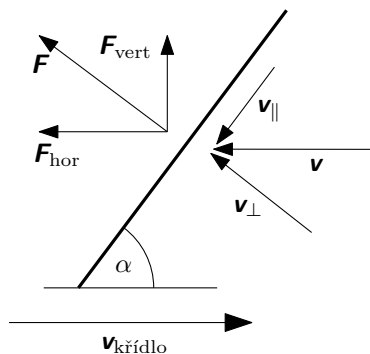
Ačkoli se v zadání hovoří o včele, mnozí z vás si jistě při čtení vzpomněli na v laických kruzích populární tvrzení, že není fyzikálně možné, aby čmelák létal. Jelikož čmelák zjevně je schopen letu, dalo by se usuzovat, že je s našimi poznatky v oblasti aerodynamiky něco v nepořádku. Nebudeme zde zastírat, že dynamika tekutin se jako obor fyziky stále rozvíjí a dokážeme v ní najít mnoho jevů, které nejsme schopni exaktně popsat – hlubší vhled do této problematiky dokáže poskytnout teorie chaosu, jak ukáží budoucí díly letošního seriálu. Mýtus o čmelákoví však vznikl na základě několikaminutového výpočtu, který provedl během večere německý fyzik (jméno se nedochovalo) ve třicátých letech minulého století na přání jednoho biologa. Za předpokladu, že jsou křídla dokonale tuhá a hladká, došel k závěru, že čmelák není schopen vytvořit dostatečný vztlak, aby se mohl vznášet na místě. Přitom potřebné údaje o anatomii čmeláka na místě odhadl<sup>4</sup>

My se zde pokusíme ukázat, že příčinou chybného závěru nebylo fyzikální zjednodušení, ale špatné odhady hodnot potřebných parametrů. Přitom zcela zanedbáme efekty tvorby vzdušných vírů a pohyby v mezní vrstvě vzduchu, která je „přilepená“ k tělesu (Magnusův jev). Tvorba vírů na jednu stranu spotřebovává energii generovanou máváním, na druhou stranu je možné při rychlých změnách úhlu náběhu tyto víry zužitkovat k vytvoření většího vztlaku. Ačkoli se tyto jevy významně projevují na výsledné efektivitě letu, musí být i v případě jejich zanedbání možné získat řádově správný výsledek. Jakkmile budeme schopni určit vztlak křídel, snadno dopočteme i energetické ztráty spojené s jejich pohybem. Toliko úvod a nyní k vlastnímu výpočtu.

Nejprve si musíme uvědomit, jak se vlastně křídla včel během letu pohybují. Představa, že se v zásadě jedná o dvě horizontální plošky pohybující se nahoru a dolů, je mylná. Je zde důvod domnívat se, že tato chybná představa byla použita i při původním výpočtu, který dal za vznik mýtu. Před necelými sto lety

<sup>4</sup><http://www.snopes.com/science/bumblebees.asp>

neexistoval způsob, jak detailně zachytit pohyb hmyzích křídel během letu. V době vysokorychlostních kamer a Internetu stačí zadat na YouTube<sup>5</sup> heslo „Bee in flight slow motion“ a ihned máme přístup k videím zachycujícím vznášející se včely v 7 000 fps. Vidíme, že křídla mají velmi vysoký úhel náběhu  $\alpha$ , tj. včela mává křídly spíše dopředu. Vertikální složka odporových sil tedy bude tvořit pouze malou část celkové síly, jak je znázorněno na obrázku 2. Úhel náběhu při pohybu vpřed uvažujeme konstantní. Pro zjednodušení výpočtu přitom budeme předpokládat (v souladu s videem), že se před zpětným pohybem křídla prudce převrátí tak, že úhel náběhu zůstane stále stejný. Také si zde uvědomme, že změna úhlu náběhu včele umožňuje regulovat svoji horizontální rychlost a setrvávat tak na místě.



Obr. 2: Rozbor sil působících na tuhé křídlo při mávání.

Dále si na videu všimneme, že křídla při rotačním pohybu v horizontální rovině kolem těla hmyzu neopisují plný úhel, ale jenom jeho část. Tuto skutečnost zohledníme koeficientem  $c_s \leq 1$ , který bude vyjadřovat opsaný úhel jako zlomek plného úhlu, viz obrázek 3. Další aproximací bude předpoklad konstantní úhlové rychlosti křídla, ačkoli ve skutečnosti se úhlová rychlost mění spíše harmonicky.

Vztah pro výpočet vztlakové síly včelích křídel odvodíme následovně. Při rychlých kmitech včelích křídel je Reynoldsovo číslo  $Re$  nejméně v řádech tisíců, a uvážíme-li, že na  $Re$  lze pohlížet jako na poměr celkové změny hybnosti masy vzduchu a změny hybnosti molekul, můžeme psát

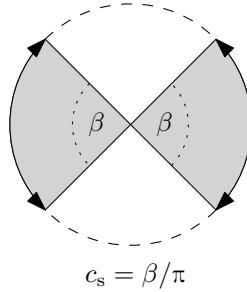
$$F = \dot{p} = \frac{d}{dt}(mv_{\perp}) = \frac{d}{dt}(\rho S v_{\perp} dx) = \rho S v_{\perp}^2,$$

kde  $S$  je plocha křídla,  $\rho$  hustota vzduchu a  $v_{\perp}$  složka rychlosti křídla kolmá na jeho plochu. Ve vztahu by měl správně ještě vystupovat odporový koeficient, který je pro tenkou desku  $> 0,6$ . V dalších výpočtech ho pro jednoduchost položíme roven jedné. S využitím velikosti celkové rychlosti  $v$  potom

$$F = \rho S v^2 \sin^2 \alpha.$$

<sup>5</sup>Zde vycházíme z videí <http://www.youtube.com/watch?v=2z9F6pVhR5o> a <http://www.youtube.com/watch?v=k3VPfZ6MHe8>.





Obr. 3: Znázornění úhlu, který křídlo při mávnutí opíše (pohled shora).

Velikost horizontální složky síly budeme nazývat  $F_{\text{drag}}$  a vertikální  $F_{\text{lift}}$  a platí

$$F_{\text{lift}} = \rho S v^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha,$$

$$F_{\text{drag}} = \rho S v^2 \sin^3 \alpha.$$

Celkový vztlak vypočteme integrací sil působících na infinitesimální elementy křídla přes délku křídla  $l$ . Dokonale tuhé křídlo má po celé délce úhlovou rychlost  $\omega$ , takže rychlost daného elementu vzdáleného  $r$  od osy rotace je  $v = \omega r$ . Pro jednoduchost si nyní představujeme křídlo jako obdélník šířky  $b$ , potom  $dS = b dr$ . Element vztlakové síly je vyjádřen vztahem

$$dF_{\text{lift}} = b \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha dr.$$

Integrací přes obě křídla dostaneme

$$F_{\text{lift}} = 2 \int_0^l b \rho \omega^2 r^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha dr = \frac{2}{3} b \rho \omega^2 l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Pro lepší srovnání s pozorováními budeme pracovat s frekvencí kmitů  $f_{c_s} = \omega/2\pi$  (zde jsme vzpomněli na koeficient vyjadřující úhel opsaný křídly). Vztah pro velikost vztlakové síly pak nabyde tvaru

$$F_{\text{lift}} = \frac{8\pi^2}{3} b \rho c_s^2 f^2 l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

Nyní požadujeme, aby se vztlak rovnal tíze včely  $Mg$ . Jelikož je frekvence mávání dobře měřitelným parametrem včelího letu, vyjádříme

$$f = \sqrt{\frac{3Mg}{8\pi^2 b \rho c_s^2 l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}}. \quad (2)$$

Zbývá nám už jen vyjádřit energetické ztráty způsobené máváním, tj. výkon potřebný k tomu, aby se včela vznášela. Pro element odporové síly máme

$$dF_{\text{drag}} = b \rho \omega^2 r^2 \sin^3 \alpha dr.$$

Budeme integrovat ztrátový výkon  $F_{\text{drag}v} = F_{\text{drag}}\omega r$  přes obě křídla a dostaneme

$$P_{\text{loss}} = 2 \int_0^l b\rho\omega^3 r^3 \sin^3 \alpha \, dr = 4\pi^3 l^4 b\rho c_s^3 f^3 \sin^3 \alpha \approx \sqrt{\frac{M^3 g^3}{S\rho \cos^3 \alpha}}. \quad (3)$$

Tím jsme odvodili vztah potřebný pro vyřešení zadané otázky. Dostáváme se tak do části úlohy, která nemá s fyzikou mnoho společného – je potřeba zjistit hmotnost včely, rozměry včelího křídla, úhel jeho záběru a ještě odhadnout kalorickou hodnotu včelí potravy. Lze dohledat velké množství více či méně důvěryhodných zdrojů, ale i tak není možné dohledat uspokojivá čísla, protože parametry včelího těla se i u dělnic vnitrodruhově (*Apis mellifera*) dosti liší. Budeme převážně vycházet z informací na stránkách University of Michigan,<sup>6</sup> avšak získané údaje budeme brát pouze jako odhad.

- Délka křídla:  $l = 12$  mm,
- plocha křídla<sup>7</sup>:  $S = 50$  mm<sup>2</sup>,
- hmotnost včely:  $M = 100$  mg,
- hmotnost nasbíraného pylu a nektaru:  $m = 40$  mg,
- kalorická hodnota včelí potravy<sup>8</sup>: 13 000 kJ·kg<sup>-1</sup>,
- úhel náběhu:  $\alpha \approx 50^\circ$ ,
- parametr opravující délku oblouku, po kterém kmitá křídlo je přibližně:  $c_s = 0,45$ .

Pro výpočet doby, po kterou se včela vydrží vznášet, vyjdeme z poněkud naivní představy, že se bude živit nektarem, který sama nasbírala.<sup>9</sup> Za její hmotnost přitom budeme považovat aritmetický průměr hmotnosti těla a hmotnosti těla plus nasbíraného pylu (vzhledem k tomu, že provádíme velmi hrubé odhady, nedojde k linearizaci k žádné zásadní chybě). Hustota vzduchu při pokojové teplotě je s dostatečnou přesností  $\rho = 1,2$  kg·m<sup>-3</sup>.

Nejprve ale spočítáme frekvenci kmitů včelích křídel. Z výše zmíněných videí odhadneme, že křídla kmitají s frekvencí<sup>10</sup> 80 Hz–120 Hz. Po dosazení odhadnutých hodnot potřebných veličin dostaneme na základě vztahu (2) výsledek

$$f \doteq 230 \text{ Hz}.$$

<sup>6</sup>[http://animaldiversity.ummz.umich.edu/accounts/Apis\\_mellifera/](http://animaldiversity.ummz.umich.edu/accounts/Apis_mellifera/)

<sup>7</sup>Vám obeznámeným s anatomii blanokřídlých se může zdát divné, proč stále mluvíme o dvou křídlech, když má včela ve skutečnosti čtyři křídla. Uvažujeme prostě, že zadní křídlo je přiložené k přednímu, takže jejich celková plocha je součet mínus překryv a uvedená délka přísluší přednímu křídlu.

<sup>8</sup>Může se nezanedbatelně lišit podle kvetoucí rostliny. Zde zmíněný odhad se však zakládá na kalorické hodnotě medu podle stránky <http://en.wikipedia.org/wiki/Honey#Nutrition>.

<sup>9</sup>Včelí dělnice je ve skutečnosti živena v úle, a to pouze tak, aby dokázala létat řádově hodinu, přičemž podává extrémní výkony a zhruba po měsíci uhynie kvůli celkovému vyčerpání organismu.

<sup>10</sup>Různí autoři uvádějí i vyšší hodnoty (viz <http://hypertextbook.com/facts/1999/MichelleFinnegan.shtml>), je však pravděpodobné, že během letu musí včela kmitat křídly s vyšší frekvencí, než když se pouze vznášá.

Vypočtená frekvence je oproti skutečnosti zhruba dvojnásobná. To je výborný výsledek, uvážíme-li, že jsme parametry včelího těla pouze velmi hrubě odhadovali. Z rovnice (3) určíme, že výkon potřebný ke vznášení je

$$P_{\text{loss}} \doteq 10 \text{ mW} .$$

A konečně z energie dostupné z 40 mg potravy získáme čas, po který se včela dokáže vznášet

$$t_{\text{hover}} \doteq 14 \text{ h} .$$

To se může zdát jako lehce nadhodnocený odhad, ale jak už jsme zmínili, včela nekonzumuje nektar, který nese. Smysluplnější je spočítat hmotnost potravy potřebnou ke vznášení po jednotku času, vychází

$$\frac{m_{\text{food}}}{t_{\text{hover}}} = 3 \text{ mg} \cdot \text{h}^{-1} .$$

Pokud by včela pracovala osm hodin denně po jeden měsíc, spotřebovala by na let (předpokládejme pro teď, že je stejně energeticky náročný jako vznášení se) asi 0,8 g potravy. Přitom za život vyprodukuje přibližně 0,5 g medu,<sup>11</sup> takže úl našich fyzikálně zjednodušených včel by pracoval na dluh. Spotřeba však převyšuje výrobu méně než dvojnásobně, což je vzhledem k hrubosti našich odhadů velmi dobrý výsledek.

## Úloha I.P . . . Měsíc z Marsu

*Může být někdy vidět Měsíc z Marsu pouhým okem? Svou odpověď podpořte náležitými výpočty.*

Úlohu si rozdělíme na několik podbodů:

- Bude Měsíc dostatečně jasný?
- Bude Měsíc úhlově rozlišitelný od Země?
- Nebude Měsíc přесvícen Zemí?
- Bude Měsíc při pozorování dostatečně úhlově vzdálen od Slunce?

*Bude Měsíc dostatečně jasný?*

Měsíc i Mars pro potřeby řešení posadíme na kruhové dráhy kolem Slunce ležící v jedné rovině. Označme si poloměr dráhy Měsíce  $a_1$ , poloměr dráhy Marsu  $a_m$  a úhel mezi průvodiči těles  $\alpha$ . Pak pro vzdálenost Měsíce a Marsu  $a_{1m}$  platí dle kosinové věty

$$a_{1m} = \sqrt{a_1^2 + a_m^2 - 2a_m a_1 \cos \alpha} .$$

Dále pro úhel  $\varphi$  sevřený mezi  $a_1$  a  $a_{1m}$  platí

$$\varphi = \arccos \frac{a_1^2 + a_{1m}^2 - a_m^2}{2a_{1m} a_1} .$$

<sup>11</sup><http://www.captainjohnshoney.com/trivia.htm>

Poměr osvětlené části povrchu Měsíce viditelné z Marsu ku povrchu osvětlené části Měsíce při úplňku je roven

$$\frac{\pi - \varphi}{\pi}.$$

Nyní můžeme sestavit Pogsonovu rovnici a zjistit hvězdnou velikost Měsíce při pozorování z Marsu. Pro světelný tok dopadající ze Slunce na jednotkovou plochu ve vzdálenosti Země platí

$$\Phi_S = \frac{L_S}{4\pi a_1^2},$$

kde  $L_S$  je celkový světelný výkon Slunce.

Pro světelný tok přicházející od Měsíce k Marsu platí

$$\Phi_1 = \Phi_S \pi R_1^2 \frac{A_1}{2\pi a_{1m}^2} \frac{\pi - \varphi}{\pi},$$

kde  $R_1$  je poloměr Měsíce a  $A_1 \doteq 0,136$  je Bondovo albedo Měsíce.<sup>12</sup> Po dosazení do Pogsonovy rovnice dostaneme

$$m_1 = m_S + 2,5 \log \frac{2\pi a_{1m}^2}{A_1 R_1^2 (\pi - \varphi)},$$

kde  $m_S$  je zdánlivá hvězdná velikost Slunce při pozorování ze Země. Nyní můžeme zkusit nalézt minimum v závislosti na parametru  $\alpha$ . Analytické nalezení minima by ale bylo velmi pracné, ne-li nemožné, určíme jej tedy numericky, například pomocí excelové funkce Řešitel. Po výpočtu vyjde  $m_1 \doteq 1,4$  mag pro  $\alpha \doteq 19,6^\circ$ , což je dostatečná jasnost na pozorování okem.

Model, který jsme použili, je sice jednoduchý, v přírodě se ale nevyskytuje, proto zde ještě ukážeme fyzikálně správnější model.<sup>13</sup> Pro rozptyl světla na měsíčním povrchu použijeme lambertovský model, který říká

$$I(\alpha) = I(0) \cos \alpha,$$

kde  $I(0)$  je intenzita rozptýlená do stejného směru, ze kterého paprsek přišel, a  $\alpha$  je fázový úhel, tedy úhel mezi dopadajícím paprskem a směrem, do kterého nás rozptyl zajímá.

Odvození pro náš případ je složité, omezíme se zde pouze na výsledný vzorec. Pro světelný tok dopadající z Měsíce na jednotkovou plochu ve vzdálenosti Marsu platí

$$\Phi_1 = \Phi_S \left(\frac{R_1}{a_{1m}}\right)^2 A_g \left[ \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) \cos \varphi + \left(\frac{1}{\pi}\right) \sin \varphi \right],$$

kde  $R_1$  je poloměr Měsíce a  $A_g$  je geometrické albedo Měsíce, což je poměr mezi skutečnou jasností tělesa při nulovém fázovém úhlu a jasností lambertovského disku o stejném průřezu.

---

<sup>12</sup>Zde uvažujeme zjednodušený model, kdy Měsíc rozptyluje světlo rovnoměrně do poloprostoru a plošná jasnost měsíčního disku klesá rovnoměrně s rostoucím fázovým úhlem.

<sup>13</sup>Který ale v případě malých těles sluneční soustavy, kam řadíme i Měsíc, také není příliš přesný.

Pro lambertovský rozptyl platí mezi geometrickým a Bondovým albedem vztah

$$A_g = \frac{2}{3} A_1.$$

Po dosazení do Pogsonovy rovnice a minimalizaci hvězdné velikosti dostaneme  $m_1 \doteq 2,1$  mag pro  $\alpha \doteq 43,5^\circ$ .

### *Bude Měsíc úhlově rozlišitelný od Země?*

Úhlovou vzdálenost Měsíce od Země při pozorování z Marsu určíme jako

$$\psi \approx \frac{a_{z1}}{a_{1m}},$$

kde  $a_{z1}$  je vzdálenost Měsíce od Země. Po dosazení a převedení na stupně vyjde  $\psi \doteq 8,4'$ , což je více než rozlišovací schopnost lidského oka, která je běžně uváděna kolem  $1'$ .<sup>14</sup>

### *Nebude Měsíc přesvícen Zemí?*

Musíme vyšetřit, jestli nebude Měsíc přesvětlen blízko stojící Zemí. Jde o efekt, kdy si vedle člověka držícího hoříci svíčku stoupne člověk s reflektorem, a vy svíčku přestanete vidět. Protože tento efekt souvisí hlavně s fyziologií oka a se zpracováním obrazu v mozku, je takřka nemožné na tuto otázku podat kvantitativní odpověď.

Omezíme se proto na připodobnění situace k něčemu, co známe z pozemské oblohy, a podle toho odhadneme možnost pozorování. Pokud vypočítáme jasnost Země dle postupu uvedeného v předchozí sekci, dostaneme při albedu  $A_e \doteq 0,306$  hvězdnou velikost Země  $m_e \doteq -1,6$  mag, což je jasnost srovnatelná s jasností Siria. Jasnost Měsíce je přibližně srovnatelná s jasností Polárky. Úhel mezi Zemí a Měsícem je srovnatelný s dvojnásobkem úhlové vzdálenosti složek dvojhvězdy  $\epsilon$  Lyr. Měsíc by tedy mohl být rozlišitelný, bude ale záležet na zraku pozorovatele a jeho zkušenostech.

### *Bude Měsíc při pozorování dostatečně úhlově vzdálen od Slunce?*

Dále se ptáme, na jak temné obloze bude vlastně Měsíc pozorovatelný. Elongaci Měsíce<sup>15</sup> vypočteme jako  $\vartheta = 180^\circ - \alpha - \varphi$ . Pro  $\alpha$  z první části vyjde  $\vartheta \doteq 41^\circ$ . Na Zemi je astronomická noc definována jako doba, kdy je Slunce alespoň  $18^\circ$  pod obzorem, po tuto dobu je v podstatě dokonalá tma, co se týče rozptylu slunečních paprsků v atmosféře. Mars má daleko řidší atmosféru než Země, světlo se v ní tedy hůře rozptyluje. Pokud bychom si vhodně zvolili pozorovací stanoviště, bylo by možné, aby i za podmínek „pozemské“ astronomické noci byl Měsíc až  $23^\circ$  nad obzorem, byl by tedy dobře pozorovatelný.

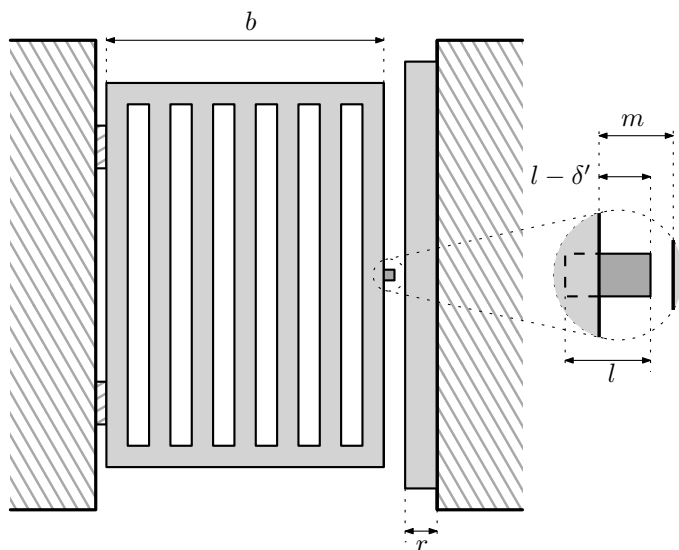
<sup>14</sup>Rozlišovací schopnost oka je dána hustotou tyčinek a čípků a dalšími fyziologickými vlastnostmi, ne difrakčním limitem, který je menší.

<sup>15</sup>Úhlovou vzdálenost od Slunce.

## Úloha II.1 ... svatá Anna chladna z rána

V chladném ranním oparu odcházíte z domu a zahradní branka funguje tak, jak má – na zmáčknutí kliky se otevře, po zavření a puštění kliky zůstane zavřená, zaklapnutá. Odpoledne se vracíte a říkáte si, který lump zase nezavřel... A ejhle, ono zavřít nejde. Ani po stisknutí kliky nezaleze ocelový jazýček natolik, aby prošel kolem hliníkového rámu. Branka je také z hliníku. Kde je problém? Co zapomněl výrobce při navrhování branky uvažovat? Navrhněte, jaké rozměry by měla mít branka při  $20\text{ }^\circ\text{C}$ , jestliže uvažujeme, že teplota během roku neklesá pod  $-30\text{ }^\circ\text{C}$  a nepřesahuje  $50\text{ }^\circ\text{C}$ .

V nákresech branky zapomněli uvažovat tepelnou roztažnost. Vlivy teplotních rozdílů budeme studovat na konstrukci branky podle obrázku 4. Označme šířku mezery mezi hliníkovým rámem a hliníkovou brankou  $m$ , délku ocelové západky  $l$ , přesah západky přes hranu branky bez stisknuté kliky  $l - \delta$ , se stisknutou klikou  $l - \delta'$ , šířku branky  $b$  a šířku rámu  $r$ . To vše při  $20\text{ }^\circ\text{C}$ . Západka je upevněna tak, že se rozdíly  $\delta$  a  $\delta'$  s teplotou nemění ( $\delta < \delta'$ ).



Obr. 4: Konstrukce branky. Popsané rozměry odpovídají teplotě  $20\text{ }^\circ\text{C}$  a zatažené západce. Světlé objekty jsou hliníkové, tmavé objekty ocelové a šrafované oblasti nepodléhají tepelné roztažnosti.

V zimě bude hrozit, že se branka vlivem kontrakce materiálu samovolně otevře. V létě naopak může branka následkem roztažení materiálu zůstat stále zavřená i při zatažení západky. Obecně musí vždy platit, že se stisknutou klikou je přesah

západky menší než mezera mezi brankou a rámem a s uvolněnou klikou naopak větší. Z toho plyne podmínka

$$l(1 - \Delta t_w \alpha_{zap}) - \delta' < m + (b + r) \Delta t_w \alpha_{Al} < l(1 - \Delta t_w \alpha_{zap}) - \delta \quad (4)$$

pro zimu a

$$l(1 + \Delta t_s \alpha_{zap}) - \delta' < m - (b + r) \Delta t_s \alpha_{Al} < l(1 + \Delta t_s \alpha_{zap}) - \delta \quad (5)$$

pro léto, kde koeficienty tepelné roztažnosti hliníku a materiálu západky značíme  $\alpha_{Al}$  a  $\alpha_{zap}$ . Předpokládáme, že branka je fixována k pantům, které jsou z materiálu se zanedbatelnou tepelnou roztažností. Teplotní rozdíly v zimě a v létě značíme  $\Delta t_w$  a  $\Delta t_s$ .

Z podmínek (4) a (5) vybereme vždy tu kritičtější, neboli ten interval, který je průnikem obou kritérií. Pro rozestup rámu a branky při teplotě 20 °C, známe-li při této teplotě rozměr branky, rámu a západky, plyne potom podmínka

$$l(1 + \Delta t_s \alpha_{zap}) - \delta' + (b + r) \Delta t_s \alpha_{Al} < m < l(1 - \Delta t_w \alpha_{zap}) - \delta - (b + r) \Delta t_w \alpha_{Al}.$$

Je tedy vidět, že vhodnou šířku mezery můžeme ovlivnit nejen volbou rozměrů, ale i volbou materiálu.

Na závěr si pro představu zkusme dosadit číselné hodnoty. Tepelná roztažnost hliníku je  $\alpha_{Al} = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , západka nechť je vyrobena z oceli, která má tepelnou roztažnost  $\alpha_{zap} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Maximální rozdíly teplot jsou pro zimu a léto  $\Delta t_w = 50 \text{ K}$  a  $\Delta t_s = 30 \text{ K}$ . Tedy pro obecné rozměry západky, rámu a branky

$$l \cdot 1,00075 - \delta' + (b + r) \cdot 0,00119 < m < l \cdot 0,99925 - \delta - (b + r) \cdot 0,00119.$$

Řekněme, že součet šířky branky a rámu bude  $(b+r) = 1 \text{ m}$  a západka má délku  $l = 7 \text{ cm}$  a přesahy  $l - \delta = 5 \text{ cm}$ ,  $l - \delta' = 2 \text{ cm}$ . Za takto zvolených rozměrů vychází podmínka na rozestup branky a rámu jako

$$2,12 \text{ cm} < m < 4,88 \text{ cm}.$$

V praxi však bývá mnohem větším problémem rozměr prostoru, do kterého se západka zasouvá. Příliš velká šířka vede k zanášení nečistotami, avšak zúžení může vést k zasekávání západky, které způsobuje právě tepelná roztažnost použitých materiálů.

## Úloha II.2 ... požívačná buňka

*Odhadněte na základě znalostí pouze makroskopicky měřitelných veličin, počtu buněk v lidském těle a počtu částic v látkovém množství jednoho molu, kolik molekul kyslíku „spotřebuje“ denně jedna lidská buňka. Potřebné údaje k výpočtu si naleznete a svoje zdroje nezapomeňte citovat.*

Uvažujeme pouze tělu vlastní buňky,<sup>16</sup> pak se jejich počet v lidském organismu odhaduje<sup>17</sup> na  $10^{12}$  až  $10^{16}$ . Vzduch, který vdechujeme, obsahuje přibližně 21 objemových % kyslíku a vydechaný vzduch 16 %, takže rozdíl činí 5%.<sup>18</sup> Množství oxidu uhličitého ve vydechaném vzduchu 4,6 objemových % se nám může zdát menší, než bychom čekali, vzhledem k tomu, že podle zjednodušené chemické rovnice dýchání z jednoho molu kyslíku vzniká jeden mol oxidu uhličitého, nicméně oxid uhličitý se v krvi podílí na udržování acidobazické rovnováhy a je částečně vylučován ledvinami ve formě hydrogenuhličitanového aniontu. Proto můžeme zůstat u toho, že na jeden nádech a výdech se v těle na dýchání spotřebuje zhruba 5 objemových % kyslíku.

Víme, že objem klidového nádechu a výdechu u lidí činí zhruba  $0,5 \text{ dm}^3$  vzduchu, 5 % z toho představuje  $V = 0,025 \text{ dm}^3$  kyslíku. Počet molekul kyslíku v tomto objemu určíme pomocí stavové rovnice pro ideální plyn  $pV = nRT$ . Molární plynová konstanta  $R$  vznikla jako součin Boltzmannovy konstanty  $k$  a Avogadrovy konstanty  $N_A$ , stavovou rovnici tedy můžeme použít ve tvaru  $pV = nN_A kT$ , přičemž součin molárního množství  $n$  a Avogadrovy konstanty, která udává počet částic v jednom molu, nám určí počet částic kyslíku  $N$ . Dále do rovnice potřebujeme dosadit hodnotu tlaku  $p = 101 \text{ kPa}$  a teploty  $T = 293 \text{ K}$ , které jsme zvolili tak, aby odpovídali normálním podmínkám. Nyní již můžeme vyjít z rovnice  $pV = NkT$  a určit z ní počet částic kyslíku na jeden nádech

$$N = \frac{pV}{kT} \doteq 6 \cdot 10^{20}.$$

Případně můžeme využít jednodušší výpočet přes takzvaný molární objem, který udává objem jednoho molu částic ideálního plynu za standardních podmínek, s kterými stejně počítáme.

Nyní je potřeba dohledat údaj o tom, jaká je klidová dechová frekvence dospělého člověka, podle internetových zdrojů<sup>19</sup> tato frekvence činí asi 12–15 dechů na minutu. Je zřejmé, že během dne dechová frekvence kolísá v závislosti na tom, co děláme a jakou máme aktuální potřebu kyslíku, což však lze zanedbat s tím, že zrychlené a hlubší dýchání, ke kterému často dojde přes den, se přibližně vyrovná s útlumem dýchání při spánku, navíc vzhledem k tomu, že používáme poměrně hrubé odhady veličin, i nyní nám bude stačit pouze přibližný počet výdechů a nádechů, počítejme tedy s hodnotou  $2 \cdot 10^4$  nádechů a výdechů za den. Spotřebuje se tedy zhruba  $10^{25}$  částic kyslíku, což v přepočtu na jednu buňku činí asi  $10^{13}$  molekul kyslíku při spodním odhadu počtu buněk a přibližně  $10^9$  při použití horního odhadu.<sup>20</sup>

<sup>16</sup> Jiné buňky v nás sice převyšují počet našich vlastních buněk zhruba o řád, ale v této úloze pro nás nejsou důležité a není problém je zanedbat, neboť se jedná hlavně o různé mikroorganismy, které mají obvykle o dost menší velikost buňky, takže pokud už nějaký kyslík spotřebovávají, není to významné množství.

<sup>17</sup> <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23829164>

<sup>18</sup> <http://lucero.hogaza.sweb.cz/dychaci.htm>

<sup>19</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Respiratory\\_rate](http://en.wikipedia.org/wiki/Respiratory_rate)

<sup>20</sup> Samozřejmě, že se různé typy buněk v těle svojí potřebou kyslíku velmi liší, nás však zajímala průměrná spotřeba na buňku.



## Úloha II.3 . . . nedočkavé jádro

Jádro bismutu  $^{209}\text{Bi}$  sedí nedočkavě v pokoji na místě. V jednom okamžiku to nevydrží a rozpadne se. Zůstane nám z něj jádro thalia  $^{205}\text{Tl}$  a od něho letí pryč  $\alpha$  částice. Jakou rychlostí by se pohybovala  $\alpha$  částice, pokud by se energie uvolněná při rozpadu přeměnila pouze na její kinetickou energii? Jakou rychlostí se bude  $\alpha$  částice pohybovat ve skutečnosti? Výsledky porovnejte. Klidové hmotnosti atomů jsou  $M = m(^{209}\text{Bi}) = 208,980\,399\text{ u}$ ,  $M' = m(^{205}\text{Tl}) = 204,974\,428\text{ u}$ ,  $m = m(^4\text{He}) = 4,002\,602\text{ u}$ . Nezapomeňte ověřit, jestli není potřeba používat relativistické vztahy.

Při rozpadu jádra bismutu dojde v systému k úbytku hmotnosti<sup>21</sup>

$$\Delta m = m(^{209}\text{Bi}) - [m(^{205}\text{Tl}) + m(^4\text{He})] = 0,003\,369\text{ u}.$$

Podle známého vztahu  $E = mc^2$  se tento úbytek projeví nárůstem kinetické energie produktů jaderné reakce. Dle zadání máme nejprve předpokládat, že se veškerá uvolněná energie přemění na kinetickou energii alfa částice  $E_k$ . Na základě vztahu pro kinetickou energii v klasické mechanice můžeme psát

$$E_k = \Delta mc^2 = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2, \quad (6)$$

kde jsme  $v_\alpha$  označili rychlost alfa částice a její hmotnost jsme přeznačili na  $m_\alpha$ . Ze vztahu (6) snadno vyjádříme rychlost

$$v_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}} \doteq 1,230 \cdot 10^7\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Úlohu není třeba řešit relativisticky, neboť

$$m_\alpha c^2 \gg \Delta mc^2, \quad (7)$$

tj. klidová energie alfa částice je mnohem vyšší než její kinetická energie. Můžeme ověřit, že za této podmínky se relativistický výpočet redukuje na klasický. Kinetickou energii vyjádříme jako rozdíl celkové energie a klidové energie

$$E_k = \Delta mc^2 = m_\alpha c^2 \gamma - m_\alpha c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{\Delta m + m_\alpha}{m_\alpha},$$

kde  $\gamma$  označuje Lorentzův faktor. Rozepsáním Lorentzova faktoru dostaneme pro rychlost alfa částice rovnici

$$1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2} = \left( \frac{m_\alpha}{\Delta m + m_\alpha} \right)^2,$$

<sup>21</sup>Jak jste jistě v zadání postřehli, zapisujeme hmotnosti v násobcích atomové hmotnostní jednotky  $\text{u} = 1,660\,538\,921(73) \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ , která je definována jako 1/12 klidové hmotnosti uhlíku  $^{12}\text{C}$ .

ze které vyjádříme

$$v_\alpha = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_\alpha}{\Delta m + m_\alpha}\right)^2} \doteq 1,229 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (8)$$

Tento výsledek dále přepíšeme jako

$$v_\alpha = c\sqrt{1 - \left(1 + \frac{\Delta m}{m_\alpha}\right)^{-2}} \quad (9)$$

a využijeme nerovnosti (7) ve tvaru  $\Delta m/m_\alpha \ll 1$ , díky níž můžeme s dostatečnou přesností nahradit závorku v (9) rozvojem do prvního řádu<sup>22</sup>

$$\left(1 + \frac{\Delta m}{m_\alpha}\right)^{-2} \approx 1 - 2\frac{\Delta m}{m_\alpha}.$$

Po dosazení zpět do (9) dostaneme výsledek

$$v_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}}, \quad (10)$$

který je shodný s výrazem (6).

Stále však nemůžeme pokládat výsledek (6) za správný, neboť přesunem veškeré rozpadové energie do kinetické energie alfa částice by došlo k narušení zákona zachování hybnosti. Jádro bismutu je na počátku v klidu, proto zůstane nehybné i těžiště soustavy thalium–helium. Obě částice musí vylétnout antiparalelními směry se stejnou velikostí hybnosti. Z toho okamžitě plyne (počítáme nerelativisticky)

$$v_{\text{Tl}} = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Tl}}} v_\alpha, \quad (11)$$

a je tedy zřejmé, že se po zakomponování zákona zachování hybnosti rychlost alfa částice příliš nezmění, neboť  $m_\alpha \ll m_{\text{Tl}}$ . Dosazením (11) do zákona zachování energie dostaneme

$$\Delta mc^2 = \frac{1}{2}(m_\alpha v_\alpha^2 + m_{\text{Tl}} v_{\text{Tl}}^2) = \frac{1}{2}\left(m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{m_\alpha^2}{m_{\text{Tl}}} v_\alpha^2\right).$$

Nyní vyjádříme  $v_\alpha$  a provedeme aproximaci

$$v_\alpha = c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{\text{Tl}}}\right)}} \approx c\sqrt{\frac{2\Delta m}{m_\alpha}}.$$

Opět tak dostáváme zjednodušený vztah (6). Bez aproximace bychom dostali číselný výsledek

$$v_\alpha \doteq 1,22 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

---

<sup>22</sup>Využíváme zde přibližné vyjádření  $(1+x)^n \approx 1+nx$ ,  $|x| \ll 1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , které plyne z binomické věty.

Relativistické korekce již provádět nebudeme, neboť vidíme, že rychlost  $v_\alpha$  je při přesném výpočtu nižší než v prvním případě.

Výsledek jsme ale právě kvůli relativistickým korekcím museli zaokrouhlit pouze na tři platné cifry. Řádovou velikost relativistických korekcí získáme vyčíslením (9) a jeho porovnáním s výrazem (10).

## Úloha II.4 ... Boeing

*Uvažujte pneumatiku válcovitého tvaru o poloměru  $R$  s vnitřním otvorem o poloměru  $r$  šířky  $d$  huštěnou na tlak  $p$ . Pneumatiku zatížíme silou  $F$ . Při tomto zatížení se změní tvar pneumatiky z válce na válcovou úseč se stejným vnitřním i vnějším poloměrem. Předpokládejte, že se teplota pneumatiky zatížením nezmění. Určete plochu styku pneumatiky s vozovkou.*

Uvažujme ideální plyn v pneumatice. Je-li pneumatika po zatížení v klidu (např. zaparkované auto), bude platit stavová rovnice  $pV = NkT$ , kde  $V$  je objem plynu v pneumatice,  $N$  je počet částic plynu v pneumatice,  $k$  je Boltzmannova konstanta a  $T$  je teplota plynu v pneumatice. Počet částic i teplota plynu zůstává konstantní, takže bude platit

$$pV = p_1 V_1,$$

kde  $p_1$ , resp.  $V_1$  je tlak, resp. objem pneumatiky po zatížení a  $V$  je objem pneumatiky před zatížením. Bude se také hodit vyjádření

$$V = \pi (R^2 - r^2) d, \quad (12)$$

kde  $d$  je šířka pneumatiky. Dále musí být soustava v mechanické rovnováze, čemuž odpovídá rovnost velikostí tlakové a zatěžovací síly  $F = F_p$ , tedy

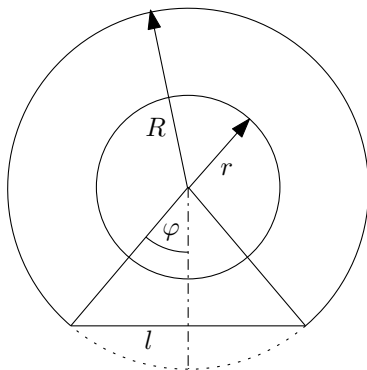
$$F = (p_1 - p_a) S. \quad (13)$$

Nyní diskutujeme, jaké různé případy mohou nastat. K tomu využijeme náčrt situace na obrázku 5.

Zprvte teoreticky může nastat situace, v níž by pneumatika byla zdeformovaná až za vnitřní poloměr  $r$ . Tato situace je vzhledem k technické realizaci většiny vozidel a letounů nemožná (a navíc přináší do problému další složitost), proto se jí zabývat nebudeme.

Dále je možné, že pneumatika bude dostatečně nahuštěná vzhledem ke svým rozměrům a zatěžovací síle. Tím je myšleno, že deformace pneumatiky je v porovnání s objemem pneumatiky zanedbatelná, takže plyn má téměř stejný objem, a tím pádem i tlak jako nezatížená pneumatika ( $p_1 \approx p$ ). Pro tento případ lze nalézt řešení jednoduše z (13) jako

$$S \approx \frac{F}{p - p_a}.$$



Obr. 5: Náčrt pneumatiky.

Pokud tento předpoklad není splněn nebo z nějakého důvodu potřebujeme přesnější řešení, je nutné uvažovat změnu tlaku v pneumatice. Užijme notace podle obrázku. Rovnici (13) lze rozepsat jako

$$F = (p_1 - p_a) S = (p_1 - p_a) ld = 2Rd(p_1 - p_a) \sin \varphi, \quad (14)$$

kde  $d$  je šířka pneumatiky.

Úbytek objemu  $\Delta V$  odpovídá válcové (kruhové) úseči, jejíž objem lze vypočítat z obsahů příslušné kruhové výseče a obvodového trojúhelníku se středovým úhlem  $2\varphi$  jako

$$\Delta V = d \left( \frac{2\varphi}{2\pi} \pi R^2 - \frac{1}{2} Rl \cos \varphi \right),$$

odkud dosazením za  $l$

$$\Delta V = d(\varphi R^2 - R^2 \sin \varphi \cos \varphi).$$

Po vytknutí  $R^2$  a užitím  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  dostaneme

$$\Delta V = R^2 d \left( \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (15)$$

Jak tvar této rovnice napovídá, vyjádříme-li pomocí ní přes stavovou rovnici tlak  $p_1$  a dosadíme-li do (13), dostáváme analyticky neřešitelnou rovnici. Proto je nyní třeba zamyslet se nad tím, co vlastně od našeho řešení očekáváme. Potřebujeme-li nalézt řešení pro konkrétní případy velice přesně, tak bude zapotřebí nejen numerické řešení, ale také zpřesnění našich předpokladů. Například tím, že místo stavové rovnice použijeme van der Waalsovou rovnici, která nám dává

$$\left( p + \frac{N^2}{V^2} a \right) (V - Nb) = \text{konst.}$$

kde  $a$  a  $b$  jsou konstanty příslušného plynu v pneumatice (parametrizují interakci částic plynu mezi sebou a objem, který tyto částice zabírají). Do této rovnosti dosadíme  $V_1 = V - \Delta V$  a dostáváme

$$\left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right) (V - Nb) = \left[p_1 + \frac{N^2 a}{(V - \Delta V)^2}\right] [(V - \Delta V) - Nb].$$

Dosazením za  $p_1$ , resp.  $V$ ,  $\Delta V$  z (14), resp. (12), (15) dostaneme (tam, kde jsme ponechali  $V$ , resp.  $\Delta V$ , mějme na paměti, že tyto jsou funkcí  $\varphi$ )

$$\begin{aligned} & \left[p_a + \frac{F}{2Rd \sin \varphi} + \frac{N^2 a}{(V - \Delta V)^2}\right] \left[\pi d (R^2 - r^2) - R^2 d \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) - Nb\right] = \\ & = \left(p + \frac{N^2 a}{V^2}\right) \left[\pi d (R^2 - r^2) - Nb\right], \end{aligned} \quad (16)$$

kde počet částic  $N$  určíme z počátečních podmínek (například z van der Waalovy rovnice pomocí teploty  $T$  numericky). Tuto rovnici je pro konkrétní případy třeba vyřešit pro  $\varphi$  numericky s požadovanou přesností například pomocí Newtonovy metody.

Nejsou-li nároky na přesnost tak velké, lze pokračovat ve výpočtu za použití několika aproximací. Nejprve se opět vrátíme k ideálnímu plynu (odpovídá zanedbání členů  $s$  a  $b$ ). Dostáváme

$$\left(p_a + \frac{F}{2Rd \sin \varphi}\right) \left[\pi d (R^2 - r^2) - R^2 d \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right)\right] = \pi p d (R^2 - r^2).$$

Nyní je třeba aproximovat sinus. Povšimněme si, že použitím přiblížení  $\sin x \approx x$  se anuluje člen  $\varphi - \sin(2\varphi)/2$ , čímž dostáváme řešení pro konstantní tlak. V tomto členu je tedy třeba rozvinout sinus do vyššího řádu. S rozvojem do pátého či dokonce ještě vyššího řádu umírají naše veškeré snahy o explicitní řešení a nikdy nedostaneme přesnější výsledek než numerickým řešením (16), proto jiný rozvoj než do třetího řádu nedává smysl. Je třeba ale dbát i na to, za jakých podmínek je naše aproximace funkční. Rozvojem sinu do třetího řádu přejde výše zmiňovaný člen do tvaru  $(2/3)\varphi^3$ . Porovnáním aproximovaných hodnot s původním členem zjistíme, že již pro  $\varphi = 30^\circ$  se dopouštíme chyby 5% (a pro větší  $\varphi$  rychle roste). Dobře nahuštěná pneumatika by tuto podmínku měla snadno splňovat, nicméně pro podhuštěné pneumatiky by již toto přiblížení mohlo zanést značnou chybu do výsledku. Nyní vyvstává otázka, jak aproximovat člen  $\sin \varphi$ . Pro rozvoj do prvního řádu je chyba této aproximace menší než rozvinutí  $\varphi - \sin(2\varphi)/2$  do třetího řádu, takže tato možnost je určitě validní, nicméně jak se ukáže dalším postupem, rozvoj do třetího řádu nepřinese žádnou další významnější složitost do výpočtu a ještě dále tím nepřesnost snížíme, proto rozvíjme i  $\sin \varphi$  do třetího řádu. Z praktických důvodů ještě rovnici vydělme  $R^2 d$ . Získáme

$$\left[p_a + \frac{F}{2Rd \left(\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3\right)}\right] \left[\pi \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{2}{3}\varphi^3\right] = p\pi \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Zaveďme si substituce

$$\pi \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = A, \quad \frac{F}{2Rd} = B$$

a roznásobme. Vyjde nám

$$\left[ p_a \left( \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right) + B \right] \left( A - \frac{2}{3} \varphi^3 \right) = pA \left( \varphi - \frac{1}{6} \varphi^3 \right),$$

neboli

$$\frac{2}{3} p_a \varphi^6 - 4 p_a \varphi^4 + [A(p - p_a) - 4B] \varphi^3 - 6A(p - p_a) \varphi + 6AB = 0.$$

Pohybujeme-li se v našej oblasti  $\varphi < 30^\circ \approx 0,5 \text{ rad}$ , môžeme člen  $(2/3)p_a \varphi^6$  zanedbať (je minimálne 20krát menší než člen  $4p_a \varphi^4$ ).

Dostávame tak kvartickú rovnicu, ktorú môžeme vyriešiť napríklad pomocou Cardanových vzorců či pomocou programu WolframAlpha. Pozor! Je treba ze čtyř kořenů identifikovat ten, který dáva fyzikálně smysl.

## Úloha II.5 ... gravitační manévry

Máme družici, která obíhá Slunce po eliptické dráze. Pokud zmenšíme rychlost v afelu  $v_a$  na  $4/5$  původní rychlosti (tj. na  $(4/5)v_a$ ), jak se změní rychlost družice v perihéliu? Vyjádřete novou rychlost za pomoci původní rychlosti  $v_p$  a parametrů elipsy (hlavní poloosa  $a$  a relativní excentricita  $\varepsilon$ ).

Pripomeňme si niektoré vlastnosti pohybu družice v gravitačnom poli Slnka:

- Dráha družice je kuželosečka – elipsa (kružnica je taká špeciálna elipsa), parabola alebo hyperbola.
- Ťažisko sústavy (v našom prípade sa prakticky zhoduje so Slnkom) leží v jednom ohnisku kuželosečky.
- Mechanická energia  $E$  sa zachováva; typ kuželosečky určíme podľa jej znamienka:  $E < 0$  pre elipsu,  $E = 0$  pre parabolu a  $E > 0$  pre hyperbolu.
- Mechanická energia je daná ako súčet kinetickej energie  $E_k$  a potenciálnej energie v gravitačnom poli<sup>23</sup>  $E_p$ . Ak je družica hmotnosti  $m$  od Slnka hmotnosti  $M$  vzdialená  $r$  a má rýchlosť  $v$ , platí

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GmM}{r}. \quad (17)$$

- Pre elipsu existujú dva body, v ktorých je rýchlosť družice kolmá na jej spojnicu so Slnkom: perihélium a afélium. Pre parabolu a hyperbolu existuje len jeden taký bod, a to perihélium.
- Vzdialenosť od Slnka v perihéliu je  $r_p = a(1 - \varepsilon)$  a v aféliu  $r_a = a(1 + \varepsilon)$ .
- Na družicu pôsobia sily len v smere spojnice družica – Slnko (tzv. radiálne sily). Gravitačná sila  $\mathbf{F}_g$  pôsobí smerom ku Slnku, odstredivá  $\mathbf{F}_o$  od neho.

---

<sup>23</sup>Užitočná konvencia je považovať ju za nulovú v nekonečne.

- Z predošlého bodu vyplývá, že moment hybnosti družice sa zachováva.
- V perihéliu platí  $|\mathbf{F}_g| \geq |\mathbf{F}_o|$ , v aféliu  $|\mathbf{F}_g| \leq |\mathbf{F}_o|$ ; rovnosť nastáva len pre kružnicu.

Prvé dva body sú len 1. Keplerov zákon. Platnosť tretieho bodu vidíme z toho, že v nekonečne (kde  $E_p = 0$ ) musí byť mechanická energia nezáporná, čo sa zhoduje so zjavným faktom, že len pri pohybe po elipse družica nedokáže uletieť do nekonečna.

Ďalšie dva body vidno z geometrie elipsy – apsidy sú na opačných koncoch hlavnej osi a ťažisko sústavy leží tiež na tejto osi. Vyjadrenie  $r_p$  a  $r_a$  cez  $\varepsilon$  plynie priamo z definície excentricity ako „vzdialenosť ohnísk/dĺžka hlavnej osi“. Tiež vieme, že v perihéliu musí byť radiálna zložka rýchlosti družice nulová. Ak by smerovala k Slnku, resp. od Slnka, družica by sa k nemu ešte približovala, resp. bola ešte bližšie pred chvíľou, čo pre najbližší bod dráhy nie je možné. Podobná úvaha platí pre afélium.

Nasleduje rozbor síl. To, že v perihéliu pôsobí na družicu výslednica síl smerom preč od Slnka a v aféliu zasa ku Slnku, je jasné. Zo zachovania momentu hybnosti vyplýva rovno 2. Keplerov zákon. Ak je totiž zložka rýchlosti kolmá na spojnicu družica – Slnko rovná  $v_{\perp}$ , je moment hybnosti<sup>24</sup> daný vzťahom

$$L = mv_{\perp}r \quad (18)$$

a plocha, ktorú táto spojnica prejde za daný čas, je priamo úmerná konštantnému výrazu  $v_{\perp}r$ .

Tieto vlastnosti (plus 3. Keplerov zákon) stačia na vyriešenie veľkej väčšiny úloh z nebeskej mechaniky. Vráťane tejto.

Zo zadania vieme, že dráha družice je eliptická, teda  $E < 0$ . Slnko leží približne v jednom z ohnísk tejto elipsy. Po zmenšení rýchlosti v aféliu musí družica stále obiehať po elipse (lebo mechanická energia sa len zmenší), ale už po úplne inej.

To, čo majú tieto dve elipsy spoločné, je afélium. Keď je rýchlosť zmenšená, je totiž kolmá na spojnicu so Slnkom, a kolmá ostane aj po zmenšení. Perihéliom novej elipsy sa tento bod nemôže stať, lebo platila podmienka pre afélium  $|\mathbf{F}_g| \geq |\mathbf{F}_o|$  a ak sa zmenší rýchlosť, zmenší sa aj odstredivá sila a podmienka pre afélium stále platí<sup>25</sup>. Tým pádom majú naše elipsy spoločnú aj vzdialenosť od Slnka v aféliu.

Naším hlavným cieľom je teraz vyjadriť pôvodné rýchlosti družice v perihéliu  $v_p$  a v aféliu  $v_a$  pomocou daných parametrov. Vyjdeme zo zákonov zachovania mechanickej energie a momentu hybnosti v týchto bodoch.

Z (17) dostávame

$$E = \frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{GmM}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GmM}{r_a},$$

z (18) zasa

$$L = mv_a r_a = mv_p r_p \quad \Rightarrow \quad v_p = v_a \frac{r_a}{r_p},$$

<sup>24</sup>Všeobecne ide o vektor, v rovine stačí uvažovať jeho zložku kolmú na tú rovinu.

<sup>25</sup>Pozor, táto úvaha sa nedá použiť, ak by sme zmenšovali rýchlosť v perihéliu!

keďže v týchto bodoch je  $v_{\perp}$  rovná celej rýchlosti. Dosadíme do týchto rovníc  $r_p = a(1 - \varepsilon)$ ,  $r_a = a(1 + \varepsilon)$  a po pár úpravách sa dopracujeme k

$$v_a^2 = GM \frac{r_p}{ar_a}, \quad (19)$$

$$v_p^2 = GM \frac{r_a}{ar_p}. \quad (20)$$

Teraz spravme menšiu odbočku a dosadíme z (20) do výrazu pre energiu v perihéliu. Dostaneme

$$E = \frac{GmMr_a}{2ar_p} - \frac{GM}{r_p} = -\frac{GM}{2a},$$

energia teda závisí len na dĺžke hlavnej osi.

Ale naspät k pôvodnej úlohe: keď rýchlosť v aféliu klesne na  $v'_a = (4/5)v_a$ , bude družica obiehať po elipse s hlavnou polosou  $a'$ , excentricitou  $\varepsilon'$  a rovnakou vzdialenosťou  $r'_a = r_a$ . Z (19) teda dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{GM(1 - \varepsilon')}{r_a} &= (v'_a)^2 = \frac{16}{25}v_a^2 = \frac{16GM(1 - \varepsilon)}{25r_a}, \\ \varepsilon' &= \frac{9 + 16\varepsilon}{25}. \end{aligned}$$

Vzdialenosť  $r_a$  sa nezmení, preto si ju môžeme vyjadriť pred a po zmenšení rýchlosti

$$\begin{aligned} r_a &= a(1 + \varepsilon) = a'(1 + \varepsilon'), \\ a' &= a \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon'} = a \frac{25(1 + \varepsilon)}{34 + 16\varepsilon}. \end{aligned}$$

Z (20) potom dostávame

$$(v'_p)^2 = \frac{GM r_a}{a' r'_p} = v_p^2 \frac{a^2(1 - \varepsilon)}{(a')^2(1 - \varepsilon')},$$

do čoho stačí dosadiť  $a'$  a  $\varepsilon'$ , odmocniť a dostaneme

$$v'_p = v_p \frac{17 + 8\varepsilon}{10(1 + \varepsilon)}.$$

Vidíme, že parameter  $a$  vo výsledku vôbec nevystupuje, čo je pochopiteľné z rozmerovej analýzy.



## Úloha II.P ... problém obchodního cestujícího

*Když se začínaly prosazovat digitální mobilní telefony, byl často problém se přímým hovorem v automobilu. Nyní se to nejvíce týká vlaků. Jaké faktory ovlivňují přenos dat v GSM síti a jak mohou ovlivnit dostupnost signálu operátora? Jak by se proti tomu dalo bojovat?*

Ako väčšina ľudí, ktorí cestujú dlhší čas, tak aj organizátori FYKOSu využívajú cestu užitočne. Zväčša k tomu patrí učenie, prípadne práca. Na väčšinu vecí potrebujeme internet, a keďže WiFi sieť vo vlaku funguje len po štátne hranice, tak nám na území ČR neostáva nič iné ako si vyrobiť WiFi Hotspot. A pritom je vidno, ako ten internet (ne)ide. Preto sa dosť často zamýšľame nad tým, či sa to nedá napraviť.

### *Vozeň ako Faradayova klieťka*

Na vozeň sa môžeme dívať aj ako na Faradayovu klieťku. Je to iba len veľká plechová škatuľa na kolesách, čo iné by sme od toho čakali. Dobré vieme, že Faradayova klieťka chráni veci umiestnené v nej pred EM žiarením z okolia. Pravdaže, ak táto klieťka je súvislá a nemá v sebe veľké diery. Bežný vagón má okná, prechodové dvere a plno dostatočne veľkých „dier“, ktoré by EM žiarenie (a teda prípadne aj mobilný signál) mali prepustiť dovnútra. Opak je však pravdou. Hlavne u nových vozňov sú okná pokované, obsahujú rôzne fólie alebo prímiesy kovov (aby dovnútra neprepúšťali snečné žiarenie, poprípade boli priehľadné len z vona a nie naopak). Práve tieto sklá s prímiesami kovov prispievajú k problémom so signálom. Môžeme si všimnúť, že omnoho lepší signál je v starých vozňoch, napr. typu B. V nich však na druhú stranu nemáme elektrické zásuvky. Preto moderné vozne používajú zosilňovače mobilného signálu. Tie nájdeme hlavne na nových súpravách v Nemecku.

### *Vedenie trate v teréne*

Veľa ľudí si myslí, že vedenie trate v horských podmienkach zhoršuje kvalitu signálu. Česká republika je pokrytá na viacej než 90 % mobilným signálom. V minulosti sa budovali trate hlavne na dopravu materiálu, či ľudí. Logicky teda budú trate vedené v blízkosti ľudských obydľí, a práve tieto miesta mobilní operátori pokrývajú signálom. Takže aj na „lokálke“ (miestna železničná trať, pozn. kor.) v hornatých častiach by ste mali mať celkom dobrý signál.

### *GSM ako hlavný problém*

GSM<sup>26</sup> je tzv. inteligentná sieť. A v tom je problém! GSM sieť narozdiel od internetu požaduje na jej používanie prihlásené zariadenie. Zariadenie (napr. mobil) sa prostredníctvom SIM karty prihlási do siete. Tento proces netrvá dlho (10 s až 30 s), lenže pri väčších rýchlostiach vlaku sa zariadenie musí pravidelne prihlasovať k novým vysielateľom, prípadne pokrývačom signálu. Tu vstupuje do

<sup>26</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Global\\_System\\_for\\_Mobile\\_Communications](http://cs.wikipedia.org/wiki/Global_System_for_Mobile_Communications)

hry Faradayova klietka, vďaka ktorej zariadenie hľadá silnejší signál, a teda sa stále skúša prihlasovať na nové a nové siete, čo spôsobuje výpadky signálu.

A ešte je tu fáma, že v blízkosti veľkých miest je lepší signál. Zväčša sa pri samotnej stanici nachádza zriaďovacia, nákladná stanica alebo je vedenie trate ovplyvnené zástavbou. Preto teda vlak v tejto oblasti spomalí aj na polovičnú rýchlosť, a tým sa mobil dokáže prihlásiť od siete na dlhšie a nemusí sa toľkokrát prihlasovať.

### LVZ, GSM-R, ETCS

Zanedbateľným problémom je aj vplyv zabezpečovacieho zariadenia, či už českého LVZ<sup>27</sup> (LS) alebo slovenského MIREL, ktoré pracujú na frekvenciách  $f = 50$  Hz až 75 Hz, čo sú frekvencie veľmi vzdialené od GSM frekvencií.

ETCS<sup>28</sup> – vlakový zabezpečovač – funguje na elektromagnetickej indukcii medzi zbernicou a balízou (zariadenie na trati, pozn. kor.). Pokiaľ nie je balíza indukovaná, tak nevysiela. Teda vysiela len v okamihu prejazdu rušňa.

GSM-R<sup>29</sup> je súkromná mobilná sieť zriaďovaná SŽDC pre potreby železnice a pre zabezpečovacie zariadenie ETCS-L2 a jej vplyv na vysielanie GSM nie je žiaden.

### Vírivé prúdy a trakčné vedenie

Trakčné vedenie na elektrifikovaných tratiach spôsobuje vznik vírivých alebo blúdívých prúdov. Rovnako aj tieto prúdy môžu ovplyvňovať kvalitu signálu. Samotné trakčné vedenie (či  $\sim 25$  kV alebo  $= 3$  kV) má len minimálny vplyv. Aj pri rýchlosti  $160 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  je rozkmit vedenia tak malý, že indukované prúdy na vozni sú zanedbateľné.

### Dopplerov jav

GSM využíva pásmo 900 MHz. Konkrétne od 890 MHz do 960 MHz. Toto je rozdelené na 124 kanálov. Jednoducho aproximované je na každý kanál vyčlenených cca 0,5 MHz. Z toho vieme povedať, že ak by sme mali mať problém zo signálov z dôvodu rýchlosti, musela by sa frekvencia vlnenia pôsobením Dopplerovho javu zmeniť o viac ako polovičku rozsahu jedného kanálu. Najväčší posun zaznamenáme, ak sa pohybuje priamo k vysielaču alebo od vysielača. Maximálna rýchlosť vlaku na území ČR je  $v = 160 \text{ km/h} \doteq 44 \text{ m/s}$  (platí teda  $v \ll c$ ). Potom pre  $f_0 \approx 900$  MHz dokážeme dopočítať rozdiel frekvencií

$$\Delta f \approx \frac{v}{c} f_0 \doteq 0,000 13 \text{ MHz} .$$

Vidíme, že rozdiel frekvencií spôsobených týmto javom je natoľko malý, že nedokáže ovplyvniť kvalitu signálu.

<sup>27</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/Liniový\\_vlakový\\_zabezpečovač\\_LS](http://cs.wikipedia.org/wiki/Liniový_vlakový_zabezpečovač_LS)

<sup>28</sup>[http://cs.wikipedia.org/wiki/European\\_Train\\_Control\\_System](http://cs.wikipedia.org/wiki/European_Train_Control_System)

<sup>29</sup><http://cs.wikipedia.org/wiki/GSM-R>

Hlavný problém je sklbenie dostupnosti GSM siete a pohodlia ľudí. Paradoxne, omnoho menšie problémy so signálom nastávajú v starých vozňoch, na pomalších tratiach.

Takže ak si nabudúce budete vyberať, kam si sadnete, tak uvažujte, či uprednostíte elektrickú zásuvku, alebo mobilný signál.

### Úloha III.1 ... těžký vzduch

*Jakou hmotnost má zemská atmosféra? Jakou část hmotnosti Země tvoří? Pro potřeby výpočtu znáte pouze hmotnost Země  $M_Z$  a poloměr Země  $R_Z$ , gravitační zrychlení  $a_g$  na povrchu Země, hustotu vody  $\rho$  a víte, že blízko povrchu Země v hloubce  $h_1 = 10$  m má hydrostatický tlak vody hodnotu zhruba jedné atmosféry  $p_a = 10^5$  Pa.*

*Nápověda Jedná se o jednoduchou úlohu. Nejde nám o dokonale přesné řešení, ale o kvalifikovaný odhad podložený výpočtem.*

Vyjdeme z informace, že ve vodě v hloubce  $h_1$  je stejný tlak jako atmosférický (v zadání byl myšlen samozřejmě atmosférický tlak za standardních podmínek). Obecně pro hydrostatický tlak v kapalině o hustotě  $\rho$  v homogenním tíhovém poli platí  $p = \rho hg$ , kde  $g$  je tíhové zrychlení a  $h$  je hloubka. Současně můžeme vyjádřit tlak jako sílu, která působí na určitou plochu, tedy například jako tíhovou sílu  $F_G$ , kterou působí celá atmosféra o hmotnosti  $M$  na povrch Země, který označíme  $S$ . Vzhledem k tomu, že nás zajímá pouze odhad, tak Zemi považujeme za dokonalou homogenní kouli o poloměru  $R_Z \approx 6 \cdot 10^6$  m a hustotu vody bereme rovnou  $\rho \approx 10^3$  kg·m<sup>-3</sup>. Potom

$$p_a = \rho h_1 g = \frac{F_G}{S} = \frac{Mg}{4\pi R_Z^2} \Rightarrow M = 4\pi \rho h_1 R_Z^2 \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ kg}.$$

Hmotnost atmosféry jsme odhadli na  $5 \cdot 10^{18}$  kg. Pokud budete hledat hmotnost atmosféry na Wikipedii, tak naleznete stejnou hodnotu. Hmotnost Země je  $M_Z \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg, podíl hmotnosti atmosféry na hmotnosti celé Země je tedy přibližně  $M/M_Z \approx 8 \cdot 10^{-5}$  %.

Co jsme všechno zanedbali? Například to, že  $g \neq a_g$ . Tíhové zrychlení  $a_g$  se i na dokonalé kouli mění místo od místa, pokud jste na rotujícím objektu, což Země je. Nicméně rozdíl mezi tíhovým zrychlením na rovníku a na pólu je relativně malý. Také jsme neuvážili změnu  $a_g$  v závislosti na výšce nad Zemí.

Jak jsme již zmínili, neuvážovali jsme rozložení hmoty Země. Jednak máme hory, a pak máme zase propadliny, jako je oblast Mrtvého moře. Prostě celkově jde o hrubý odhad, který je ale relativně dobrý.

### Úloha III.2 ... bubliny

*Určete rozdíl potenciální povrchové energie blány kulaté bubliny a bubliny ve tvaru pravidelného čtyřstěnu. Oba útvary mají stejný vnitřní objem  $V$ .*

Změna potenciální povrchové energie  $\Delta E$  je přímo úměrná změně plochy  $\Delta S$  s konstantou úměrnosti  $\sigma$  (povrchové napětí). U bublin máme povrchové vrstvy dvě, takže výsledný rozdíl je

$$\Delta E = 2\sigma\Delta S.$$

Musíme tedy spočítat rozdíl povrchu koule a pravidelného čtyřstěnu o stejném objemu  $V$ .

Pro výpočet objemu pravidelného čtyřstěnu o hraně délky  $a$  potřebujeme znát tělesovou výšku  $h$ . Ta prochází těžištěm podstavy, takže tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož přepona je délka hrany  $a$  a odvěsny jsou tělesová výška  $h$  a dvě třetiny výšky (těžnice) stěny  $2v/3 = a\sqrt{3}/3$ . Tělesovou výšku získáme pomocí Pythagorovy věty

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Pravidelný čtyřstěn je vlastně trojboký jehlan, takže pro objem použijeme známý vzorec *třetina obsahu podstavy krát výška*

$$V = \frac{1}{3}S_p h = \frac{1}{3} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Povrch čtyřstěnu je

$$S_1 = 4S_p = a^2\sqrt{3}.$$

Závislost povrchu na objemu získáme umocněním povrchu na třetí a objemu na druhou a vydělením

$$\frac{S_1^3}{V^2} = (a^2\sqrt{3})^3 \left(\frac{12}{a^3\sqrt{2}}\right)^2 = 6^3\sqrt{3} \Rightarrow S_1 = V^{2/3}6\sqrt[6]{3}.$$

Pro kouli o objemu  $V$  a obsahu  $S_2$  provedeme obdobný postup

$$\frac{S_2^3}{V^2} = (4\pi r^2)^3 \left(\frac{3}{4\pi r^3}\right)^2 = 36\pi \Rightarrow S_2 = V^{2/3}\sqrt[3]{36\pi}.$$

Nyní už můžeme spočítat rozdíl potenciální povrchové energie. Bubliny mají tendenci zaujmout tvar s nejmenší potenciální energií. Z pozorování víme, že je tímto tvarem koule, a proto pro kladný výsledek odečteme povrch koule od povrchu čtyřstěnu.

$$\Delta E = 2\sigma(S_1 - S_2) = 2\sigma V^{2/3} (6\sqrt[6]{3} - \sqrt[3]{36\pi}) \doteq 4,74 \cdot \sigma V^{2/3}.$$

Výsledek je podle očekávání kladný. Pro lepší představu výsledek vydělíme povrchovou energií koule  $E_2$

$$\frac{\Delta E}{E_2} = \frac{S_1 - S_2}{S_2} = \frac{6\sqrt[6]{3} - \sqrt[3]{36\pi}}{\sqrt[3]{36\pi}} \doteq 0,49.$$

Povrchová energie se tedy zvětší zhruba o polovinu.

## Úloha III.3 ... jedeme do zatáčky

Jak známo, vlaky nemají diferenciál, tedy při průjezdu zatáčkou se obě kola musí otáčet stejnou úhlovou rychlostí. Předpokládejte nyní, že kola mají válcový tvar. Proto při jízdě zatáčkou pojedje jedno kolo po delší trajektorii než druhé. Osička bude namáhána na krut a v jistý okamžik již třecí síla mezi kolem a kolejnicí nebude dostatečně velká a dojde k prokluzu jednoho z kol, čímž napětí v osičce klesne na nulu. Určete vzdálenost mezi jednotlivými prokluzy v závislosti na poloměru zatáčky  $R_z$ . Kolo má poloměr  $R$ , osa má poloměr  $r$ , délka osy je  $L$ , modul pružnosti materiálu osy ve smyku je  $G$  (ocel), vagon s  $N$  koly má hmotnost  $M$  a koeficient statického tření mezi kolem a kolejnicí je  $f$ . Nakonec můžete dosadit realistické hodnoty.

Nápověda Pro zkrut  $\varphi$  válce o poloměru  $R$ , délce  $l$  a modulu pružnosti ve smyku  $G$ , na který působíme momentem  $\mathcal{M}$ , platí

$$\varphi = \frac{2\mathcal{M}l}{G\pi R^4}.$$

Zamysleme se nejprve nad tím, co se v zadaném modelu děje. Když vjede vlak do oblouku, tak je vnitřní kolejnice kratší než kolejnice vnější, proto musí vnitřní kolo vykonat méně otáček (mají dle zadání stejný poloměr, tedy i obvod). Pokud má však vnitřní kolo vykonat méně otáček než kolo vnější, musí docházet ke kroucení osy kol. Kroucení osy má ale za následek vzrůstající moment síly působící na kola. Tento moment je kompenzován též vzrůstající třecí silou mezi koly a kolejnicemi. Poznamenejme na okraj, že tyto síly mají opačný směr, proto nezpůsobují přímo brzdění vagonu. A při pohybu po přímé trati mají nulovou (konstantní) velikost. Pokud ale tyto třecí síly překonají mezní hodnotu, dojde k prokluzu, a jak je uvedeno v zadání, torzní napětí v ose klesne na nulu. Dále se na celou situaci podíváme matematicky.

Mezní velikost třecí síly, která může působit mezi koly a kolejnicemi, určíme ze zatížení jednotlivých kol a koeficientu statického tření, dále pak maximální moment sil působících na osu určíme z definice momentu sil a uvážení, že na ose jsou připevněna kola dvě, která na ni působí v opačných směrech.

$$F_{t,\max} = \frac{1}{N}Mgf \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{\max} = \frac{2MgRf}{N}.$$

Nyní jsme určili maximální moment sil, který může působit na osu, aby nedošlo k prokluzu. Z nápovědy v zadání určíme maximální zkrut osy

$$\varphi_{\max} = \frac{4MgRLf}{\pi NGr^4},$$

kde jsme se nenechali zmást a do jmenovatele napsali  $r$  a nikoli  $R$ , abychom udrželi v souladu text zadání a nápovědu.

K tomuto zkrutu dojde tehdy, když bude rozdíl uražených trajektorií kol roven  $R\varphi_{\max}$ . Rozdíl drah projetych jednotlivými koly je  $L\Omega$ , kde  $\Omega$  je oblouková míra

projížděného oblouku, a proto vzdálenost projetá mezi prokluzy je  $\Delta x = \Omega R_z$ , kde  $R_z$  je poloměr oblouku. Pokud dáme tyto vztahy dohromady, dostaneme

$$R\varphi_{\max} = L\Omega = L \frac{\Delta x}{R_z} \Rightarrow \Delta x = R\varphi_{\max} \frac{R_z}{L}.$$

Nyní ještě dosadíme za  $\varphi_{\max}$  a dostaneme výsledek

$$\Delta x = \frac{4MgR^2R_zf}{\pi NGr^4}.$$

Vidíme, že výsledek nezávisí na rozchodu kol a na poloměru oblouku závisí lineárně, tedy pro rovnou trať  $R_z \rightarrow \infty$  nedochází k prokluzu, což jsme očekávali.

Nyní můžeme ještě dosadit hodnoty odpovídající vagonu:  $M = 20$  t,  $R = 46$  cm,  $r = 10$  cm,  $N = 8$ ,  $f = 0,15$ ,  $G = 80$  GPa,  $R_z = 300$  m a dostaneme pro vzdálenost mezi prokluzy  $\Delta x \doteq 3,7$  cm.

Poznamenejme nakonec, že aby k tomuto nežádoucímu prokluzu nedocházelo, jsou kola vagonů kuželovitého tvaru a z tohoto důvodu nejsou při průjezdu obloukem poloměry obou kol stejné. Na trati ale můžeme pozorovat příčné (vyleštěné) proužky, které mohou mít tento původ. Na druhou stranu, pohyb vlaku po kolejích je velmi komplexní problém, proto je potřeba započítat i další vlivy. Co ale podporuje vznik příčných proužků je to, že pokud dojde k prokluzu, tak se kolejnice vyleští (sníží se její drsnost a tím i koeficient tření  $f$ ) a zvýší se tím pravděpodobnost proklouznutí dalšího kola. Toto je důvodem, proč nejsou vyleštěná všechna místa stejně, ale vynikají nestabilitou.

### Úloha III.4 ... rychlá kráska

*Terka se ve svém autě blíží relativistickou rychlostí  $v$  k rovinnému zrcadlu. Blíží se kolmo na rovinu zrcadla v kolizním kurzu. Přitom se samozřejmě dívá na sebe, jak se k zrcadlu blíží. Jaká je rychlost, kterou se Terka blíží ke svému neskutečnému obrazu, a jakou rychlost ona pozoruje svým zrakem?*

*Bonus Zrcadlo není rovinné, ale kulové.*

Prvním krokem k vyřešení problému je pochopení toho, co je po nás požadováno. Zrádné totiž je, co že se vlastně považuje za obraz Terky. Co vidí Terka svýma očima je poměrně zřejmé. Podotázka „jak rychle se blíží ke svému obrazu“ je poněkud záluďnější. Touto otázkou je myšleno, jak se přibližuje ke svému obrazu v klidové soustavě. Avšak pohybuje-li se Terka relativistickou rychlostí, potom poloha jejího obrazu záleží na poloze pozorovatele! (Rozmyslete si: K různým pozorovatelům dorazí světlo z Terky odražené od zrcadla za různou dobu, proto ve stejném okamžiku uvidí obraz Terky na jiném místě.) Zvolme si tedy nějakého významného pozorovatele v klidové soustavě. Nabízí se pozorovatel na povrchu zrcadla v místě, kde do zrcadla Terka narazí.

Nyní si ujasněme co se v naší situaci děje. Uvědomme si rozdíl mezi relativistickou a klasickou kinematikou. Rychlost světla již není zanedbatelně velká a ztrácíme absolutnost času.

Řešme nejprve situaci s rovinným zrcadlem a klidovým pozorovatelem (spojeným se zrcadlem). Nechť Terka má v soustavě spojené se zrcadlem rychlost  $v$ . Jelikož však tato rychlost není v porovnání s velikostí rychlosti světla zanedbatelná, bude se pozorovateli ze zrcadla jevit její rychlost jiná. Nechť v čase  $t$  dorazí k pozorovateli světlo od Terky ve vzdálenosti  $x$ . Za čas  $dt$  dorazí k pozorovateli světlo od Terky v poloze o  $dx$  bližší. Uvědomíme-li si pohyb Terky a konstantní rychlost šíření světla, dostaneme se k rovnosti

$$\frac{x}{c} + dt = \frac{dx}{v} + \frac{x - dx}{c},$$

odkud dostáváme

$$dx = dt \frac{vc}{c - v}.$$

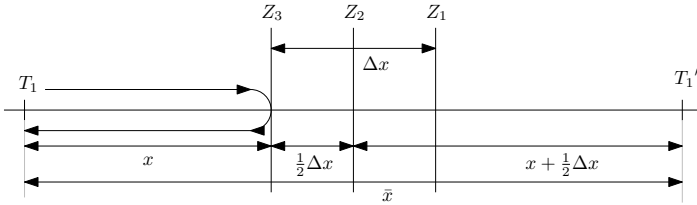
Zdánlivá rychlost Terky je tedy

$$v' = \frac{vc}{c - v}. \quad (21)$$

Jelikož se ale pozorovatel nachází na povrchu zrcadla, vidí ve chvíli, kdy k němu dorazí světlo z Terky ze vzdálenosti  $x$ , v zrcadle obraz Terky z téže vzdálenosti. A tento obraz bude od pozorovatele taktéž ve vzdálenosti  $x$ . Vzdálenost Terky od jejího obrazu se tedy bude snižovat rychlostí  $w_1$

$$w_1 = \frac{2vc}{c - v}.$$

Z pohledu Terky situace vypadá jinak. Terka je v klidu, zato se k ní ale blíží zrcadlo rychlostí  $v$ .



Obr. 6: Situace s rovinným zrcadlem v soustavě spojené s Terkou. Obloukovými šipkami je naznačen tok světla (samozřejmě vše probíhá na optické ose, šipky jsou obloukovité pouze pro názornost).

Doba, za kterou dorazí světlo od Terky k zrcadlu  $Z_2$  a zpět k Terce, je stejná jako doba, za kterou se zrcadlo posune z polohy  $Z_1$  do polohy  $Z_3$ . Dostáváme tedy

$$\frac{2x + \Delta x}{c} = \frac{\Delta x}{v},$$

neboli

$$\Delta x = \frac{2vx}{c - v}, \quad (22)$$

kde rozměry jsou popsány podle obr. 6. Vzdálenost  $\bar{x}$ , ve které vidí Terka svůj obraz, je

$$\bar{x} = 2x + \Delta x = 2x + \frac{2vx}{c-v} = \frac{2cx}{c-v}.$$

Zbývá nám už tedy jen spočítat rychlost úbytku této vzdálenosti

$$w_2 = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = \frac{2c}{c-v} \left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{2cv}{c-v}.$$

Nyní se zamyslíme nad situací s kulovým zrcadlem. V silničním provozu se používají vypuklá kulová zrcadla. Použijeme zobrazovací rovnici kruhového zrcadla ve tvaru

$$x' = \frac{xf}{x+f},$$

kde  $x$  je vzdálenost objektu (Terky) od zrcadla,  $x'$  je vzdálenost obrazu Terky od hlavní roviny zrcadla (kolmá rovina na optickou osu, procházející bodem průniku optické osy a zrcadla) a  $f$  je ohnisková vzdálenost zrcadla. Připomeňme si, že pro kulové zrcadlo je ohnisková vzdálenost polovina poloměru.

Řešme nejprve situaci opět z pohledu pozorovatele v soustavě spojené se zrcadlem na průsečniku jeho povrchu s optickou osou. Analogicky se dostaneme k rovnici (21), nicméně dále musíme postupovat obezřetněji. Vzdálenost Terky od obrazu  $\bar{x}$  můžeme vyjádřit jako

$$\bar{x}(x) = x + x'(x),$$

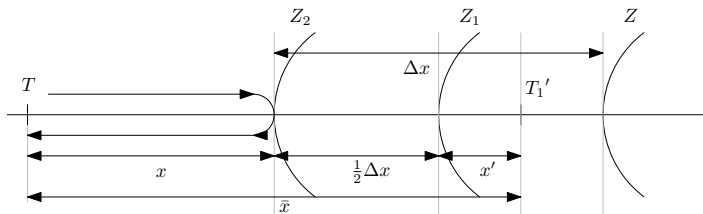
kde  $x$  je vzdálenost, ve které vidí pozorovatel Terku a  $x'(x)$  je vzdálenost obrazu Terky, jak jej vidí pozorovatel, podle zobrazovací rovnice. Po dosazení zobrazovací rovnice tedy dostáváme

$$\bar{x} = x + \frac{xf}{x+f}.$$

Stačí nám tedy najít už jen rychlost změny této veličiny

$$w_3 = \left| \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = \left| v' + \frac{v'f(x+f) - xv'f}{(x+f)^2} \right| = v' \left| \frac{(x+f)^2 + f^2}{(x+f)^2} \right| = \frac{vc}{c-v} \frac{(x+f)^2 + f^2}{(x+f)^2}.$$

Nyní se zaměříme na situaci s kulovým zrcadlem z pohledu Terky. Situace je zachycena na obrázku 7.



Obr. 7: Situace s kulovým zrcadlem v soustavě spojené s Terkou.



Oproti předchozí situaci bude nyní platit

$$\bar{x}(x) = x + x'(x + \frac{1}{2}\Delta x) + \frac{1}{2}\Delta x = x + \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x)}{x + \frac{1}{2}\Delta x + f} + \frac{1}{2}\Delta x.$$

Analogicky jako v případě rovinného zrcadla dostaneme rovnici (22). Po dosazení

$$\bar{x} = x + \frac{f(x + \frac{vx}{c-v})}{x + \frac{vx}{c-v} + f} + \frac{vx}{c-v},$$

úpravami

$$\bar{x} = \frac{f \frac{cx}{c-v}}{\frac{cx}{c-v} + f} + \frac{cx}{c-v} = \left( \frac{f}{x + \frac{c-v}{c}f} + \frac{c}{c-v} \right) x$$

a konečně derivací získáváme

$$w_4 = v \cdot \frac{x^2 + 2\psi fx + 2\psi^2 f^2}{\psi(x + \psi f)^2},$$

kde

$$\psi = \frac{c-v}{c}.$$

Rozmyslete si, že rovinné zrcadlo je limitním případem kulového zrcadla s nekonečným poloměrem, a tím pádem i s nekonečnými ohniskovými vzdálenostmi. Tudíž limity  $w_3$ , resp.  $w_4$  musí pro  $f \rightarrow \infty$  dávat hodnoty  $w_1$ , resp.  $w_2$ .

Nakonec ještě podotýkáme, že zobrazovací rovnice (a tvorba obrazů obecně) nefunguje stejně při relativistických rychlostech jako při těch nerelativistických. Na různá místa zrcadla dopadají paprsky z tělesa za různě dlouhou dobu, a tudíž z jiných poloh tělesa. Obraz se tak deformuje a rozmazává.

### Úloha III.5 ... sféricky symetrické kuře ve vakuu

*Do nádoby o objemu  $V = 1 \text{ m}^3$ , ve které je velmi nízký tlak (prakticky dokonalé vakuum), umístíme  $V_0 = 11$  vody o pokojové teplotě  $t_0$ . Jaký bude konečný stav, ve kterém se bude nacházet nádoba a voda v ní? Pro účely výpočtu předpokládejte, že nádoba je dokonale tepelně izolovaná od okolního prostředí a má zanedbatelnou tepelnou kapacitu.*

Fyzikálně principy sú jasné: po vložení do vákuua začne voda v takomto nízkom tlaku prudko vriet a vyparovať sa. Tak sa bude postupne zvyšovať tlak vodných pár a znižovať teplota vody, vyparovanie je totiž veľmi energeticky náročné. Ak bude vyparovanie pokračovať dosť dlho, môže dokonca voda začať mrznúť.

Vo finálnom stave teda bude väčšina nádoby vyplnená vodnou parou, niekde dole bude trochu vody a/alebo ľadu. Takto na konci musí byť všetko v rovnováhe – vyparovanie vody a sublimácia ľadu sa musí vyrovnat s kondenzáciou a desublimáciou vodnej pary. Ako vyzerá takáto rovnováha?

Pozrime sa najprv na prípad len voda – vodná para. So zvyšujúcou sa teplotou vody sa zvyšuje vyparovanie, so zvyšujúcim sa tlakom pary rastie miera

kondenzácie. Pre daný tlak existuje práve jedna teplota, pri ktorej sa tieto dva deje vyrovnajú.<sup>30</sup> Zistiť túto teplotu môžeme rôznymi spôsobmi. Na fázovom diagrame, ktorý sa kreslí práve do  $pT$  diagramu,<sup>31</sup> je to čiara oddeľujúca vodu a vodnú paru (nazýva sa krivka koexistencie). Tvar tejto čiary sa riadi Clausiusovou-Clapeyronovou rovnicou, a dokonca existujú aj empirické zákony popisujúcu túto závislosť  $p(T)$  (napr. Antoineova rovnica).

Rovnováha iných dvoch fáz je o tom istom – ľad a vodná para môžu takisto koexistovať, avšak pri nižších teplotách a tlakoch. Rovnováha ľadu, vody a vodnej pary je ale špeciálna. Existovať môže len pri istom tlaku a teplote a nazýva sa trojný bod. Konkrétne je tento tlak  $p_t \approx 612 \text{ Pa}$  a teplota  $T_t \approx 273,16 \text{ K}$ .

Späť ku príkladu. Voda sa vyparuje a chladne: ak sa podarí vypariť dostatok vodnej pary pred tým, ako teplota vody klesne na teplotu tuhnutia, nastane rovnováha vody a vodnej pary. Ak však voda vychladne a stále je v okolí nízky tlak, teplo potrebné na vyparovanie bude brať z toho, že začne mrznúť. Tak sa môže ustáliť rovnováha v trojnom bode. Ak však zmrzne všetka voda a tlak je stále nízky, bude ďalej sublimovať (už je to samozrejme ľad) a nakoniec nastane rovnováha vodnej pary a ľadu.

Ako to bude v našom prípade, zistíme, až keď dosadíme nejaké čísla.<sup>32</sup> Najprv len orientačne: ochladením litra vody z izbovej teploty, napr.  $20^\circ\text{C}$ , na teplotu tuhnutia získame asi  $20 \text{ K} \cdot 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1} = 84 \text{ kJ}$ . Týmto teplom vieme vypariť  $84/2500 \text{ kg} \doteq 34 \text{ g}$  vody. To je asi  $(34 \text{ g})/(18 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}) \doteq 1,9 \text{ mol}$  v látkovom množstve. Stavová rovnica ideálneho plynu hovorí

$$p = \frac{nRT}{V}.$$

Objem  $V$  je s dobrou presnosťou práve objem nádoby,  $T$  povedzme tá teplota tuhnutia vody. Tak dostaneme tlak približne  $4300 \text{ Pa}$ , čo je bezpečne nad tlakom trojného bodu  $612 \text{ Pa}$ . Vyzerá to teda, že výsledný stav bude obsahovať len vodu a veľmi riedku vodnú paru. Treba už len zistiť, aká časť vody sa skutočne vyparí.

Označme si pomer hmotnosti vyparenej  $m_{\text{vyp}}$  a pôvodnej vody  $m_0 = 1 \text{ kg}$  ako  $\alpha = m_{\text{vyp}}/m_0$ . Už vieme, že  $\alpha$  bude ešte menšie ako  $0,034$ . Na vyparenie tohoto pomeru potrebujeme  $\alpha m_0$  tepla. Ak bude výsledná teplota  $T_1$ , ochladením vody získame  $(T_0 - T_1)c m_0$  tepla. Takto vieme vyjadriť, ako bude závisieť výsledná teplota na pomere  $\alpha$

$$T_1(\alpha) = T_0 - \alpha \frac{l}{c}.$$

Vyparenie takéhoto množstva pary nám vyrobí plyn s tlakom

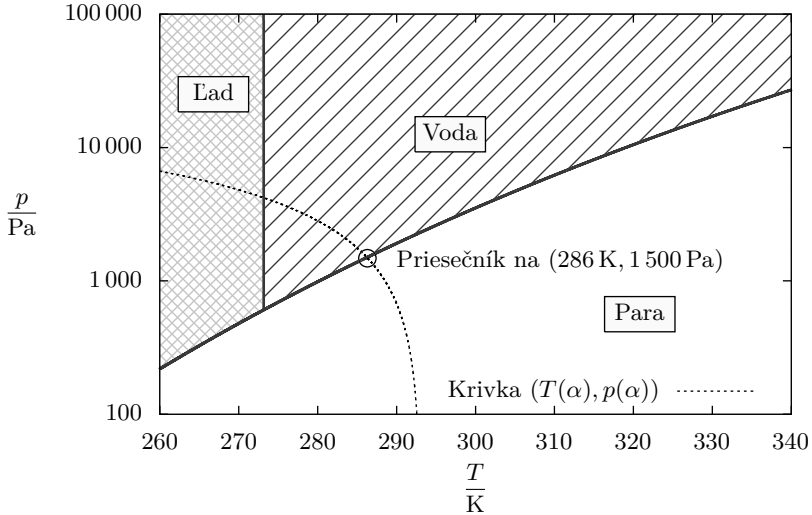
$$p = nRT_1/V = \frac{\alpha m_0 RT_1(\alpha)}{M_{\text{H}_2\text{O}} V}.$$

<sup>30</sup>Prečo sa teda vyparuje napr. voda z oblečenia aj pri atmosférickom tlaku? Rovnovážny tlak vodnej pary je totiž len časťou tlaku atmosféry, ktorá je zložená prevažne z iných plynov. Tlak samotnej vodnej pary je teda pokojne menší ako kilopascal. To isté platí aj pre sublimáciu ľadu.

<sup>31</sup>Pekný diagram majú na wikipedii [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Phase\\_diagram\\_of\\_water.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Phase_diagram_of_water.svg).

<sup>32</sup>Použijeme orientačnú tepelnú kapacitu  $c = 4,2 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a merné skupenské teplo vyparovania pri izbovej teplote  $l = 2500 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  prevzaté z [http://en.wikipedia.org/wiki/Properties\\_of\\_water#Heat\\_capacity\\_and\\_heats\\_of\\_vaporization\\_and\\_fusion](http://en.wikipedia.org/wiki/Properties_of_water#Heat_capacity_and_heats_of_vaporization_and_fusion).

Ak budeme meniť  $\alpha$ , budeme dostávať dvojice hodnôt teploty a tlaku. Tieto hodnoty popisujú rovnováhu vzhľadom na prenesené teplo a na rovnovážny stav vodnej pary, no nemusia popisovať rovnováhu vyparovania a kondenzácie vody a vodnej pary. Na to musíme nájsť také hodnoty, ktoré túto rovnováhu spĺňajú, čo môžeme spraviť rôznymi spôsobmi: numerické riešenie Antoinovej rovnice alebo grafické riešenie pomocou fázového diagramu vody.



Obr. 8: Fázový diagram a krivka  $(T(\alpha), p(\alpha))$ .

V druhom prípade postupujeme nasledovne: do fázového diagramu nakreslíme množinu možných stavov  $(T(\alpha), p(\alpha))$  v závislosti na parametri  $\alpha$ . Táto čiara pretne hranicu medzi vodou a vodnou parou, no a tento bod je práve náš hľadaný rovnovážny stav – leží na krivke koexistencie vody a vodnej pary.

Zvolme si cestu grafického riešenia. Krivku koexistencie vykreslíme pomocou Antoinovej rovnice.<sup>33</sup> Pre počiatočnú teplotu  $T_0 = 293 \text{ K}$  numericky vychádza priesečník na teplote  $T_1 \approx 286 \text{ K} \doteq 13 \text{ }^\circ\text{C}$  a tlaku  $p_1 \approx 1500 \text{ Pa}$ . Parameter  $\alpha$  zodpovedajúci tejto hodnote je približne 0,011, vyparená hmotnosť vody je asi  $m_{\text{vyp}} = \alpha m_0 \approx 11 \text{ g}$ .

Ako to vyzerá, si môžete pozrieť na obrázku 8. Vidíme trojný bod a tri fázové oblasti. Proces vyparovania prebieha od  $\alpha = 1$ , čo je spodok prerušovanej krivky a zastaví sa, keď dosiahneme rovnováhu dvoch fáz – teda krivku oddeľujúcu vodu a vodnú paru. Prerušovaná krivka síce pokračuje ďalej a pretína aj rozhranie vody a ľadu, ale tento bod je nefyzikálny, lebo proces na krivke predpokladal iba premenu vody na paru.

<sup>33</sup>Parametre aj tvar rovnice sú na [http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine\\_equation](http://en.wikipedia.org/wiki/Antoine_equation).

Ešte dva komentáře na záver. Po prvé, určite ste si všimli, koľko zanedbaní sme urobili. Hlavne v počítaní energetickej bilancie sme neuvažovali vnútornú energiu plynu, či to, že ochladzovať sa nebude celá, ale len nevyparená voda (tieto dve zanedbania sa čiastočne rušia). Taktiež sme neuvažovali zmeny tepelnej kapacity vody na danom intervale. Všetko je to ospravedlnené tým, že ako  $\alpha$ , tak relatívna zmena teploty sú veľmi malé. Počítanie s vyššou presnosťou by nám neprineslo žiadnu novú fyziku, no postup by bol výrazne komplikovanejší.

Po druhé, vieme približne popísať závislosť koncového stavu na počiatkovej teplote  $T_0$ . Pri vyššej teplote by sa vyparilo viac vody, lebo tlak nasýtených vodných pár rastie s teplotou, a to celkom rýchlo. Skúšaním rýchlo zistíme, že na druhú stranu by sa pri pôvodnej teplote vody  $3^\circ\text{C}$  rovnováha ustálila v trojnóm bode. Pre ešte nižšiu teplotu by sme začali pozorovať aj tvorbu ľadu.

### Úloha III.P . . . zahvízdej mi něco

*Vysvětlete, na jakém principu funguje hvízdání pomocí úst. Uvažujte přitom nejprve jednoduché modely a postupně přejděte ke složitějším. Pak vyberte nejlepší z nich a na základě něj odhadněte, v jakém rozsahu se může pohybovat základní frekvence hvízdou. (Pokud umíte hvízdát, můžete zkusit posoudit přesnost vašeho odhadu pomocí experimentu.)*

Tato úloha má plné právo nazývať sa problémovou. Jak si ukážeme, základní fyzikální principy hvízdání nejsou příliš složité, nicméně přesný popis jevu není možný kvůli komplikované stavbě ústní dutiny. Budeme se snažit spíše o srozumitelné vysvětlení zkoumaných jevů než o podrobný matematický popis.

V následujícím textu si zopakujeme, co to je vlastně zvuk, podíváme se na stojaté vlnění ve vzduchovém válci, naučíme se něco málo z hudební teorie a seznámíme se s principem akustických rezonátorů, konkrétně Helmholtzova rezonátoru. Nakonec zkusíme nabyté poznatky aplikovat na samotné hvízdání ústy a zamyslíme se nad rozdíly mezi modelem a skutečností.

#### Zvuk

Jako zvuk v běžném životě označujeme vjem, který jsme schopni vnímat pomocí sluchu. Ve fyzice pod tímto pojmem obvykle rozumíme longitudinální (podélné) mechanické vlnění ve hmotném prostředí, nehledě na to, zda se jedná o slyšitelnou frekvenci. Akustickou (zvukovou) vlnu si můžeme představit jako periodické zhušťování a rozpínání látkového prostředí, v našem případě vzduchu. Při popisu vlnění se díváme buďto na výchylku jednotlivých částic kolem jejich středních poloh, nebo na okamžitou výchylku objemového elementu<sup>34</sup>

$$y(x, t) = y_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c_s} \right) \right], \quad (23)$$

<sup>34</sup>Místo výchylky objemového elementu či částic můžeme vlnění také popsat pomocí lokální odchylky tlaku plynu

$$p(x, t) = p_0 \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c_s} \right) \right].$$

kde  $y_0$  je amplituda a  $c_s$  rychlost zvuku v daném prostředí. Uvažujeme zde rovinovou vlnu, kde  $x$  určuje vzdálenost daného bodu vlny od bodového zdroje zvuku. Rychlost zvuku v plynném prostředí je přibližně dána vztahem

$$c_s = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}, \quad (24)$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta ideálního plynu a  $\rho$  je jeho hustota. Amplitudou zvukového vlnění se zde zabývat nebudeme (závisí na ní především intenzita zvuku), důležitá pro nás bude frekvence, resp. vlnová délka. Jednak proto, že podle frekvence určujeme výšku tónu, a jednak proto, že vlnová délka určuje módy stojatého vlnění, které mohou existovat v rezonančním válci daných rozměrů.

### Stojaté vlnění ve vzduchovém válci

Nyní se podíváme na to, jak se chová zvukové vlnění v dlouhé válcové dutině naplněné vzduchem. Pro jistotu zde připomeňme vztahy mezi vlnovou délkou  $\lambda$ , frekvencí  $f$  a úhlovou frekvencí  $\omega$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{c_s}{\lambda}.$$

Stojaté vlnění vzniká interferencí dvou shodných vln, příchozí a odražené. Superpozicí dvou vln popsaných rovnicí (23) dostaneme v jednorozměrném případě vztah

$$y(x, t) = 2y_0 \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega x}{c_s}\right) = 2y_0 \cos(2\pi f t) \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right),$$

kde  $2y_0 \sin(2\pi x/\lambda)$  je amplituda stojatého vlnění. Pro lepší představu si nejprve myslíme, že místo vzduchového válce máme strunu. Pevně uchycený konec struny odpovídá uzavřenému válci, volný konec struny otevřenému. Při odrazu na volném konci má odražená vlna stejnou fázi jako vlna příchozí, dochází tedy ke konstruktivnímu skládání a v bodě vznikne kmitna, tj. místo s maximální amplitudou. Při odrazu na pevném konci je fáze odražené vlny opačná, skládání je pak destruktivní a v bodě vznikne nehybný uzel.

Chování struny odpovídá harmonickému pohybu částic při šíření zvuku. Na uzavřeném konci zřejmě nemůže docházet k posunu objemových elementů vzduchu, částice se zde pružně odrážejí, což odpovídá opačné fázi vlny. Na pevném konci je tedy uzel. Pro změny tlaku však dostaneme opačný výsledek, neboť odrazy částic představují harmonické změny tlaku v oblasti uzavřeného konce (uzavřený konec působí silou proti pohybu částic), máme zde tedy „tlakovou kmitnu“. Na otevřeném konci vzduch volně proudí, z pohledu částic zde bude kmitna, zatímco tlak se vyrovnává s okolím, bude mít proto na otevřeném konci uzel<sup>35</sup> Fáze harmonických změn tlaku a polohy částic jsou tedy posunuty ve fázi o  $\pi/2$ .

Zajímat nás bude především případ, kdy jsou oba konce otevřené. Jeden konec představuje dýchačí ústrojí, druhý konec jsou ústa. Je zřejmé, že aproximovat ústní dutinu trubicí není možné, představujeme si proto pro teď, že se nesnažíme hvízdát,

<sup>35</sup>Ve skutečnosti se tlak vyrovná až vně trubice, uzel tedy není přímo v rovině otevřeného konce, ale tuto skutečnost si tady dovolíme zanedbat.

ale hrajeme třeba na píšťalu. Jaké stojaté vlnění může v píšťale vznikat? Jestliže jsou oba konce otevřené, musí se v nich nacházet kmitny. Pokud jsou to jediné kmitny v celém válci o délce  $L$ , platí pak  $L = \lambda/2$ . Mezi kmitnami se v tomto případě nachází pouze jeden uzel. Bude-li uzlů  $n \in \mathbb{N}$ , bude platit obecně  $L = n\lambda/2$ . Frekvence vln je potom

$$f = \frac{nc_s}{2L}. \quad (25)$$

Ještě poznamenejme, že šířka válce musí být menší než vlnová délka, abychom mohli zanedbat kolmé šíření.

### *Trocha hudební nauky*

Nyní si musíme objasnit, proč vlastně chceme, aby byl zvuk tvořen stojatým vlněním určité frekvence a ne směsí libovolných vln s proměnnými frekvencemi. Akustické kmity, které nemají konstantní frekvenci, vnímáme jako hluk. Oproti tomu pravidelné kmitání naše sluchová centra přeloží jako tón. Sami však možná víte, že pokud si necháte na počítači vygenerovat tón jedné frekvence, může být jeho poslech poměrně nepříjemný (zvláště jedná-li se o vysoké frekvence). Každý hudební tón totiž obsahuje další, tzv. alikvotní neboli vyšší harmonické tóny. V případě píšťaly se jedná o ty frekvence, pro něž je v rovnici (25)  $n = 2, 3, \dots$ . Pokud budeme hledat frekvenci hvizdu, bude nás vždy zajímat první harmonická, tj.  $n = 1$ .

Také budeme chtít později určit tónový rozsah hvizdu. K tomu potřebujeme vědět, že v evropské hudbě se používá rovnoměrné temperované ladění, které rozdělí každou oktávu (rozdíl mezi dvěma sousedními harmonickými frekvencemi) na dvanáct tónů. Frekvence každého tónu je vždy rovna  $\sqrt[12]{2}$ -násobku frekvence tónu pod ním. Při přiřazování tónů frekvencím pak můžeme vyjít z komorního A (nejčastěji 440 Hz), nebo použít převodní tabulku.<sup>36</sup>

Jak jsme už ale zmínili výše, pomocí chvění vzduchu ve vzduchové trubici hvízdání modelovat nelze. Jaký vhodný model tedy můžeme použít?

### *Helmholtzův rezonátor*

Resonancemi vzduchu v dutinách se zabýval významný německý fyzik a fyziolog Hermann von Helmholtz, po němž jsou tyto resonance také pojmenovány. Helmholtz při svém výzkumu v oblasti akustiky používal k identifikaci frekvencí jednotlivých tónů mosaznou baňku s úzkým hrdlem, kterou dnes nazýváme Helmholtzův rezonátor<sup>37</sup>. Princip funkce Helmholtzova rezonátoru je podobný jako v případě hry na skleněné láhve. Vnější silou je dovnitř dutiny vtlačen vzduch, který po zeslabení vnější síly opět uniká ven. Tlak v dutině se sníží až na hodnotu menší, než je okolní tlak, proto je vzduch opět vtažen dovnitř a proces se opakuje, pouze s menší intenzitou.

<sup>36</sup><http://www.phy.mtu.edu/~suits/notefreqs.html>

<sup>37</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz\\_resonance](http://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_resonance)

Oscilace vzduchu v resonátoru budeme modelovat pomocí harmonického oscilátoru (pružiny). V hrdle se nachází masa vzduchu o hmotnosti  $m$ , tuhost systému definujeme jako

$$k = - \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0},$$

kde  $y$  je výchylka od ekvilibria  $y_0$  a  $F$  je okamžitá síla působící na masu vzduchu v hrdle. Pro úhlovou frekvenci oscilací platí

$$\omega^2 = \frac{k}{m} = - \frac{1}{m} \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=y_0} = - \frac{S}{m} \left. \frac{dp}{dy} \right|_{y=y_0}, \quad (26)$$

kde  $S$  je průřez hrdla a  $p = F/S$  je okamžitý tlak vzduchu. Nyní zavedeme předpoklad, že se jedná o adiabatický děj. Tento předpoklad je nutný také pro platnost vztahu (24). Při odvozování Poissonova zákona pro adiabatický děj dojdeme přes první větu termodynamickou, stavovou rovnici ideálního plynu a vztah pro výpočet vnitřní energie ideálního plynu<sup>38</sup> k rovnici

$$\frac{dp}{dV} = -\kappa \frac{p}{V}, \quad (27)$$

kde  $\kappa$  je Poissonova konstanta ideálního plynu a  $V$  je objem celé resonanční komory včetně hrdla. V rovnici (26) můžeme psát  $dy = dV/S$ , neboť ke změně objemu dochází ve válcovitém hrdle komory, kde zřejmě  $V(y) \propto y$ . Po této úpravě dosadíme z (27), dostaneme

$$\omega^2 = \frac{\kappa S^2 p_0}{m V_0}.$$

Veličiny  $p_0$  a  $V_0$  opět označují rovnovážné hodnoty.

Dále si můžeme hmotnost masy vzduchu v hrdle vyjádřit pomocí hustoty vzduchu  $\rho$ , délky hrdla  $L$  a průřezu hrdla jako

$$m = \rho S L \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{\kappa S p_0}{\rho L V_0}. \quad (28)$$

Umocněním vztahu (24) dostaneme

$$c_s^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho}$$

a dosazením do (28) získáme

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 S}{L V_0}.$$

Tento vztah nakonec přepíšeme pomocí  $\omega = 2\pi f$  jako

$$f = \frac{c_s}{2\pi} \sqrt{\frac{S}{L V_0}}. \quad (29)$$

<sup>38</sup>Odvození není těžké, ale již bychom příliš odbočili. Výpočet najdete např. na české i anglické Wikipedii v článku Adiabatický děj (Adiabatic process).

Empirická měření ukazují,<sup>39</sup> že místo délky  $L$  je přesnější uvažovat ekvivalentní délku  $L_{\text{eq}} = L + 0,4D$ , kde  $D$  je hydraulický průměr hrdla. Proto pokud neplatí  $L \gg D$ , měli bychom ve vztahu (29) psát  $L_{\text{eq}}$  místo  $L$ .

### Hvízdání

Nyní se už konečně podíváme na samotné hvízdání. Na rozdíl od Helmholtzova resonátoru má resonanční dutina (ústní dutina) ještě jeden otvor (hrtan), ze kterého proudí dovnitř dutiny vzduch hnaný z plic. To pro nás však není podstatné, důležité je, že má vzduch v dutině vyšší tlak a uniká ven úzkým otvorem (ústy). Navíc lze také hvízdát i při nasávání vzduchu, potom je princip zcela identický.

Podle článku Whistling na anglické Wikipedii<sup>40</sup> mohou při hvízdání ústy zůstat rty v téměř neměnné pozici, přičemž výšku tónu měníme pouze pozicí jazyka.<sup>41</sup> Rty a zuby mění pouze barvu tónu. Potom by ve vztahu (29) byl jedinou proměnnou objem  $V_0$ . Velikost objemu vzduchu, který se podílí na resonanci v ústní dutině, závisí na tom, jak moc přiblížíme jazyk k hornímu patru. Teoreticky bychom mohli snížit objem téměř na nulu, frekvence by potom nebyla shora omezena. Dolním limitem je objem ústní dutiny.

Podle lorda Rayleigh<sup>42</sup> se frekvence hvizdu může pohybovat v rozsahu 500 Hz až 4 200 Hz. Zkusme rozumně zvolit hodnoty veličin v (29) a provést dolní odhad. Rychlost zvuku je přibližně  $c_s \approx 300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , otvor mezi rty nebude mít menší průřez než  $S \approx 0,5 \text{ cm}^2$ , objem úst s jazykem u dolního patra odhadneme na  $V_0 \approx 50 \text{ ml}$ . Nejhuře se odhaduje délka  $L$ , předpokládejme, že je rovna tloušťce rtu  $L \approx 5 \text{ mm}$ . Po dosažení dostaneme nejnižší možnou frekvenci

$$f_{\min} \approx 700 \text{ Hz}.$$

Zahrneme-li hydraulický průměr  $D \approx 5 \text{ mm}$ , dostaneme o něco nižší frekvenci  $f_{\min} \approx 500 \text{ Hz}$ . Náš odhad je spíše řádový, hodnoty  $S$  i  $L$  jsou špatně měřitelné a liší se člověk od člověka, takže s výsledkem můžeme být velmi spokojeni. Při horním odhadu snižujeme  $V_0$ , dolní mez je však těžké stanovit. Resonanční objem určité může poklesnout až na jednotky mililitrů, pro  $V_0 = 2 \text{ ml}$  dostaneme pětkrát vyšší frekvenci

$$f_{\max} \approx 2\,500 \text{ Hz}.$$

To je méně, než tvrdí Rayleigh, ale vzhledem k hrubosti odhadů je to stále výborný výsledek.

Podle našeho odhadu se tónový rozsah hvízdání pohybuje v rozmezí  $H_4$  až  $D_7^\#$ . Pro srovnání, rozsah sopránů je přibližně  $C_4$  až  $C_6$ .<sup>43</sup> Zajímavé je, že pokud se vrátíme k modelu vzduchové trubice a použijeme pro určení frekvence hvizdu

<sup>39</sup>[http://www.lightandmatter.com/html\\_books/0sn/ch05/ch05.html#Section5.5](http://www.lightandmatter.com/html_books/0sn/ch05/ch05.html#Section5.5)

<sup>40</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Whistling>

<sup>41</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Whistling>. Pozici rtů nemůžeme příliš měnit proto, že při zmenšení otvoru dochází k zadušení tónů, zatímco při zvětšení otvoru není tón čistý a rychle přechází v šum.

<sup>42</sup><http://mysite.du.edu/~jcalvert/waves/pipes.htm>

<sup>43</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Vocal\\_range](http://en.wikipedia.org/wiki/Vocal_range). Oktávy značíme dolním indexem podle polohy na moderním pianě od  $A_0$  po  $C_8$ , komorní A je  $A_4$ .



vztah (25), do nějž dosadíme hloubku ústní dutiny  $L \approx 10$  cm, dostaneme frekvenci  $f \approx 1\,500$  Hz, což je také řádově dobrý výsledek. Fyzikálně však nemůže být správný, protože šířka ústní dutiny je srovnatelná s její hloubkou (transversální šíření) a také víme, že při změně polohy jazyka v ústech necháváme vzduch stále volně proudit, nedochází tedy ke zkrácení délky  $L$ . Výšku tónu by pak nebylo možné modulovat.

### Experimentální ověření

Co se týče experimentálního ověření výsledků, tak autor tohoto textu hvízdát neumí, nicméně se našel dobrovolný experimentální subjekt, jehož tónový rozsah hvizdu byl změřen pomocí programu Audacity. Nejnižší naměřená základní frekvence byla 440 Hz ( $A_4$ ), nejvyšší 1 400 Hz ( $\sim F_6$ ). Na dolní hranici byl záznam již dost zašumělý a nešlo již dost dobře rozlišit mezi základní frekvencí a druhou harmonickou, proto byl nejnižší tón dodatečně stanoven poslechem oproti klavíru. Měření je v souladu s naším i Rayleighovým odhadem, spíše nižší rozsah (méně než dvě oktávy) je čistě otázkou trénovanosti subjektu. Pro zajímavost – podle Guinnessovy knihy rekordů<sup>44</sup> je v současnosti nejvyšším tónem dosaženým při hvízdání nota H<sub>7</sub> (3 951 Hz). Nejnižším zahvízdaným tónem je F<sub>3</sub> (174,6 Hz)<sup>45</sup>.

### Závěr

Co říci závěrem? V úvodu jsme předesílali, že se pokusíme spíše o kvalitativní popis, nakonec se nám však zkoumaný děj povedlo i docela dobře kvantifikovat. Musíme však mít na paměti, že jsme si spoustu věcí zjednodušili a nemáme záruku, že je náš model skutečně fyzikálně správný. Podrobný rozbor by vyžadoval exaktní výpočty a pravděpodobně bychom skončili u modelování proudění vzduchu v ústní dutině. O modelování naleznete více v odkazu v poznámce,<sup>46</sup> kde se autor práce zabývá prouděním vzduchu ve flétnách.

## Úloha IV.1 ... čtvercátý odpor

*Jak závisí elektrický odpor čtverce na délce jeho strany  $a$ ? Všechny čtverce, o které se zajímáme, jsou samozřejmě vodiče vyrobené z tenkého materiálu o tloušťce  $h$  a měrném elektrickém odporu  $\rho$ . Zajímáme se o odpor mezi protilehlými stranami čtverce.*

Těleso, které nás zajímá, je hranol s podstavou tvaru obdélníku o hranách délek  $a$  a  $h$  a výšce  $a$ , kde  $h$  je oproti  $a$  velmi malé. Budeme u něho chtít spočítat elektrický odpor mezi podstavami. Předpokládáme, že těleso představuje pro elektrický proud homogenní, izotropní prostředí, tj. má ve všech bodech stejné, směrově nezávislé dielektrické vlastnosti. Při řešení tohoto problému potom můžeme vycházet ze vzorce pro výpočet elektrického odporu vodiče ve tvaru

$$R = \frac{\rho l}{S},$$

<sup>44</sup><http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/highest-note-whistled>

<sup>45</sup> <http://www.guinnessworldrecords.com/world-records/lowest-note-whistled>

<sup>46</sup><http://www.lam.jussieu.fr/Publications/Theses/these-patricio-de-la-cuadra.pdf>

kde  $\rho$  je měrný elektrický odpor materiálu,  $l$  je délka vodiče a  $S$  je obsah jeho průřezu. Průřez našeho vodiče je obdélník o stranách  $a$  a  $h$ , jeho obsah je tedy

$$S = ah.$$

Délka našeho vodiče je  $a$ . Nyní nám stačí tyto veličiny dosadit do původního vztahu a dostáváme výsledek

$$R = \frac{\rho a}{ah} = \frac{\rho}{h},$$

který je nezávislý na délce hrany  $a$ . Elektrický odpor čtverce tedy nezávisí na délce jeho strany.

## Úloha IV.2 . . . rychlá kráska reloaded

*Terka si zase jednou vyjela na výlet. Tentokrát se prochází o rovník v pravé poledne na zemském rovníku. Jakou vzájemnou rychlost by měla vůči Alešovi, pokud by ji Aleš chtěl (bláhově) pozorovat z povrchu Slunce na rovníku v bodě nejbližším jeho objektu zájmu (Terce)? Sklon sluneční osy vůči rovině ekliptiky můžete považovat za zanedbatelně malý.*

### Základní řešení

Úlohu lze řešit různě složitě, podle toho, jaké všechny pohyby se rozhodneme uvažovat. Je to jednoduchá úloha, není tedy očekáván žádný složitý výpočet, ale je potřeba svůj postup zdůvodnit.

Nejprve si rozmyslíme, které pohyby Země/Slunce, a tím pádem Terky a Aleše, by mohly mít vliv na jejich vzájemnou rychlost. Vzhledem k tomu, že jde o jednoduchou úlohu a ne problémovou, tak se budeme zajímat o určení velikosti rychlosti pouze na dvě platné cifry, což nám umožní některé pohyby zanedbat.

Prvním pohybem, který by nás mohl zajímat, je oběh Země kolem Slunce. Vzhledem k tomu, že hmotnost Země je malá vůči Slunci, budeme uvažovat, že Země obíhá Slunce po kružnici, jejíž střed leží ve středu Slunce. Oběžnou rychlost si můžeme najít v tabulkách nebo si ji můžeme vypočítat z jiných údajů. Zkusme si ji instruktivně vypočítat, nicméně pro došlá řešení bude stačit ocitovaný zdroj. Vyjdeme z rovnosti velikosti síly dostředivé  $F_d = mv^2/r$  a gravitační  $F_g = GmM/r^2$ , kde  $m$  je hmotnost Země,  $v$  je její oběžná rychlost,  $r$  je vzdálenost hmotných středů (těžišť) Země a Slunce,  $G = 6,67 \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$  je gravitační konstanta a  $M$  je hmotnost Slunce.

$$F_d = F_g \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}.$$

Pokud dosadíme hodnoty<sup>47</sup>  $M = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  a  $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ , dostáváme oběžnou rychlost  $v \doteq 3,0 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ . Stejnou hodnotu nalézáme jako orbitální rychlost<sup>48</sup>.

<sup>47</sup><http://cs.wikipedia.org/wiki/Slunce>

<sup>48</sup><http://cs.wikipedia.org/wiki/Země>

Další pohyby, které by mohly mít vliv na vzájemnou rychlost Terky a Aleše, jsou rotace Země a Slunce kolem vlastní osy. Je vidět, že i pokud by se oni sami pohybovali, pak by jejich vlastní pohyb byl nejspíše zanedbatelný (tedy tvrdit to můžeme u Terky, Aleš je pravděpodobně v nějakém super odolném a výkonném plavidle,<sup>49</sup> ale i u něj předpokládáme, že pohyb bude zanedbatelný, protože chce přeci upřeně sledovat Terku).

Rychlost pohybu bodu na rovníku  $v_i$  přibližně kulového tělesa můžeme určit z jeho periody rotace  $T_i$  (vůči vzdáleným hvězdám). Index  $i$  značí buď Slunce S či Zemi Z.

$$v_i = R_i \omega_i = 2\pi R_i \frac{1}{T_i},$$

kde  $\omega_i$  je úhlová rychlost rotace a  $R_i$  poloměr daného tělesa. Opět si nalezneme potřebné údaje na Wikipedii (mohli bychom opět rovnou najít rychlosti)  $R_Z = 6380$  km,  $R_S = 6,96 \cdot 10^8$  m,  $T_Z = 23,9$  h a  $T_S = 25,4$  dne na rovníku.<sup>50</sup> Vychází nám  $v_Z \doteq 470$  m·s<sup>-1</sup> a  $v_S \doteq 2,0$  km·s<sup>-1</sup>.

Nyní máme pohromadě všechny důležité rychlosti pro náš výpočet. Je pravdou, že se nejedná o všechny pohyby, které bychom mohli uvažovat. Ale další jsou buď vykonávány Sluncem i Zemí společně (oběh okolo jádra naší galaxie, pohyb společně s galaxií v mezigalaktickém prostoru), proto je nemusíme uvažovat, nebo se jedná o pohyby pomalejší, které jsou svou velikostí zanedbatelné vůči rychlosti oběhu Země kolem Slunce (dráha není kruhová, ale eliptická, dále poruchy vyvolané dalšími planetami a Měsícem).

Měli bychom si ještě uvědomit, v jakých směrech pohyby probíhají. Obě rotace i oběh probíhají ve stejném smyslu.<sup>51</sup> Znázornění pohybů Země a Slunce je na obrázku 9. V našem uspořádání by tedy výsledná rychlost byla  $v - v_Z - v_S$ , pokud by všechny rotace probíhaly v jedné rovině (osy rotací byly rovnoběžné). Měli bychom tedy zvážit, jaké nepřesnosti se dopouštíme, pokud bychom to takto zjednodušili.

Rovina oběhu Země kolem Slunce je rovina ekliptiky. Sluneční rovník je vůči rovině ekliptiky skloněný o  $\delta = 7,3^\circ$ . Vzhledem k tomu, že  $\cos \delta \doteq 0,992$ , takže bychom mohli v rámci přesnosti na dvě platné cifry tento sklon zanedbat. O důvod více, proč tuto veličinu zanedbat je, že nevíme, jakou přesnou polohu má sluneční rovník vůči poloze Země. Úhel mezi zemským rovníkem rovinou ekliptiky je však větší:  $\alpha = 23,5^\circ$ , což odpovídá  $\cos \alpha \doteq 0,92$ . To už nevypadá na první pohled zanedbatelně, pokud se zajímáme o přesnost na dvě platné cifry. Pokud si ale

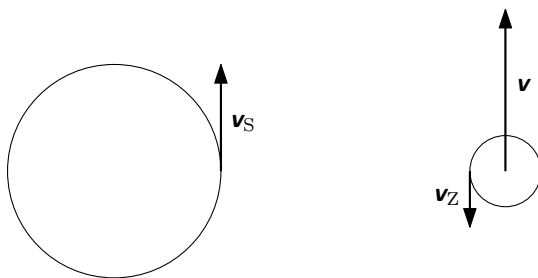
<sup>49</sup>Muselo by být opravdu velice odolné. Dokonce z dnešního hlediska zcela nedostižné. Pokud by se plavidlo „vznášelo“ v konstantní výšce na „povrchu“ Slunce, pak by na osoby v něm umístěné působilo gravitační zrychlení cca  $28g$ , což by Aleš zcela jistě nepřežil. Přitom zatím neznáme metodu, jak gravitační působení odstínit, kromě možnosti nechat těleso v gravitačním poli padat.

Povrchová teplota  $5800$  K také nebude pro techniku zrovna jednoduchá na zvládnutí.

Raději také nebudeme uvažovat, jak to, že Alešovi nevadí v pozorování Země světlo, které je všude kolem něj.

<sup>50</sup>Slunce má diferenciální rotaci, tj. otočí se kolem své osy na rovníku za jinou dobu než na jiných rovnoběžkách. Nás zajímá doba rotace na rovníku.

<sup>51</sup>To platí pro všechny planety s výjimkou Venuše, která „retrográdní“ rotaci.



Obr. 9: Schematické znázornění úlohy, nedodržující měřítko.

uvědomíme, že  $v_Z$  je o zhruba dva řády nižší, pak bychom mohli zanedbat buď  $v_Z$ , ale zanedbáme v tuto chvíli pouze sklon. Dostáváme se tedy k výsledku

$$w = v - v_Z - v_S = \sqrt{\frac{GM}{r}} - 2\pi \left( \frac{R_Z}{T_Z} + \frac{R_S}{T_S} \right) \doteq 27,4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1} \approx 27 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Výsledná velikost rychlosti Terky vůči Alešovi bude zhruba  $27 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Nicméně  $v_Z$  se projeví na druhé platné cifře jenom díky zaokrouhlení, takže bychom se nedopustili velké chyby, pokud nás zajímá jenom přibližná rychlost, pokud bychom  $v_Z$  zanedbali.

#### Poznámka ke změně vzdálenosti

Úlohou bylo určit rychlost jednoho vůči druhému. Pokud bychom se však zajímali o změnu jejich vzájemné vzdálenosti, pak si v našem přiblížení, kde máme kruhovou dráhu Země kolem Slunce a mlčky předpokládáme, že Země a Slunce jsou kulaté a že Slunce sedí ve středu sluneční soustavy (nejsou nutné ani úplně všechny předpoklady současně), můžeme si uvědomit, že určit změnu vzdálenosti je triviální, protože se zrovna v tomto okamžiku nemění. Vidíme to ihned z toho, že pokud necháváme na Slunci a na Zemi oba pozorovatele stát, tak zrovna v poledne, kdy je současně Aleš na nejbližším místě k Zemi, nastane okamžik, kdy jejich vzdálenost bude minimální. Předtím se zmenšovala a později se bude zvětšovat. Ovšem v daném okamžiku je změna jejich vzdálenosti nulová.

Pokud bychom uvažili, že dráha Země je eliptická, pak už výsledek takto triviální nebude, pokud by zrovna o rovnodennosti nastala situace, při níž by byla Terka v perihelu, nebo v afelu. To ovšem v současné době nenastává. Nejbližší Slunci je Země, když je na severní polokouli zima. Mohli bychom tedy vytvořit alespoň řádový odhad velikosti změny vzdálenosti Země od Slunce právě na základě eliptického pohybu. Nalezneme si rozdíl afelu a perihelu. Ten je dle Wikipedie  $\Delta = 5 \cdot 10^9 \text{ m}$ . Pokud bychom uvažovali, že se Země od Slunce rovnoměrně vzdaluje po dobu poloviny roku a poté opět přibližuje, pak dostáváme odhad rychlosti vzdalování či přibližování  $w = 2\Delta/P \approx 3 \cdot 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , kde  $P$  je perioda oběhu Země kolem Slunce. Tato rychlost v průběhu roku sice stoupá a klesá, nicméně

řádově by se měla rychlost pohybovat kolem stovek až maximálně tisícovek metrů za sekundu.

### Úloha IV.3 . . . nerozlučné pouto

*Dva sešity 460 zasuneme do sebe tak, že se střídají listy jednoho a druhého sešitu, a položíme je na vodorovný stůl. Jakou práci musíme vykonat, abychom sešity od sebe oddělili, jestliže na sebe listy působí pouze vlastní vahou? Předpokládejte, že taháme v rovině sešitů kolmo na hřbet jednoho z nich a že se na začátku listy zcela překrývají.*

Cílem úlohy bude zjistit, jakou třecí silou na sebe listy sešitů při pohybu působí a jak se tato síla během pohybu mění. Z této informace potom určíme práci vykonanou během celého pohybu. Než však začneme úlohu řešit, zavedeme si několik předpokladů. Jednak nebudeme uvažovat tlak vazby sešitů (představujeme si například dva kroužkové bloky) a vlastní tíhu vazby. Dále budeme předpokládat, že je třecí koeficient mezi vazbou a listy stejný jako mezi listy navzájem. Nakonec uvažujme, že jsou listy velmi tenké, a proto každý z nich nese pouze část váhy listu nad ním, úměrnou styčné ploše zmíněných listů.

Označme dynamický třecí koeficient mezi listy  $f$ ; zrychlení na počátku pohybu, způsobené vyšším koeficientem statického tření, zanedbáme. Nechť má každý list hmotnost  $m$ , tíhové zrychlení je  $g$ . Potom bude na vrchní list na začátku pohybu působit třecí síla  $F_1 = mgf$ . Následující list stejného sešitu (tedy třetí list celkem) bude na vrchní styčné ploše pocítovat třecí sílu  $F_2 = 2mgf$ , neboť na něm leží dva listy o hmotnosti  $m$ . Na spodní styčné ploše již bude mít síla velikost  $F_3 = 3mgf$  atd. Sešit 460 má 62 listů včetně desek, máme proto celkem  $n = 123$  styčných ploch, neboť vrchní plocha se žádné další nedotýká. Na  $i$ -té styčné ploše působí třecí síla  $F_i = imgf$ , celková síla je potom

$$F = \sum_{i=1}^n F_i = \frac{n(n+1)}{2} mgf,$$

přičemž jsme zanedbali tření o stůl.

Při vzájemném posunutí listů  $y$  ve směru kolmém na hranu listů bude klesat tíha, kterou listy nesou. Celková síla bude

$$F(y) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{a-y}{a} mgf,$$

kde  $a$  je délka hrany v daném směru. Práci vykonanou při oddělování listů můžeme určit buď jako plochu trojúhelníku v grafu závislosti  $F$  na  $y$ , nebo ji spočítat z definice jakožto integrál

$$W(a) = \int_0^a F(y) dy = \int_0^a \frac{n(n+1)}{2} \frac{a-y}{a} mgf dy = \frac{n(n+1)}{4} mgfa.$$

Zamysleme se nyní nad smysluplností našich předpokladů. Je pravděpodobné, že tření mezi deskami a tření mezi listy bude mít různé hodnoty třecího koeficientu. Vrchní desky celkovou sílu příliš neovlivní, zajímají nás především ty spodní. Potom by poslední člen sumy měl obsahovat jisté  $f'$  obecně různé od  $f$ . Jedná se o poslední člen aritmetické řady – bude-li poměr koeficientů  $f'/f = \kappa$ , bude poměr celkových sil, a tedy i prací, roven  $W'/W \approx 1 + 2(\kappa - 1)/n$  pro velká  $n$ . Lze předpokládat, že hodnoty  $f$ ,  $f'$  se neliší více než dvojnásobně, zanedbání tedy bylo oprávněné. Podobný odhad bychom mohli provést pro tření mezi deskami a listy, tj. předposlední člen.

Pokud bychom chtěli být precizní, museli bychom také započíst třecí sílu mezi vazbou a stolem, která navíc v průběhu tažení může zůstávat konstantní, táhneme-li „spodním“ sešitem (a v případě vrchního sešitu tato síla roste, místo aby klesala). Jednalo by se však pouze o přičtení speciálního členu na konec řady, resp. rozšíření sčítacího indexu. Výsledné vztahy by byly méně přehledné a relativní změna by byla řádově v jednotkách procent.

Předpoklad úměrnosti  $F(y) \propto (a - y)/a$  úzce souvisí s vlivem vazby sešitu. V případě kroužkového bloku je oblast ohybu jednoho z listů doléhajícího na hranu listu pod ním velmi malá, tíha pak bude skutečně dobře odpovídat styčné ploše. U běžného sešitu způsobí vazba ohnutí listů, na hraně v blízkosti vazby proto bude tlak vyšší a bude se s rostoucím  $y$  měnit. Charakter této závislosti je však obtížné popsatelný.

Zkusme nakonec ještě provést číselný odhad. Sešit 460 má rozměry  $a = 21,0$  cm,  $b = 29,7$  cm a gramáž listů  $\sigma = 80$  g·m<sup>-2</sup>. Pro  $g = 9,81$  m·s<sup>-2</sup> a dynamický koeficient tření<sup>52</sup>  $f = 0,4$  dostaneme  $F(0) \doteq 150$  N a  $W(a) \doteq 16$  J. Hodnota  $F(0)$  nám říká, že pro roztažení sešitů musíme vyvolat sílu odpovídající tíze tělesa o hmotnosti 15 kg, a to není úplně málo.<sup>53</sup> Také si uvědomme, že síla potřebná k oddělení sešitů roste s kvadrátem počtu listů. Že k oddělení dvou telefonních seznamů o několika stech stranách již lidská síla nestačí, ukazuje video [https://www.youtube.com/watch?v=h0t-D\\_ee-JE](https://www.youtube.com/watch?v=h0t-D_ee-JE).

## Úloha IV.4 ... ach ta tíže

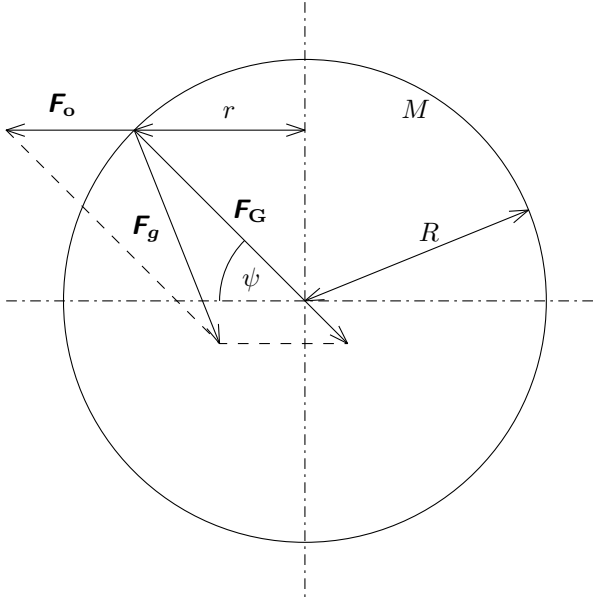
Určete, jaké je tíhové zrychlení na povrchu neutronové hvězdy v závislosti na rovnoběžce. Jak velká slapová síla by působila na předmět vysoký  $h = 1$  m a s hmotností  $m = 1$  kg v blízkosti jejího povrchu? S jakou energií by dopadl na povrch neutronové hvězdy marshmallow upuštěný z výšky  $h$ ? Neutronová hvězda má poloměr  $R$  a rotuje s periodou rotace  $T$ . Můžete ji považovat za kulovou, i když přesně kulová není. Najděte si hodnoty pro typickou neutronovou hvězdu a udejte jak obecné, tak konkrétní číselné výsledky.

V celém řešení budeme předpokládat, že gravitační účinky lze popsat newtonovsky a že všechny rychlosti jsou nerelativistické.

<sup>52</sup><http://www.paperonweb.com/paperpro.htm>

<sup>53</sup>Navíc bychom zde měli použít statický koeficient tření, který by odhad ještě zvýšil.

Započneme s tíhovým zrychlením na povrchu. Na testovací těleso spojené s hvězdou (rotuje s ní) působí dvě síly – skutečná gravitační a zdánlivá odstředivá. Uvažujme kulovou neutronovou hvězdu s poloměrem  $R$  a hmotností  $M$  a testovací částici na rovnoběžce  $\psi$  s hmotností  $m$ , tj. situace jako na obrázku 10.



Obr. 10: Rozbor situace.

Z geometrie situace lze nahlédnout, že pro velikosti sil působících na testovací těleso bude platit kosinová věta

$$|\mathbf{F}_g|^2 = |\mathbf{F}_G|^2 + |\mathbf{F}_o|^2 - 2 \cos \psi |\mathbf{F}_G| |\mathbf{F}_o| ,$$

kde  $\mathbf{F}_g$  je celková tíhová síla působící na těleso,  $\mathbf{F}_G$  je gravitační síla a  $\mathbf{F}_o$  je odstředivá síla.

Pro velikost  $|\mathbf{F}_G|$  bude platit z Newtonova gravitačního zákona

$$|\mathbf{F}_G| = \frac{GMm}{R^2}$$

a pro velikost odstředivé síly dostaneme

$$|\mathbf{F}_o| = m r \omega^2 = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} = \frac{4\pi^2 m R \cos \psi}{T^2} ,$$

kde  $\omega$  je úhlová rychlost rotace hvězdy a  $G$  je Newtonova gravitační konstanta. Pro velikost tíhového zrychlení tedy dostáváme

$$g(\psi) = \frac{|\mathbf{F}_g|}{m} = \sqrt{\frac{G^2 M^2}{R^4} + \frac{16\pi^4 R^2 \cos^2 \psi}{T^4} - \frac{8\pi^2 GM \cos^2 \psi}{RT^2}}.$$

Speciálně na pólech

$$g(90^\circ) = \frac{|\mathbf{F}_G|}{m} = \frac{GM}{R^2}$$

a na rovníku

$$g(0^\circ) = \frac{|\mathbf{F}_G| - |\mathbf{F}_o(0^\circ)|}{m} = \frac{GM}{R^2} - \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Nyní se zaměříme na slapovou sílu. Slapová síla je způsobena různými silovými účinky na bližší a vzdálenější části tělesa. Je-li  $h \ll R$ , pak lze těleso aproximovat dvěma bodovými hmotnostmi na koncích tělesa (pro malé homogenní těleso). A velikost slapové síly potom lze přiblížit jako

$$F_s = F_g\left(\frac{m}{2}, R+h\right) - F_g\left(\frac{m}{2}, R\right) \approx \frac{1}{2}h \left. \frac{dF}{dy} \right|_{y=R}.$$

kde uvažujeme velikost síly jako funkci hmotnosti a polohové souřadnice  $y$  – v radiálním směru.

Po výpočtu lze zapsat slapovou sílu jako

$$F_s = \frac{mh}{g(R)} \left( \frac{-G^2 M^2}{R^5} + \frac{8\pi^4 R \cos^2 \psi}{T^4} + \frac{2\pi^2 GM \cos^2 \psi}{R^2 T^2} \right),$$

kde značením  $g(R)$  vyjadřujeme, že zde tíhové zrychlení považujeme za funkci poloměru hvězdy a s  $\psi$  nakládáme jako s konstantou. Tento vztah pro sílu  $F_s$  zasluží bližší komentář. Předpoklad  $h \ll R$  je splněn pro malé předměty, poloměry neutronových hvězd se ale pohybují i v řádech kilometrů, takže pro jiná kosmická tělesa tento předpoklad platit nemusí. Dále jsme vycházeli z toho, že je těleso spojené s hvězdou. Např. kdyby se jednalo dříve zmíněný cizí objekt, tak by slapová síla odpovídala pouze gravitační slapové síle. Nakonec v závislosti na parametrech může mít slapová síla různé znaménko (těleso je stlačováno či roztahováno).

Co se týče třetí podotázky, z formulace „upustíme marshmallow“ není jasné, zda jsme při upouštění spojení s hvězdou či nikoliv (rotujeme či nerotujeme). Další otázkou je, zda máme v situaci zohledňovat slapové síly a příslušné deformace marshmallow. Tyto deformace budou ale silně záviset na rozměrech marshmallow, které nejsou specifikovány, proto je zde nebudeme uvažovat.

Ať už uvažujeme rotující či nerotující marshmallow, jako nejsnazší cesta k výsledku se jeví počítat pohyb marshmallow v inerciální soustavě a poté pouze pohyb převést do rotující soustavy (odkud zjistíme dopadovou energii).

Padá-li marshmallow z klidu, jeho kinetická energie při dosažení povrchu hvězdy bude v inerciální soustavě

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_p(R+h) - E_p(R) = GMm \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right),$$



kde  $m$  je hmotnost marshmallow. Tedy

$$v_0 = \sqrt{2GM \frac{h}{R(R+h)}},$$

pro malé výšky  $h$  můžeme aproximovat  $R+h \approx R$ . Nicméně „povrch“ hvězdy se vůči klidové soustavě pohybuje rychlostí

$$v' = R\omega = \frac{2\pi R \cos \psi}{T}.$$

Protože jsou ale tyto dvě rychlosti na sebe kolmé, bude pro dopadovou energii platit

$$E_0 = \frac{1}{2}m(v_0^2 + v'^2) = m \left[ \frac{GMh}{R(R+h)} + \frac{2\pi^2 R^2 \cos^2 \psi}{T^2} \right]$$

Pro rotující marshmallow je situace pro malá  $h$  obdobná, pouze tečná rychlost povrchu vůči marshmallow bude  $h\omega \cos \psi$  namísto  $R\omega \cos \psi$ . Pro větší  $h$  již toto nemusí být splněno. Zprvce se může stát, že marshmallow vůbec nedopadne (jeho orbita neprotne povrch hvězdy), nicméně toto by se muselo dít pro značné výšky  $h$  (zkuste si odhadnout poloměr stacionární kruhové orbity), pro které je spojení s hvězdou velice problematické; jediný rozumný scénář (krom šléných konstrukcí typu výťah do vesmíru na neutronové hvězdě) je stacionární družice, na které by po upuštění marshmallow nekonal urychlený pohyb (vůči družici by byl v klidu). Proto předpokládáme, že marshmallow dopadne.

Provedeme přibližný výpočet pro „menší“  $h$  (nemusí být malé v porovnání s  $R$ , ale ne tak velké, aby se výrazně projevilo zakřivení orbity – viz níže).

Opět postupujeme jako dříve. Musí být zachována mechanická energie, tudíž

$$\frac{1}{2}m[(R+h)\omega \cos \psi]^2 - \frac{GMm}{R+h} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{R},$$

$$v_1^2 = [(R+h)\omega \cos \psi]^2 + 2GM \frac{h}{R(R+h)},$$

kde  $v_1$  je rychlost marshmallow vůči klidové soustavě při dosažení povrchu hvězdy. Tentokrát ale vektor rychlosti v klidové soustavě při dosažení povrchu nebude na povrch kolmý, proto musíme ještě spočítat tečné a kolmé složky  $v_1$  k povrchu.

Musí rovněž platit zákon zachování momentu hybnosti, proto

$$m\omega \cos^2 \psi (R+h)^2 = mRv_t \cos \psi,$$

$$v_t = \frac{(R+h)^2 \omega \cos \psi}{R},$$

kde  $v_t$  je tečná složka (rovnoběžná s povrchem) rychlosti marshmallow v klidové soustavě při dosažení povrchu.

Necht  $w$  je rychlost marshmallow vůči povrchu při dopadu. Potom pro dopadovou energii  $E_1$  platí

$$E_1 = \frac{1}{2}mw^2 = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'|^2 = \frac{1}{2}m[v_r^2 + (v_t - v')^2] = \frac{1}{2}m[v_1^2 - 2v_tv' + v'^2],$$

kde  $v_r$  je radiální složka rychlosti marshmallow při dosažení povrchu. Po dosažení za  $v'$ ,  $v_1$  a  $v_t$  dostaneme

$$E_1 = \frac{m}{2} \left\{ [(R+h)\omega \cos \psi]^2 + \frac{2GMh}{R(R+h)} - \frac{4\pi(R+h)^2\omega \cos^2 \psi}{T} + \frac{4\pi^2 R^2 \cos^2 \psi}{T^2} \right\}$$

a konečně po dosažení  $\omega = 2\pi/T$  máme

$$E_1 = m \left\{ GM \frac{h}{R(R+h)} + \frac{2\pi^2}{T^2} [R^2 - (R+h)^2] \cos^2 \psi \right\}.$$

Pro uspokojení obecnosti je třeba dodat, uvedený postup výpočtu dopadové energie nebyl úplně korektní, protože existují takové polohy upouštěného marshmallow, kdy marshmallow dopadne, ale použitá aproximace není správná. Jedná se o takové polohy, kdy již orbita upuštěného marshmallow nemá v dobrém přiblížení triviální tvar (je nutno ji považovat za elipsu, ne za úsečku), ale orbita povrch neutronové hvězdy protne. V takovémto případě již není stelární šířka dopadu shodná s „upouštěcí“ šířkou a vektor rychlosti při dopadu již obecně nebude rovnoběžný s místní rovnoběžkou (dopadu). V takovémto případě by bylo nutno spočítat místo dopadu a poté rychlost rozložit do tří směrů místo dvou, a počítat s různými stelárními šířkami. Postup by byl velice pracný, ale typově ne až tak odlišný od použitého.

Nyní aplikujme výsledky na nějakou neutronovou hvězdu, např. na pulsar PSR J0348+0432 (dvojhvězda s bílým trpaslíkem)<sup>54</sup> Ta má parametry (data uvedena bez nepřesností, poloměr je uveden střední)

$$M \doteq 2,01M_{\odot} \doteq 4,00 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$

$$R \doteq 13 \text{ km} \doteq 1,3 \cdot 10^4 \text{ m},$$

$$T \doteq 39,1 \text{ ms} = 3,91 \cdot 10^{-2} \text{ s}.$$

Podotýkáme, že se jedná o poměrně mohutnou neutronovou hvězdu. Dostáváme pro ni s přesností na tři platné číslice hodnoty

$$g(90^\circ) \doteq 1,58 \cdot 10^{12} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq g(0^\circ).$$

Vidíme, že závislost na rovnoběžce je slabá, proto pro jednoduchost budeme počítat slapovou sílu při pólu, pro 1 m vysoké těleso o hmotnosti 20 kg (peřináč)

$$F_s \doteq \frac{GMmh}{R^3} \doteq 2,43 \cdot 10^9 \text{ N},$$

což je poměrně hodně. Zkuste si porovnat slapové síly působící na atom se silou, kterou jsou vázány elektrony.

A konečně dopadová energie marshmallow puštěného z výšky  $h = 1 \text{ m}$  (zařízením spojeným s hvězdou) o hmotnosti  $m = 5 \text{ g}$  je zhruba

$$E_1 = 7,89 \cdot 10^9 \text{ J}.$$

Se stejnou energií by na Zemi dopadlo těleso s hmotností téměř milion tun.

<sup>54</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/PSR\\_J0348+0432](http://en.wikipedia.org/wiki/PSR_J0348+0432)

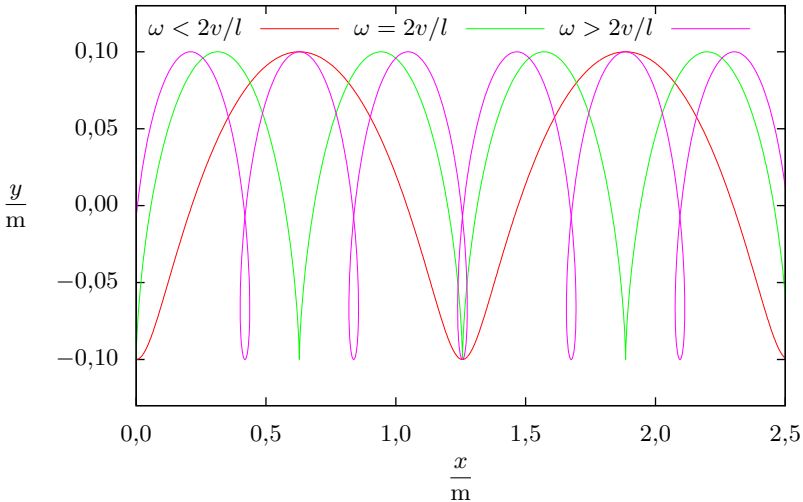
## Úloha IV.5 . . . vrhač nožů

Vrhací nůž opustí ruku ve chvíli, kdy je jeho těžiště ve výšce  $h$  a má pouze horizontální složku rychlosti  $v_0$ . Jakou musí mít úhlovou rychlost rotace  $\omega$ , aby se zasekl do svislé desky vzdálené  $d$  od místa vypuštění? Pro zjednodušení uvažujte, že těžiště nože je přesně v polovině jeho délky  $l$  a že se nůž zasekne vždy, když se jeho čepel dotkne desky dříve než rukojeť.

Při řešení této úlohy si nejprve musíme uvědomit, jaké trajektorie špička nože může opisovat a jaké z toho mohou vzniknout situace. V zásadě máme tři možnosti:

- Rychlost těžiště nože  $v$  je oproti rychlosti rotace veliká. Potom se špička nože pohybuje vůči terči stále vpřed, což nám usnadní výpočet.
- Nastane mezní případ, kdy se špička nože v úvratí vůči terči zastaví.
- Po jistý časový úsek se bude špička nože od terče vzdalovat.

Trajektorie špičky nože pro jednotlivé případy je vykreslena na obrázku 11.



Obr. 11: Trajektorie špičky nože.

Pro případ  $\omega < 2v/l$  budeme postupovat tak, že si nejprve vyjádříme vzdálenost špičky nože od terče jako funkci času. Jak je patrné z obrázku 11 půjde o periodickou funkci. Každou periodu můžeme pomyslně rozdělit na dvě poloviny – v té první má špička nože náskok před těžištěm a může se tedy zaseknout do terče. V té druhé má těžiště náskok před špičkou a nůž se tedy zaseknout nemůže.

Spočteme tedy čas, za který nůž narazí do stěny a poté vyhodnotíme, ve které části periody se nacházíme, abychom určili, zda se nůž zaseknul, nebo ne.

Nejprve si napíšeme parametrické vyjádření pohybu špičky nože pro případ, že na počátku svého pohybu je špička v dolní úvratí a rotuje směrem od terče

$$y = -\frac{l}{2} \cos(\omega t),$$

$$x = vt - \frac{l}{2} \sin(\omega t),$$

kde jsme jako parametr použili čas  $t$ . Nyní nás zajímá čas  $\tilde{t}$ , za který nůž do stěny narazí. Pro lepší představu o výpočtu tohoto času si napíšeme ještě závislost souřadnice  $x$  na čase  $t$  pro druhý konec nože

$$x' = vt + \frac{l}{2} \sin(\omega t).$$

Jelikož jako náraz do stěny se počítá střet s libovolným z obou konců nože, urazí těžiště vzdálenost

$$\tilde{d} = d - \frac{l}{2} |\sin(\omega \tilde{t})|.$$

Nůž tedy narazí do stěny za čas

$$\tilde{t} = \frac{d - \frac{l}{2} |\sin(\omega \tilde{t})|}{v},$$

což je implicitní rovnice, kterou nejsme schopni běžnými metodami vyřešit. Uvědomme si ovšem, co dělá člen  $l|\sin(\omega t)|/2$  – jedná se o korekci na vodorovnou vzdálenost od počáteční polohy, která se zmenšuje či zvětšuje tím, že se nůž otáčí. Nejvíce se projeví v okamžiku, kdy  $\omega t = 90^\circ$ . Pro obě krajní polohy, tzn.  $\omega t = 0^\circ$  a  $\omega t = 180^\circ$  se neprojevívá vůbec. Pro náš případ  $\omega < 2v/l$  ji však vůbec nemusíme uvažovat, jediné že by nás zajímal přesný čas zásahu, či pod jakým úhlem se nůž zasekne.

Začínáme s nožem, jehož špička míří dolů. Požadujeme, aby jeho úhel natočení od původního stavu ve chvíli srážky se stěnou byl z intervalu  $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ , kde  $k \in \mathbb{N}_0$ . Z odstavce výše můžeme soudit, že pokud pro každé  $k$  najdeme spodní a horní frekvenci, při které k zaseknutí dojde, dojde k zaseknutí pro všechny mezilehlé frekvence. Pro všechna  $k \in \mathbb{N}_0$  hledáme tedy  $\omega_{\min}^k$  a  $\omega_{\max}^k$  (jde o horní index, ne mocninu) takové, že

$$\omega_{\min}^k \tilde{t} = 2k\pi + \pi = (2k + 1)\pi,$$

$$\omega_{\max}^k \tilde{t} = 2k\pi + 2\pi = (2k + 2)\pi.$$

Sinus celočíselných násobků  $\pi$  je ovšem nulový. Pro  $\omega_{\min}^k$  tedy dostáváme rovnici

$$\omega_{\min}^k \tilde{t} = \omega_{\min}^k \frac{d - \frac{l}{2} |\sin(\omega_{\min}^k \tilde{t})|}{v} = \omega_{\min}^k \frac{d}{v} = (2k + 1)\pi,$$

tedy

$$\omega_{\min}^k \frac{d}{v} = (2k + 1)\pi$$

a pro  $\omega_{\max}^k$  dostáváme rovnici

$$\omega_{\max}^k \frac{d}{v} = (2k + 2)\pi.$$

Ještě nám zbývá určit, jakou podmínku si klademe předpokladem, že se špička nože pohybuje stále vpřed. Rychlost špičky nože vůči těžišti je  $\omega l/2$ , rychlost těžiště je  $v$ , chceme tedy, aby bylo splněno

$$\omega < \frac{2v}{l}.$$

Pokud je tato podmínka splněna, můžeme psát, že  $\omega \in (\omega_{\min}^k, \omega_{\max}^k)$ .

Uvažme nyní případ  $\omega = 2v/l$  – že se špička nože v jednu chvíli zastaví. Jedná se vlastně pouze o krajní případ první situace, což znamená, že se nůž zasekne, pokud najdeme takové  $k$ , že  $2v/l \in (\omega_{\min}^k, \omega_{\max}^k)$ . Tento případ je ovšem zajímavý tím, že takto se nože skutečně vrhají.<sup>55</sup>

Ještě je potřeba vyřešit otázku – jak víme, že krajní možné polohy jsou  $180^\circ$  a  $360^\circ$ ? Stačí se podívat na obr. 11. V prvních dvou případech existuje pro každý úhel z tohoto intervalu situace, kdy je špička nože napřed před těžištěm. Pro případ  $\omega > 2v/l$  toto již neplatí. Horní mezní úhel budeme hledat tak, že najdeme místo, ve kterém se špička začne vracet – špička, která se od stěny vzdaluje, se do ní už nezasekne. Musíme tedy najít okamžik, kdy je její rychlost vůči stěně nulová (všimněme si, že pro druhý případ to byl úhel  $360^\circ$ ). Pro nalezení spodní hranice budeme hledat v podstatě horní hranici pro náraz do zdi rukojetí nože. Víme totiž, že pokud tuto hranici překročíme, tak rukojeť nenarazí a naopak se zasekne špička.

Pro tyto případy využijeme diferenciální počet, který nám ze vztahu pro souřadnici  $x$  umožňuje spočítat složku rychlosti  $v_x$  špičky nože pomocí derivace, tedy

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v - \frac{\omega l}{2} \cos(\omega t).$$

Z požadavku, aby  $\tilde{v}_x = 0$  získáváme vztah

$$\cos(\omega_{\max} \tilde{t}) = \frac{2v}{\omega_{\max} l},$$

$$\omega_{\max}^k \tilde{t} \in \left\{ \arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\max}^k l}\right) + 2k\pi, 2\pi - \arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\max}^k l}\right) + 2k\pi \right\}.$$

Z těchto dvou možných řešení je pro nás podstatné to druhé, jelikož špička nože se nachází před těžištěm nože pouze v případě, že je nůž natočený o úhel  $\varphi \in (\pi, 2\pi)$ , čemuž odpovídá druhý příklad. Nyní využijeme vztah

$$\tilde{t} = \frac{d - \frac{l}{2} |\sin(\omega_{\max} \tilde{t})|}{v}.$$

<sup>55</sup>[http://www.knifethrowing.info/physics\\_of\\_knife\\_throwing.html](http://www.knifethrowing.info/physics_of_knife_throwing.html)

Pronásobením  $\omega_{\max}$  získáváme pro dané  $k$  rovnici

$$\omega_{\max}^k \frac{d - \frac{l}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{2v}{\omega_{\max}^k l}\right)^2}}{v} = 2\pi - \arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\max}^k l}\right) + 2k\pi,$$

kde jsme využili toho, že

$$|\sin \varphi| = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

Pro  $\omega_{\min}$ , tedy náraz rukojetí, lze postupovat podobně. Derivací vztahu pro složku rychlosti rukojeti ve směru  $x$  získáme vztah pro rychlost

$$v'_x = \frac{dx}{dt} = v + \frac{\omega l}{2} \cos(\omega t).$$

a z požadavku na vynulování této rychlosti získáváme

$$\cos(\omega_{\max} \tilde{t}) = -\frac{2v}{\omega_{\max} l},$$

$$\omega_{\min}^k \tilde{t} \in \left\{ \arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\min}^k l}\right) + (2k-1)\pi, 2\pi - \arccos\left(\frac{2v}{\omega_{\min}^k l}\right) + (2k-1)\pi \right\}.$$

Opět je pro nás podstatné druhé řešení, jelikož požadavek je nyní  $\varphi \in (0, \pi)$ .

Zvolme nyní nějaké ukázkové hodnoty, pro které se podíváme, jak by řešení mohlo vypadat, jelikož na papíře tyto rovnice nevyřešíme. Zvolme tedy  $d = 10$  m,  $l = 0,2$  m,  $v = 50$  m·s<sup>-1</sup>. Uvědomme si, že pokud máme nůž roztočit dostatečně rychle, musí před zasažením terče prodělat určitý počet otáček. Tento počet otáček představuje hodnota  $k$ . Musíme tedy nejprve najít minimální  $k$  potřebné k tomu, abychom museli řešit rovnice pro třetí případ – čím větší  $k$ , tím rychlejší rotace.

Nůž poletí odhadem po dobu  $t = d/v$ , nás zajímá počet otáček pro frekvenci blízkou  $\omega = 2v/l$ . Minimální hodnotu  $k$  tedy můžeme odhadnout jako  $k_{\min} = \omega t / 2\pi = d/\pi l \doteq 16$ . Pro nižší  $k$  již platí rovnice z prvního a druhého případu. Numericky tedy spočteme řešení pro  $k = 16$  a vyšší. V tabulce 1 jsou mezní hodnoty  $\omega$  pro jednotlivá  $k < 16$ , tedy pro případ, že nůž rotuje dostatečně pomalu na to, aby se špička nože nikdy nepohybovala směrem od stěny a platily rovnice pro první a druhý případ. V tomto případě je šířka pásu úhlových rychlostí pro každé  $k$  rovna  $v\pi/d = 15,71$  rad·s<sup>-1</sup>. V tabulce 2 jsou pak mezní hodnoty  $\omega$  pro  $k \geq 16$ .

Tab. 1: Mezní frekvence pro první a druhý případ.

$k$	$\frac{\omega_{\min}}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$	$\frac{\omega_{\max}}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$
0	15,708	31,416
1	47,124	62,832
2	78,540	94,248
3	109,956	125,664
4	141,372	157,080
5	172,788	188,496
6	204,204	219,911
7	235,619	251,327
8	267,035	282,743
9	298,451	314,159
10	329,867	345,575
11	361,283	376,991
12	392,699	408,407
13	424,115	439,823
14	455,531	471,239
15	486,947	502,655

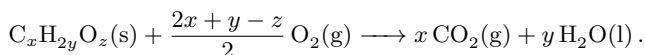
Tab. 2: Mezní frekvence pro třetí případ.

$k$	$\frac{\omega_{\min}}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$	$\frac{\omega_{\max}}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$	$\frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$
16	518,396	534,152	15,756
17	549,921	565,699	15,778
18	581,484	597,276	15,792
19	613,073	628,874	15,801
20	644,680	660,490	15,810
21	676,303	692,119	15,816
22	707,937	723,758	15,821
23	739,582	755,407	15,825
24	771,235	787,064	15,829
25	802,895	818,728	15,833
26	834,562	850,397	15,835
27	866,234	882,072	15,838
28	897,911	913,751	15,840
29	929,592	945,434	15,842
30	961,277	977,121	15,844
31	992,965	1 008,810	15,845
32	1 024,660	1 040,500	15,846

## Úloha IV.P . . . nejmenovaná tyčinka

Na základě biochemických dějů v lidském těle a jeho mechaniky odhadněte, kolik energie spotřebuje cyklista na překonání tisíce výškových metrů, je-li průměrné stoupání 5%.

Najprv si ujasníme, čo budeme myslieť pod pojmom energia (pri stravovaní). Názov úlohy napovedá, že by sa hodilo dačo ako to číslo (energetická hodnota), ktoré je napísané na obaloch od jedla. Proste maximálna energia, ktorú vieme z jedla získať. V organizme sa získava spaľovaním uhlíkatých zlúčenín s  $O_2$  na  $H_2O$  (kvapalnú) a  $CO_2$ , je teda rozumné priradiť jedlu energiu rovnú teplu uvoľnenému v reakcii



Každý látke vieme priradiť tzv. štandardnú zlučovaciu entalpiu  $\Delta H_f^\circ$ , ktorá vyjadruje reakčné teplo spotrebované pri jej vzniku z prvkov pri štandardných podmienkach – obvykle atmosférický tlak a izbová teplota – (v ľudskom tele sú tlak a teplota trochu iné, ale to môžeme zanedbať). Reakciu potom môžeme priradiť jej štandardnú reakčnú entalpiu  $\Delta H_r^\circ$  ako stechiometrický súčet štandardných zlučovacích entalpií produktov mínus reaktantov. Takže  $\Delta H_{r,1}^\circ(C_xH_{2y}O_z)$  je práve reakčné teplo spotrebované pri spálení daného množstva (typicky jedného molu) látky  $C_xH_{2y}O_z$ ; s mínusom dostaneme uvoľnené reakčné teplo.

Prevýšeníu 1 km zo zadania zodpovedá vzdialenosť zhruba 20 km a navyše to je dost do kopca. Predpokladajme, že cyklista je chytrý a nechce sa úplne zabiť. Šprint a dlhšia jazda totiž využívajú úplne iné zdroje energie a mechanizmy ich premeny na energiu (tzv. metabolické dráhy). Dokonca sa na ne špecializujú aj rôzne druhy svalových vlákien. Menší výkon, ale väčšiu výdrž má aeróbne (v reakcii vystupuje kyslík) spaľovanie tukov. Zvoľme si teda ako zdroj energie bežný tripalmitoylglycerol. Entalpia jeho spálenia je<sup>56</sup>  $\Delta H_{r,1}^\circ(C_{51}H_{98}O_6) = -32 \text{ MJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Keďže je záporná, uvoľní sa z 1 molu spáleného  $C_{51}H_{98}O_6$  teplo 32 MJ. Teraz potrebujeme zistiť, aká práca sa z neho dá vykonať.

*Biochémia*

Základnou „energetickou jednotkou“ v metabolických dráhach je adenosíntrifosfát (ATP). Väčšinou sa hydrolyzuje na adenosíndifosfát (ADP) a fosfát (Pi), pričom sa uvoľňuje energia pre iné energeticky náročné biochemické reakcie, alebo sa z ADP a Pi skladá pomocou energie uvoľnenej v biochemických reakciách. Niekedy sa naraz odtrhnú dve fosfátové skupiny ako difosfát (PPi), čo je ale energeticky ekvivalentné dvom reakciám  $ATP + H_2O \longrightarrow ADP + Pi$ . A niekedy sa použije iný nukleotid, napr. guanozíntrifosfát (GTP), ale prenáša prakticky rovnaké množstvo energie. Môžeme preto hovoriť o ekvivalentoch ATP potrebných/vzniknutých pri reakcii z ADP ako o jednotkách energie.

Okrem ATP sa často objavujú aj ďalšie pomocné látky (kofaktory), napr. nikotínamidadenínindinukleotid (NAD<sup>+</sup>) a jeho analógy ako flavínadenínindinukleotid

<sup>56</sup><https://archive.today/rwFII>



(FAD). Majú aj svoje redukované formy (NADH, FADH<sub>2</sub>), ktoré sú súčasťou tzv. elektrónového transportného reťazca, kde sa redukuje kyslík a vzniká voda. Pri tom sa uvoľní energia, ktorá sa v prípade NADH využije na vznik 2,5 ekv. ATP (v prípade FADH<sub>2</sub> vznikne 1,5 ekv. ATP). Ďalším dôležitým biochemickým kofaktorom je koenzým A (CoA).

Pri trávení sa tuk rozloží na glycerol a mastné kyseliny, v našom prípade 3 ekv. kyseliny palmitovej (C<sub>15</sub>-COOH; uhľovodíkový reťazec budeme len stručne značiť počtom uhlíkov). Tieto látky sa nejako musia dostať do bunky. Pritom sa síce regeneruje a zasa rozkladá tuk, ale tento proces nie je podstatný pre energetické úvahy. Pozrime sa na metabolizmus kyseliny palmitovej v bunke.

Prvý krok, v ktorom sa energia spotrebuje, je „aktivácia“ mastnej kyseliny jej pripojením na CoA. To si vyžiada spotrebu 2 ekvivalentov ATP (toto je príklad reakcie, v ktorej z ATP vzniká AMP). Vzniknutý C<sub>15</sub>CO-CoA pokračuje do β-oxidácie – cyklického procesu, v ktorom sa vždy z C<sub>2n+1</sub>CO-CoA odtrhne acetylkoenzým A (Ac-CoA, v našom značení C<sub>1</sub>CO-CoA) za vzniku 1 ekv. FADH<sub>2</sub>, 1 ekv. NADH (teda 4 ekv. ATP) a C<sub>2n-1</sub>CO-CoA. Teraz vidíme, že sme si dobre zvolili kyselinu s párnym počtom uhlíkov: uhľovodíkový reťazec sa vždy skrúti o 2 a z C<sub>15</sub>CO-CoA vznikne 8 Ac-CoA a 32 ekv. ATP<sup>57</sup>.

Ac-CoA pokračuje do citrátového cyklu, v ktorom z neho vznikne CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, 3 ekv. NADH, 1 ekv. GTP a 1 ekv. FADH<sub>2</sub>. Celkový energetický zisk z kys. palmitovej je 110 ekv. ATP. Glycerol môže byť prevedený na glyceraldehyd-3-fosfát (spotrebuje sa 1 ekv. ATP a vznikne 1 ekv. NADH). Z neho vznikne v glykolýze Ac-CoA (uvoľní sa 1 ekv. ATP a 2 ekv. NADH), ktorý zas pokračuje do citrátového cyklu. Z glycerolu získame teda 17,5 ekv. ATP a z tripalmitoylglycerolu asi 350 ekv. ATP.

### Termodynamika

Teraz sa naskytuje otázka: akú prácu vedia svaly vykonať pomocou daného množstva ATP?

Najprv si ujasníme, ako sa vyráta entalpia. Nestačí zobrať len súčet energií chemických väzieb produktov mínus reaktantov – zmenu vnútornej energie molekúl  $\Delta U$  v reakcii – lebo v reakcii vznikajú aj plyny, ktoré sa eventuálne uvoľňujú do vzduchu. Pri uvoľnení plynov s objemom  $V$  do prostredia s tlakom  $p$  (ktorý môžeme považovať za atmosférický) treba vykonať prácu  $pV$ , teplo spotrebované pri reakcii teda získame ako  $\Delta H = \Delta U + pV \approx \Delta H^\circ$ .

Mínus entalpia síce vyjadruje teplo, ktoré sa uvoľní v reakcii, ale nie všetko sa dá premeniť na prácu. Problém je v zmene entropie. Entropia sa totiž mení jednak tým, že sa uvoľňuje alebo spotrebuje teplo v prostredí, ale aj vznikáním a zaníkaním väzieb v molekulách. Entropia je „miera neusporiadanosti systému“, takže informácia o tom, že dva atómy sú spojené, do nej určite prispieva. 2. termodynamický zákon hovorí, že na to, aby entropia neklesala, sa musí časť energie uvoľnenej premeniť na teplo, a nie na prácu.

<sup>57</sup>Pri odbúravaní mastných kyselín s nepárnym počtom uhlíkov sa β-oxidácia zastaví na trojuhlíkovom konci – propionylkoenzýme A (v našom značení C<sub>2</sub>CO-CoA). Ten ďalej prechádza biochemickými dráhami trojuhlíkatých a štvoruhlíkatých kyselín.

Maximálnu prácu (zasa s opačným znamienkom, ako pri entalpii), ktorá sa môže uvoľniť v reakcii, popisuje tzv. reakčná Gibbsova energia  $\Delta G$ . V reakcii  $\text{ADP} + \text{Pi} \longrightarrow \text{ATP} + \text{H}_2\text{O}$  sa dá vyjadriť ako

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S = \Delta H - T\Delta S^\circ + RT \ln q \approx \Delta G^\circ + RT \ln q,$$

kde  $q = [\text{ADP}][\text{Pi}]/[\text{ATP}]$  je stechiometrický súčin bezrozmerných koncentrácií (v jednotkách  $\text{mol}\cdot\text{l}^{-1}$ ; koncentrácia rozpúšťadla – vody – sa doňho neráta). Výraz  $\Delta H^\circ - T\Delta S^\circ$  pri teplote  $25^\circ\text{C}$  ( $T \doteq 298\text{K}$ ) potom označujeme ako štandardnú zmenu Gibbsovej energie v danej reakcii. Pre hydrolyzu ATP poznáme<sup>58</sup>  $\Delta G^\circ \doteq -31\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Entropia  $\Delta S(\text{M})$  jedného molu jedného typu molekúl M (teda hodnota, o ktorú sa zmení entropia tým, že tieto molekuly zaniknú) sa totiž dá rozpísať do dvoch členov – člen  $\Delta S^\circ$  zodpovedá entropii, ktorú by mali, ak by sa mohli voľne pohybovať v objeme 1l a člen  $-R \ln q$  prepočtu entropie na iný objem, v ktorom budú potom mať inú koncentráciu.  $\Delta S^\circ$  závisí zložito aj na vnútornom usporiadaní týchto molekúl, ide teda o experimentálne namerané hodnoty. Zmenu entropie v reakcii potom vypočítame z  $\Delta S$  jednotlivých molekúl rovnako ako zmenu entalpie.

Vidíme, že  $\Delta G_{\text{ATP}}$  závisí výrazne na koncentráciách ATP, ADP a Pi, ale aj rôznych látkach, ktoré tieto koncentrácie ovplyvňujú. Jej hodnotu je treba prosto merať. Väčšina hodnôt  $\Delta G_{\text{ATP}}$  nameraných v svaloch sa pohybuje okolo<sup>59</sup>  $-50\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ , z čoho vieme prepočítať, že na prácu (teda  $\Delta G$ , ktoré sa dá získať z 350 ekv. ATP) sa môže premeniť maximálne zhruba polovica tepla uvoľneného pri spálení  $\text{C}_{51}\text{H}_{98}\text{O}_6$  (teda zmeny entalpie),  $\Delta G_1 \doteq 18\text{MJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Takú dokonalú účinnosť sval samozrejme nemá. Ten istý zdroj uvádza, že v skutočnosti je získaná práca len zhruba 30 %  $\Delta G_1$ , teda 5,5 MJ z 1 molu tripalmitoylglycerolu.

Pozor, spočítali sme len max. prácu, ktorá sa dá teoreticky z ATP vyťažiť. V skutočnosti svaly nepremieňajú ATP na prácu, ale na napätie  $T$ . Doslova na to, aby sa posunuli svalové proteíny. Sila  $F$ , ktorú vie sval zložený z rovnakých vlákien vyvinúť, teda rastie s jeho prierezom  $S$ , lebo  $F = TS$ . Ak by sme človeka zväčšili  $k$ -krát, jeho objem a hmotnosť narastie  $k^3$ -krát a max. sila len  $k^2$ -krát. Väčší, resp. ťažší, človek teda na svoju hmotnosť vyvinie menšiu silu ako menší a ťažšie sa utiahne do kopca. To je dôvod, prečo sú profesionálni cyklisti relatívne chudí.

### Mechanika

Áké sily cyklistu brzdia? Samozrejme tiažová, potom nejaký odpor vzduchu, trenie v ložiskách a valivý odpor. Odporová sila vzduchu rastie s rýchlosťou cyklistu, ktorá do kopca nie je veľmi veľká. Konkrétne ak by tých 20 km mal náš cyklista prejsť pohodovým tempom za 4 hodiny, bude mať rýchlosť  $v = 5\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ . Pri tomto tempe môžeme využiť vyššie spomenutý mechanizmus získavania energie. Plochu

<sup>58</sup><https://archive.today/jjCfY>

<sup>59</sup>Nicholas P. Smith, Christopher J. Barclay, Denis S. Loiselle: The efficiency of muscle contraction. Progress in Biophysics and Molecular Biology 2005.

cyklistu odhadneme na  $S = 0,5 \text{ m}^2$ , koeficient odporu vzduchu nech je  $C = 1$ , hustota vzduchu  $\rho \doteq 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . Podľa vzorca

$$F_o = \frac{CS\rho v^2}{2}$$

dostaneme odhadom  $F_o \doteq 0,5 \text{ N}$ . Ak má cyklista s bicyklom hmotnosť  $m = 80 \text{ kg}$  a uhol stúpania (pre malé hodnoty je uhol v rad. približne rovný stúpaniu v percentách)  $\alpha = 0,05$ , zložka tiažovej sily, ktorá ho ťahá dozadu, je  $F_{g,\parallel} = mg \sin \alpha \doteq 40 \text{ N}$ , odpor vzduchu je teda úplne zanedbateľný. Straty energie v ložiskách sa dajú výrazne minimalizovať dobrým namazaním a valivý odpor dofúkaním pneumatík<sup>60</sup> (predpokladáme, že cyklista je chytrý), takže môžeme vplyv všetkých síl okrem tiažovej zanedbať.

Existuje veľa techník bicyklovania do kopca. Niektoré sú lepšie (efektívnejšie), iné horšie. Nie všetka práca svalov sa totiž využije na prekonanie spomenutých síl. Časť sa spotrebuje na zrýchľovanie/spomaľovanie nôh, časť na udržanie polohy tela a bicykla (napr. ak cyklista na pedáloch stojí a bicykel sa viac kýve zo strany na stranu) a taktiež noha netlačí úplne kolmo na pedále, takže sa energia spotrebuje aj na napínanie svalov neúčinným tlačením rovnobežne s kľukou pedálov.<sup>61</sup>

Tento tretí efekt sa môžeme pokúsiť odhadnúť. Zoberme si jednoduchý model krútenia pedálov: uhlová rýchlosť pedálov je konštantná, cyklista tlačí na pedál v rozsahu uhlov (pedálu od kolmice)  $\varphi \in (20^\circ, 160^\circ)$  konštantnou silou  $F$  zvislo dole. Môžeme predpokladať, že svaly spotrebujú rovnako veľa energie v oboch prípadoch. Akú prácu ( $W_1$ ) vykoná oproti prípadu ( $W_0$ ), keď by tlačil silou  $F$  vždy kolmo na kľuku pedálov?

Je jasné, že  $W_0 = Fs = 140^\circ RF \doteq 2,4RF$ , kde  $R$  je vzdialenosť pedálu od osi otáčania. Ak  $F$  pôsobí dole, analogicky s potenciálnou energiou v tiažovom poli môžeme povedať, že sa pedál pohol o  $\Delta h = R(\cos 20^\circ - \cos 160^\circ) \doteq 1,9R$  dole a vykonaná práca  $W_1 = \Delta h F \doteq 1,9RF$ , čo je asi 80%  $W_0$ . Skutočné straty energie závisia dosť na spôsobe pedálovania, ale použijeme tento výsledok pre finálny odhad.

### Záver

Prevýšeniu  $H = 1 \text{ km}$  zodpovedá potenciálna energia  $E_p = Hmg \doteq 0,7 \text{ MJ}$ . Odhadli sme, že svaly musia spáliť aspoň  $E_p/0,8 \doteq 0,9 \text{ MJ}$ . To zodpovedá 0,15 mol tripalmitoylglycerolu, resp. hľadanej energii  $E = 5 \text{ MJ} \doteq 1 \cdot 10^3 \text{ kcal}$  energie, resp. štyrom 50gramovým nemenovaným tyčinkám s energetickou hodnotou zhruba 250 kcal.

To je stále len pre dosť idealizovaný prípad. Ak by stúpanie nebolo rovnomerné, teda s krátkymi prudkými stúpaniami a rovinkami alebo sa cyklista ponáhlal, musel by zapojiť anaeróbne dýchanie, ktoré je menej efektívne, lebo nie je možné využiť elektrónový transportný reťazec. V skutočnosti aj pri miernom tempe budú svaly spaľovať aj glukózu. Celý organizmus potrebuje viac energie atď., proste je kopa bodov, v ktorých sa ešte môže stratit energia. Jedna platná cifra v  $E$  je veľa, odhad je skôr zopár MJ a zopár tyčíniek.

<sup>60</sup><https://archive.today/JfUUV>

<sup>61</sup><https://archive.today/uXn09>

## Úloha V.1 ... tuhost pana Plancka

Možná jste už někdy slyšeli o takzvaných Planckových jednotkách, tj. jednotkách vyjádřených na základě fundamentálních fyzikálních konstant – rychlosti světla  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , gravitační konstanty  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  a redukované Planckovy konstanty  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Takto bývá často zmiňován Planckův čas, Planckova délka a Planckova hmotnost. Co kdyby nás ale zajímala „Planckova tuhost pružiny“? Sestavte na základě rozměrové analýzy z  $c$ ,  $G$  a  $\hbar$  vzorec jednotky odpovídající tuhosti pružiny  $[k] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ . Pro určení vzorce uvažujte, že neznámá  $\alpha$  z rozměrové analýzy neurčitelná multiplikativní bezrozměrná konstanta je rovna 1.

V zadání jsou k dispozici fundamentální konstanty v základních jednotkách SI, proto není potřeba jednotky dál převádět. Zapišme si Planckovu tuhost pomocí, zatím neznámých, mocnin  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  těchto konstant

$$k_P = C c^\alpha G^\beta \hbar^\gamma,$$

kde  $C$  je v zadání zmíněná multiplikativní konstanta, kterou považujeme za  $C = 1$ . Přepišme si rovnici pomocí jednotek příslušných veličin

$$\text{kg} \cdot \text{s}^{-2} = \text{m}^\alpha \cdot \text{s}^{-\alpha} \cdot \text{m}^{3\beta} \cdot \text{kg}^{-\beta} \cdot \text{s}^{-2\beta} \cdot \text{kg}^\gamma \cdot \text{m}^{2\gamma} \cdot \text{s}^{-\gamma}.$$

Vzhledem k tomu, že se musí rovnat mocniny u každé jednotky na levé i pravé straně rovnice, získáváme tři rovnice o třech neznámých, které můžeme snadno vyřešit.

$$\begin{aligned} 1 &= -\beta + \gamma, \\ 0 &= \alpha + 3\beta + 2\gamma, \\ -2 &= -\alpha - 2\beta - \gamma. \end{aligned}$$

Sečtením všech tří rovnic eliminujeme neznámé  $\alpha$ ,  $\beta$  a vypočteme  $\gamma$ . Dosazením  $\gamma$  do první rovnice získáme  $\beta$  a dosazením například do druhé rovnice získáme  $\alpha$

$$\begin{aligned} -1 &= 2\gamma, \\ \beta &= \gamma - 1, \\ \alpha &= -3\beta - 2\gamma; \\ \gamma &= -\frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha = \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

Hledané vyjádření tuhosti tedy je

$$k_P = \sqrt{\frac{c^{11}}{G^3 \hbar}}.$$

Po dosazení vyjde Planckova tuhost pružiny  $k_P \doteq 7,54 \cdot 10^{78} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$ .

K řešení úlohy lze také využít přímo soustavy Planckových jednotek. Obdobným způsobem jako výše lze získat Planckovu hmotnost  $m_P$  a čas  $t_P$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \doteq 2,18 \cdot 10^{-8} \text{ kg},$$

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \doteq 5,39 \cdot 10^{-44} \text{ s}.$$

Aplikací rozměrové analýzy, tj. porovnáním mocnin jednotek hmotnosti a času u tuhosti, jednoduše získáme vzorec pro výpočet tuhosti pomocí Planckových jednotek. Číselný výsledek samozřejmě vyjde stejně.

$$k_P = \frac{m_P}{t_P^2} \doteq 7,54 \cdot 10^{78} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}.$$

K poslednímu vzorci lze také dojít úvahou: Planckova energie oscilátoru  $E_P$  souvisí s Planckovou délkou a Planckovou tuhostí vztahem  $E_P = k_P l_P^2 / 2$ . Protože budeme úlohu řešit rozměrovou analýzou a v zadání je hodnota bezrozměrné konstanty volena 1, budeme polovinu ve vzorci ignorovat. Vyjádříme z něj tuhost a energii vyjádříme pomocí známého Einsteinova vzorečku  $E = mc^2$ . Dále využijeme vztahu mezi rychlostí, vzdáleností a časem  $c = l_P / t_P$ . Těmito úpravami se dostáváme ke stejnému výsledku jako výše

$$k_P = \frac{E_P}{l_P^2} = \frac{m_P c^2}{l_P^2} = \frac{m_P}{t_P^2} \doteq 7,54 \cdot 10^{78} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Na závěr poznamenejme, že Planckova soustava má využití především v kvantové teorii gravitace a v teorii strun, kde pomocí Planckových jednotek převedeme rovnice do bezrozměrného tvaru, který často výrazně zjednoduší algebraický zápis.

## Úloha V.2 ... slyším dobře, to nemohu říct

Ve vzdálenosti  $d = 5 \text{ m}$  od bodového zdroje zvuku slyšíme zvuk o hladině intenzity  $L_1 = 90 \text{ dB}$ . V jaké vzdálenosti od zdroje je hladina intenzity tohoto zvuku  $L_2 = 50 \text{ dB}$ ?

Ak má zvuk intenzitu  $I$ , potom můžeme vyjádřit hladinu intenzity zvuku  $L$  vztahom

$$L = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right), \quad (30)$$

kde  $I_0$  je prahová intenzita zavedená ako najnižšia ešte registrovateľná intenzita čistého tónu frekvencie 1 kHz. Činitel 10 vo vzťahu zabezpečuje prevod na decibely. Jednoduchou úpravou dostávame vzťah

$$I = I_0 \cdot 10^{L/10}. \quad (31)$$

Intenzita zvuku  $I$  je definovaná ako podiel výkonu  $P$  zvukového vlnenia a plochy  $S$ , ktorou vlnenie prechádza, čiže

$$I = \frac{P}{S}. \quad (32)$$

V našom prípade môžeme plochu  $S$  považovať za guľovú plochu s polomerom  $d$ , čo je vzdialenosť od bodového zdroja. Zo vzťahov (31) a (32) a zo známeho vzťahu na výpočet povrchu gule dostávame vzťah

$$\frac{P}{4\pi d^2} = I_0 \cdot 10^{L/10}. \quad (33)$$

Základným poznatkom potrebným k vyriešeniu tohto príkladu je ten, že výkon  $P$  zvukového vlnenia sa nemení. Čiže platí  $P_1 = P_2$ , kde indexmi 1 a 2 označujeme situácie 1 a 2 rovnako ako v zadaní. Toto označenie budeme používať aj pre nasledujúce výpočty. Zo vzťahu (33) si vyjadríme  $P$ . Využitím poznatku o rovnosti výkonov pre obe situácie a po upravení dostávame vzťah

$$d_2 = d_1 \cdot 10^{(L_1 - L_2)/20}.$$

Po dosadení známych hodnôt dostávame, že hladina intenzity od daného zdroja ma veľkosť 50 dB vo vzdialenosti  $d_1 \doteq 500$  m. To je však čisto teoretická hodnota. V skutočnosti dochádza k interakcii vlnenia s prekážkami a zvuk sa tlmí. Preto táto vzdialenosť v realite (keď existuje tlmenie) bude menšia. Ovplyvniť to môže aj šum prostredia, v ktorom sa nachádzame.

Táto úloha sa dala riešiť aj využitím akustického tlaku  $p$  namiesto akustickej intenzity. Nakoľko vieme, že akustická intenzita je priamo úmerná druhej mocnine akustického tlaku  $I \sim p^2$ , môžeme vzťah (30) prepísať na tvar

$$L = 20 \log_{10} \left( \frac{p}{p_0} \right),$$

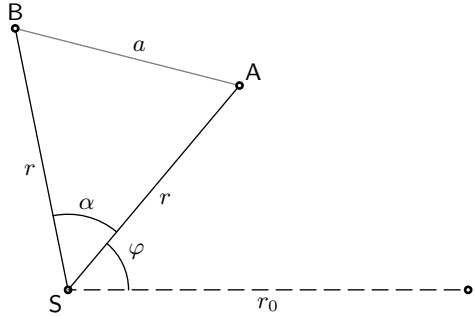
kde  $p_0$  je hodnota akustického tlaku definovaná podobne ako hodnota  $I_0$ .

### Úloha V.3 ... matfyzácká honička

*$N$  ľudí se rozhodne hrát na honěnou, ale ne jen tak ledajakou. Na začátku se rozmístí do vrcholů pravidelného  $N$ -úhelníku o straně délky  $a$ . Hra poté probíhá tak, že každý honí (to znamená běží přímo za ním) svého souseda po pravé ruce (proti směru hodinových ručiček). Každý se přitom pohybuje rychlostí o konstantní velikosti  $v$ . Popište průběh hry (trajektorie, po kterých se hráči pohybují) a zjistěte, za jak dlouho hra skončí v závislosti na parametrech  $N$ ,  $a$ ,  $v$ .*

Prvá vec, ktorú treba v riešení využiť, je symetria. Všimnime si, že ak otočíme svet o  $360^\circ/N$  okolo stredy  $S$  počiatočného  $N$ -uholníka, situácia sa nezmení – stále budeme mať na začiatku  $N$  ľudí vo vrcholoch rovnakého  $N$ -uholníka, ktorí sa naháňajú podľa úplne rovnakých pravidiel. Ale to znamená, že aj v každom čase budú hráči tvoriť pravidelný  $N$ -uholník so stredom v bode  $S$  a hra skončí, až keď všetci dobehnú do bodu  $S$ .

Jediné, čo sa mení, je vzdialenosť ľudí  $r$  od bodu  $S$  a uhol  $\varphi$ , o ktorý sa  $N$ -uholník otočil (všetky pohyby okolo stredy  $S$  budeme uvažovať proti smeru



Obr. 12: Náčrt situácie s dvomi susednými hráčmi.

pohybu hodinových ručičiek). Stačí nám teda hľadať trajektóriu jedného hráča v polárnych súradniciach  $(r, \varphi)$ . Trajektórie ostatných dostaneme jednoducho jej otočením o celočíselné násobky uhla  $\alpha = 360^\circ/N$ .

Uvažujme človeka A, ktorý naháňa človeka B, počiatočnú polohu človeka A označme I ako na obrázku 12. Rýchlosť  $\mathbf{v}$  človeka A vieme rozložiť na radiálnu zložku  $v_r$  (rovnobežnú s priamkou SA), zodpovedajúcu pohybu ku stredú, a na ňu kolmú tangenciálnu zložku  $v_t$ , zodpovedajúcu obehu okolo stredú. Keďže trojuholník SAB je vždy rovnoramenný so základňou AB a  $\angle ASB = \alpha$ , bude  $\angle SAB = 90^\circ - \alpha/2$  a dostávame

$$v_r = v \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = v \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$v_t = v \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = v \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Radiálna zložka je vlastne rýchlosť, ktorou klesá  $r$ , tangenciálna zložka je spojená s uhlovou rýchlosťou  $\omega$  obehu hráča okolo stredú vzťahom  $\omega r = v_t$ .

Obe zložky rýchlosti sú konštantné. Pre radiálnu zložku to znamená, že pohyb ku stredú sa tvári ako rovnomerne priamočiary (do stredú teda všetci dobehnú v konečnom čase) a vzdialenosť hráča od stredú  $r$  vieme v závislosti na čase vyjadriť ako

$$r = r_0 - v_r t.$$

Počiatočnú vzdialenosť  $r_0$  síce explicitne nepoznáme, ale vieme si ju vyjadriť – v rovnoramennom trojuholníku SAB totiž platí pre dĺžku základne  $a = 2r_0 \sin(\alpha/2)$ , teda

$$r = \frac{a}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} - vt \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Čas, za ktorý hra skončí, teda všetci dobehnú do stredú, potom nájdeme ľahko ako

$$t_{\text{fin}} = \frac{a}{2v \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2v \sin^2\left(\frac{180^\circ}{N}\right)}.$$

Na to, aby sme určili trajektórie, už potrebujeme vedieť integrovať. Chceme nájsť závislosť uhla  $\varphi$  od času. Pre uhlovú rýchlosť  $\omega$  platí

$$\omega = \frac{v_t}{r} = \frac{v_t}{r_0 - v_r t}$$

a keď si uvedomíme, že uhlová rýchlosť je len derivácia uhla  $\varphi$  podľa času, dostaneme závislosť  $\varphi(t)$  integrovaním

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^t \frac{v_t}{r_0 - v_r t} dt = \int_{r_0}^{r(t)} -\frac{v_t}{r v_r} dr = \left[ -\frac{v_t}{v_r} \ln r \right]_{r_0}^{r(t)} = \\ &= \frac{v_t}{v_r} \ln \left( \frac{r_0}{r} \right) = \operatorname{cotg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \ln \left( \frac{r_0}{r_0 - v_r t} \right), \end{aligned}$$

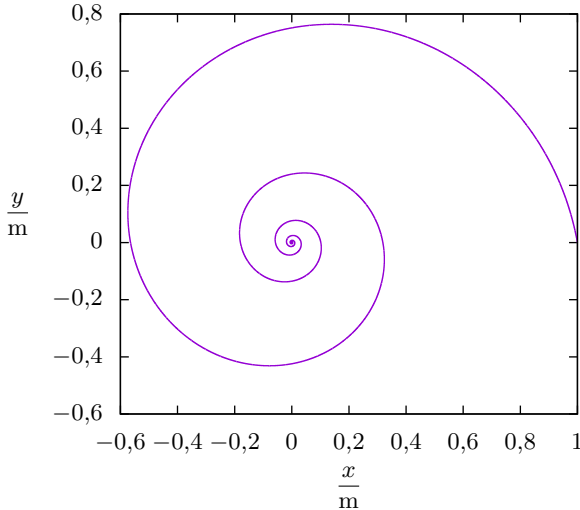
kde sme najprv využili, že  $dr = -v_r dt$ , potom sme pre pohodlie položili počiatočnú súradnicu  $\varphi$  rovnú nule (to, čo dostaneme integrovaním, je len zmena uhla  $\varphi$  za daný čas) a nakoniec identitu  $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$ , pomocou ktorej sme previedli rozdiel logaritmov na ich podiel.

V podstate sme rovno dostali závislosť  $\varphi(r)$ , ktorá popisuje trajektóriu, tzv. logaritmickú špirálu

$$\varphi(r) = \operatorname{cotg} \left( \frac{\alpha}{2} \right) \ln \left( \frac{r_0}{r} \right) = \operatorname{cotg} \left( \frac{180^\circ}{N} \right) \ln \left[ \frac{a}{2r \sin \left( \frac{180^\circ}{N} \right)} \right].$$

Všimnime si, že ak  $r$  klesá do nuly, rastie logaritmus z nuly do nekonečna. Keďže uhol  $\varphi + 360^\circ$  zodpovedá rovnakej polohe ako uhol  $\varphi$ , znamená to, že ako praví matfyzáci obehnú všetci okolo stredu nekonečne veľakrát. Ak je ale hráčov málo, bude pozorovateľných len veľmi málo obehov; príklad trajektórie pre veľké  $N$  je na obr. 13.




 Obr. 13: Trajektória hráča pre  $N = 1\,000$ ,  $r_0 = 1$ .

#### Úloha V.4 ... lijavec

Podzimní počasí je občas stejně rozmařilé, jako to jarní, a tak nás nezhřídka může na cestě zastihnout nečekaný liják. Někteří šťastlivci s sebou nosí deštník. Odhadněte, jak velkým tlakem dokáže hustý déšť na deštník působit a porovnejte tíhovou sílu deštníku s tlakovou silou deště. Parametry deštníku vhodně zvolte.

Najprv si vysvetlíme, ako môže dážď tlačiť na dáždnik, a následne pristúpime k odhadom potrebných veličín. Dopad dažďovej kvapky na dáždnik je klasická zrážka. Ale nevešajme hlavu, nebudeme musieť komplikovane rátať zrážku dvoch telies. Predpokladáme, že v našom prípade držíme dáždnik viac-menej pevne v rukách a stojíme pevne na zemi, teda ide iba o odraz telesa od rovinného povrchu.

Pri riešení zrážok nám často nezáleží na priebehu zrážky, ale iba na stave pred zrážkou a po zrážke. Preto si často vystačíme iba so zákonmi zachovania. Za každých okolností platí *zákon zachovania hybnosti* (ďalej ZZH). Na moment si predstavme, že kvapka je tuhé teleso a dopadá smerom nadol na naklonený rovinný povrch. V prípade takejto zrážky dvoch telies existujú dva extrémne prípady: *dokonale pružná zrážka* a *dokonale nepružná zrážka*.

Pri dokonale pružnej zrážke (predstavte si, že na zem hodíte gumenú skákajúcu loptu) nie je žiadne trenie, žiadna tepelná či iná nevratná strata energie, slovom zachováva sa celková mechanická energia (*zákon zachovania mechanickej energie*, ďalej ZZME). Klamal som, trochu si jednu zrážku zrátame. Pred zrážkou máme jedno teleso hmotnosti  $m$  (tuhá kvapka) s rýchlosťou  $\mathbf{v}_0$  a druhé teleso hmotnosti  $M$  (Zem) s nulovou rýchlosťou. Po zrážke má kvapka rýchlosť  $\mathbf{v}$  a Zem rýchlosť  $\mathbf{w}$ .

Zo zákonov zachovania dostávame

$$m\mathbf{v}_0 = m\mathbf{v} + M\mathbf{w},$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mw^2.$$

Pre rýchlosť  $\mathbf{w}$  zo ZZH dostaneme

$$\mathbf{w} = \frac{m}{M}(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}),$$

ktorá v prípade  $M \rightarrow +\infty$  je rovná nule.<sup>62</sup> Čiastočným dosadením do ZZME dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}|w.$$

V prípade  $M \rightarrow +\infty$  je rýchlosť  $w$  nulová, a preto dostávame jednoduchý výsledok

$$v_0 = v.$$

Teda v prípade dokonale pružného odrazu od povrchu sa nezmení veľkosť rýchlosti telesa, iba jej smer. Pri dopade na naklonenú rovinu sa odrazí rovnakou rýchlosťou, ale ktorým smerom? Ak nepôsobí trenie, pôsobí rovina na teleso iba normálovou (kolmou na rovinu) silou. Zložka rýchlosti rovnobežná s rovinou preto ostáva konštantná. Jednoducho teda zistíme, že na to, aby bola zachovaná veľkosť rýchlosti, sa teleso musí odraziť pod rovnakým uhlom, pod akým dopadlo (rovnako ako v prípade odrazu svetla na rovinnom zrkadle).

Podme sa pozrieť na druhý extrém, dokonale nepružnú zrážku (predstavte si, že na zem hodíte lepiúvú slizkú loptu). Vtedy nastáva nevratná strata energie a telesá sa po zrážke pohybujú spoločne, rovnakou rýchlosťou. V takom prípade platí len ZZH.<sup>63</sup> Riešiť túto zrážku je však jednoduché. Po zrážke sa telesá musia pohybovať spolu, preto má po zrážke kvapka nulovú rýchlosť a je „prilepená“ k povrchu.

Skutočné zrážky sú však vždy niekde medzi týmito dvoma extrémami. Nazývajú sa *nedokonale pružné zrážky*. Vtedy zároveň existuje nejaké trenie (pre ktoré neplatí ZZME), ale zároveň trenie nespôsobí pričapenie telesa na povrch.

Ako však z toho získame tlakovú silu? Sila je spojená so zmenou hybnosti. Keďže ZZH platí stále, stačí zistiť, ako sa zmenila hybnosť kvapky, a zo ZZH poznáme, akú hybnosť preniesla na dáždňik + človeka + Zem. Pri dokonale pružnom odraze od roviny pod uhlom  $\alpha$  je zmena hybnosti  $\Delta\mathbf{p}$

$$\Delta\mathbf{p} = m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = m[(0, v_0 \sin 2\alpha, v_0 \cos 2\alpha) - (0, 0, -v_0)]$$

$$\Delta\mathbf{p} = mv_0(0, \sin 2\alpha, 1 + \cos 2\alpha).$$

---

<sup>62</sup>Pre úplnosť treba ešte dodať, že vektor  $(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v})$  je konečný. Rýchlosť na začiatku  $\mathbf{v}_0$  je konečná a rýchlosť  $\mathbf{v}$  nemôže byť nekonečná, lebo by bol porušený zákon zachovania energie (pred zrážkou je energia sústavy konečná, po zrážke musí byť tiež rovnaká, konečná). Zo ZZME môžeme dokonca priamo povedať, že  $v \leq v_0$ .

<sup>63</sup>ZZME neplatí. Platí však všeobecnejší princíp, zákon zachovania energie. ZZME nezahŕňal napríklad tepelnú energiu a iné.

V prípade dáždnika<sup>64</sup> je uhol  $\alpha$  odhadom v rozsahu  $(0^\circ, 45^\circ)$ .

Pri dokonale nepružnom odraze je zmena hybnosti

$$\Delta \mathbf{p} = m \mathbf{v} - m \mathbf{v}_0 = m [(0, 0, 0) - (0, 0, -v_0)] = mv_0(0, 0, 1).$$

Potom sila pôsobiaca na dáždnik je

$$\mathbf{F} = -\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t},$$

kde je znamienko mínus, lebo celková zmena hybnosti je nulová a zaujíma nás zmena hybnosti sústavy dáždnika, človeka a Zeme;  $\Delta t$  je čas, za ktorý na dáždnik dopadli kvapky hmotnosti  $m$ . Takisto sa zameriame iba na silu pôsobiacu v smere nadol.<sup>65</sup> Dostávame teda pre veľkosť zvislej zložky

$$|F_z| = \frac{mv_0 k}{\Delta t},$$

kde sme zaviedli konštantný faktor  $k$ . V prípade dokonale pružného odrazu pre  $\alpha = 0^\circ$  je  $k = 2$ , pre  $\alpha = 45^\circ$  je  $k = 1$ , pre dokonale nepružný odraz je pre všetky uhly  $k = 1$ .

Teraz nasleduje malá diskusia ku správnej hodnote faktora  $k$ . V prípade skutočných odrazov (nedokonale pružných) sa bude  $k$  pohybovať medzi extrémnymi hodnotami 1 a 2. Rovnako väčší počet kvapiek dopadá vo väčšej vzdialenosti od osi dáždnika, čo rovnako ovplyvní strednú hodnotu  $k$ .

Tu však ešte treba dodať, že zatiaľ sme všetko ráтали pre tuhú kvapku. Dynamika zrážky môže byť komplikovaná (rôzne sily povrchového napätia na povrchu kvapky; deformačné, tlakové sily pôsobiace vo vnútri kvapky. . .) Po zrážke sa kvapka môže rozpadnúť na viacero drobných kvapiek, ktoré môžu ešte rotovať. Nejaká časť kvapky môže zostať „prilepená“ na povrchu dáždnika (a keďže pri daždi sú dáždniky zvyčajne mokré, tak aj nejaká ostane). Môžeme teda povedať, že skutočnosť je niekde medzi tým a hodnota faktora  $k$  je medzi 1 a 2. To nám na odhad stačí.

Teraz potrebujeme odhadnúť, akou rýchlosťou padajú kvapky  $v_0$  a aký je hmotnostný prítok kvapiek na dáždnik  $m/\Delta t$ .

Kvapky vznikajú v mrakoch na kondenzačných jadrách, postupne sa spájajú do väčších a vplyvom tiaže padajú v podobe zrážok. Pri páde na nich pôsobí odporová sila vzduchu a pomerne skoro dosiahnu rovnovážnu rýchlosť (vtedy sú tiažová a odporová sila rovnako veľké a pôsobia v opačnom smere). Veľkosť kvapiek je zhora obmedzená kombináciou povrchového napätia a aerodynamiky. Kvapky sa postupne spájajú a zväčšujú, ale od určitej veľkosti sú väčšie kvapky vplyvom turbulentného prúdenia vzduchu rozdelené na menšie (povrchové napätie ich nestačí držať pokope). Polomer kondenzačných jadier je približne  $0,1 \mu\text{m}$ , polomer kvapiek v oblakoch je približne  $10 \mu\text{m}$  a polomer dažďových kvapiek je približne  $r = 1 \text{mm}$ .

<sup>64</sup>Samozrejme, existujú aj dáždniky s väčším rozsahom až ku  $90^\circ$ , ale nám ide iba o odhad.

<sup>65</sup>To, že niekedy sa nejaká kvapka odrazila do boku a strčila do dáždnika nabok, nás netrápi. V časovom priemere pri veľkom počte kvapiek bočné sily vykompenzujú.

Aký je teda terminálna rýchlosť kvapiek? Budeme predpokladať guľatú kvapku. Vypočítame to z rovnosti odporovej a tiažovej sily

$$F_{\text{od}} = G,$$

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{vz}} v_0^2 C S = m g,$$

kde  $\rho_{\text{vz}} = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota vzduchu,  $C = 0,47$  odporový koeficient gule,  $S = \pi r^2$  plošný prierez kvapky,  $m = 4\rho\pi r^3/3$  hmotnosť kvapky (kde  $\rho = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  je hustota vody) a  $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  tiažové zrýchlenie. Po dosadení dostávame priamo vzťah pre terminálnu rýchlosť kvapiek

$$v_0 = \sqrt{\frac{8}{3C} \frac{\rho}{\rho_{\text{vz}}} r g}.$$

Pre kvapky v oblakoch vychádza približne  $0,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Dynamika v oblakoch je komplikovanejšia. V oblakoch prúdia vzdušné prúdy, ktoré sú rýchlejšie ako táto terminálna rýchlosť.

Pre dažďové kvapky  $r = 1 \text{ mm}$  to vychádza približne  $6,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , pre  $r = 2 \text{ mm}$  približne  $9,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Aký je hmotnostný prítok kvapiek na dáždnik  $m/\Delta t$ ? To vieme určiť z hustoty vody, úhrnu zrážok na plochu počas dažďa a plochy dáždnika. Plocha dáždnika, na ktorú dážď dopadá, je približne  $S_d = \pi R^2$ , kde  $R$  je polomer dáždnika. Po malom prieskume rozmerov dáždnikov na internetovom obchode dôjdeme k odhadu polomeru  $40 \text{ cm}$  až  $50 \text{ cm}$ . Hodinový úhrn zrážok  $U$  pri daždi je bežne  $1 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  až  $5 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ ; pri poriadnom lejaku, či nárazovo je aj niekoľkonásobne väčší. Ale dážď môže byť ešte krutejší. Rekord v úhrne zrážok za 1 minútu namerali 26. novembra 1970 na karibskom ostrove Guadeloupe, a síce  $U_{\text{max}} = 2280 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$ . Hmotnostný prítok už potom ľahko vyjadríme ako

$$\frac{m}{\Delta t} = \rho S_d U.$$

Pre u nás normálny úhrn zrážok  $U = 5 \text{ mm}\cdot\text{h}^{-1}$  dostávame  $0,9 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ , pre karibské „mrholenie“  $0,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Nakoniec nastáva porovnanie jednotlivých síl. Na odhad tiažovej sily potrebujeme hmotnosť dáždnika. Po predchádzajúcom malom prieskume vieme, že hmotnosť dáždnika  $m_d$  je približne  $0,30 \text{ kg}$  až  $0,35 \text{ kg}$ , teda tiažová sila pôsobiaca na dáždnik je

$$G_d = m_d g \approx 3 \text{ N}.$$

Pre tlakovú silu pri daždi ( $k \approx 1,5$ ,  $v_0 = 6,6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $m/\Delta t = 0,9 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}$ ) dostávame

$$|F_z| = v_0 k \frac{m}{\Delta t} \approx 10 \text{ mN} = 0,003 G_d.$$

Pre tlakovú silu pri karibskom „mrholení“ ( $k \approx 1,5$ ;  $v_0 = 9,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ;  $m/\Delta t = 0,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ ) dostávame

$$|F_z| = v_0 k \frac{m}{\Delta t} \approx 6 \text{ N} = 2 G_d.$$

Áký je odhad tiažovej sily dažďovej vody, ktorá sa zachytila na dáždniku a spôsobuje záťaž? Hmotnosť vody na dáždniku po lejaku odhadneme<sup>66</sup> ako  $m_{\text{voda}} = 50 \text{ g}$ . Teda tiažová sila dažďovej vody je

$$G_{\text{vod}} = m_{\text{vod}}g \approx 0,5 \text{ N} = 0,15G_{\text{d}}.$$

Tlaková sila pri daždi vyzerá pomerne malá. Dôvod je ten, že zatiaľ je všetko uvažované v pokojnej bezveternej atmosfére. Terminálna rýchlosť kvapiek je rýchlosť kvapiek voči vzduchu. Búrky, či lejaky sú spojené so silným vetrom. Vietor v nárazoch môže mať  $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  až  $35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , rekordný vietor bol zas nameraný 3. mája 1999 počas tornáda v Oklahome:  $134 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Áká je samotná odporová sila vzduchu pri vetre? Pri odporovom koeficiente polgule  $C_{\text{pol}} = 0,42$ , priereze dáždника  $S_{\text{d}} = \pi R^2$  dostávame pre silný vietor  $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  hodnotu

$$F = \frac{1}{2} \rho_{\text{v}} z v^2 C_{\text{pol}} S_{\text{d}} \approx 21 \text{ N} = 7G_{\text{d}},$$

pre nárazy  $35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  máme

$$F \approx 257 \text{ N} = 86G_{\text{d}}$$

a pre oklahomské tornádo v priamom zábere

$$F \approx 3,8 \text{ kN} = 1300G_{\text{d}}.$$

Môžeme z toho usúdiť, že tlaková sila mierneho dažďa je zanedbateľne malá voči tiaži dáždника, ale pri silnejúcom daždi môže dosiahnuť aj porovnateľnú hodnotu. Stále však významnejšiu rolu hraje sila vetra.

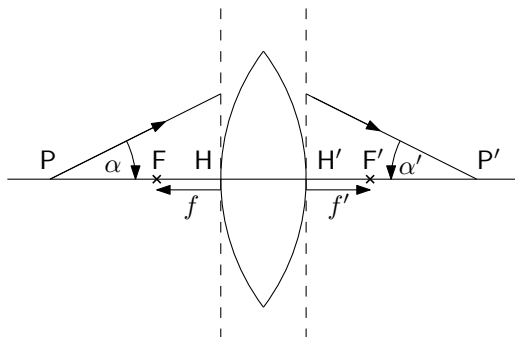
## Úloha V.5 . . . plavala čočka po vodě

Na hladině vody plove tenká bikonvexní (dvojvypuklá) čočka z lehkého materiálu. Poloměry křivosti obou povrchů jsou  $R = 20 \text{ cm}$ . Určete vzdálenost mezi obrazovým a předmětovým ohniskem čočky, jestliže index lomu vzduchu nad čočkou je  $n_{\text{a}} = 1$ , index lomu materiálu čočky je  $n_1 = 1,5$  a index lomu vody je  $n_{\text{w}} = 1,3$ . Bonus Předpokládejte, že se jedná o čočku tloušťky  $T = 3 \text{ cm}$ , uvnitř níž je symetricky umístěna vzduchová dutina tvaru bikonkávní čočky s poloměry křivosti  $r = 50 \text{ cm}$  a tloušťkou  $t = 1 \text{ cm}$ .

Hlavní kámen úrazu při řešení většiny úloh z geometrické optiky jsou znaménkové chyby. Proto si hned na začátku musíme ujasnit, jakou znaménkovou konvencí budeme používat. Pomůže nám při tom obrázek 14. Za kladné považujeme všetky úsečky ve směru šíření paprsků a od vzťažného bodu směrem nahoru. Vzťažnými

<sup>66</sup>Môžeme to odhadnúť jednoducho. Ak rozlejeme na rovný povrch vodu, tak vďaka povrchovému napätiu má vrstva vody nejakú výšku. Maximálna výška vodnej kaluže je  $h_{\text{max}} = 2\sqrt{\sigma/(\rho g)} \doteq 5 \text{ mm}$ , kde  $\sigma$  je povrchové napätie. Ak aproximujeme dáždnik guľovým vrchlíkom, tak jeho plocha vychádza  $S_{\text{vr}} = 2\sqrt{2}\pi(\sqrt{2} - 1)R^2 \doteq 0,92 \text{ m}^2$ . Ak by bol dáždnik pokrytý súvislou vrstvou vody, dostaneme hmotnosť  $m_{\text{max}} = h_{\text{max}}S_{\text{vr}}\rho \doteq 5 \text{ kg}$ . Odhadom však je pokryté približne jedno percento  $p = 0,01$ , preto dostaneme  $m_{\text{voda}} = pm_{\text{max}} \doteq 50 \text{ g}$ .

body jsou body na kulové ploše (pro poloměr křivosti) a hlavní body (v našem případě vždy průsečíky kulové plochy s osou), od kterých měříme ohniskové vzdálenosti. Úhly jsou kladné, pokud jsou orientovány v kladném směru (proti směru hodinových ručiček). V obrázku je tedy  $f < 0$ ,  $f' > 0$ ,  $\alpha < 0$ ,  $\alpha' > 0$ .



Obr. 14: K vysvětlení znaménkové konvence. P, P' jsou počáteční a koncový bod dráhy paprsku, H, H' jsou předmětový a obrazový hlavní bod, od kterých měříme předmětovou a ohniskovou vzdálenost  $f$ ,  $f'$ .

Ačkoli to není v zadání výslovně uvedeno, automaticky předpokládáme, že se po nás požaduje výpočet v paraxiální aproximaci a že jsou splněny předpoklady umožňující aplikaci metod geometrické optiky.<sup>67</sup> Pro připomenutí: paraxiální aproximace je použitelná tehdy, jsou-li veškeré optické prvky centrované na společné ose a paprsky se vůči této ose šíří pod malými úhly.

Čočka, ať už tenká, tlustá či dutá, je soustavou několika za sebou řazených kulových lámavých ploch, které oddělují optická prostředí s obecně různými indexy lomu. Většina tabulek a učebnic uvádí vztahy pro ohniskové vzdálenosti čočky v jednom prostředí, tj. neuvažují případ, kdy by se čočka nacházela na rozhraní dvou prostředí s různými indexy lomu. K vyřešení úlohy proto budeme muset čočku považovat za dvě samostatné kulové plochy.

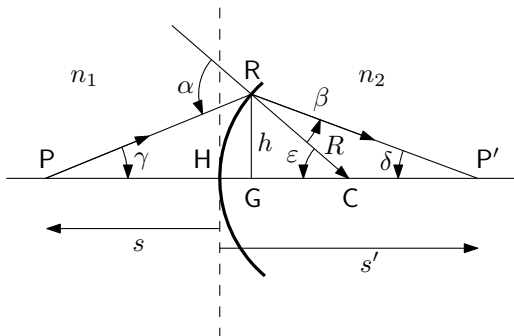
Podívejme se, jak se změní dráha paprsku při průchodu kulovou lámavou plochou. Náčrt situace je na obrázku 15. Paprsek vychází z bodu P, šíří se prostředím s indexem lomu  $n_1$ , láme se na kulové ploše, vchází do prostředí s indexem lomu  $n_2$  a opět protne optickou osu v bodě P'. Pro úhly v trojúhelníku PRC platí

$$\pi - \alpha - \gamma + \varepsilon = \pi \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\gamma + \varepsilon. \quad (34)$$

Všimněte si, že znaménko u úhlu  $\gamma$  je opačné, neboť jej měříme v záporném směru. Podobně získáme z trojúhelníku P'RC rovnost

$$\beta = \varepsilon - \delta. \quad (35)$$

<sup>67</sup>Konkrétně požadujeme, aby byla vlnová délka světla řádově menší než rozměry optických prvků v optické soustavě.



Obr. 15: Rozbor průchodu paprsku kulovou lámavou plochou. C je střed kulové plochy,  $R$  její poloměr a  $s$ ,  $s'$  jsou orientované vzdálenosti průsečíků paprsku s osou měřené od hlavní roviny.

Nyní využijeme paraxiální aproximace. Ta říká, že se paprsky pohybují blízko osy, proto můžeme s dostatečnou přesností zaměňovat tangenty, siny a samotné velikosti úhlů a zároveň můžeme položit

$$\begin{aligned} |s| &= |PH| \approx |PG|, \\ |s'| &= |P'H| \approx |P'G|. \end{aligned}$$

Jinými slovy: kulový vrchlík v okolí optické osy nahrazujeme (hlavní) rovinou. Potom můžeme psát

$$\gamma \approx \frac{h}{s}, \quad \delta \approx \frac{h}{s'}, \quad \varepsilon \approx \frac{h}{R}. \quad (36)$$

Nakonec si uvědomíme, že v aproximaci nabývá Snellův zákon lomu tvaru

$$n_1 \alpha = n_2 \beta. \quad (37)$$

Do něj nyní dosadíme z rovnic (34), (35) a (36) a po několika jednoduchých algebraických úpravách dostaneme rovnici

$$n_1 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) = n_2 \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right). \quad (38)$$

Tato rovnice se pro svůj symetrický tvar nazývá Abbeův<sup>68</sup> invariant.

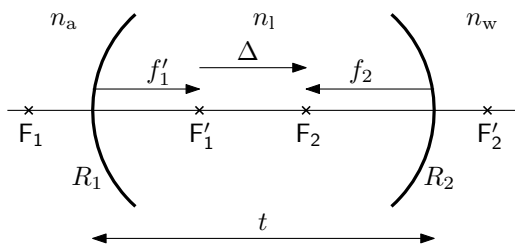
Jak tento výsledek využijeme k získání ohniskových vzdáleností čočky? Z definice platí, že předmět umístěný do předmětového ohniska se zobrazuje do nekonečna a naopak, předmět v nekonečnu se zobrazuje do obrazového ohniska. Když na základě této definice do (38) dosadíme  $1/s = 1/f$ ,  $1/s' = 0$ , snadno vyjádříme předmětovou ohniskovou vzdálenost kulové plochy

$$f = \frac{n_1}{n_1 - n_2} R. \quad (39)$$

<sup>68</sup>Ernst K. Abbe (1840–1903), německý fyzik zabývající se vývojem optických přístrojů.

Podobně pro  $1/s = 0$ ,  $1/s' = 1/f'$  dostaneme obrazovou ohniskovou vzdálenost

$$f' = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R. \quad (40)$$



Obr. 16: Schéma čočky tloušťky  $t$ . Vzdálenost mezi lámavými plochami je popsána pomocí optického intervalu  $\Delta$ .

Nyní tyto poznatky aplikujeme na naši optickou soustavu ze zadání, která je načrtnuta na obrázku 16. Položíme prozatím  $t = 0$ , věnujeme se tedy tenké čočce. Ohniskové vzdálenosti příslušné prvnímu rozhraní značíme s indexem 1, druhému rozhraní necht' přísluší index 2. Dále stačí pouze ve vzorcích (39), (40) provést nahrazení  $n_1 = n_a = 1$ ,  $n_2 = n_1$  pro první rozhraní a  $n_1 = n_1$ ,  $n_2 = n_w$  pro druhé rozhraní a nezapomenout, že v naší konvenci je poloměr druhé lámavé plochy roven  $-R$ . Získáme dvě dvojice ohniskových vzdáleností

$$f_1 = \frac{1}{1 - n_1} R, \quad f_1' = \frac{n_1}{n_1 - 1} R, \quad (41)$$

$$f_2 = \frac{n_1}{n_w - n_1} R, \quad f_2' = \frac{n_w}{n_1 - n_w} R. \quad (42)$$

Nyní by méně zkušeného řešitele mohlo napadnout, že stačí odečíst vzdálenost  $|F_1 F_2'|$  a máme hotovo. To je ovšem omyl. Body  $F_1$ ,  $F_2'$  přísluší jednotlivým lámavým plochám, nikoli celé optické soustavě. Budeme si proto ještě muset rozmyslet, jak se skládají ohniskové vzdálenosti při kombinaci dvou optických zobrazení.

Při odvozování vztahu pro skládání ohniskových vzdáleností nám pomůže obrázek 17. V části a) zavádíme pro popis optického rozhraní vzdálenosti ohniskového bodu od předmětu/obrazu

$$Z = s - f, \quad Z' = s' - f'. \quad (43)$$

Nyní s využitím Abbeova invariantu (38) a vztahů pro ohniskové vzdálenosti (39) a (40) odvodíme Gaussovu zobrazovací rovnici

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad (44)$$

a z definice příčného zvětšení  $\beta = Y'/Y$  určíme

$$\beta = \frac{n_1 s'}{n_2 s}. \quad (45)$$

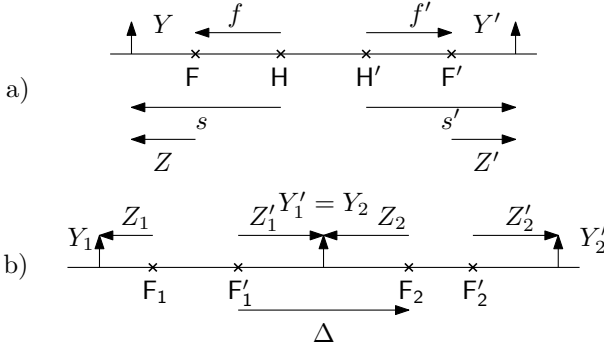


Dále získáme prostým dosazením z (43) do (44) a (45) užitečné vztahy

$$ZZ' = ff', \quad (46)$$

$$\beta = -\frac{Z'}{f'} = -\frac{f}{Z}, \quad (47)$$

kteří se nazývají Newtonovy zobrazovací rovnice.



Obr. 17: K ilustraci vztahů mezi vzdálenostmi v optických soustavách. Šipky  $Y$ ,  $Y'$  označují velikost předmětu a obrazu.

Než pokročíme, vraťme se ještě k definici hlavních bodů a ohniskových vzdáleností. Uvedli jsme, že v případě kulové lámavé plochy je hlavním bodem průsečík plochy s optickou osou. Pro složené optické soustavy však budeme potřebovat obecnou definici, která říká, že pro hlavní body platí  $\beta = 1$ , tj. nedochází k příčnému zvětšení. Ohniskové vzdálenosti se měří od těchto bodů k ohniskovým bodům.

Nyní už jsme připraveni, abychom odvodili vztah pro skládání ohniskových vzdáleností. Budeme přitom používat značení podle obrázku 17b. Naším cílem je nalézt polohy ohniskových a hlavních bodů soustavy. Ohniskové body nalezneme snadno. Stačí si uvědomit, že obraz vytvořený prvním prvkem v bodě  $Z'_1$  (zobrazujeme z nekonečna) představuje pro druhý prvek předmět. Potom stačí využít (46), dosadit  $Z_2 = Z'_1 - \Delta$  a polohu  $Z'_{2F'}$  obrazového ohniskového bodu soustavy vyjádříme jako

$$Z'_{2F'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} \quad (48)$$

a ze symetrie rovnou napíšeme i vztah pro polohu předmětového ohniska soustavy

$$Z_{1F} = \frac{f_1 f'_1}{\Delta}. \quad (49)$$

Dále vyjádříme z (47) příčná zvětšení

$$\frac{Y'_1}{Y_1} = -\frac{Z'_1}{f'_1}, \quad \frac{Y'_2}{Y_2} = -\frac{Z'_2}{f'_2}$$

a jejich vynásobením (nezapomeňte, že  $Y'_1 = Y_2$ ) získáme příčné zvětšení celé soustavy

$$\frac{Y'_2}{Y_1} = \frac{Z'_2 Z'_1}{f'_2 f'_1}.$$

Vidíme, že potřebujeme vyjádřit  $Z'_2$  a  $Z'_1$ . Nebudeme se zde už příliš rozepisovat; z obrázku platí  $Z'_1 - Z_2 = \Delta$  a aplikací (46) dostaneme

$$Z'_1 = \frac{f_1 f'_1}{Z_1} \quad (50)$$

a

$$Z'_2 = \frac{f_2 f'_2}{\frac{f_1 f'_1}{Z_1} - \Delta}, \quad (51)$$

z čehož nakonec

$$\frac{Y'_2}{Y_1} = \frac{f_1 f_2}{f_1 f'_1 - \Delta Z_1}.$$

Z definice hlavního bodu  $Y'_2/Y_1 = 1$  ihned dostaneme polohu předmětového hlavního bodu

$$Z_{1H} = \frac{f_1 f'_1 - f_1 f_2}{\Delta} \quad (52)$$

a dosazením  $Z_1 = Z_{1H}$  do (51) určíme polohu obrazového hlavního bodu

$$Z'_{2H'} = \frac{f'_2 f'_1 - f_2 f'_2}{\Delta}. \quad (53)$$

Rovnice (48), (49) a (52), (53) nám určují polohy všech kardinálních bodů, které potřebujeme k nalezení předmětového ohniska  $\mathcal{F}$  a obrazového ohniska  $\mathcal{F}'$ . Zbývá dosadit

$$\mathcal{F} = Z_{1F} - Z_{1H} = \frac{f_1 f_2}{\Delta}, \quad (54)$$

$$\mathcal{F}' = Z'_{2F'} - Z'_{2H'} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta}. \quad (55)$$

Teď už se pomalu blížíme do finále. Pokud zapíšeme optický interval s přihlédnutím ke znaménkové konvenci jako  $\Delta = f_2 - f'_1$ , máme ohniskové vzdálenosti soustavy vyjádřeny pomocí ohniskových vzdáleností jednotlivých lámavých ploch  $f_1$ ,  $f'_1$  a  $f_2$ ,  $f'_2$ , které jsme určili v (41) a (42). Vzdálenost mezi obrazovým a předmětovým ohniskem tenké čočky plovoucí na vodě je tedy

$$\mathcal{F}' - \mathcal{F} = \frac{-f'_1 f'_2 - f_1 f_2}{f_2 - f'_1} = \dots = \frac{n_w + 1}{2n_1 - n_w - 1} R.$$

Po číselném dosazení vyjde  $\mathcal{F}' - \mathcal{F} \doteq 66$  cm. Sami si můžete zkusit dosazovat do

$$\mathcal{F} = \frac{-1}{2n_1 - n_w - 1}, \quad \mathcal{F}' = \frac{n_w}{2n_1 - n_w - 1}$$

různé hodnoty indexů lomu a ověřit si, že se vzorce chovají podle očekávání.

**Bonus**

Jak jsme v základní části úlohy zjistili, složit dvě optická zobrazení je poměrně náročný úkol. V bonusu jsou čtyři lámavé plochy a tři oblasti volného šíření. To je celkem sedm zobrazení.

Pokud jste se po přečtení předchozího odstavce nešli oběsit, jistě rádi uslyšíte, že zde existuje záchrana, a tou je lineární algebra. Nejprve musíme vymyslet, jak vhodně popsat paprsek. Nechť je optická osa totožná s kartézskou osou  $z$  a paprsek se pohybuje v rovině  $yz$ . Paprsek popíšeme parametry  $y_i$ ,  $\alpha_i$ , které představují vzdálenost od optické osy a směr šíření (kladně vzatý úhel, který paprsek svírá s osou). Stále používáme paraxiální aproximaci, takže  $\sin \alpha_i \approx \text{tg } \alpha_i \approx \alpha_i$ . Přechod paprsku ze stavu  $(y_0, \alpha_0)^\top$  do  $(y_1, \alpha_1)^\top$  realizujeme působením matice přenosu  $2 \times 2$ , která se obvykle zapisuje ve tvaru

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

pročež se jí také přezdívá ABCD-matice. Její užití je jednoduché. Chtějme kupříkladu, aby se paprsek posunul ve směru optické osy o  $l$  a stočil se o úhel  $\beta$  v kladném směru. Potom má platit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - l\alpha_0 \\ \alpha_0 - \beta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -l \\ -\beta/y_0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V naší úloze nás bude zajímat pouze translace a pak lom na kulovém rozhraní. K odvození užijeme značení z obrázku 15 pro odvození Abbeova invariantu. Počáteční úhel je  $\gamma$ , koncový  $\delta$ , platí

$$\delta = \varepsilon - \beta = \frac{h}{R} - \frac{n_1}{n_2} \alpha = \frac{h}{R} - \frac{n_1}{n_2} (\varepsilon - \gamma) = \frac{h}{R} \left( 1 - \frac{n_1}{n_2} \right) + \frac{n_1}{n_2} \gamma.$$

Abychom sjednotili značení, provedeme záměnu  $h = y_1 = y_0$  (k translaci nedochází),  $\gamma = \alpha_0$ ,  $\delta = \alpha_1$ ,  $n_1 = n$ ,  $n_2 = n'$ . Matice pro lom na kulovém rozhraní má potom tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{n}{n'} \right) & \frac{n}{n'} \end{pmatrix}.$$

Zkusme nyní aplikovat nabyté poznatky na naši základní úlohu. Matici lomu na prvním rozhraní označíme  $M_1$ , na druhém rozhraní  $M_2$ . Výslednou matici dostaneme jako součin (pozor na pořadí!)

$$M = M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left( 1 - \frac{n_1}{n_w} \right) & \frac{n_1}{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix},$$

kde jednotlivé prvky výsledné matice jsou

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{R} \left( 1 - \frac{n_1}{n_w} \right) + \frac{n_1}{n_w R} \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right), \quad D = \frac{1}{n_w}.$$

Moudří už vědí, že ohniskovou vzdálenost z matice získáme jako  $\mathcal{F}' = 1/C$ . To si ale musíme nejdříve dokázat.

Nejprve si rozmyslíme, že determinant matice lomu je roven  $n/n'$ , a jelikož je determinant součinu roven součinu determinantů, bude pro soustavu kulových ploch platit  $\det M = n_i/n_o$ , kde  $n_i$  je index lomu ve vstupním prostředí a  $n_o$  ve výstupním. Dále provedeme následující úvahu: jestliže paprsky vycházející z předmětového ohniska vycházejí ze soustavy rovnoběžně s osou, musí platit  $\alpha_o = 0$ . Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y_o &= Ay_i + B\alpha_i, \\ 0 &= Cy_i + D\alpha_i, \end{aligned}$$

ke které ještě z jednoduché geometrie (stále jsme v paraxiální aproximaci) doplníme vztah

$$\alpha_i = \frac{y_o}{f}.$$

Řešením těchto rovnic dostaneme

$$f = -\frac{AD - BC}{C} = -\frac{\det M}{C} = -\frac{n_i}{n_o} \frac{1}{C}.$$

Pro obrazovou ohniskovou vzdálenost dostaneme zcela analogicky

$$f' = \frac{1}{C},$$

výpočet ponecháváme na čtenáři.

Nyní už se konečně přesuneme k řešení bonusové otázky. Při průchodu optickou soustavou dochází celkem ke čtyřem lomům a třem translacím. Matice celé soustavy je dána součinem

$$\begin{aligned} M &= M_7 M_6 M_5 M_4 M_3 M_2 M_1, \\ M_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_w}\right) & \frac{n_1}{n_w} \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T-t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ M_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{r} \left(1 - n_1\right) & n_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T-t}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní nám nezbyvá než matice vynásobit. Asociativita maticového násobení zde příliš nepomáhá, můžeme si však všimnout, že při násobení zleva nás u každé matice vzniklé součinem zajímá vždy jen druhý řádek. Tím si můžeme počet operací snížit na polovinu. I tak si ale dokážeme rozmyslet, že obecný výsledek nepůjde upravit do nějakého hezkého tvaru. Proto budeme počítat již přímo s dosazenými hodnotami ze zadání – výpočet nedoporučujeme provádět na papíře. Výsledkem je

$$C \doteq 1,16 \text{ m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad f' \doteq 86 \text{ cm}, \quad f \doteq -66 \text{ cm}.$$

Vzdálenost obrazového a předmětového ohniska je potom  $f' - f + H$ , kde  $H$  je vzdálenost hlavních rovin soustavy. Ta bude nejspíš porovnatelná s tloušťkou  $T$  velké čočky (ve skutečnosti je zde  $H$  v řádu milimetrů), proto můžeme přibližně psát pro vzdálenost ohnisek

$$f' - f + H \approx f' - f \doteq 150 \text{ cm}.$$

Vzdálenost je výrazně vyšší než v prvním případě, což jsme mohli očekávat, neboť bikonkávní čočka z materiálu s nižším indexem lomu než okolí funguje jako rozptylka.

Na závěr si ještě zkusme spočítat, jak by se výsledek bonusové úlohy změnil, kdyby čočka i dutina byly tenké. Matice dutiny má tvar

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{r} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & 1 \end{pmatrix}.$$

Tuto matici vynásobíme zleva a zprava maticemi lomu vnějších rozhraní, dostaneme

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R} \left(1 - \frac{n_1}{n_w}\right) & \frac{n_1}{n_w} \end{pmatrix} M_d \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) & \frac{1}{n_1} \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R n_w} [n_1 - n_w + \left(1 - \frac{2R}{r}\right) (n_1 - 1)] & \frac{0}{n_w} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Opět se nebudeme namáhat s obecnými výpočty, číselně spočteme  $f' \doteq 87 \text{ cm}$ ,  $f \doteq -67 \text{ cm}$ . Vzdálenost ohnisek je potom

$$f' - f = 154 \text{ cm}.$$

Vidíme, že se aproximace projevila až na třetí platné číslici. To by nás nemělo překvapovat, jelikož tloušťka čočky je řádově menší než ohniskové vzdálenosti.

## Úloha V.P ... vycákaná

*Bylo by možné plavat v bazénu, kdyby se voda v něm chovala jako dokonale nestlačitelná kapalina, jejíž viskozita se limitně blíží nule? Jak by se pohyb plavce odlišoval od plavání v běžné vodě? Co by se dělo s energií soustavy plavec a bazén v případě, že voda z bazénu může vytékat přes okraj? Na počátku je hladina vody zarovnaná s okrajem.*

Na úvod je nutno podotknout, že situace popsaná v zadání je nefyzikální. Neznáme totiž žádný postup, jak snížit viskozitu kapaliny bez změny jejích ostatních vlastností. Konkrétně v případě vody neznáme žádný její stav, který by vykazoval limitně nulovou viskozitu. Navíc látky, které takového vlastnosti vykazují (supratekutiny), je získávají díky jejich zvláštnímu charakteru na kvantové úrovni,

s kterýmiž mají další atributy neslučitelné s použitím v plaveckém bazénu (Onnesův efekt, nízká teplota a vysoká tepelná vodivost). Navíc bez popisu mechanismu získání nízké viskozity nejme schopni předpovědět změny dalších vlastností vody, jako je povrchové napětí, hustota, hranice fázových přechodů či tepelná vodivost. Pokusíme se tedy popsat systém s vodou, která všemi svými vlastnostmi odpovídá standardní vodě, pouze její viskozita se bude limitně blížit nule. Narazíme-li na nekonzistenci popisu, tak víme, že je způsobena nefyzikálností našeho modelu.

Nejprve analyzujeme přeměny energie při plavání v bazénu s běžnou vodou. Lidské tělo můžeme považovat za stroj, který přeměňuje chemickou energii na mechanickou (a tepelnou). Technika plaveckých stylů je taková, aby lidské tělo získávalo hybnost v určitém směru, a to pomocí mechanické interakce s vodou. Získává-li tedy tělo hybnost v jednom směru, musí během tohoto procesu udělovat vodě hybnost opačnou (opačného směru). „Bloky“ vody, kterým byla plavcem udělena hybnost a s tím i kinetická energie, jsou zpomalovány svým okolím, a dochází k disipaci energie. Postupně dochází k přeměně kinetické energie translační na méně uspořádané formy, konkrétně chaotické vlnění a teplo.<sup>69</sup> Jak a kde energie opouští systém plavec-voda? V první řadě dochází k tepelné výměně. Pochody v lidském těle a tření ve vodě a na stěnách vyprodukuje teplo, které se ultimátně předá okolí. Další ztráty budou způsobeny interakcí se vzduchem. Jak pohybující plavec, tak vzniknuvší vlny jsou tlumeny odporem vzduchu, což je další způsob předávání energie ze systému. Dále se vybuzené vlny dostávají na okraj bazénu a část objemu nad okrajem se vylije. Nachází-li se plavec blíže kraji tak, že proudy vyprodukované jeho pohybem dorazí k okraji bazénu s nezanedbatelnou hybností, může se stát, že „odrazem“ od stěny bazénu bude určité množství vody vyneseno nad okraj, což způsobí další výlev.

Nyní se zamysleme, v čem bude neviskózní voda jiná. Není pravda, že po anulaci viskozity na pohybující se tělesa v kapalině nepůsobí žádné odporové síly (viz D'Alembertovo paradoxon). Nulové budou pouze síly, které lze označit jako vazké, totiž síly způsobené „třením“ a „soudržností“ mezi vrstvami kapaliny – viskozitou. Na tělesa budou i nadále působit síly označitelné jako „setrvačné“, síly způsobené předáváním hybnosti částicím tekutiny. Po bližším pohledu zjistíme, že principiálně se liší (v ohledech zmíněných v předchozím odstavci) pouze absencí disipace energie. Zatímco v běžné vodě proudy a víry postupně slábnou a mechanická energie vody se blíží počáteční hladině, v našem případě bude pouze docházet k tvorbě a přetváření vírů, které budou sice mizet, ale pouze velmi pomalu.

Než se pokusíme alespoň kvalitativně popsat chování energie systému, je třeba si ujasnit náš technický model bazénu – jestli se do něj voda průběžně dopouští či nikoliv. V prvním případě bude bazén pln vírů už z počátku a hladina vody by se dlouhodobě vůbec nezměnila. Popisujeme druhý případ. Dále uvažujeme pouze, jak se bude měnit mechanická energie soustavy plavec-bazén (chemickou energii lidského těla a tepelnou energii budeme zanedbávat). Na počátku je plavec v bazénu v klidu, voda je v klidu a vodorovná rovinná hladina dosahuje přesně po okraj bazénu. Plavec začne plavat a z počátku energie soustavy poroste. Plavec brzy

<sup>69</sup>Nebude-li plavec plavat na hladině (nýbrž pod hladinou), bude zvlnění hladiny výrazně menší.

dosáhne své maximální rychlosti (viz dále), a poté energie soustavy poroste krátký čas lineárně (do té doby růst lineární nebyl, protože efektivita plavce jako stroje je závislá na rychlosti). Toto však bude porušeno zanedlouho – totiž ve chvíli, kdy vzruchy od plavce dorazí k okraji a začne docházet k výlevu. Všechna voda, která se vylíje, s sebou ze systému vynese nějakou mechanickou energii. Tento jev zbrzdí růst energie systému. Vzhledem k tomu, že v porovnání se ztrátami následkem odporu vzduchu budou tyto ztráty velké (po relevantní dobu), má význam zabývat se těmito ztrátami více. Obecně lze očekávat, že energetické ztráty způsobené výlevem budou tím větší, čím větší bude kinetická energie vody, a tím menší, čím bude rovnovážná výška hladiny níže (tzn. čím více vody už se vylilo). Abychom tedy mohli lépe popsat míru disipace tímto způsobem, musíme prozkoumat, jak se bude chovat kinetická energie vody v závislosti na čase. Toto je samozřejmě ovlivněno charakterem činnosti plavce.

Pokud plavec poplave pouze jeden bazén, tak lze předpokládat, že veškerá voda, se kterou plavec přišel do styku, nebyla ovlivněna vzdálenou historií plavby plavce, po dobu plavby bude energie růst (se zpomalujícím se růstem) a poté se bude snižovat nejprve rychleji (důsledkem výlevu), ale klesání bude postupně zpomalovat, časem již výlev nebude hrát roli a vzduch bude velice rychle systém obírat o energii.

Nyní předpokládejme, že se plavec vždy po dokončení bazénu ve vodě otočí a poplave zpět. Nyní ale již rychlostní pole vody před placem bude ovlivněno předchozími plavbami. Bazén se totiž bude postupně plnit víry, které budou působit na plavce. Povaha vírů bude chaotická. Jak tato okolnost změní přesun energie od plavce do vody? To velice záleží na chování plavce. Pokud se bude pokoušet zachovat si původní rychlost (a má-li na to dost sil), bude vodě předávat více energie. V případě, že bude vydávat stále stejné úsilí, lze odhadnout, že přenos energie bude podobně velký jako v klidné vodě.

Pokud bude mít technika plavce laterální asymetrii (například bude lehce zatáčet doleva), postupně bude voda v bazénu získávat moment hybnosti a nakonec převládne jeden velký celobazénový vír.

Nyní se zaměříme na to, v čem bude neviskózní voda jiná pro plavce. Odhadneme-li Reynoldsovo číslo pro plavce (při vykonávání tempa), zjistíme, že se pohybujeme v řádech<sup>70</sup>  $10^6$ , což znamená, že při působení odporových sil prostředí „setrvačné“ síly výrazně převyšují síly vazké. Lze proto očekávat, že síly působící na plavce budou srovnatelné s běžnou vodou.<sup>71</sup> Odporové síly budou ovšem trochu menší (při stejných rychlostech), než ty v běžné vodě. Toto bude platit jak pro celkový hydrodynamický odpor plavce, tak na hydrodynamickou odporovou sílu, kterou plavec využívá při záběrech pro svoje urychlování. Maximální rychlost by tedy měla být

<sup>70</sup>Robert A. Freitas Jr., Nanomedicine, Volume I: Basic Capabilities, Landes Bioscience, Georgetown, TX, 1999

<sup>71</sup>Toto obecně neplatí. Uvažte například tenký disk paralelní s vektorem rychlosti. V neviskózní kapalině na něj bude působit síla velice malá (úměrná jeho tloušťce), zatímco vazký odpor i poměrně málo (avšak nenulově) vazké tekutiny bude výrazně větší. Nicméně pro případy těles tvarů částí lidského těla pro vodu tato situace nenastává. Pro srovnání uvažte poměry parametrů pádla a jeho odpor ve vodě při záběru s plochou kolmo či rovnoběžně ke směru pohybu. Části člověka jsou navíc mnohem méně „placaté“ než list pádla.

obdobná a tělo plavce se bude chovat setrvačněji (bude se déle zrychlovat, zpomalovat, hůře manévrovat). Pro srovnání se můžeme podívat na experimenty, při kterých se člověk pokoušel plavat ve viskózní kapalině.<sup>72</sup> Zde menší změna velikosti a charakteru odporových sil ve výsledku plavce výrazně neovlivnila, což je v soulahu s naší úvahou o srovnání vody s limitně velmi viskózní vodou.

## Úloha VI.1 . . . . . au

*Želva A'Tuin, na jejímž krunýři stojí čtyři sloni nesoucí na svých hřbetech Zeměplochu, není žádný drobeček. Předpokládejme, že bychom byli znudění kulatostí naší Země a chtěli ji vyměnit za kruhovou placku se stejnou hmotností a hustotou a s tloušťkou  $h = 1$  km nesenou vlastní želvo-sloní partou. V případě, že by naše želva cestou vesmírem vrazila špičkou ocasu do planetky, za jak dlouho by si uvědomila bolestivý podnět, jestliže její ocas s centrální nervovou soustavou spojuje jediný dlouhý neuron a délka tohoto neuronu je přibližně stejná jako průměr naší placky? O kolik dříve/později by si bolest ve stejném případě uvědomila A'Tuin (délku neuronu považujte za ekvivalentní její délce, která činí 18 000 km)? Pro číselný odhad předpokládejme, že rychlost šíření vzruchu v nervové soustavě poněkud nadměrných tvorů je stejná jako u pozemských živočichů, u nichž činí  $v = 120 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .*

Pokud by plochá Země měla stejnou hustotu i hmotnost jako ta kulatá, pak by musela mít i stejný objem. Máme tedy válec a kouli stejných objemů, takže poloměr válce  $r$  můžeme vyjádřit jako

$$r = \sqrt{\frac{4R^3}{3h}},$$

kde  $R \doteq 6400$  km je poloměr kulaté Země a  $h = 1$  km je výška válce.

Délka neuronu je ekvivalentní dvěma poloměrům takového válce a rychlost vedení  $v$  známe ze zadání. Doba vedení vzruchu od ocasu do centrální nervové soustavy u želvy nesoucí takovouto placku by tedy byla

$$t = \frac{2r}{v} = \frac{4R}{v} \sqrt{\frac{R}{3h}} \doteq 114 \text{ dní}.$$

U A'Tuin by tato doba byla  $t' = s/v$ , kde  $s$  je její délka, respektive délka neuronu, číselně bychom tedy dostali  $t \doteq 1,74$  dne. A'Tuin by si tedy důsledky nárazu planetky uvědomila o více než 112 dní dříve, než by tomu bylo u druhé želvy.<sup>73</sup>

## Úloha VI.2 . . . dýchej zhluboka

*Mág Šedomil oslavil sté narozeniny již před drahnou dobou a začíná se pomalu obávat, že ho Smrt poctí svou dlouhou odkládanou návštěvou. Rozhodne se proto,*

<sup>72</sup>Gettelfinger B., Cussler E. L., Am. Inst. Chem. Eng. J., (2004)

<sup>73</sup>Tahání za ocas by však bylo možné provádět zcela beztestně u obou želv, neboť doba, za kterou by reagovala a odpinkla vás jím daleko do vesmíru, by byla ještě jednou taková.



že se nechá zatlouct do kouzelné truhly, kam se k němu Smrt nedostane. Bohužel zapomněl řemeslníkům říci, aby přidali dýchací otvory. Vzduch v truhle zaujímá objem  $V_0 = 400\text{l}$ , objemový zlomek kyslíku je  $\varphi_0 = 0,21$ . Při každém nádechu a výdechu se zužitkuje pouze  $k = 20\%$  objemových kyslíku v dechovém objemu  $V_d = 0,5\text{l}$ . Dechová frekvence mága po uzavření truhly postupně roste podle vztahu  $f(t) = f_0\varphi_0/\varphi(t)$ , kde  $f_0 = 15\text{ dech}\cdot\text{min}^{-1}$  je počáteční dechová frekvence a  $\varphi(t)$  objemový zlomek kyslíku v čase  $t$ . Určete, za jak dlouho si pro Šedomíla přijde Smrt, jestliže minimální obsah kyslíku ve vzduchu potřebný pro přežití je  $\varphi_s = 0,06$ .

Najprv si rozmyslíme, že při dýchání sa typicky vymieňa jedna molekula vzdušného  $\text{O}_2$  za jednu molekulu  $\text{CO}_2$  (vodnú paru zanedbáme) a všetko prebieha pri konštantnej teplote. Podľa stavovej rovnice ideálneho plynu sa vtedy nemení tlak a látkové množstvo plynu bude vždy priamo úmerné jeho objemu, stačí nám teda počítat s objemami namiesto látkových množstiev.

Pri jednom nádychu sa do magových pľúc dostane kyslík s objemom  $V_{k,d} = \varphi V_d$ ; objem spotrebovaného kyslíka pri jednom nádychu a výdychu je  $kV_{k,d}$ .

Zoberme si teraz časový interval  $[t, t + \Delta t]$  – čas  $\Delta t$  by mal byť dostatočne krátky na to, aby sa počas neho príliš nemenil objemový zlomek kyslíka. Za ten čas sa mág nadýchne  $f(t)\Delta t$ -krát a pri tom spotrebuje kyslík o objeme

$$\Delta V_k = f(t)\Delta tkV_{k,d} = f_0 \frac{\varphi_0}{\varphi(t)} \Delta tk\varphi(t)V_d = (f_0\varphi_0kV_d)\Delta t.$$

Všimnime si, že aj keď sa frekvencia dýchania s časom mení (alebo skôr vďaka tomu ako sa mení),  $\Delta V_k$  je priamo úmerné  $\Delta t$ , objem kyslíka v truhle teda klesá lineárne s časom

$$V_k = V_{k,0} - f_0\varphi_0kV_d t = \varphi_0 V_0 - f_0\varphi_0kV_d t,$$

kde sme vyjadrili objem kyslíku na začiatku  $V_{k,0}$  pomocou objemového zlomku ako  $V_{k,0} = \varphi_0 V_0$ .

Hľadáme čas  $t_s$ , kedy  $V_k$  klesne na hodnotu  $\varphi_s V_0$ . Ten už vyjadríme ľahko

$$t_s = \frac{V_0(\varphi_0 - \varphi_s)}{V_d\varphi_0 f_0 k} \doteq 190\text{ min}.$$

Smrt si preňho príde za 190 min.

### Úloha VI.3 . . . pracovní pohovor

Jedna z pracoven lorda Vetinariho má kruhový pôdorys o poloměru  $R$  a je umiestnená na ložiscích, díky nimž se může otáčet kolem své osy. Pro zajištění otáčení se používá motor, který může působit libovolným momentem síly. Při otáčení působí na podlahu místnosti třecí moment  $M_0$ , nezávislý na rychlosti, který je shodný se statickým třecím momentem. Židle pro návštěvy je umístěna tak, že člověk na ní sedící pocítí účinky rotace pouze tehdy, přesáhne-li úhlové zrychlení hodnotu  $\varepsilon_0$ . Určete, za jakou nejkratší dobu se může místnost otočit o  $180^\circ$ , aby návštěva nic

nepoznala, a jaká práce je k tomuto otočení potřeba. Celková hmotnost místnosti, kterou můžete považovat za homogenní disk, je  $m$ .

Bonus Předpokládejte, že návštěvník pocítí vliv rotace tehdy, přesáhne-li úhlový ryv (změna zrychlení) hodnotu  $j_0$ .

Úloha má poněkud delší zadání, rozebereme si proto nejprve jednotlivé části a rozmyslíme si, co se po nás chce a jak budeme postupovat. Důležité je uvědomit si, že motor je schopen nastavit libovolný moment síly, s nímž se místnost bude otáčet. Pro hledání nejmenšího času tedy nemusíme uvažovat vůbec třecí moment  $M_0$ , ten sehraje roli až při výpočtu práce. Naše úloha tedy vypadá následovně: máme integrál

$$\varphi_{\text{ot}} = \int_0^T \omega(t) dt, \quad \frac{d\omega}{dt} < \varepsilon_0 \quad \forall t \in [0, T],$$

kde  $\varphi_{\text{ot}} = \pi$  a  $\omega$  je úhlová rychlost, a naším úkolem je minimalizovat celkový čas  $T$ , za který se místnost otočí. Zadání by šlo přeformulovat jako variační úlohu na hledání minima s danými podmínkami. My si však vystačíme s elementárními úvahami, přičemž si pomůžeme náčrtky rychlostních diagramů.

Ještě si uvědomme jednu podstatnou věc – ačkoli to zadání explicitně nezmiňuje, je přirozené předpokládat, že po otočce o  $\varphi_{\text{ot}} = \pi$  místnost nerotuje. Kdyby tomu tak nebylo, Veterinariho host by po vyměřeném čase  $T$  vstal a nejpozději při otevření dveří by si rotace všiml (pravděpodobně by se před ním otáčela nějaká část vnější stěny).

Nyní budeme předpokládat, že řešení má jednoduchý tvar, kdy první polovinu času zrychlujeme s konstantním zrychlením  $\varepsilon_0$  a druhou polovinu času se stejných zrychlením zpomalujeme, a ukážeme, že tak skutečně dosáhneme minimálního času. Podívejme se na obrázek 18. Víme, že zrychlení je definováno jako první časová derivace rychlosti a že si tuto derivaci můžeme v grafu znázornit jako tečnu, jež udává sklon křivky  $\omega(t)$  v daném bodě. Obsah plochy pod grafem je roven úhlu, o který se místnost otočí. Zrychlení je konstantní  $\varepsilon_0$ , resp.  $-\varepsilon_0$ , graf se proto skládá ze dvou úseček, které spolu s časovou osou vytvářejí rovnoramenný trojúhelník. Výšku tohoto trojúhelníku, tj. maximální rychlost, můžeme snadno spočítat. Pro rovnoměrně zrychlený pohyb máme

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\text{ot}}}{2} &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{T}{2} \right)^2, \\ \omega_{\text{max}} &= \varepsilon_0 \frac{T}{2}, \end{aligned} \quad (56)$$

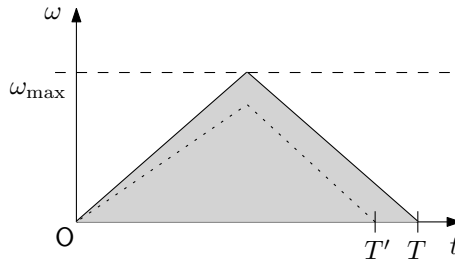
z čehož snadno vyjádříme

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\varepsilon_0 \varphi_{\text{ot}}}.$$

Nyní si představme, že základnu trojúhelníku zmenšíme, tj. zkrátíme celkový čas  $T$  na  $T' < T$ . Pak zřejmě klesne obsah plochy pod grafem (polovina základny krát výška), nedojde tedy k otočení o celé  $\varphi_{\text{ot}}$ . Co kdyby plocha neměla tvar trojúhelníku, tj. zrychlení by nebylo po částech konstantní? Obsah by se poté také

nutně zmenšil, argument<sup>74</sup> je snadný: pokud by křivka  $v(t)$  protla pravou odvěsnu trojúhelníku, již bychom se nestihli vrátit zpět v čase  $T$ , protože sklon křivky nemůže být větší než sklon odvěsny. Podobně, kdybychom se na začátku někdy pohybovali se zrychlením menším než  $\varepsilon_0$ , nestihli bychom v čase  $T/2$  dosáhnout maximální rychlosti a pak jsme již omezeni pravou odvěsnu. V žádném menším čase tedy nedokážeme místnost otočit o  $\varphi_{ot}$ . Hledaný minimální čas je tedy podle rovnice (56)

$$T = 2\sqrt{\frac{\varphi_{ot}}{\varepsilon_0}}.$$



Obr. 18: Náčrtek závislosti úhlové rychlosti rotace místnosti na čase. Čárkovaná čára ilustruje, proč nelze dosáhnout kratšího času  $T$  potřebného k otočce o  $\pi$ .

Když už nyní máme jasno v tom, jak bude vypadat pohyb místnosti, můžeme spočítat práci motoru, kterou musí na jednu otočku o  $\varphi_{ot}$  vykonat. Analogicky k translačnímu pohybu je práce při rotaci definována jako integrál

$$W = \int_0^\pi M_{motor} d\varphi.$$

kde  $M_{motor}$  je moment síly, kterým působí motor. Při roztáčení je na místnost potřeba působit momentem

$$M = I\varepsilon_0 + M_0,$$

jelikož kromě roztáčení disku ještě působíme proti brzdnému třecímu momentu. Platí

$$I = \frac{1}{2}mR^2,$$

kde  $m$ ,  $R$  jsou hmotnost a poloměr místnosti ze zadání. Při zpomalování disku máme

$$M = I\varepsilon_0 - M_0,$$

<sup>74</sup>Kdybychom chtěli být exaktnější, mohli bychom zde využít Lagrangeovu větu o střední hodnotě diferenciálního počtu, ale již jsme si slíbili, že se budeme pohybovat na elementární úrovni.

jelikož zde tření napomáhá zpomalování. Celková práce je potom

$$W = W_1 + W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{2} mR^2 \varepsilon_0 + M_0 \right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \frac{1}{2} mR^2 \varepsilon_0 - M_0 \right| d\varphi.$$

Absolutní hodnota zde vyjadřuje skutečnost, že práci motoru považujeme vždy za kladnou – může totiž dojít k situaci, kdy  $M_0 > mR^2 \varepsilon_0 / 2$ , místnost by tedy samovolně zpomalovala příliš prudce, a je proto potřeba její rotaci i během brzdění urychlovat. Po výpočtu<sup>75</sup> dostaneme

$$W = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi mR^2 \varepsilon_0 & \text{pro } M_0 \leq mR^2 \varepsilon_0 / 2, \\ \pi M_0 & \text{pro } M_0 \geq mR^2 \varepsilon_0 / 2. \end{cases}$$

Jistě jste si všimli, že naše řešení má ve funkci  $\varepsilon(t)$  nespojitost  $2\varepsilon_0$  v bodě  $T/2$ . Tuto prudkou změnu zrychlení by návštěvník sedící na židli dozajista pocítil. Proto v bonusové části požadujeme, aby úhlový ryv, tj. časová derivace úhlového zrychlení, nepřesáhl hodnotu  $j_0$ . Závislost  $v(t)$  bude nyní reprezentována hladkou funkcí. Při konstrukci grafu  $\varepsilon(t)$  budeme postupovat podobně jako v první části při konstrukci grafu  $\omega(t)$  (předpokládáme nulové zrychlení na konci pohybu); zde však budeme navíc požadovat rovnost plochy pod a nad časovou osou, čímž docílíme taky nulové rychlosti na konci pohybu. Ryv a zrychlení budou

$$j(t) = \begin{cases} j_0 & \text{pro } t \in [0, T/4] \cup [3T/4, T], \\ -j_0 & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4) \end{cases}$$

a

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} j_0 t & \text{pro } t \in [0, T/4], \\ j_0 T/2 - j_0 t & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4), \\ -j_0 T + j_0 t & \text{pro } t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

Graf  $\omega(t)$  je načrtnut na obrázku 19. V obrázku je sugestivně zaznačeno, jak budeme postupovat při výpočtu integrálu pro celkový úhel  $\varphi_{\text{ot}}$ . Jedná se o obsah obdélníku

$$\varphi_{\text{ot}} = \omega_{\text{max}} \frac{T}{2}, \quad (57)$$

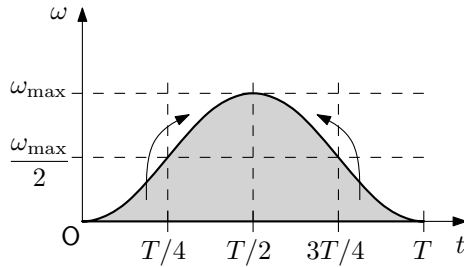
kde

$$\frac{\omega_{\text{max}}}{2} = \frac{1}{2} j_0 \left( \frac{T}{4} \right)^2. \quad (58)$$

Z rovnic (57) a (58) pak snadno vyjádříme

$$T = 4 \sqrt[3]{\frac{\varphi_{\text{ot}}}{2j_0}}. \quad (59)$$

<sup>75</sup>Pokud ještě neumíte dobře integrovat, uvědomte si, že vlastně počítáme plochu pod grafem funkce  $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$  násobenou momentem setrvačnosti, přičemž jedna strana obdélníku je zvětšena/zmenšena o  $M_0$ .

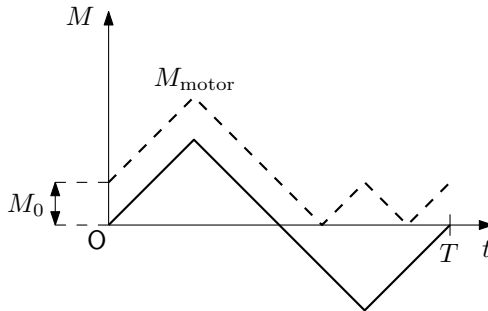


Obr. 19: Náčrtek závislosti úhlové rychlosti na čase pro podmínku  $|j| < j_0$ . V obrázku je vyznačeno, jak získat obsah plochy pod grafem bez integrace.

Práci budeme psát nyní jako integrál ve tvaru

$$W = \int |I\varepsilon(t) + M_0| d\varphi = \int |I\varepsilon(t) + M_0| \omega dt. \quad (60)$$

přičemž stále  $I = mR^2/2$ . Integrovat budeme tři úseky o délce  $T/4$ ,  $T/2$  a  $T/4$ . Časový vývoj momentu  $M_{\text{motor}}$  je pro názornost uveden na obrázku 20.



Obr. 20: Náčrtek závislosti momentu síly na čase. Plná čára značí výsledný moment působící na místnost, přerušovaná čára představuje absolutní hodnotu momentu síly motoru.

Nyní je potřeba vyjádřit rychlosti a zrychlení v jednotlivých úsecích v závislosti na čase. U zrychlení jsme to již provedli, pro rychlosti dostaneme integrací zrychlení

$$\omega(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}j_0t^2 & \text{pro } t \in [0, T/4], \\ -\frac{1}{16}j_0T^2 + \frac{1}{2}j_0tT - \frac{1}{2}j_0t^2 & \text{pro } t \in (T/4, 3T/4), \\ \frac{1}{2}j_0T^2 - j_0tT + \frac{1}{2}j_0t^2 & \text{pro } t \in [3T/4, T]. \end{cases}$$

Jak se bude chovat absolutní hodnota v integrálu? Pro druhý úsek bude motor působit nulovým momentem síly v čase

$$t_1 = T/2 + \frac{2M_0}{j_0mR^2}$$

a v třetím úseku ze symetrie podle obrázku 20 v čase

$$t_2 = T - \frac{2M_0}{j_0 m R^2}.$$

Pokud třetí moment  $M$  přesáhne hodnotu

$$M_{\text{mez}} = \frac{1}{8} j_0 m R^2 T,$$

bude motor působit vždy momentem síly pouze ve směru úhlové rychlosti. Teď už nezbyvá než provést integraci. Celkem integrujeme pro případ  $M_0 \leq M_{\text{mez}}$  přes pět úseků (druhý a třetí se rozštěpily na dva přes absolutní hodnotu). Vzhledem k počtu členů v jednotlivých integrandech a tvaru mezí se jedná o velmi pracný výpočet, uvedeme zde proto pouze výsledek pro  $M_0 \geq M_{\text{mez}}$ , který po dosazení z (59) vypadá

$$W = \frac{1}{32} j_0 T^3 M_0 = \pi M_0.$$

Tento výsledek by nás neměl překvapovat, stejně bude vypadat při jakémkoli pohybu z klidu do zastavení, kdy po celou dobu pohybu nepřekročí příslušný mezní moment zadaný brzdňý třetí moment  $M_0$ .

Ještě poznámka na závěr: pokud bychom i v bonusu uvažovali omezení na  $\varepsilon_0$  (což bychom měli), museli bychom řešit situaci, kdy  $j_0 T/4 > \varepsilon_0$ . Potom by v grafu  $\varepsilon(t)$  došlo k „urážnutí špiček“ a v grafu  $v(t)$  by přibýly lineární úseky. Celkový čas  $T$  by se zřejmě prodloužil. Podrobný přepočít práce motoru je jenom další úmorné cvičení na integraci polynomů a nic nového do úlohy nepřináší, proto ho zde neuvádíme.

#### Úloha VI.4 . . . těžkotonážní deska na želvě

*Předtím, než byl dosažen a překročen okraj Zeměplochy a začaly být podnikány vědecké výpravy za potvrzením existence čtyř slonů, želvy a určení jejího pohlaví, si některé primitivní kmeny myslely, že síla, která je drží na Zeměploše, je dána superhustou deskou z koncentrovaného bylonebylia. Byla to opravdu velice primitivní představa, protože jak dnes již víme, například výprava, která potvrdila existenci želvy, neslavně dopadla tak, že se jejich člun utřhl a upadl. Tedy vlastně nedopadl. . .*

Nicméně by nás zajímalo – jakou plošnou hustotu  $\sigma$  by bývala byla musela taková deska mít, aby na povrchu Zeměplochy blízko jejímu středu byl obyčejný předmět, při zanedbání magie, přitahován stejnou silou, jakou je gravitační síla na povrchu Zeměplochy? Uvažujte, že superhustá deska je opravdu velice tenká, a jak tvrdí pověsti, je umístěna  $H = 8^4 \text{ m} = 4096 \text{ m}$  pod povrchem Zeměplochy. Deska má být dle bájí homogenní a hmotnosti jiných těles zanedbatelné.

Zanedbejte pohyby želvy a slonů. Za Zeměplochu si dosadte slovo Země, pokud jste nečetli dílo autora, pro kterého si přišel Smrt. Zeměplocha má pro účely této úlohy průměr přibližně přesně  $d = 10\,000 \text{ km}$ .

Naším úkolem je zjistit plošnou hustotu desky  $\sigma$ , která je zdrojem gravitačního pole, o které se budeme nyní zajímat. Dle zadání nás zajímá pouze síla gravitačního pole na ose desky, a to ve výšce  $H$ . Ve výpočtu budeme postupovat tak, že nejprve vyjádříme celkovou sílu, kterou působí deska na hmotný bod hmotnosti  $m$  v udaném místě pomocí  $\sigma$ ,  $d$  a  $H$ , následně tuto sílu dáme do rovnosti se silou, jakou by působila Země na stejný předmět (hmotný bod). Celkovou sílu získáme zintegrováním příspěvků od infinitesimálních elementů desky.

V řešení zanedbáme všechny další vlivy, jako je hmota ostatní látky Zeměplochy, jejích slonů a želvy, rotaci Zeměplochy atd.

Element (a odteď myslíme jenom infinitesimálně malé elementy) síly, kterou působí element desky na náš hmotný bod, můžeme dle Newtonova gravitačního zákona psát jako

$$dF_G = G \frac{\sigma m}{R^2} dx dy,$$

kde  $G$  je gravitační konstanta,  $R$  je vzdálenost daného čtvercového elementu desky od pozorovatele stojícího ve středu Zeměplochy a  $x$  a  $y$  jsou kartézské souřadnice v rovině desky. Ovšem  $R$  je funkce  $x$  a  $y$

$$R = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad dF_G = G \frac{\sigma m}{H^2 + x^2 + y^2} dx dy,$$

Předtím, než si to pěkně zintegrujeme, si však můžeme uvědomit, že naše úloha má válcovou symetrii. Mohli bychom sice úlohu řešit v kartézských souřadnicích, ale převedením problému do válcových souřadnic si usnadníme hledání integračních mezí i integraci. Z kartézských souřadnic  $(x, y)$  v desce můžeme tedy přejít do polárních souřadnic  $(r, \varphi)$  a třetí souřadnice  $z$  zůstane kartézská. Vztah mezi souřadnicemi je  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Pro transformaci musíme určit její jakobián<sup>76</sup>  $J$ . Zde je uveden výpočet

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Nyní již můžeme vyjádřit silový element pomocí cylindrických souřadnic

$$dF_G = G \frac{\sigma m}{H^2 + r^2} r dr d\varphi.$$

Není to ale přesně to, co bychom chtěli integrovat. Je nutné totiž ještě uvážit, že se uplatní pouze vertikální složka gravitační síly, protože horizontální složka se díky válcové symetrii, vyruší. Pokud označíme  $\alpha$  úhel, který svírá vektor elementu gravitační síly s osou  $z$ , pak můžeme psát

$$\cos \alpha = \frac{H}{\sqrt{H^2 + r^2}}.$$

<sup>76</sup>Více k jakobiánu naleznete například na [http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian\\_matrix\\_and\\_determinant](http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian_matrix_and_determinant).

Budeme integrovat pouze průmět elementu gravitační síly do osy  $z$ , pro který platí

$$dF = \cos \alpha dF_G = G \frac{\sigma m}{H^2 + r^2} \cos \alpha r \, dr d\varphi = G \frac{\sigma m H}{(H^2 + r^2)^{3/2}} r \, dr d\varphi.$$

Zintegroujeme tedy celou desku.

$$\begin{aligned} F &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} G \sigma m \frac{H}{(H^2 + r^2)^{3/2}} r \, dr d\varphi = G \sigma m H \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{r}{(H^2 + r^2)^{3/2}} dr = \\ &= G \sigma m H [\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \frac{-1}{\sqrt{H^2 + r^2}} \right]_{r=0}^{\frac{d}{2}} = 2\pi G \sigma m \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}} \right]. \end{aligned}$$

Abychom zjistili hodnotu  $\sigma$ , dáme tuto sílu do rovnosti s  $F = mg$ , dostáváme

$$\begin{aligned} 2\pi G \sigma m \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}} \right] &= mg \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{g}{2\pi G} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2} - 1} = \\ &= \frac{g}{2\pi G} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d}{2H}\right)^2}}}, \end{aligned}$$

což vzhledem k  $d \gg H$  můžeme aproximovat jako

$$\sigma \approx \frac{g}{2\pi G} \doteq 2,3 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Plošná hustota desky tedy vychází  $\sigma = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$  při dosazení tíhového zrychlení na Zemi  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Řešení pomocí integrálů bylo v zásadě přesné. Na konci jsme sice použili aproximaci, ale ta byla při přesnosti na dvě platné cifry oprávněná. Stejně tak jsme použili hodnotu tíhového zrychlení, které je složeno z gravitační a odstředivé složky, přitom bychom měli korektně použít hodnotu gravitačního zrychlení, která se ovšem liší až na třetí platné cifře. Samozřejmě, že řešení není přesné, protože neuvazuje přitažlivé gravitační působení dalšího materiálu, želvy a slonů, takže náš odhad hustoty desky je vlastně horní odhad.

#### Alternativní řešení – Gaussův zákon

Vzhledem k tomu, že jsme blízko desky ( $d \gg H$ ), tak bychom desku mohli považovat za nekonečnou rovinu a použít Gaussův zákon. Ten se obvykle zapisuje jako

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM,$$

kde  $\Sigma$  je uzavřená plocha, přes kterou se integruje,  $\mathbf{K}$  je intenzita gravitačního pole na povrchu plochy,  $d\mathbf{S}$  element povrchu této plochy orientovaný ven a  $M$  je celková hmotnost uzavřená plochou. Za plochu si zvolíme povrch válce, jehož podstavy



jsou rovnoběžné s deskou. Hmotnost uzavřená tímto válcem je  $M = \sigma S$ , kde  $S$  je obsah podstavy válce. Jelikož uvažujeme nekonečnou desku, bude vektor gravitační intenzity směřovat kolmo k desce. Potom můžeme uvažovat pouze tok podstavami válce, které mají dohromady obsah  $2S$ . Dostaneme

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{K} \cdot d\mathbf{S} = -K \cdot 2S = -4\pi G\sigma S \quad \Rightarrow \quad K = 2\pi\sigma G.$$

Znaménko mínus za prvním rovnítkem vzniklo ze skalárního součinu dvou antiparalelních vektorů, tj. normály podstavy a intenzity. Jelikož jsme neuvažovali tok pláštěm, má výsledné pole stejnou velikost nezávisle na vzdálenosti od desky, tj. na povrchu je stejné, jako všude jinde. Abychom určili  $\sigma$ , tak si vezmeme hodnotu gravitační intenzity na povrchu Země, která je  $g$ , a snadnou úpravou získáme

$$g = 2\pi\sigma G \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{g}{2\pi G}.$$

Obdrželi jsme tedy stejný výsledek, jako když jsme postupovali přesně a následně jsme provedli aproximaci. To jsme mohli očekávat, neboť aproximace  $d \gg H$  aplikovaná při přímé integraci odpovídá předpokladu o nekonečných rozměrech desky (schválně zkuste integrovat podle  $r$  v mezích  $[0, +\infty)$ ).

## Úloha VI.5 . . . hospodská rvačka

*Při svém pobytu v Ankh-Morporku Dvoukvítek navštívil také hospodu. Nebyla by to dobrá hospoda, kdyby se tam nestrhla všeobecná rvačka, při které létají židle, flašky a další věci z jedné strany hospody na druhou. Dvoukvítek musí samozřejmě všechno pořádně zdokumentovat svým fotoaparátem. Teď zrovna fotí kuličku o poloměru  $R$ , která letí rychlostí v blízkou rychlosti světla  $c$ . I v takových hospodách platí teorie relativity, ze které vyplývá, že Dvoukvítek by ve své klidové soustavě změřil kontrakci kuličky ve směru pohybu o faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Jaký poloměr kuličky ve směru pohybu zaznamená na fotografii se zanedbatelně krátkou expozicí? Fotoaparát zaujímá vůči kuličce obecnou polohu.*

Nejprve popíšeme, co se všechno děje v našem problému. Jak bylo naznačeno v zadání, v případě relativisticky se pohybující kuličky se uplatňuje tzv. kontrakce délky (přesněji Lorentzova transformace). Kromě toho ale ještě musíme počítat s mechanismem záznamu obrazu. Fotoaparát dokáže zachytit v určitý moment fotonů z různých směrů. Jenomže rychlost kuličky není zanedbatelná v porovnání s rychlostí světla, proto fotonů, které dorazí do fotoaparátu ve stejný okamžik, obecně nejsou emitovány kuličkou v tutéž dobu.

Zavedme souřadný systém spojený s kuličkou ( $t', x', y', z'$ ) a spojený s hospodou ( $t, x, y, z$ ). Necht' jsou systémy zavedeny tak, že kulička letí ve směru osy  $x$

v kladném smyslu a v každém čase se fotoaparát nachází v bodě  $x = y = z = 0$ . Přechod mezi těmito systémy se realizuje (speciální Lorentzovou) transformací

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right),\end{aligned}\tag{61}$$

kde  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Nyní uvažujme imaginární fotoaparát, který je v klidu vůči kuličce a v čase  $t' = 0$  prochází skutečným fotoaparátem. V tento okamžik klapne závěrka obou fotoaparátů. Uvědomme si, že v tento okamžik zaznamená virtuální fotoaparát na film ty stejné fotony, které zaznamená fotoaparát skutečný. Zrekonstruujeme tedy světočáry fotonů zachycených virtuálním fotoaparátem (což je snadné), přetransformujeme je do hospodské soustavy a zjistíme, co vlastně skutečný fotoaparát zaznamenal.

Protože máme k dispozici jen jeden fotoaparát, dokážeme zachytit pouze projekci objektů (směry polohových vektorů), proto nás bude zajímat jen obrys této projekce. Virtuální fotoaparát, pro který je kulička v klidu, bude přijímat fotony z oblasti kruhové projekce koule, významný pro nás bude jen kružnicový obrys. Pokusme se zachytit polohu těchto fotonů v závislosti na čase  $\mathbf{r}'(t)$ .

Řekněme, že se fotony pohybují rychlostí světla ve vakuu, čili mají světelnou světočáru a musí platit

$$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = c^2 t'^2.\tag{62}$$

Nechť  $\hat{\mathbf{a}}'$  je jednotkový vektor ve směru osy symetrie (spojnice středu koule s fotoaparátem). Rovněž ale musí trajektorie fotonů svírat s osou symetrie povrchový půlúhel. (Trajektorie hraničních fotonů budou tvořit plášť kužele.<sup>77</sup>) Potom musí platit

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}' = |\mathbf{r}'| \cos \alpha',$$

kde  $\alpha'$  je poloviční vrcholový úhel. Z (62) můžeme tento výraz přepsat jako

$$\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{a}}' = -ct' \cos \alpha',\tag{63}$$

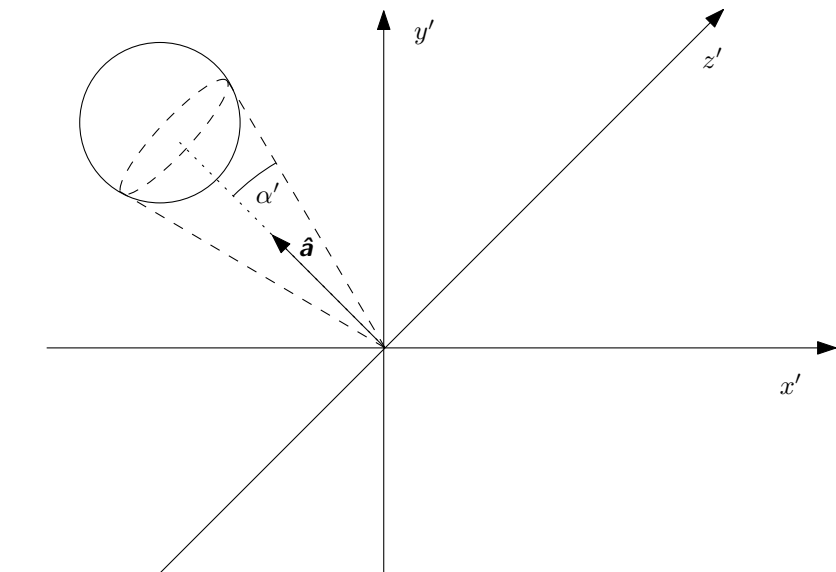
kde volíme záporné znaménko, protože v čase  $t' = 0$  již musí být fotony v imaginárním fotoaparátu.

Nyní transformujeme rovnice (63) a (62) pomocí transformací (61) a získáme popis světočar fotonů, které v hospodské soustavě zachytil skutečný fotoaparát. Rovnice (62) se musí transformovat pouze odstraněním čárek, protože rychlost světla je ve všech systémech stejná.<sup>78</sup> Rovnici (63) si přepíšeme do složkového tvaru

$$x' a'_x + y' a'_y + z' a'_z = -ct' \cos \alpha'$$

<sup>77</sup>Povšimněte si, že kužel je limitním případem komolého jehlanu.

<sup>78</sup>Kdo nevěří, ať dosadí. Nicméně vzhledem k tomu, že právě tato vlastnost je jedním z předpokladů, ze kterých se Lorentzova transformace odvozuje, je tento výpočet bezpředmětný.



Obr. 21: Pozorování koule imaginárním fotoaparátem.

a nyní již aplikujme transformace (61). Dostáváme

$$\gamma(x - vt)a'_x + ya'_y + za'_z = -c\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \cos \alpha',$$

což po úpravě dá vzniknout výrazu tvaru

$$\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) x + ya'_y + za'_z = \gamma\left(va'_x - c \cos \alpha'\right) t$$

a nakonec ještě pronásobme kladným koeficientem  $k$ , jehož velikost určíme posléze

$$k\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) x + ka'_y y + ka'_z z = k\gamma\left(\frac{v}{c} a'_x - \cos \alpha'\right) ct.$$

Zaveďme polohový vektor  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \left(k\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right), ka'_y, ka'_z\right).$$

Zvolme  $k$  takové, aby platilo

$$|\mathbf{a}| = 1, \tag{64}$$

a odted značme  $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$ . Z rovnice (64) vyplývá, že

$$k\gamma\left(a'_x - \frac{v}{c} \cos \alpha'\right) \leq 1.$$

Nyní je čas na matematické lemmátko: Nechtí platí

$$-1 \leq A(B - CD) \leq 1,$$

kde

$$\begin{aligned} A &> 0, \\ -1 &\leq B \leq 1, \\ 0 &\leq C \leq 1, \\ 0 &\leq D \leq 1. \end{aligned}$$

Potom platí

$$-1 \leq A(CB - D) \leq 1. \quad (65)$$

Důkaz: Přepíšme první nerovnici na dvě nerovnice tvaru

$$CD - B \leq \frac{1}{A}, \quad (66)$$

$$B - CD \leq \frac{1}{A}, \quad (67)$$

příčemž mějme na paměti, že  $A$  je kladné. Rovněž si přepíšme dokazovanou nerovnici na dvě

$$CB - D \leq \frac{1}{A}, \quad (68)$$

$$D - CB \leq \frac{1}{A}. \quad (69)$$

Uvědomme si, že nerovnice (66) a (67) jsou dolní odhady  $1/A$ , proto po dosazení za  $1/A$  do (68) a (69) dokazujeme silnější tvrzení, a je tedy toto dosazení korektní. Z (68) dostaneme

$$(C + 1)(B - D) \leq 0,$$

$$(C - 1)(B + D) \leq 0,$$

což vzhledem k oborům  $B, C, D$  vede na nerovnice

$$B \leq D, \quad B \geq -D,$$

což opět vzhledem k  $B, D$  pokrývá všechny možnosti.

Dosazení do nerovnice (69) dává stejné výsledky. Dosazení (66) do (69) dává stejný výsledek jako dosazení (67) do (68) a analogicky pro druhou dvojici dvojic nerovnic.

Podívejme se, že při dosazení  $A = k\gamma$ ,  $B = a'_x$ ,  $C = v/c$ ,  $D = \cos \alpha'$  a rovnice (65) vyhovují předpokladům lemmatu. Důsledek lemmatu nám zaručuje, že existuje takové  $\alpha$ , že platí

$$\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{a}} = -ct \cos \alpha,$$

kde  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ .

Transformované rovnice (62) a (63) tedy rovněž popisují trajektorie fotonů na povrchu kužele, tentokrát o vrcholovém úhlu  $2\alpha$ . Fotoaparát tedy zachytí projekci kuličky ve tvaru kruhu. Ale vzhledem k tomu, že v příčném směru vzhledem k rychlosti nedochází ke kontrakci, je pozorovaný poloměr ve směru pohybu také  $r$ .

Nutno ještě podotknouti, že toto vyjádření není úplně přesné. Vzhledem k tomu, že bodový pozorovatel nemá žádnou přímou možnost, jak určit vzdálenost předmětu, jediné, co dokážeme říci, je: „Kulička má stejnou úhlovou plochu, kterou by měla kulička v klidu v předpokládané vzdálenosti kuličky.“

Toto ovšem není jediný poznatek, ke kterému jsme dospěli. Dalším důsledkem našich výsledků je tzv. Penroseova–Terrellova rotace. Vzhledem k nerovnosti  $\hat{a}' \neq \hat{a}$  jsou vzájemné polohy kuličky v době emise fotonů vůči skutečnému a virtuálnímu fotoaparátu různé, nicméně body emise fotonů na kuličce jsou stejné. To znamená, že kuličku v poloze pozorované reálným fotoaparátem vidíme z té strany, ze které ji pozoruje imaginární fotoaparát (který ji pozoruje v jiné vzájemné poloze). Řečeno krátce, vidíme kuličku z jiné strany – pootočenou.

## Úloha VI.P . . . vody Zeměplochy

*Všichni moc dobře víme, že je dobře zařízeno zásobování Zeměplochy vodou. A nikdo z nás nepotřebuje vědět jak. Co kdyby se ale stalo něco závažného a magie by přestala dobře fungovat? Za jak dlouho by se ocitla Zeměplocha bez vody? Pro jednoduchost můžete uvažovat pesimistickou situaci, kdy by nikdo vodu nijak nezadržoval. Dobře víte, že Zeměplocha má průměr  $d = 10\,000$  km, panuje na ní homogenní tíhové zrychlení  $g \doteq 10\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a je dokonale kruhová. Opravdový celkový objem a rozložení vody na Zeměploše ve skutečnosti nikdo stejně nezná, takže můžete uvažovat, že voda homogenně pokrývá Zeměplochu, která je rovná a voda má výšku  $H = 5$  m (to je hodně pesimistické, protože by pak všechno muselo stát pod vodou, nebo na kůlech nad vodou). Cílem úlohy je nalézt uspokojivě přibližný model, který dává dobrý odhad hledaného času – nečekáme přesné řešení.*

Nejprve analyzujeme situaci a povězme si něco o chování takového systému. Na vodu bude působit homogenní tíhová síla, následkem které bude mít voda tendenci dostat se „níže“, tedy do konfigurace s menší potenciální energií. Voda se tedy bude rozlévat do šíře (vzhledem k nestlačitelnosti jediná možnost, jak sníží svou střední nadzeměplošnou výšku), kde ovšem přijde hrana Zeměplochy a následné vylití (do nicoty či na želvu).

Dále je nutno poznamenat, že v reálném případě veškerá voda nikdy neodteče, a to z různých důvodů. Zkuste vylít vodu na rovný stůl – troška jí vždy zůstane. Je tedy třeba si zvolit nějakou míru, pro kterou je pro nás veškerá voda efektivně pryč. I z pragmatických důvodů zvolme dolní hladinu na střední výšku 5 cm (99 % vody je pryč, povrchové napětí ještě nehraje významnou roli). Vyřešení této úlohy není vůbec snadná záležitost.<sup>79</sup>

<sup>79</sup>Problém podobného ražení je protrhnutí přehrady. Existuje mnoho článků na toto téma, např. <http://www.damsafety.org/media/documents/RESEARCH/ResearchReports/PredictPeakOutflwBrchEmbkDms2010.pdf>.

Situace je radiálně symetrická. Také ve vodní masě neočekáváme žádné větší dutiny (bubliny), proto pro popis soustavy budeme používat závislost  $h(r, t)$  výšky hladiny  $h$  na vzdálenosti od středu Zeměplochy  $r$  a čase  $t$ .

Při tvorbě adekvátního modelu si nejprve uvědomme, že hladina je vždy všude téměř vodorovná – svažování lze očekávat řádově metry na tisíce kilometrů (pod desetitisícinu procenta). Z tohoto důvodu lze předpokládat, že proudnice jsou také téměř vodorovné (a rychlosti ne příliš velké). Pozor, nemůžeme předpokládat, že hladina je vodorovná globálně (tedy že  $h$  nezávisí na  $r$ ) – svažování hladiny je sice malé, ale na vzdálenostech tisíců kilometrů se projeví nezanedbatelně.

První, co tedy člověka napadne, je použít model laminárního proudění. Nicméně po výpočtech se ukazuje, že by rychlost proudění byla v řádech jednotek až desítek metrů za sekundu, což vzhledem k hodnotám výšek hladin (řádově centimetry až metry) neodpovídá laminárnímu modelu. Reynoldsovo číslo se dostává do řádu tisíců teprve pro výšky hladiny v řádu stovek  $\mu\text{m}$ , což jsou oblasti, kde již hraje roli povrchové napětí a další jevy, což by vedlo k dalšímu zkomplikování modelu. Navíc jsou tyto výšky hladin hluboko pod námi stanovenou hranicí „bezvodnatosti“.

Máme turbulentní systém. Protože nemáme možnosti dělat výpočetně příliš náročné simulace,<sup>80</sup> proto (vzhledem k vlastnostem našeho systému) sáhneme po empirickém „cheatu“. Vzhledem k pomalé změně hladin (po většinu času) budeme modelovat systém jako kvazistatický. Budeme předpokládat, že střední rychlost proudění vody  $v$  (v čase  $t$  ve vzdálenosti  $r$  od středu) závisí pouze na tvaru hladiny v daný okamžik – nikoliv na její časové změně, předchozích rychlostech proudění etc. Takže ke změnám dochází dost pomalu na to, aby se rychlosti proudění vždy udržely v dobrém přiblížení v rovnovážných hodnotách.<sup>81</sup> Naším dalším cílem je tedy nalezení závislosti  $v(r, t)$ . Zde použijeme další přiblížení – totiž voda v segmentu se sklonem hladiny  $s$  poteče stejně jako řeka se sklonem  $s$  (a konstantní hloubkou). Pro takový systém platí empirická Gaucklerova–Manningova–Stricklerova formule<sup>82</sup>

$$v = n^{-1} R_h^{\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{2}},$$

kde  $v$  je střední rychlost vody,  $n$  je drsnost dna,  $R_h$  je hydraulický poloměr a  $s$  je sklon hladiny (v našem případě, původně sklon dna).

Jelikož považujeme Zeměplochu za rovinu, uvažujme malou drsnost<sup>83</sup>

$$\{n\} \approx 0,01,$$

kde se uvádí hodnota  $n$  v jednotkách SI.<sup>84</sup>

<sup>80</sup>Bylo by třeba sáhnout buď po částicových modelech, nebo po Navier–Stokesovském modelování.

<sup>81</sup>Poměr horizontálních a vertikálních rychlostí bude řádově statisíce až miliony, proto tato aproximace je oprávněná.

<sup>82</sup>Podle [https://en.wikipedia.org/wiki/Manning\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Manning_formula) nebo [http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs\\_gtr147.pdf](http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs_gtr147.pdf).

<sup>83</sup>Porovnejte s hodnotami např. <http://www.adv-geosci.net/5/133/2005/adgeo-5-133-2005.pdf> nebo [http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs\\_gtr147.pdf](http://www.fs.fed.us/rm/pubs/rmrs_gtr147.pdf).

<sup>84</sup>Nejedná se o bezrozměrné číslo, ale jednotka se (vzhledem k nezřetelnosti jejího fyzikálního významu) zpravidla vynechává.

Velikost hydraulického poloměru v našem případě odpovídá hloubce<sup>85</sup>  $h$  a konečné sklon  $s$  odpovídá záporně vzaté derivaci výšky hladiny podle  $r$ , kterou budeme značit  $h_r$ .

Dohromady dostáváme tedy

$$v = n^{-1} h^{\frac{2}{3}} (-h_r)^{\frac{1}{2}}. \quad (70)$$

Nyní musíme ze vztahu pro  $v$  vypočítat, jak se bude měnit výška hladiny. Uvažujme mezikruží s vnitřním poloměrem  $r$  o malé šířce  $dr$ , se středem ve středu Zeměplochy. Na tomto mezikruží se nachází voda o celkovém objemu  $dV$

$$dV = 2\pi r h(r) dr.$$

Pro časovou změnu tohoto objemu  $dV_t$  platí

$$dV_t = 2\pi r h_t(r) dr, \quad (71)$$

kde  $h_t$  je derivace výšky hladiny podle času. Nicméně časová změna objemu musí být také rovna rozdílu (prů)toků přes vnitřní a vnější poloměr. Platí tedy

$$dV_t = 2\pi r v(r) h(r) - 2\pi (r + dr) v(r + dr) h(r + dr),$$

což po vhodné úpravě dá

$$dV_t = 2\pi r [v(r)h(r) - v(r + dr)h(r + dr)] - 2\pi v(r + dr)h(r + dr) dr$$

a po vytknutí  $dr$

$$dV_t = -2\pi dr \left[ r \frac{v(r + dr)h(r + dr) - v(r)h(r)}{dr} + v(r + dr)h(r + dr) \right],$$

což se pro  $dr$  jdoucí k nule rovná

$$dV_t = -2\pi \left[ r \frac{d}{dr} [v(r)h(r)] + v(r)h(r) \right] dr.$$

Nyní už jen vynecháme argument a zderivujeme součin a dostáváme

$$dV_t = -2\pi (rv_r h + r v h_r + v h) dr. \quad (72)$$

Z (71) a (72) dostáváme rovnost

$$2\pi r h_t dr = -2\pi (rv_r h + r v h_r + v h) dr,$$

odkud

$$h_t = -v_r h - v h_r - r^{-1} v h. \quad (73)$$

Nyní se lze úplně zbavit rychlosti, a to pomocným výpočtem z (70). Dostaneme

$$v_r = -\frac{2}{3} n^{-1} h^{-\frac{1}{3}} (-h_r)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} n^{-1} h^{\frac{2}{3}} (-h_r)^{-\frac{1}{2}} h_{rr}, \quad (74)$$

<sup>85</sup>Z definice (viz třeba [https://cs.wikipedia.org/wiki/Hydraulický\\_poloměr](https://cs.wikipedia.org/wiki/Hydraulický_poloměr)).

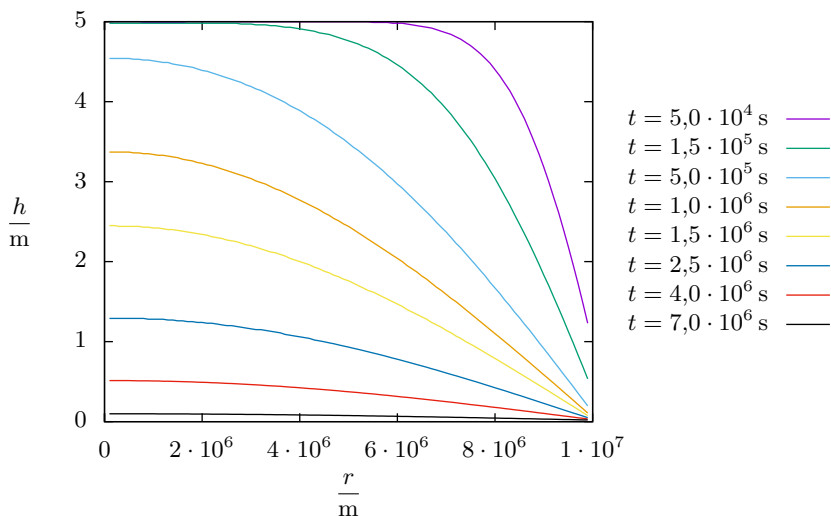
kde  $h_{rr}$  je druhá derivace  $h$  podle  $r$ . Dosazením (70) a (74) do (73) získáme

$$h_t = -n^{-1}h^{\frac{2}{3}}(-h_r)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{2}hh_r^{-1}h_{rr} + \frac{5}{3}h_r + r^{-1}h \right). \quad (75)$$

O řešení této rovnice analyticky se nemá cenu pokoušet, naštěstí explicitní vyjádření časové derivace nám umožňuje snadné numerické řešení – „simulaci“ po časových krocích.

Vzhledem k předpokladům o systému je simulace náchylná na zvětšování časového kroku (zejména na začátku, kde jsou velké gradienty sklonu hladiny). Jako vnější vstup pro simulaci je třeba zadání počátečního stavu ( $h = h_0$ ), zvolení časového a radiálního kroku, a počtu iterací (pro simulaci, jejíž výsledky jsou níže, byly použity po řadě hodnoty 50 s, 50 km, 150 000). Dále je třeba zajistit „odtok“ vody za hranu Zeměplochy, který v sobě (75) nemá obsažen, a také algoritmus konání časových iterací a výpočtu radiálních derivací.<sup>86</sup> A konečně způsob implementace – zde poslouží téměř libovolný jazyk či dokonce tabulkový editor, papír a tužku nedoporučujeme.

Vývoj hladiny v závislosti na čase je vidět na obrázku 22.

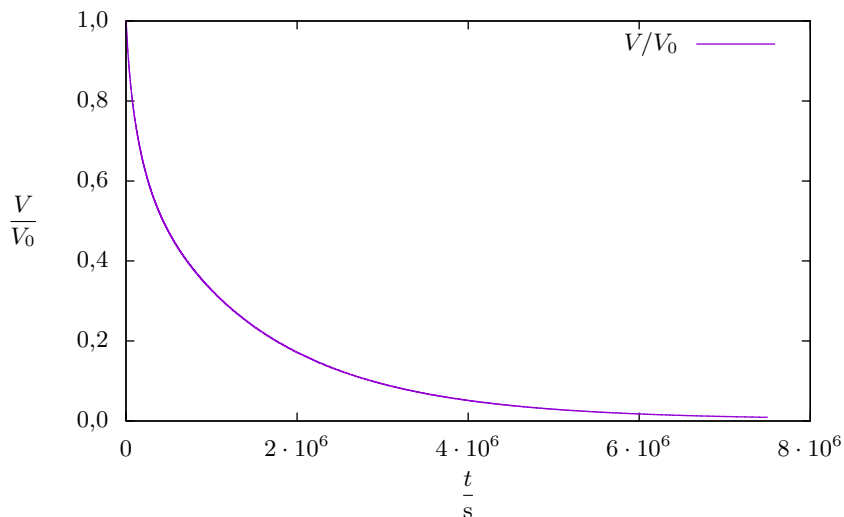


Obr. 22: Vývoj výšky hladiny v čase.

Podle očekávání voda nejprve odtéká z krajů, hladina ve středních částech se začne snižovat až po nějakém čase a poté se odtok vod stále zpomaluje a zpomaluje (viz časy v legendě obrázku 22). Co se týče vývoje celkového objemu vody, ten je znázorněn na obrázku 23.

<sup>86</sup>Zde měl každý přístup svá úskalí (výpočetní čas, nestabilita řešení, neslučitelnost s okrajovou podmínkou etc.) – doporučujeme buď vyzkoušet, nebo se nechat hlouběji zasnít do tajů numerického řešení diferenciálních rovnic či počítačové fyziky.



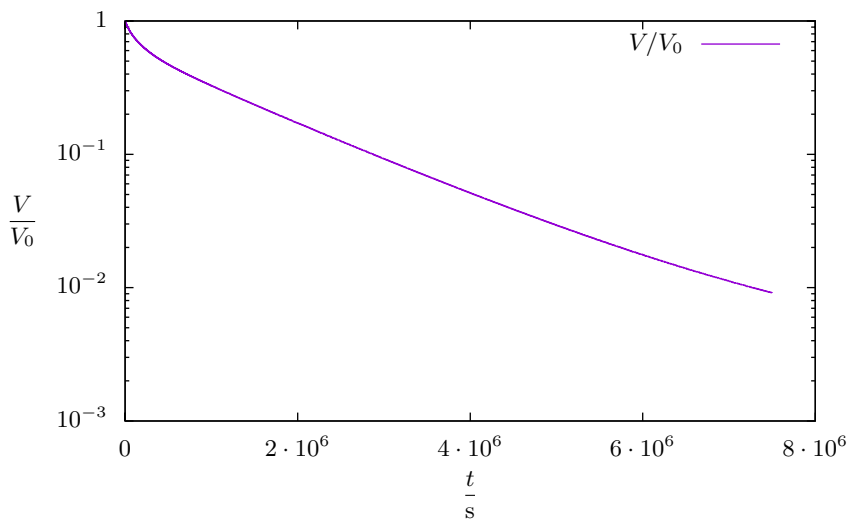


Obr. 23: Vývoj objemu vody v čase.

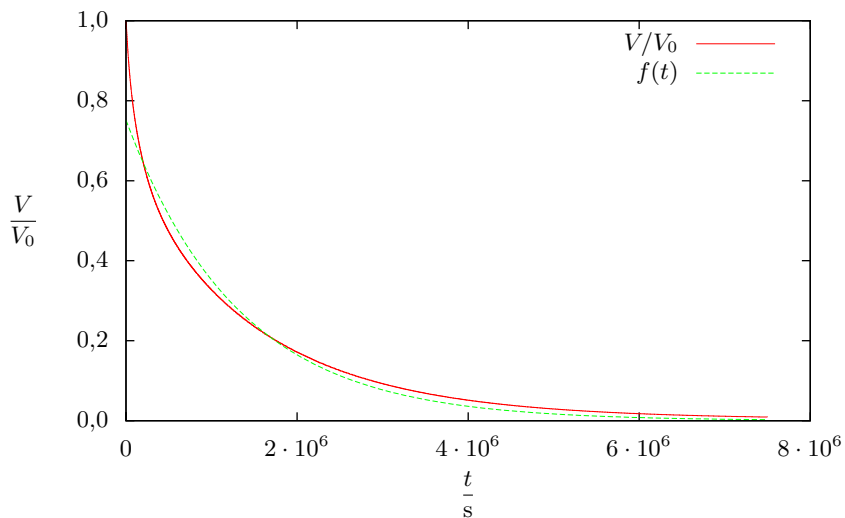
Na první pohled nás napadne otázka, jak moc je tato závislost blízká exponenciále. Tuto otázku můžeme snadno zodpovědět, vyneseme-li hodnoty hladiny v logaritmické škále – exponenciála by se transformovala na přímku.

Ukazuje se, že od určité chvíle má závislost objemu na čase exponenciální charakter, viz obrázek 25.

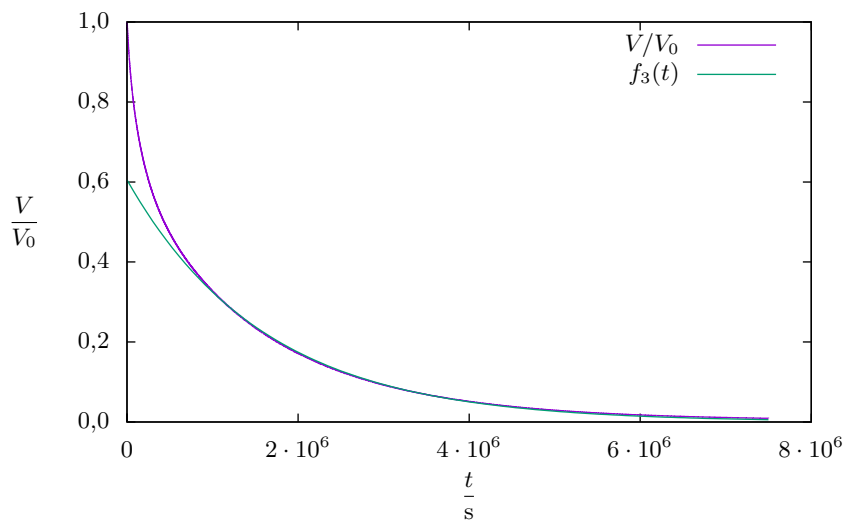
V našem modelu došlo k poklesu objemu vody na 1 % v čase  $t_{1\%} = 7,27 \cdot 10^6 \text{ s} = 84,1 \text{ d}$ . Odhadnout, o jak přesný výsledek se jedná, není jednoduché – zjišťování přesnosti aproximace nahnutého dna je náročností srovnatelné s vyřešením celé úlohy. Její maximální chybu odhadujeme na půl řádu (konstanta 0,3 až 3), proto bychom skutečnou hodnotu očekávali v řádech několika málo měsíců.



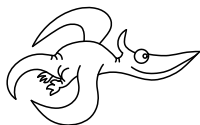
Obr. 24: Vývoj objemu vody v čase (v logaritmické škále).



Obr. 26: Vývoj objemu vody v čase proložený exponenciální funkcí  $f(t) = Ae^{-Bt}$ , kde  $A = 0,751$  a  $B = 7,58 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ .



Obr. 25: Vývoj objemu vody v čase proložený exponenciální funkcí  $f_3(t) = a_3 e^{-b_3 t}$ , kde  $a_3 = 0,605$  a  $b_3 = 6,22 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ . Fit probíhal pouze pro časy od  $t_{\text{start}} = 8 \cdot 10^5$  s.



## Zadání experimentálních úloh

### Úloha I.E ... nabitá brambora

8 bodů

Změřte zátěžovou charakteristiku brambory jako zdroje elektrického napětí se zapojenými elektrodami z různých kovů. *(řešení str. 113)*

### Úloha II.E ... vodní rozpad

8 bodů

V jaké hloubce pod vodovodním kohoutkem se rozpadá pramínek vody na kapičky? Jak to závisí na průtoku vody? *(řešení str. 117)*

### Úloha III.E ... tenisky na vodě

8 bodů

Změřte koeficient statického a dynamického tření mezi teniskou (botou) a vodorovným hladkým povrchem v situacích, kdy je povrch suchý a kdy je mokrý. Výsledky srovnajte a interpretejte. *(řešení str. 122)*

### Úloha IV.E ... lahované povrchové napětí

8 bodů

Máme válcovou nádobu, ve které vytvoříme z boku kruhový otvor. Nalijeme do ní vodu. Voda bude postupně vytékat, ale v nějaké výšce nad otvorem se výtok vody z nádoby zastaví. Určete povrchové napětí vody na základě změřené výšky nad otvorem, ve které se hladina zastaví. Pokus několikrát opakujte, a to alespoň se třemi různě velkými otvory. Jako válec může posloužit vhodná PET lahev. *(řešení str. 126)*

### Úloha V.E ... sladíme

8 bodů

Změřte závislost teploty tuhnutí vodného roztoku sacharózy na koncentraci za atmosférického tlaku. *(řešení str. 129)*

### Úloha VI.E ... alchymistická

8 bodů

Na Zeměploše je regulérním povoláním alchymie. Proto se organizátoři FYKOSu rozhodli, že by se účastníci měli pokusit složit vstupní zkoušku do Cechu alchymistů.

Účastníkům se zadáním série přišly tři vzorky tenkých plátkových kovů. Jejich úkolem bylo, na základě dostatečně vědeckých postupů, určit, o jakou látku se jedná. *(řešení str. 139)*



## Řešení experimentálních úloh

### Úloha I.E ... nabitá brambora

Změřte zátěžovou charakteristiku brambory jako zdroje elektrického napětí se zapojenými elektrodami z různých kovů.

#### Teorie

Vložíme-li kovovou elektrodu do roztoku iontů téhož kovu v polárním rozpouštědle, začnou se z kovu uvolňovat kationty, čímž se elektroda nabíjí záporně a roztok kladně. Dochází také k reakci opačné, kdy se ionty z roztoku vylučují na elektrodě a předávají jí kladný náboj. Po jistém čase vznikne dynamická rovnováha a ustálí se napětí mezi elektrodou a roztokem. Tato soustava se nazývá poločlánek. Napětí nelze přímo měřit. Propojíme-li však dva poločlánky solným můstkem (tzv. Daniellův článek), lze mezi elektrodami z různých kovů naměřit napětí. Zavádí se tzv. *elektroodový potenciál*. Rozdíl elektroodových potenciálů udává výsledné napětí Daniellova článku.

Mějme například měděnou a zinkovou elektrodu. Elektronový potenciál<sup>1</sup> mědi je  $+0,34$  V a zinku  $-0,76$  V, tj. lze z nich vytvořit Daniellův článek s napětím  $1,1$  V. Propojíme-li elektrody článku vodičem, začne téci proud ve směru potenciálového spádu. Ze zinkové elektrody, která má nižší potenciál, se uvolňují kationty do roztoku a přebytečné elektrony odcházejí na elektrodu s vyšším potenciálem, zde konkrétně měděnou. Na měděné elektrodě rekombinují ionty s elektrony a vylučuje se měď. Jak postupně přibývá zinkových iontů v roztoku a ubývá měděných, snižuje se napětí článku. Pokud dojde k nasycení roztoku zinkovými ionty, rozpuštění zinkové elektrody, nebo odčerpání měděných iontů z roztoku, napětí článku klesne na nulu, článek je vybitý.

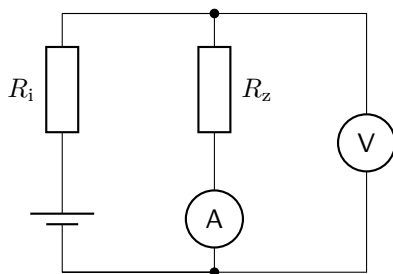
Z brambory zapíchnutím elektrod vyrobíme článek, jehož princip je podobný jako princip Daniellova článku. Ponořením elektrod do polárního rozpouštědla se vytvoří roztok obsahující ionty obou kovů. Brambora je však složena z buněk, jejichž stěny jsou pro ionty propustné pouze částečně, čímž se zvyšuje její vnitřní odpor oproti klasickému elektrolytu.

Zatěžovací charakteristikou zdroje se myslí závislost svorkového napětí na odebíraném proudu. Galvanické články mívají lineární voltampérovou charakteristiku, která je určena jejich *elektromotorickým napětím* (napětí nezatíženého zdroje) a *vnitřním odporem*. Závislost svorkového napětí na proudu je pro použité zapojení dána vztahem známým jako Ohmův zákon pro celý obvod

$$U(I) = U_e - R_i I, \quad (76)$$

<sup>1</sup><http://www.wikiskripta.eu> – článek elektroodový potenciál.

kde  $U_e$  je elektromotorické napětí,  $R_i$  vnitřní odpor a  $I$  odebraný proud. Připojíme-li ke zdroji známý odpor  $R_z$ , lze proud  $I$  vypočítat ze vztahu  $I = U/R_z$ .



Obr. 27: Schéma zapojení.

### Měření

Bylo provedeno srovnání pro tři různé kovy. Během měření bylo zjištěno, že v důsledku oxidace elektrod vzniká napětí i mezi elektrodami z téhož kovu (až 0,4 V). Po očištění elektrod jemným smirkovým papírem tento jev téměř vymizel. Byly použity následující přístroje:

1. Digitální multimetr Powerfix PDM 250 – na všech napěťových rozsazích má vstupní odpor 10 M $\Omega$ .
2. Ručkový miliampérmetr – použit pro kontrolu při větších proudech. Nejmenší rozsah je 0,6 mA, kde na tomto rozsahu má přístroj rozlišení 5  $\mu$ A.

### Nejistoty měření

Výrobce voltmetru udává na rozsahu 2 V rozlišení 1 mV a přesnost  $\pm(0,8\% + 5)$ . To znamená nejistotu 0,8 % z naměřené hodnoty +5krát poslední zobrazovaná číslice tedy 5 mV. Přesnost měření odporu je  $\pm(0,8\% + 3)$ , rozlišení 1  $\Omega$ . Tolerance všech použitých rezistorů je 1 %. Během měření napětí článku kolísalo přibližně o 2 % z naměřené hodnoty.

### Výsledky

Použité elektrody byly hřebíky z mědi a zinku a cínový drát. Drát byl do brambory zapíchnut do stejné hloubky jako hřebíky. Poloměr byl měřen posuvným měřidlem, délka a vzdálenost pravítkem.

- Průměr hřebíků:  $r = (2,5 \pm 0,1)$  mm,
- průměr drátu:  $r = (2,7 \pm 0,1)$  mm,
- délka (bez hlavičky):  $d = (15 \pm 1)$  mm,
- vzdálenost elektrod:  $d = (30 \pm 1)$  mm.

Elektrodové potenciály:

- měď: +0,34 V,
- zinek: -0,76 V,
- cín: -0,14 V.

První byl měřen článek s elektrodami z mědi a zinku. Jak je vidět z tabulky 3 a na obrázku 28, závislost je lineární a lze z ní určit vnitřní odpor článku pomocí lineární regrese. Koeficienty byly zjištěny excelovskou funkcí Linregrese (tabulku bylo nutné převést na V a A). Lineární regrese určí koeficienty lineární závislosti  $U = aI + b$ , která nejlépe odpovídá naměřeným hodnotám. Z Ohmova zákona pro obvod 76 je zřejmé, že  $a = -R_i$  a  $b = U_e$ .

Bylo zjištěno  $R_i = (3,7 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$ ,  $U_e = (642 \pm 10) \text{ mV}$ . Uvedená nejistota je pouze statistická.

Chování dalších článků bylo nelineární kvůli jejich vybíjení. Odpor 10 000 k $\Omega$  znamená měření pouze voltmetrem bez připojené zátěže. Tato hodnota byla odečtena vždy na začátku. Po skončení měření napětí naprázdno obvykle kleslo asi o 10 mV.

Tab. 3: V-A charakteristiky

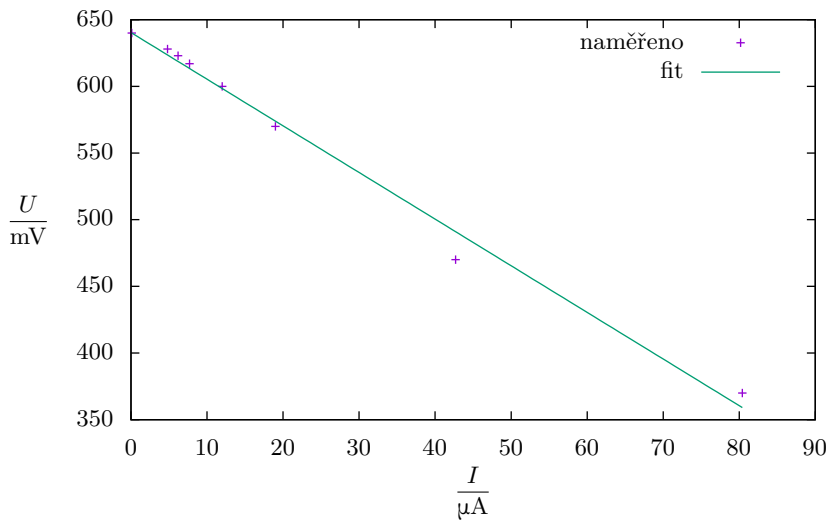
Cu–Zn			Cu–Sn			Sn–Zn		
$\frac{R_z}{\text{k}\Omega}$	$\frac{I}{\mu\text{A}}$	$\frac{U}{\text{mV}}$	$\frac{R_z}{\text{k}\Omega}$	$\frac{I}{\mu\text{A}}$	$\frac{U}{\text{mV}}$	$\frac{R_z}{\text{k}\Omega}$	$\frac{I}{\mu\text{A}}$	$\frac{U}{\text{mV}}$
10 000	0,1	640	10 000	0,0	460	10 000	0,0	660
130	4,8	628	260	1,2	300	50	1,2	535
100	6,2	623	130	1,8	230	30	1,8	480
80	7,7	617	100	1,9	190	23	1,9	440
50	12,0	600	50	3,1	154	15,6	3,1	380
30	19,0	570	30	4,0	120	11	4,0	320
11	42,7	470	11	4,7	52	4,6	4,7	221
4,6	80,4	370	4,6	5,9	27	1	5,9	74

### Diskuse

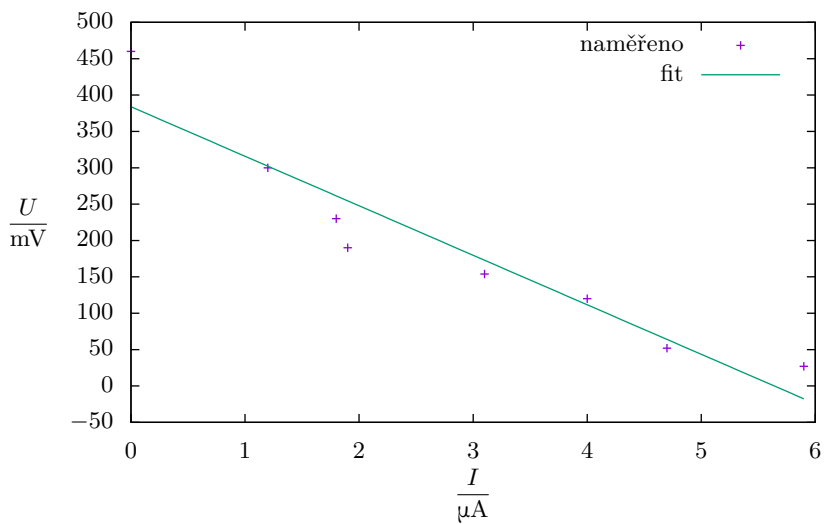
Při měření bylo obtížné dosáhnout vysoké přesnosti, protože bramborová baterie se rychle vybíjí a navíc i při minimální zátěži voltmetrem napětí stále kolísá. Kolísání se zmírní, když se baterie mírně vybije. Elektrody byly připájeny k drátům připojeným k sondám multimetru, aby napětí nekolísalo vlivem pohybu elektrod. Domníváme se, že jistý vliv na měření měl i kontakt elektrod s bramborou. Potření brambory roztokem soli pro lepší kontakt však nemělo prokazatelný efekt. Tvar charakteristiky je způsoben měřicí metodou. Napětí bez zátěžového odporu bylo změřeno nejdříve a následovalo měření od nejmenšího zátěžového odporu po největší a při každém dalším měření byl článek o něco vybitější.

### Závěr

Bramborová baterie je slabý zdroj zejména kvůli slabému elektrolytu, buněčným stěnám a špatnému kontaktu s elektrodami. Nejlepší voltampérovou charakteristikou měl článek s elektrodami z mědi a zinku. Jeho vnitřní odpor byl  $R_i = (3,7 \pm 0,1) \text{ k}\Omega$  a jeho elektromotorické napětí  $U_e = (642 \pm 12) \text{ mV}$ . U zbylých článků nebylo možné vnitřní odpor určit, protože se během měření příliš vybíjely.

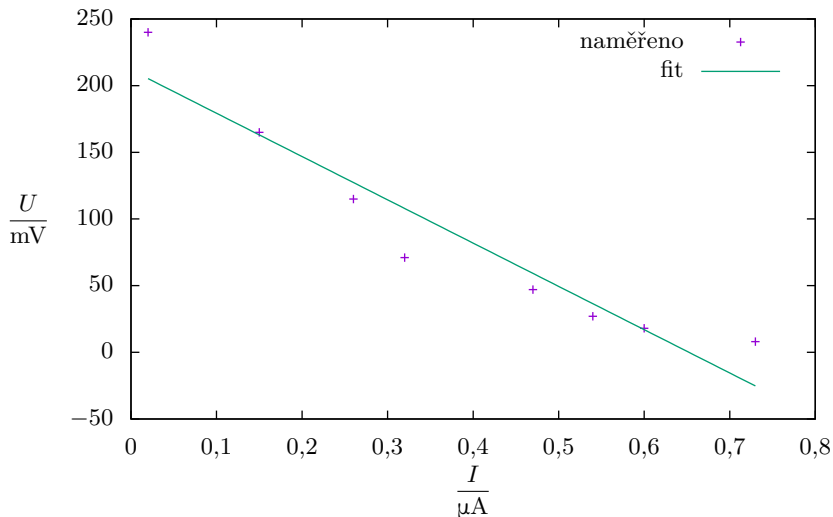


Obr. 28: V-A charakteristika Cu–Zn.



Obr. 29: V-A charakteristika Cu–Sn.





Obr. 30: V-A charakteristika Sn–Zn.

## Úloha II.E ... vodní rozpad

V jaké hloubce pod vodovodním kohoutkem se rozpadá pramínek vody na kapičky?  
Jak to závisí na průtoku vody?

### Jednoduchý model

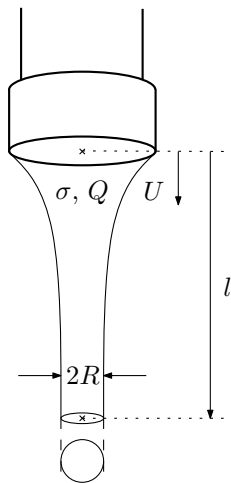
Zkoumaný jev rozpadání proudu na kapičky se v literatuře označuje jako *Plateauova-Rayleighova nestabilita*, kdy je „přešlípnut“ proud způsobeno zesilováním amplitudy radiálních kapilárních vln na povrchu proudu.<sup>2</sup> Výstupem tohoto modelu pak může být například hloubka pod kohoutkem, kde se pramínek začíná rozpadat, kterou máme za úkol měřit. Nebudeme zabíhat do (poměrně technických) podrobností standardního odvození Plateauovy-Rayleighovy nestability a spokojíme se s jednoduchým argumentem založeným na rozměrové analýze. Rovněž zanedbáme vliv viskozity a zrychlování v tíhovém poli (což limituje platnost našeho modelu na takové hloubky pod kohoutkem, pro které se nebude výrazně zužovat šířka pramínku).

Budeme hledat časovou škálu  $T$ , na které dojde k dostatečnému zesílení amplitudy kapilárních vln, aby se proud rozpadl na kapičky. Tvrdíme, že  $T$  bude funkcí hustoty kapaliny  $\rho$ , jejího povrchového napětí  $\sigma$  a poloměru pramínku  $R$ , nikoli

<sup>2</sup>Podrobnosti naleznete například na [http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh\\_instability](http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh_instability).

však velikosti rychlosti pramínku,<sup>3</sup> kterou značíme  $U$ . Rozměrová analýza potom říká, že

$$T \propto \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}.$$



Obr. 31: Schématické znázornění situace rozpadajícího se pramínku pod kohoutkem.

Uvědomíme-li si navíc, že pro průtok  $Q$  platí  $Q \propto UR^2$ , pak pro vzdálenost  $l$  od kohoutku, kde dojde k rozpadu pramínku, máme

$$l = UT = CU^{1/4}Q^{3/4}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}, \quad (77)$$

kde  $C$  je bezrozměrný koeficient. Za předpokladu, že se nám podaří v průběhu měření držet  $U$  konstantní (viz níže), máme pro hloubku rozpadu pod kohoutkem úměru  $l \propto Q^{3/4}$ . Připomeňme, že zanedbáváme zužování pramínku v důsledku zrychlování v tíhovém poli, které zřejmě produkuje<sup>4</sup> v závislosti  $l(Q)$  klesající trend.

#### Experiment

Nastavili jsme průtok kohoutkem na hodnotu, při které k rozpadu pramínku docházelo v hloubce  $l_i$  pod kohoutkem. Tuto hloubku jsme měřili opakovaně odečítáním z pořízené fotografie (obr. 32). Odčítali jsme vždy dvě hodnoty: jednak hloubku, ve které došlo k první výrazné oscilaci pramínku, a jednak hloubku, ve které byla pozorovatelná první kapka. Průtok jsme měřili stopováním času, za který proteče daný objem. Ten se pohyboval mezi 200 ml a 300 ml. Nejistotu určení hodnoty průtoku jsme stanovili jako směrodatnou odchylku  $SE = \sqrt{s_y^2/n}$  souboru průtoků, které byly naměřeny při vyšším průtoku, aby mohl být tento experiment opakován vícekrát. Data z tohoto měření jsou v tabulce 4.

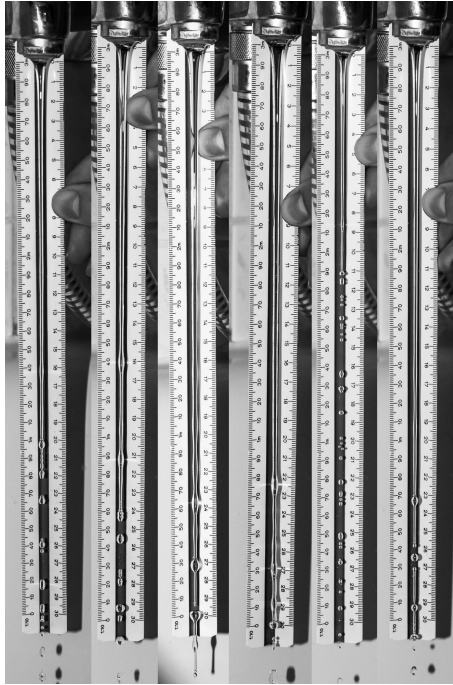
Hloubku, ve které se pramínek rozpadá, jsme měřili s přesností  $\pm 2$  cm, přičemž zde zahrnujeme i nejistotu při určování konkrétního bodu rozpadu. Pro každé nastavení průtoku jsme pak spočetli průměrnou hloubku rozpadu a rozptyl této hloubky v rámci daného průtoku

$$s_l^2 = \frac{\sum (l_i - \bar{l})^2}{n - 1}.$$

Měření i vypočtené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 5.

<sup>3</sup>Zde se bohužel musíme odvolat na samotné odvození Plateauovy-Rayleighovy nestability, které nám pro konstantní poloměr pramínku fixuje míru zesílení nejrychleji rostoucích kapilárních vln (tj. těch, které způsobí rozpad pramínku). Čas, za který amplituda vln dostatečně naroste, tedy nezávisí na rychlosti pramínku.

<sup>4</sup>Máme pak  $l \propto T^2 \propto R^3$ , takže  $l$  bude citlivé na zužování pramínku.



Obr. 32: Fotografie z měření polohy rozpadu pomocí pravítka.

### Zpracování a diskuse výsledků

V grafu na obr. 33 jsou průměrné hodnoty hloubek vyneseny v závislosti na průtoku. Interval kolem bodů ve směru vodorovné osy je směrodatná odchylka dat z tabulky  $4 SE = \pm 0,25 \text{ cm}$ . Ve směru svislé osy to jsou směrodatné odchylky jednotlivých setů hloubek.

Podle rovnice (77) bychom měli v našich datech hledat závislost  $l = aQ^{3/4} + b$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálné parametry,  $a$  kladné.<sup>5</sup> Na obr. 33 skutečně pozorujeme stoupající trend, nicméně jakýkoli pokus o fit v celém rozsahu průtoků selhává, protože funkce  $Q^{3/4}$  zkrátka roste příliš rychle. Vysvětlením by mohlo být pozorované výrazné zužování pramínku pro velká  $Q$ , viz také obr. 32. Do závislosti  $l(Q)$  pak vstoupí klesající trend, který zmírní její růst tak, jak pozorujeme.

Dalším předpokladem, který jsme v teoretickém úvodu zavedli, je, že rychlost proudění v pramínku byla v rámci přesnosti měření konstantní v intervalu průtoků, které jsme použili. Myšlenkově to lze obhájit následovně: tlak v potrubí je

<sup>5</sup>Oproti (77) uvažujeme nenulový absolutní člen  $b$ , který sice neplyne přímo z teorie, ale pro účely fitu je obecně lepší ho zařadit. Můžeme tak jednak odhalit systematickou chybu, kdy jsou námi měřené hodnoty posunuté, a jednak tak zohledníme fakt, že pro malé průtoky voda pouze odkapává přímo z kohoutku.

Tab. 4: Stanovení nejistoty určování průtoku.

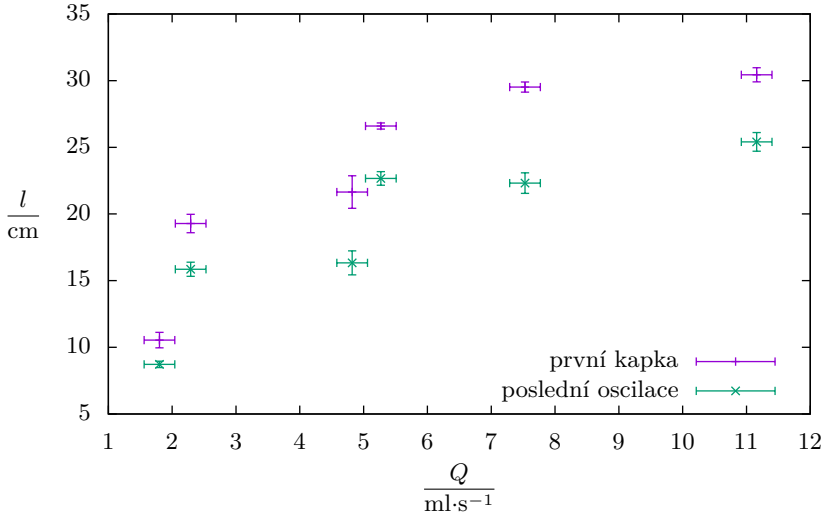
$\frac{V}{\text{ml}}$	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$
200	14,37	13,92
200	14,24	14,04
200	14,12	14,16
200	14,02	14,27
200	12,16	16,45
200	14,19	14,09
200	14,06	14,22
250	19,22	13,01
250	18,63	13,42
250	18,40	13,59
250	19,36	12,91
250	19,69	12,70
250	19,00	13,16
250	18,19	13,74
průměr		13,83
SE		0,245

Tab. 5: Naměřené hloubky rozpadu pramínku.

$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$	hloubky první oscilace						$\bar{l}$ cm	$s_{\bar{l}}^2$ cm	SE cm
	cm								
2,3	16,3	14,5	17,0	17,0	16,3	14,0	15,9	1,7	0,5
4,8	16,0	17,6	13,9	17,8			16,3	3,3	0,9
7,5	19,3	24,3	21,3	23,0	21,9	24,1	22,3	3,6	0,8
11,2	27,6	26,9	23,4	26,3	25,4	22,5	25,8	3,4	0,7
1,8	9,0	8,0	8,7	8,5	9,4		8,7	0,3	0,2
5,3	23,5	23,9	21,6	23,3	23,0	20,7	22,7	1,5	0,5

$\frac{Q}{\text{ml}\cdot\text{s}^{-1}}$	hloubka vzniku první kapičky						$\bar{l}$ cm	$s_{\bar{l}}^2$ cm	SE cm	
	cm									
2,3	17,9	17,3	21,1	21,0	20,2	18,2	19,3	2,8	0,7	
4,8	25,0	19,2	20,9	21,5			21,7	5,9	1,2	
7,5	30,8	29,4	29,9	29,0	29,9	28,1	29,5	0,8	0,4	
11,2	30,6	28,8	28,8	32,6	30,7	30,0	31,6	1,9	0,5	
1,8	11,2	12,0	11,1	8,6	10,7	8,7	11,5	10,5	1,7	0,6
5,3	26,7	27,4	26,0	26,5	26,0	27,0	26,6	0,3	0,2	



Obr. 33: Graf závislosti hloubek rozpadu a první výrazné oscilace na průtoku.

přibližně 6krát až 8krát větší než atmosferický. Malé změny průtokového otvoru, kterým regulujeme průtok, a jimi vyvolané změny tlaku budou vůči tomuto rozdílu několika atmosfér zanedbatelné, a tedy i změna rychlosti se změnou průtoku bude jen drobná.

Na závěr by se slušelo pohovořit, co dále námi pozorovaný jev ovlivňuje a přitom není popsáno modelem. Prakticky cokoli, co souvisí s kapkami, se točí kolem povrchového napětí, a to je velmi citlivé na změny koncentrace minerálů ve vodě, teplotu vody, čistotu ústí kohoutku a vůbec materiál kohoutku samotný (obecně na povrchovou energii). Dále bývají ve vodovodním kohoutku umístěna jemná sítka, která upravují tvar proudu a „přidávají do něj bublinky“. To bude pravděpodobně hrát významnou roli v modelu Plateauovy-Rayleighovy nestability, kde počáteční fluktuace rozhodují prakticky o všem.

Samotné měření pak mohlo být mimo již uvažované efekty ovlivněno například expoziční dobou fotoaparátu. Nejproblematictější částí nicméně zůstává subjektivita určení bodu, kde k rozpadu dochází. Z těchto důvodů bychom si mohli dovolit udělat svislé chybové úsečky klidně 3krát větší, neboť nyní zahrnují jen opakovatelnost měření, ale ne systematické chyby a další efekty výše popsané.

## Úloha III.E . . . tenisky na vodě

Změřte koeficient statického a dynamického tření mezi teniskou (botou) a vodorovným hladkým povrchem v situacích, kdy je povrch suchý a kdy je mokrý. Výsledky srovnajte a interpretujte.

### Jednoduchý model

Smykové tření je jev, ke kterému dochází při posouvání jednoho tělesa po povrchu tělesa jiného. Rozlišujeme tření statické a dynamické. Velikost třecí síly vypočteme ze vztahu

$$F_t = F_n f, \quad (78)$$

kde  $F_n$  je přítláčná síla kolmá na styčnou plochu těles a  $f$  je koeficient dynamického, resp. statického tření. O dynamickém tření hovoříme, jsou-li smýkající se tělesa navzájem v pohybu. Při rovnoměrném přímočarém pohybu má tažná síla způsobující pohyb tělesa stejnou velikost jako třecí síla.

Ke statickému tření dochází u těles, která jsou navzájem v klidu. Až do jisté meze mají statická třecí síla a tažná síla působící na těleso rovnoběžně s podložkou stejnou velikost. Při překročení této meze se těleso dává do pohybu a tření se mění na dynamické. Koeficient statického tření určuje maximální sílu, kterou je možno na těleso působit rovnoběžně s podložkou, aby ještě zůstalo v klidu.

Maximální statické tření je většinou větší než dynamické. Je-li mezi tělesem a podložkou kapalina, tření se obvykle snižuje (záleží na konkrétním povrchu a kapalině).

### Problémy

V praxi dochází k mnoha jevům, které situaci komplikují. U pružných těles dochází k odskakování, kdy jejich povrchy jsou navzájem v klidu, avšak tělesa se pružně deformují. Když je síla pružnosti větší než klidová třecí síla, dojde k odskoku, při kterém tělesa dočasně ztratí kontakt a dochází k jejich volnému pohybu než se působením přítláčné síly opět dotknou a děj se opakuje. U adhezivních povrchů se tření projevuje, i když je přítláčná síla nulová, třecí síla může záviset na povrchu atd. Tření může dále záviset na rychlosti a na mokřím povrchu může docházet k tzv. aquaplaningu, kdy se mezi tělesem a podložkou vytvoří souvislá vrstva vody a tření se dramaticky snižuje.

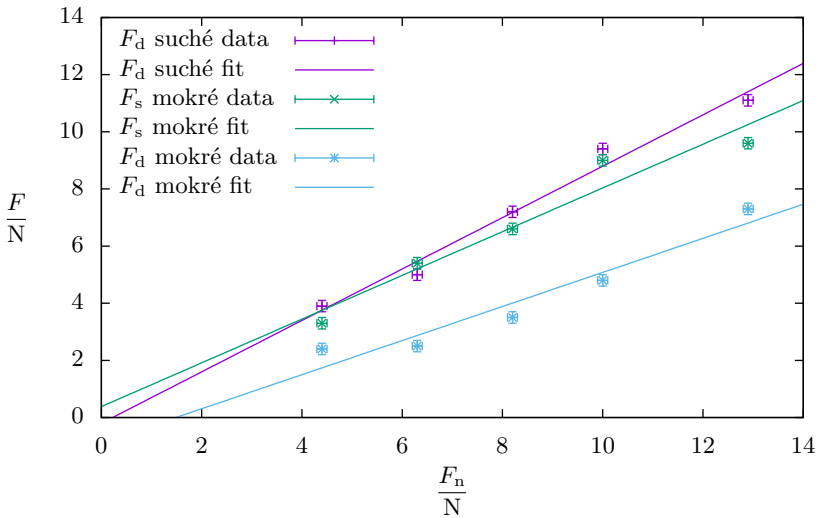
### Výsledky měření

Měření bylo prováděno pomocí elektronického siloměru systému Vernier Dual range force sensor a vyhodnoceno v programu LoggerLite 1.7. Měření probíhalo na vodorovném povrchu. Přítláčná síla je tedy rovna tíze boty se závažím. Bota byla tažena siloměrem za nit. Nejprve se pomalu zvětšovala tažná síla dokud se bota nedala do pohybu poté byla tažena konstantní rychlostí. Kvůli stabilitě byla teniska tažena za nit provlečenou špičkou podrážky. Při měření bylo dbáno na to, aby nit směřovala rovnoběžně s podložkou. Teniska byla tažena velmi pomalu (cca  $5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ) kvůli minimalizaci chyby způsobné závislostí třecí síly na rychlosti.

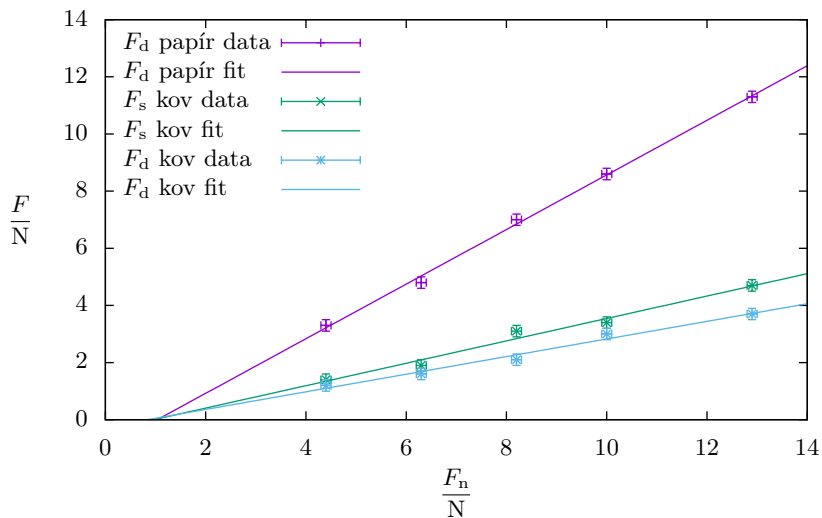
Měření bylo provedeno na čtyřech různých podložkách. V tabulce 6 je uvedena závislost statické ( $F_s$ ) a dynamické ( $F_d$ ) třecí síly na síle přitlačné ( $F_n$ ).

Tab. 6: Měření třecí síly.

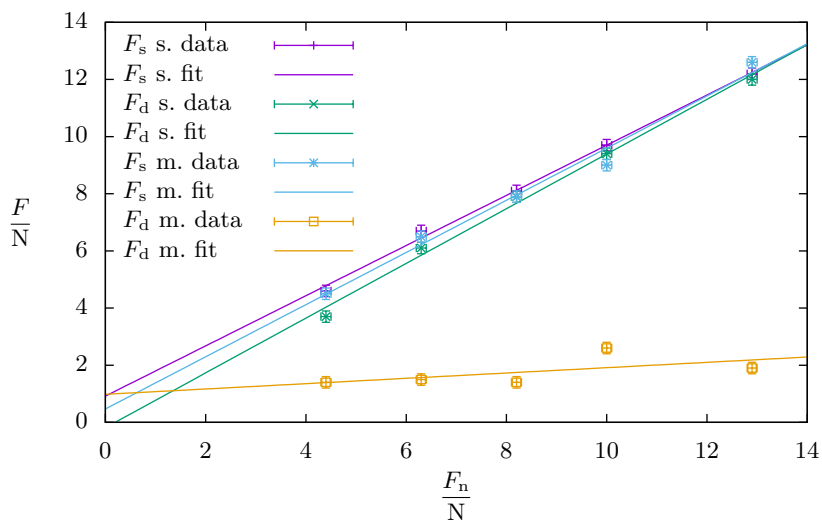
linoleum				sklo				papír	kov	
suché		mokrě		suché		mokrě		suchý	suchý	
$\frac{F_n}{N}$	$\frac{F_d}{N}$	$\frac{F_s}{N}$	$\frac{F_d}{N}$	$\frac{F_s}{N}$	$\frac{F_d}{N}$	$\frac{F_s}{N}$	$\frac{F_s}{N}$	$\frac{F_d}{N}$	$\frac{F_s}{N}$	$\frac{F_d}{N}$
4,4	3,9	3,3	2,4	4,6	3,7	4,5	1,4	3,3	1,4	1,2
6,3	5,0	5,4	2,5	6,7	6,1	6,5	1,5	4,8	1,9	1,6
8,2	7,2	6,6	3,5	8,1	7,9	7,9	1,4	7,0	3,1	2,1
10,0	9,4	9,0	4,8	9,7	9,4	9,0	2,6	8,6	3,4	3,0
12,9	11,1	9,6	7,3	12,2	12,0	12,6	1,9	11,3	4,7	3,7



Obr. 34: Závislost třecí síly na přitlačné pro tenisku na linoleu.



Obr. 35: Závislost třecí síly na přitlačné pro tenisku na papíře a lakovaném kovu.



Obr. 36: Závislost třecí síly na přitlačné pro tenisku na skle.



Tab. 7: Výsledné koeficienty tření pro všechny měřené povrchy.

materiál	$f_s$	$f_d$
lino suché		$0,87 \pm 0,02$
lino mokré	$0,80 \pm 0,03$	$0,50 \pm 0,03$
sklo suché	$0,98 \pm 0,02$	$0,94 \pm 0,01$
sklo mokré	$0,96 \pm 0,02$	$0,20 \pm 0,02$
papír		$0,96 \pm 0,03$
kov	$0,39 \pm 0,03$	$0,31 \pm 0,02$

Výsledky byly zpracovány lineární regresí podle vztahu (78). Vztah odpovídá rovnici  $y = ax + b$ , kde násobný koeficient  $a$  je přímo hledaný koeficient tření a  $b$  parametr, který zohledňuje možné systematické chyby měření. Statický koeficient značíme  $f_s$ , dynamický  $f_d$ . Pro některé povrchy nedocházelo k poklesu třecí síly při uvedení tělesa do pohybu. Pro tyto povrchy je v tabulce 7 uveden pouze dynamický koeficient, statický je pravděpodobně stejný. Pro rychlosti, při kterých bylo měření prováděno, nebyla zjištěna výrazná závislost na rychlosti.

### Diskuse

Z grafů je vidět, že proložená závislost neleží v intervalu standardní nejistoty. Body jsou od proložené přímky vzdáleny méně než  $3\sigma$ , ale krajní nejistotu v grafech neuvádíme s ohledem na individualitu každého měření. I přes snahu dodržet vždy stejný způsob a trajektorii pohybu docházelo například k vibracím popsaným v teorii, které měly značný efekt na měření dynamické třecí síly. Nejpřesnějších výsledků bylo dosaženo pro papír a pro lakovaný kov, kde k žádným vibracím nedocházelo.

### Závěr

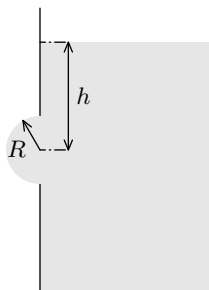
Změřené hodnoty částečně odpovídají teoretickým předpokladům. Největší rozdíl mezi statickým a dynamickým třením vzniká na mokrému sklu, kde se však zdá, že koeficient dynamického tření příliš nezávisí na přítláčné síle. Největší rozdíl mezi statickým a dynamickým třením se projevil u lakovaného kovu. Pro suchý papír a suché linoleum je naopak koeficient statického tření menší nebo roven koeficientu dynamického tření.<sup>6</sup> Pro mokré sklo a linoleum vychází koeficient nižší než pro suché povrchy pro sklo je rozdíl asi pětinašobný.

<sup>6</sup>Může se jednat o nepřesnost měření nebo o závislost koeficientu dynamického tření na rychlosti. Ve skutečnosti může být koeficient statického tření minimálně roven koeficientu dynamického tření.

## Úloha IV.E . . . lahvované povrchové napětí

Máme válcovou nádobu, ve které vytvoříme z boku kruhový otvor. Nalijeme do ní vodu. Voda bude postupně vytékat, ale v nějaké výšce nad otvorem se výtok vody z nádoby zastaví. Určete povrchové napětí vody na základě změřené výšky nad otvorem, ve které se hladina zastaví. Pokus několikrát opakujte, a to alespoň se třemi různě velkými otvory. Jako válec může posloužit vhodná PET lahev.

### Teorie



Obr. 37: Nákres situace u otvoru.

Podívejme se na začátek, kde se povrchové napětí vody vlastně bere a co to je. V kapalině jsou molekuly v mnohem menších vzájemných vzdálenostech než v plynu, takže v blízkosti dané molekuly je dostatečný počet dalších molekul, které na ni působí přitažlivými silami, které vyvolávají nezanedbatelný kohezní tlak. Pokud si vezmeme situaci, kdy máme molekulu kapaliny ve větší hloubce pod volným povrchem, počet molekul kolem této molekuly je poměrně velký a tyto molekuly jsou rovnoměrně rozloženy, takže se jejich interakce vzájemně vyruší a výslednice sil je prakticky rovna nule. Pokud se však molekula dostatečně přiblíží povrchu, výslednice sil, jimiž na ni působí ostatní molekuly kapaliny, bude směřovat dovnitř kapaliny kolmo k volnému povrchu.

Samozřejmě na ni budou silově působit i molekuly plynu (syté páry nad kapalinou), nicméně hustota kapaliny je obvykle řádově větší než plynu, proto celková výslednice sil bude stále směřovat dovnitř kapaliny. Z toho plyne, že převedení molekuly z vnitřku kapaliny do její povrchové vrstvy je spojeno s vykonáním práce proti silám působení ostatních molekul. Takže molekuly na povrchu musí mít větší potenciální energii, kterou nazýváme povrchová energie  $E_p$ . Povrchové napětí můžeme definovat jako práci vnějších sil potřebných k zvětšení plochy vztáženou na změnu plochy, tedy

$$\sigma = \frac{dE_p}{dS}.$$

Případně jako přitažlivou sílu molekul  $F$  vztáženou na jednotku délky myšleného řezu povrchem kapaliny  $l$ , tedy

$$\sigma = \frac{dF}{dl}.$$

Podíváme-li se na náš experiment (schéma na obrázku 37), pak je zřejmé, že hydrostatická síla, respektive hydrostatický tlak vody bude nutit kapalinu vytékat bočním otvorem ven. Povrchové napětí naopak bude působit soudržnost kapaliny a bránit jejímu odtékání.

Vně nádoby je atmosferický tlak  $p_a$ . Tlak v hloubce  $h$  pod hladinou kapaliny je roven součtu atmosferického a hydrostatického tlaku, tedy  $p_a + h\rho g$ , kde  $\rho$  je

hustota kapaliny a  $g$  je tíhové zrychlení. Pro rozdíl tlaků  $\Delta p$  na rozhraní dvou tekutin za rovnovážného stavu platí Youngova-Laplaceova rovnice

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (79)$$

kde  $\sigma$  je povrchové napětí a poloměry křivosti rozhraní jsou  $R_x$  a  $R_y$ . Dále budeme předpokládat, že  $R_x = R_y = R$ , tedy že povrch kapaliny má tvar kulového vrchlíku o poloměru  $R$ . Z obrázku 37 vidíme, že poloměr křivosti rozhraní  $R$  bude vždy větší nebo roven (v případě, že má povrch tvar polokoule) než poloměr otvoru  $d/2$ , tedy z rovnice (79) dostáváme nerovnici  $\Delta p \leq 4\sigma/d$ . Po dosazení za  $\Delta p$  již můžeme získat vztah pro povrchové napětí

$$\sigma \geq \frac{h\sigma g d}{4},$$

přičemž dále budeme předpokládat, že povrch kapaliny má přesně tvar polokoule.

Je dobré myslet na to, že povrchové napětí je poměrně výrazně závislé na teplotě. Pro pokus proto byla použita voda s pokojovou teplotou, která činila přibližně 20 °C, pro kterou by povrchové napětí vody mělo<sup>7</sup> být asi 0,073 N·m<sup>-1</sup>. Hustota destilované vody při této teplotě činí asi 998 kg·m<sup>-3</sup>, jelikož však stejně máme kohoutkovou vodu, spokojíme se pro výpočet se zaokrouhlenou hodnotou 1 000 kg·m<sup>-3</sup>.

### Experiment

Pro experiment byla použita PET láhev, jak doporučuje zadání. Do ní byl jehlou vytvořen otvor. Jehla byla v příslušné šířce označena a její průměr zde byl změřen posuvným měřítkem, tento průměr byl posléze považován za průměr otvoru  $d$ .

Do láhve byla nalita voda do dostatečné výšky nad otvorem a nechala se volně odtékat až do předpokládaného vyrovnání tlaků, respektive zastavení odtékání. A poté byla pomocí pravítka s dílkou po 0,5 mm změřena výška hladiny  $h$  od středu otvoru po dolní hranu menisku hladiny. Měření bylo provedeno pro celkem čtyři různé průměry otvoru  $d$ , pro každý bylo opakováno pětkrát (pro nejmenší otvor trvalo jedno měření poměrně dost dlouho, větší počet opakování by tedy byl časově náročný).

Pro větší otvory a větší míru naplnění PET láhve šlo dobře pozorovat klesající rychlost vytékání vody (snižující se spolu s hydrostatickým tlakem) – její proud se postupně více a více přibližoval PET lahvi až nakonec tekla už pouze po ní.

### Výsledky a diskuze

V tabulce 8 jsou zaznamenány naměřené výšky hladin  $h$  spolu s průměrnou výškou  $\bar{h}$  pro každý z otvorů s nejistotou určenou jako kombinovaná nejistota nejistoty typu A (určené jako výběrová směrodatná odchylka násobená kvantilem Studentova rozdělení pro daný počet měření) a nejistoty typu B (polovina nejmenšího

<sup>7</sup><http://www.converter.cz/tabulky/povrchove-napeti.htm>

Tab. 8: Naměřené výšky hladin  $h$ , průměrná hodnota výšek  $\bar{h}$ , průměr otvorů  $d$  a vypočtené povrchové napětí vody  $\sigma$  pro čtyři různé průměry otvoru  $d$ .

$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{h}{\text{mm}}$		$\frac{\bar{h}}{\text{mm}}$	$\frac{\sigma}{\text{N}\cdot\text{m}^{-1}}$			
$0,4 \pm 0,1$	18,0	17,5	17,0	18,5	18,0	$17,8 \pm 0,9$	$0,017 \pm 0,004$
$0,7 \pm 0,1$	10,0	11,0	11,0	10,5	10,0	$10,5 \pm 0,8$	$0,018 \pm 0,003$
$1,0 \pm 0,1$	8,5	7,5	8,0	8,5	8,5	$8,2 \pm 0,6$	$0,020 \pm 0,003$
$1,3 \pm 0,1$	5,5	5,5	5,5	6,0	6,0	$5,7 \pm 0,3$	$0,018 \pm 0,002$

dílku pravítka), šířka otvoru  $d$  a dopočítané povrchové napětí  $\sigma$ , přičemž nejistota  $\Delta\sigma$  povrchového napětí  $\sigma$  byla určena pomocí zákona šíření nejistot

$$\Delta\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial\sigma}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial\sigma}{\partial d}\Delta d\right)^2} = \frac{\rho g}{4} \sqrt{(d\Delta h)^2 + (h\Delta d)^2},$$

kde  $\Delta h$  je nejistota hloubky  $h$ ,  $\Delta d$  je nejistota průměru otvoru  $d$  a  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  i hustotu vody považujeme za konstanty.

Vidíme, že získané hodnoty povrchového napětí jsou přibližně čtyřikrát menší, jež je tabulková hodnota, kterou bychom u vody dané teploty očekávali.

Důvodem je pravděpodobně hlavně to, že experiment je sice vhodnou demonstrací důsledků povrchového napětí kapalin (všechna voda nad otvorem neodtéká, i když má kudy), ale nehodí se pro jeho kvantifikaci. Zásadním problémem je nejspíše právě to, že vodu necháváme odtékat, takže není statická a dochází k proudění, neměříme tedy situaci při vyrovnání tlaků, tak jak bychom čekali. Vhodnější by mohlo být naopak nechat kapalinu velmi pomalu natékat hadičkou u dna a hodnotit, kam hladina vystoupí, neboť takto bychom omezili víření kapaliny. Dalšími příčinami podhodnocených výsledků mohou být například neideálnost otvoru, nebo to, že kapka nemusí držet v otvoru, ale může jej překrývat, skutečný poloměr je poté větší, což také vede k menším hodnotám povrchového napětí. Poslední zmíněný jev bychom mohli odstranit zvětšením otvoru, avšak v příliš velkých otvorech se utvoří pouze mírně zakřivená blána, jejíž poloměr křivost je i násobně větší než poloměr otvoru, což opět vede k velkým nepřesnostem při stanovení povrchového napětí.

Skutečné hodnotě se výrazněji nepřiblížíme, ani když zohledníme nejistoty měření, čili celý interval, ve kterém by se hodnota povrchového napětí měla nacházet. Je to dáno tím, že nejistoty měření hodnotí především přesnost, s jakou jsme něco měřili, nicméně prakticky jsme neměřili to, co jsme předpokládali.

### Závěr

V našem experimentu jsme mohli pozorovat důsledky povrchového napětí. Získané hodnoty povrchového napětí převážně pod  $0,020 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  jsou však výrazně menší, než by měly pro vodu s pokojovou teplotou být. Na závěr je tedy nutné říct, že experiment pro určení hodnoty povrchového napětí kapalin není vhodně navržen.

## Úloha V.E ... sladíme

Změřte závislost teploty tuhnutí vodného roztoku sacharózy na koncentraci za atmosférického tlaku.

## Teorie

Pro vyjádření koncentrace roztoku budeme používat hmotnostní zlomek  $w_c$ , který je roven poměru hmotnosti  $m_c$  rozpuštěného cukru ku hmotnosti celého roztoku  $m_{\odot} = m_c + m_v$ , kde  $m_v$  je hmotnost vody, tedy

$$w_c = \frac{m_c}{m_{\odot}} = \frac{m_c}{m_c + m_v}. \quad (80)$$

Koncentraci můžeme vyjádřit také pomocí molárního zlomku  $x_c$ , tedy poměru látkového množství cukru  $n_c$  ku látkovému množství celého roztoku  $n_{\odot} = n_c + n_v$ , kde  $n_v$  je látkové množství vody v roztoku. Látkové množství je rovno poměru hmotnosti a molární hmotnosti, platí tedy

$$x_c = \frac{n_c}{n_{\odot}} = \frac{n_c}{n_c + n_v} = \frac{\frac{m_c}{M_c}}{\frac{m_c}{M_c} + \frac{m_v}{M_v}}, \quad (81)$$

kde  $M_c \doteq 342,3 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$  je molární hmotnost cukru (přesněji sacharózy) a molární hmotnost vody je  $M_v \doteq 18,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

Ochlazujeme-li čistou vodu z teploty, při které je kapalná (např.  $80^\circ\text{C}$ ), na teplotu, při které je tuhá (např.  $-20^\circ\text{C}$ ), při určité teplotě dojde k fázové přeměně, tedy k tuhnutí vody na led. Teplota při této fázové přeměně je konstantní, přičemž ale k dokončení fázové přeměny (tedy ztuhnutí vody) je třeba ze vzorku stále odebrat teplo (tzv. latentní teplo, v tomto případě skupenské teplo tuhnutí).

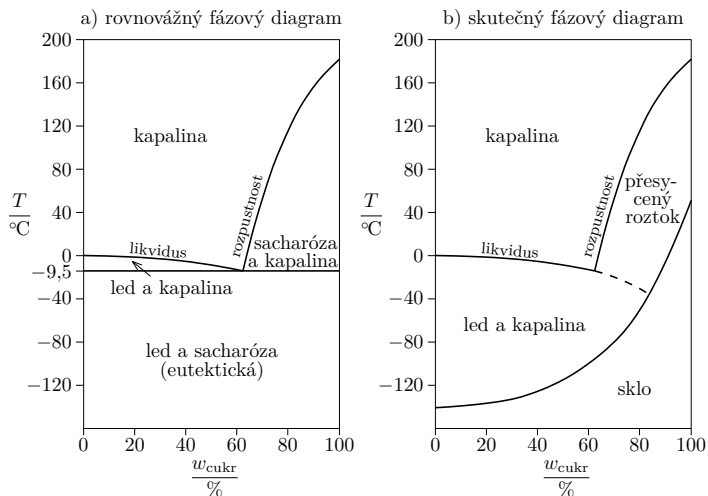
Vložíme-li vodu do prostředí, ve kterém udržujeme teplotu pod teplotou tuhnutí vody, teplota vody se bude snižovat až k teplotě tuhnutí, na ní se na nějakou dobu zastaví a teprve poté se bude ochlazovat dále (viz obrázek 40a a také naměřená závislost na obrázku 41). Z naměřené závislosti teploty na čase je pak možné určit teplotu tuhnutí (resp. tání) vody.

Chování směsi dvou látek při různých teplotách a koncentracích vyjadřuje tzv. binární fázový diagram. Máme-li směs dvou látek dané koncentrace, dokážeme z něj vyčíst, jak se bude s měněním teploty chovat. V mnoha případech nás zajímá rovnovážný fázový diagram, tedy fázový diagram (pro sacharózu viz obrázek 38a), který zobrazuje rovnovážné stavy.

V případě sacharózy však rovnovážné stavy nejsou snadno dosažitelné, vzhledem k složitosti molekuly sacharózy a také kvůli vysoké viskozitě roztoků je jen malá pravděpodobnost, že dojde k nukleaci a růstu krystalu a vzniku rovnovážného stavu.<sup>8</sup> Skutečný fázový diagram je na obrázku 38b.

Popišme nyní chování roztoku sacharózy o hmotnostním zlomku  $w_0$  (nižší než je mez rozpustnosti) o pokojové teplotě, který začneme ochlazovat (dále budeme popisovat obrázek 39). Ve fázovém diagramu sestrojíme čáru  $w_c = w_0$ . Vidíme, že

<sup>8</sup><http://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/biocrystal/water-sucrose.php>



Obr. 38: Rovnovážený a skutečný binární fázový diagram voda–sacharóza.

 Zdroj: <http://www.doitpoms.ac.uk>

tato čára protíná křivku likvidu při teplotě  $T_t$ . Toto je teplota, při které v roztoku začínají růst krystaly vody (tj. začíná se vylučovat led). Jelikož se vylučuje z roztoku led, snižuje se koncentrace vody v roztoku, a tedy koncentrace sacharózy roste. Závislost koncentrace sacharózy na teplotě pak udává křivka likvidu – při teplotě  $T_1 < T_t$  je hmotnostní zlomek sacharózy  $w_1 > w_0$ .

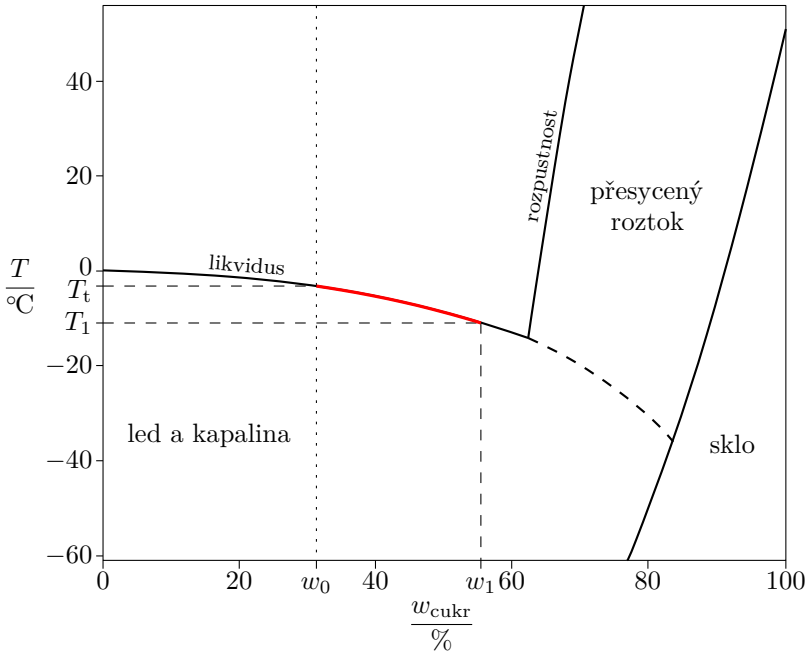
Pokud nyní náš experiment s ochlazováním vody v prostředí s nízkou teplotou opakujeme s roztokem o hmotnostním zlomku  $w_0$ , při teplotě  $T_t$  dojde k výrazné změně rychlosti ochlazování (viz obrázek 40 a naměřená závislost na obrázku 43). Z naměřené závislosti teploty na čase pak můžeme pro danou koncentraci určit teplotu, při které začíná v roztoku krystalizovat voda.

Pro to, aby začala voda krystalizovat na led, je třeba, aby byla přítomna tzv. nukleační centra, tedy jakési zárodky krystalů. Ta mohou vzniknout náhodným setkáním více částic dané látky (tj. v našem případě vody), což je ovšem brzděno snahou systému o vyrovnání koncentrace v celém objemu. V případě, že látku ochlazujeme příliš rychle, může dojít k podchlazení, tj. k ochlazení látky na teplotu nižší než je teplota tuhnutí, přesto však látka může zůstat kapalná. Například vodu je možné za normálního tlaku podchladiť<sup>9</sup> až na  $-42^{\circ}\text{C}$ . Pokud bychom vodu nebo roztok ochlazovali velmi rychle na nízkou teplotu (pro vodu<sup>10</sup> je tato rychlost řádově  $10^6 \text{ K}\cdot\text{s}^{-1}$  a teplota asi  $-135^{\circ}\text{C}$ ) nedošlo by vůbec ke krystalizaci, látka by ztuhla jako amorfni, vytvořilo by se tedy sklo.

V případě, kdy dojde k podchlazení, je pak možné, že se teplota látky na

<sup>9</sup>[https://cs.wikipedia.org/wiki/Podchlazení\\_\(termodynamika\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Podchlazení_(termodynamika))

<sup>10</sup><http://www.benbest.com/cryonics/lessons.html#glass>



Obr. 39: Část fázového diagramu s vyznačenou změnou koncentrace kapaliny při změně teploty.

krátkou dobu opět zvýší (viz třetí sloupec na obrázku 40 a naměřená závislost na obrázku 44). V tom případě může být obtížné zjistit teplotu, při které by při velmi pomalém ochlazování ke krystalizaci začalo docházet. V případě, že odebíráme teplo stálým výkonem, je možné např. ke křivkám ochlazování vytvořit tečny (viz obrázek 40) a hledat jejich průsečík.

### Model

Pokusme se nyní najít závislost teploty tuhnutí na koncentraci roztoku.<sup>11</sup> V rovnovážném stavu mezi ledem a tekutým roztokem pro chemické potenciály vztažené na 1 mol (v tomto případě měrnou Gibbsovu energii)  $\mu_l$ , resp.  $\mu_{\odot}$  platí

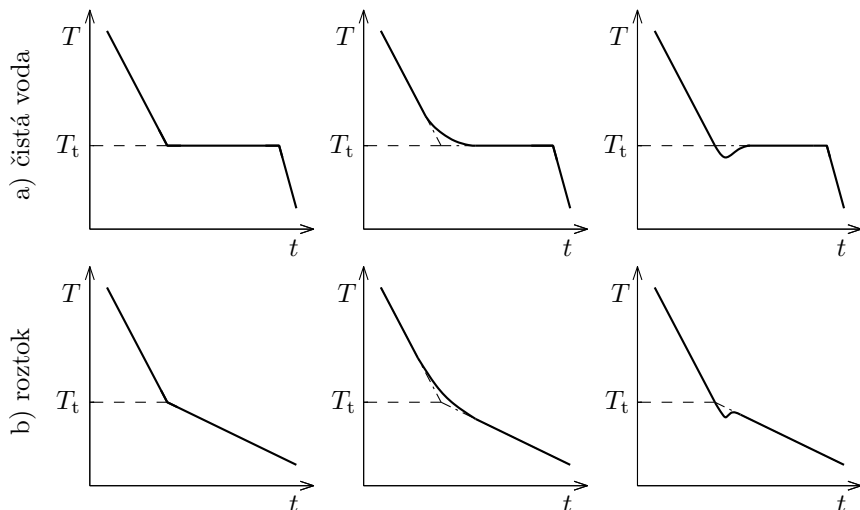
$$\mu_l = \mu_{\odot}. \quad (82)$$

Pro chemický potenciál ideálního vodného roztoku při teplotě  $T$  platí

$$\mu_{\odot} = \mu_v + RT \ln a_v, \quad (83)$$

kde  $\mu_v$  je chemický potenciál čistého rozpouštědla (vody),  $a_v$  je aktivita roztoku a  $R$  je molární plynová konstanta. Pro aktivitu platí  $a_v = x_v \gamma_v$ , kde  $x_v$  je molární

<sup>11</sup><https://tinyurl.com/freezingpoint-depression> a v Mortimer R. *Physical Chemistry*.



Obr. 40: Možné křivky ochlazování pro čistou látku a pro roztok v případě konstantního výkonu ochlazování. Vyznačeny jsou optimální způsoby odečtu teploty fázového přechodu.

zlomek vody a  $\gamma_v$  je aktivní koeficient. Speciálně pro ideální roztok platí  $\gamma_v = 1$ . Dosazením (83) do (82) dostaneme podmínku pro rovnovážné stavy

$$\ln x_v = \frac{\mu_l - \mu_v}{RT}.$$

Obě strany rovnice zderivujeme podle teploty (za konstantního tlaku  $p$ ), čímž dostaneme

$$\frac{d \ln x_v}{dT} = -\frac{\mu_l - \mu_v}{RT^2} + \frac{1}{RT} \left( \frac{\partial \mu_l}{\partial T} \right)_p - \frac{1}{RT} \left( \frac{\partial \mu_v}{\partial T} \right)_p, \quad (84)$$

kde index  $p$  za derivací značí, že se jedná o derivaci za konstantního tlaku  $p$ . Chemický potenciál  $\mu$  můžeme vyjádřit pomocí molární entalpie  $H$  a molární entropie  $S$  jako  $\mu = H - TS$ , přičemž  $S = (\partial \mu / \partial T)_p$ . Využitím těchto vztahů můžeme rovnici (84) upravit na

$$\frac{d \ln x_v}{dT} = -\frac{H_l - H_v}{RT^2} = \frac{\Delta H}{RT^2}, \quad (85)$$

kde  $\Delta H$  je rozdíl molární entalpie tuhé a kapalné fáze vody při rovnovážné teplotě (teplotě tuhnutí), tedy měrné molární skupenské teplo tuhnutí rozpouštědla (vody), které má jednotku  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Rovnici (85) zintegrujeme podle teploty od



teploty tuhnutí  $T_0$  čistého rozpouštědla do (hledané) teploty tuhnutí roztoku  $T_t$ , tedy

$$\int_{T_0}^{T_t} \frac{d \ln x_v}{dT} dT = \int_{T_0}^{T_t} \frac{\Delta H}{RT^2} dT. \quad (86)$$

Integrál na levé straně je roven

$$\int_{T_0}^{T_t} \frac{d \ln x_v}{dT} dT = [\ln x_v]_{T=T_0}^{T=T_t} = \ln x_v|_{T=T_t},$$

kde jsme využili skutečnosti, že má-li být teplota tuhnutí rovna  $T_0$ , musí být molární zlomek vody roven 1 (tj. čistá voda), tudíž  $\ln x_v|_{T=T_0} = \ln 1 = 0$ . Pro přehlednost budeme dále  $x_v$  označovat molární zlomek roztoku s teplotou tuhnutí  $T_t$ , tedy budeme psát  $\ln x_v|_{T=T_t} = \ln x_v$ . Předpokládáme-li, že  $\Delta H$  nezávisí na teplotě, integrál na pravé straně dokážeme snadno vypočítat, čímž dostaneme

$$\ln x_v = \frac{\Delta H}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_t} \right),$$

odkud již můžeme vyjádřit závislost teploty tuhnutí na molárním zlomku vody jako

$$T_t = \frac{\Delta H T_0}{\Delta H - R T_0 \ln(x_v)}. \quad (87)$$

Všimněme si, že tato teplota nezávisí na vlastnostech rozpuštěné látky, pouze na teplotě  $T_0$  tuhnutí čistého rozpouštědla, jeho měrném skupenském teple tuhnutí  $\Delta H$  a na molárním zlomku.

Pokud bychom předpokládali, že molární zlomek vody je blízký 1 (tj. koncentrace cukru je malá) a teplota tuhnutí roztoku se od teploty tuhnutí čistého rozpouštědla liší jen málo, pak bychom úpravou (87) dostali tzv. Blagdenův zákon, tj. že změna teploty tuhnutí roztoku oproti teplotě tuhnutí čistého rozpouštědla je přímo úměrná molárnímu zlomku rozpuštěné látky.<sup>12</sup>

Koncentraci při měření budeme vyjadřovat hmotnostním zlomkem cukru  $w_c$ , proto v rovnici (87) potřebujeme nahradit molární zlomek vody  $w_v$ . Využijeme toho, že molární zlomek vody je roven  $x_v = 1 - x_c$ , kde  $x_c$  je molární zlomek cukru. Z rovnic (80) a (81) pak vyjádříme

$$x_v = \frac{M_c}{M_c + M_v \frac{w_c}{1-w_c}}, \quad (88)$$

a tedy po dosazení (88) do (87) již známe teoretickou závislost teploty tuhnutí na hmotnostním zlomku cukru. Všimněme si, že tato závislost závisí i na molární hmotnosti cukru. Pokud bychom místo cukru používali kuchyňskou sůl, která má molární hmotnost nižší – asi  $58,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  při stejném hmotnostním zlomku (tedy stejné hmotnosti látky v daném množství vody) by teplota tuhnutí byla nižší. Například pro hmotnostní zlomek 0,2 vychází pro cukr teplota tuhnutí asi  $-1,3^\circ\text{C}$ , zatímco pro sůl asi  $-7,5^\circ\text{C}$ , z čehož je zřejmé, že chodník je lepší v zimě solit nežli sladit.

<sup>12</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Freezing-point\\_depression#Calculation](https://en.wikipedia.org/wiki/Freezing-point_depression#Calculation)

## Měření

Z výše uvedeného vidíme, že v případě roztoku neexistuje jedna pevná teplota, při které roztok tuhne, ale jedná se o teplotní interval. Budeme tedy měřit teplotu, při které roztok začíná tuhnout (začíná krystalizovat voda), tedy teplotu, při které pozorujeme výraznou změnu v rychlost ochlazování. Naměřená závislost tedy bude křivkou likvidu ve fázovém diagramu (obrázek 38).

Při měření byl nejprve v nerezové nádobě válcového tvaru připraven roztok přidáním kostkového cukru o hmotnosti  $m_c$  do vody o hmotnosti  $m_v$  a jeho rozpuštěním. Poté byl roztok vložen do mrazáku, ve kterém se teplota pohybovala mezi  $-25\text{ }^\circ\text{C}$  a  $-30\text{ }^\circ\text{C}$ .

Teplota roztoku během ochlazování byla v sekundových intervalech měřena pomocí teploměru Dallas DS18B20 v pouzdře TO92, které bylo celé ponořeno do roztoku tak, aby se nedotýkalo stěn nádoby.

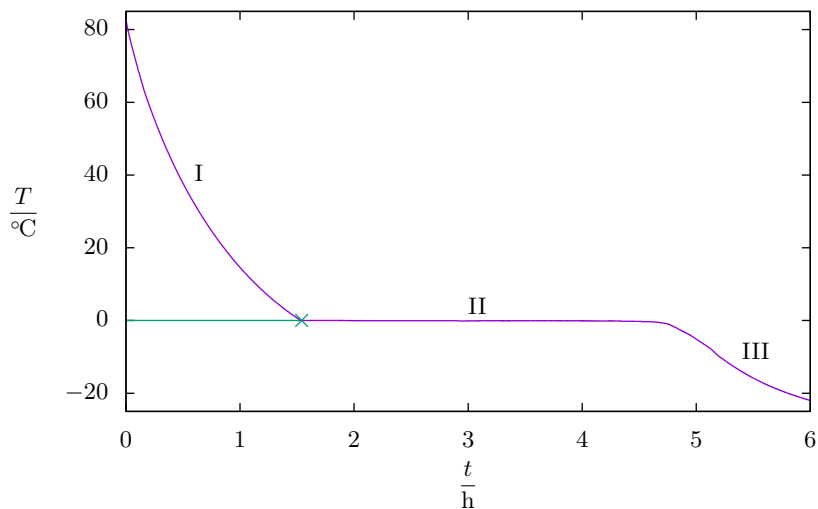
Nejprve byla změřena křivka chladnutí pro čistou vodu, viz obrázek 41. Vidíme, že teplota tuhnutí je dle očekávání  $0\text{ }^\circ\text{C}$ .

Měrná tepelná kapacita, tedy teplo nutné k ohřátí jednotkové hmotnosti dané látky o  $1\text{ K}$ , je pro vodu  $c_v = 4180\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  a pro led  $c_l = 2090\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Měrná tepelná kapacita ledu je poloviční, v případě, že bychom teplo odebírali látce stále stejným výkonem, měla by směrnice naměřené křivky před tuhnutím být dvojnásobná než po tuhnutí. Směrnici křivky získáme numerickým zderivováním naměřené křivky, viz obrázek 42. Vidíme, že rychlost ochlazování po zmrznutí dvojnásobná není, což může být způsobeno například tím, že fázová přeměna nebyla dokončena v celém objemu v jeden okamžik. Rychlost ochlazování je navíc závislá na okolní teplotě, která se v případě mrazáku měnila (na některých naměřených křivkách bylo zejména při nižších teplotách patrné, že při zapnutí kompresoru se teplota snižovala, po vypnutí se opět začala mírně zvyšovat).

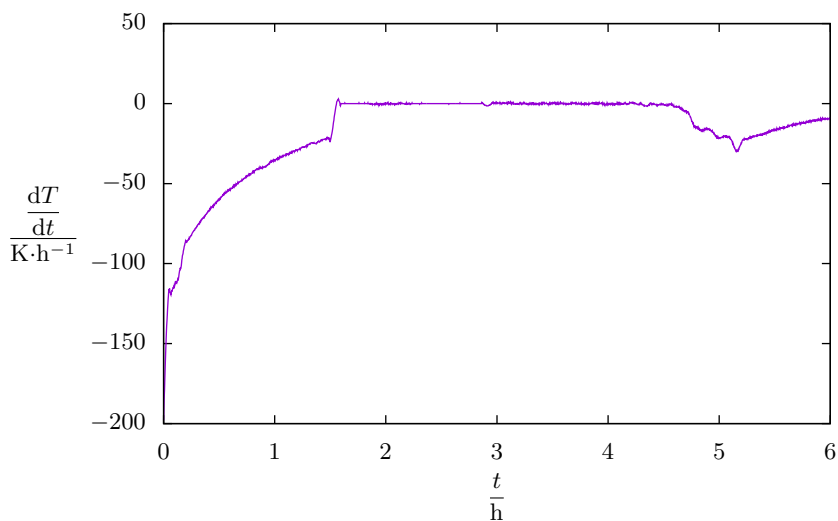
Z derivace na obrázku 42 můžeme ze znalosti měrné tepelné kapacity vody též odhadnout i měrné skupenské teplo tuhnutí vody, předpokládáme-li, že tepelný tok ze vzorku závisí pouze na jeho teplotě. Těsně předtím, než začne vzorek tuhnout (tedy již při teplotě  $0\text{ }^\circ\text{C}$ ), je vzorek ochlazován rychlostí asi  $21,2\text{ K}\cdot\text{h}^{-1}$ , je tedy odebíráno teplo rychlostí  $c_v \cdot 21,2\text{ K}\cdot\text{h}^{-1} = 88\,600\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{h}^{-1}$ . Voda tuhla asi  $3,2\text{ h}$ , tudíž odevzdala teplo  $88\,600\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{h}^{-1} \cdot 3,2\text{ h} = 280\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ . Skutečná hodnota měrného skupenského tepla tuhnutí je  $333,7\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ , náš odhad je tedy řádově správný.

Při měření s roztoky zejména vyšších koncentrací ( $w_c > 30\%$ ) docházelo vždy k podchlazení (viz naměřená závislost na obrázku 44). Vzhledem k tomu, že výkon, kterým bylo odebíráno teplo, závisel na teplotě i čase, nebylo možné k určení teploty, při které začíná roztok tuhnout, použít postup z obrázku 40. Proto byla tato teplota odhadnuta dle obrázku 44. Z obrázku 40 je pak zřejmé, že skutečná teplota, při které roztok začíná tuhnout, je vyšší než ta, kterou jsme tímto postupem odečetli.

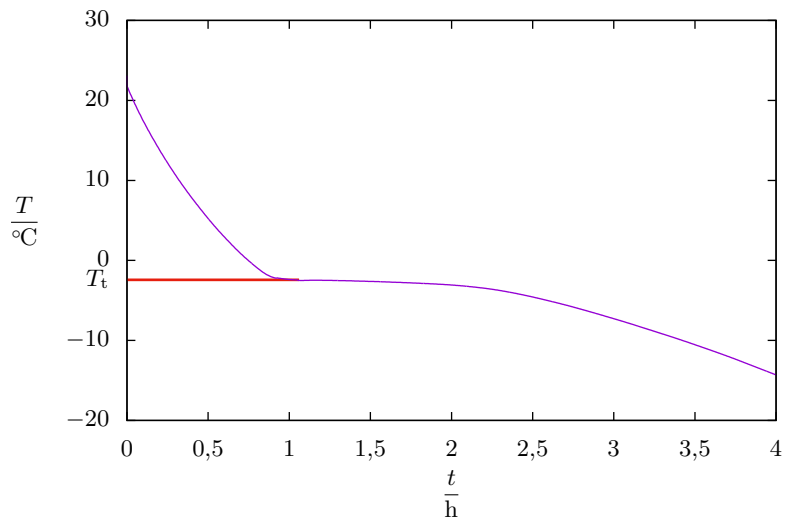
Při koncentracích  $63,8\%$  a  $66,1\%$  (roztoky o takto vysoké koncentraci bylo nutné připravit při zahřívání, neboť dle fázového diagramu na obrázku 38 je rozpustnost při pokojové teplotě nižší) se již nepodařilo roztok zmrazit. Při ochlazení na teplotu okolo  $-25\text{ }^\circ\text{C}$  měl roztok velkou viskozitu (odhadem vyšší než teku-



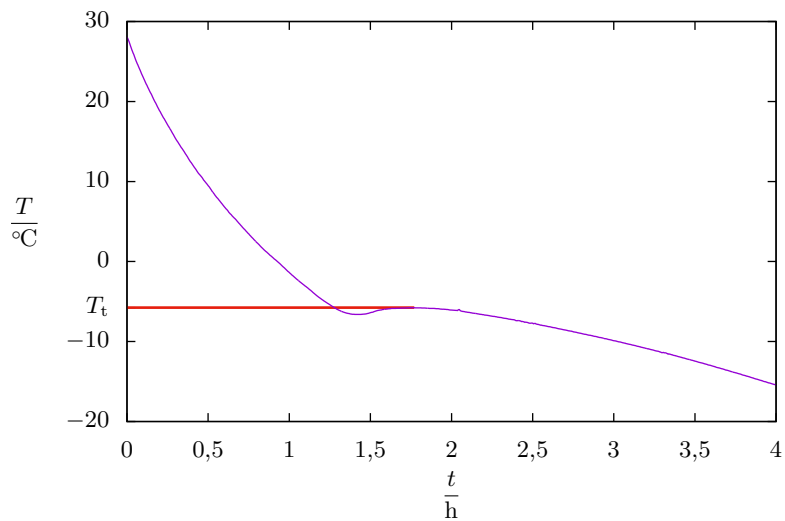
Obr. 41: Naměřená křivka chladnutí vody. I – ochlazování vody, II – tuhnutí při teplotě tuhnutí, III – ochlazování ledu.



Obr. 42: Přibližně vypočítaná derivace křivky chladnutí vody na obrázku 41.



Obr. 43: Naměřené křivky chladnutí pro nižší koncentraci roztoku ( $w_c \doteq 24\%$ ).



Obr. 44: Naměřená křivka chladnutí roztoku pro vyšší koncentraci roztoku ( $w_c \doteq 41\%$ ), kdy došlo k podchlazení.

tý med při pokojové teplotě), dle fázového diagramu (obrázek 38b) by mělo jít o přesycené roztoky.

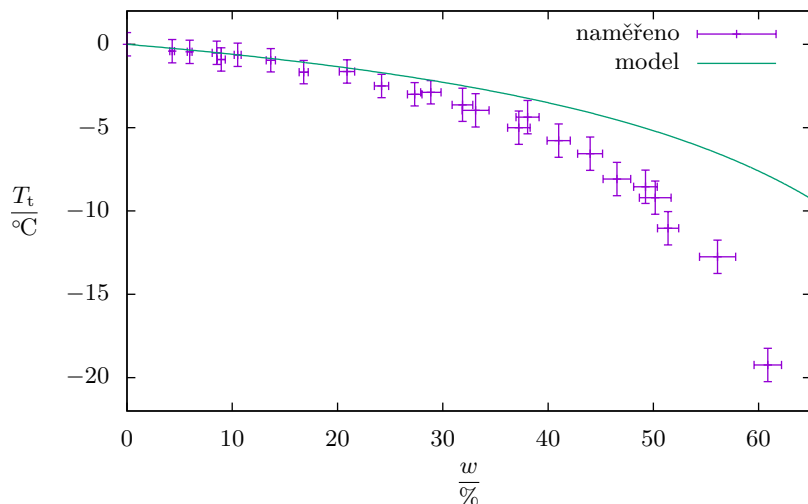
Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 9. Naměřenou závislost teploty, kdy vodný roztok sacharózy začíná tuhnout, na jeho koncentraci pak uvádíme na obrázku 45, a to včetně teoreticky vypočítaných hodnot dle rovnice (87).

Tab. 9: Naměřené hodnoty.

$\frac{m_v}{g}$	$\frac{m_c}{g}$	$\frac{w_c}{\%}$	$\frac{T_t}{^\circ\text{C}}$
137 ± 5	0,0	0,0	0,0 ± 0,7
100 ± 5	4,5 ± 0,1	4,3 ± 0,2	-0,4 ± 0,7
129 ± 5	8,2 ± 0,1	5,9 ± 0,2	-0,5 ± 0,7
94 ± 5	8,7 ± 0,1	8,5 ± 0,4	-0,5 ± 0,7
110 ± 5	10,8 ± 0,1	9,0 ± 0,4	-0,9 ± 0,7
143 ± 5	16,8 ± 0,1	10,5 ± 0,3	-0,6 ± 0,7
135 ± 5	21,3 ± 0,1	13,7 ± 0,4	-1,0 ± 0,7
164 ± 5	33,1 ± 0,1	16,8 ± 0,4	-1,7 ± 0,7
114 ± 5	30,2 ± 0,1	20,9 ± 0,7	-1,6 ± 0,7
134 ± 5	42,9 ± 0,1	24,2 ± 0,7	-2,5 ± 0,7
143 ± 5	53,8 ± 0,1	27,3 ± 0,7	-3,0 ± 0,7
106 ± 5	43,2 ± 0,1	28,9 ± 1,0	-2,9 ± 0,7
111 ± 5	52,0 ± 0,1	31,9 ± 1,0	-3,6 ± 1,0
87 ± 5	42,9 ± 0,1	33,1 ± 1,3	-4,0 ± 1,0
109 ± 5	64,7 ± 0,1	37,2 ± 1,1	-5,0 ± 1,0
108 ± 5	66,1 ± 0,1	38,0 ± 1,1	-4,4 ± 1,0
110 ± 5	76,6 ± 0,1	41,0 ± 1,1	-5,8 ± 1,0
104 ± 5	82,0 ± 0,1	44,0 ± 1,2	-6,6 ± 1,0
95 ± 5	82,5 ± 0,1	46,5 ± 1,3	-8,1 ± 1,0
111 ± 5	108,1 ± 0,1	49,3 ± 1,1	-8,6 ± 1,0
83 ± 5	83,2 ± 0,1	50,2 ± 1,5	-9,2 ± 1,0
124 ± 5	131,4 ± 0,1	51,4 ± 1,0	-11,0 ± 1,0
71 ± 5	91,3 ± 0,1	56,1 ± 1,7	-12,8 ± 1,0
92 ± 5	142,7 ± 0,1	60,9 ± 1,3	-19,2 ± 1,0
96 ± 5	169,5 ± 0,1	63,8 ± 1,2	nezmrzlo
82 ± 5	160,0 ± 0,1	66,1 ± 1,4	nezmrzlo

### Nejistoty měření

Cukr i voda byly váženy váhou s rozlišením 0,01 g. Nejistotu měření hmotnosti cukru odhadneme na  $\Delta m_c = 0,1 \text{ g}$ . Nejistota měření hmotnosti vody však bude větší, jelikož část vody se může odpařit a v případě nešikovnosti se jí opět část může ztratit při míchání, odhadneme ji tedy na  $\Delta m_v = 5 \text{ g}$ . Nejistotu  $\Delta w_c$  měření



Obr. 45: Naměřená závislost teploty, kdy vodný roztok sacharózy začíná tuhnout, na jeho koncentraci a teoreticky vypočítané teploty tuhnutí dle rovnice (87).

hmotnostního zlomku cukru pak určíme ze zákona šíření nejistot jako

$$\begin{aligned} \Delta w_c &= \sqrt{\left(\Delta m_v \frac{\partial w_c}{\partial m_v}\right)^2 + \left(\Delta m_c \frac{\partial w_c}{\partial m_c}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[\Delta m_v \frac{-m_c}{(m_c + m_v)^2}\right]^2 + \left[\Delta m_c \frac{m_v}{(m_c + m_v)^2}\right]^2} = \\ &= \frac{\sqrt{\Delta m_v^2 m_c^2 + \Delta m_c^2 m_v^2}}{(m_c + m_v)^2}. \end{aligned}$$

Co se týče měření teploty, použité detektory teploty mají rozlišení  $0,0625\text{ }^\circ\text{C}$  a výrobce udává přesnost lepší než  $0,5\text{ }^\circ\text{C}$ . Vzhledem k tomu, že v mnoha případech docházelo k podchlazení, a tedy na naměřeném grafu nebyl jednoznačný bod pro odečtení, nejistotu měření teploty budeme uvažovat vyšší, odhadem  $0,7\text{ }^\circ\text{C}$  pro  $w < 30\%$  a  $1,0\text{ }^\circ\text{C}$  pro  $w > 30\%$ .

Vypočítané nejistoty pro jednotlivá měření jsou v tabulce 9 a též vyneseny jako chybové úsečky na obrázku 45.

### Diskuse

Na obrázku 45 můžeme srovnat naměřenou a teoreticky vypočítanou závislost. Vidíme, že pro koncentrace nad asi  $20\%$  se naměřené hodnoty od teoreticky vypočítaných hodnot začínají rozcházet.

Teoretický model počítal s ideálním roztokem (rovnice (83)) a výsledek teoretického výpočtu bývá po několika dalších aproximacích používán pouze pro malé koncentrace (Blagdenův zákon). Pro přesnější výpočet zejména při vyšších koncentracích by bylo třeba použít jinou rovnici.<sup>13</sup>

Jednou z možných příčin nesouhlasu naměřených hodnot s teoretickým modelem je také postup odečítání teploty tuhnutí v případech, kdy došlo k podchlazení (obrázek 44). Dále je možné, že připravené roztoky z vody z vodovodu a kostkového cukru obsahovaly další nečistoty, které teplotu tuhnutí snížily.

### Závěr

Naměřili jsme závislost teploty, při které vodný roztok sacharózy začíná tuhnout, na koncentraci (viz obrázek 45), a to až do koncentrace asi 60 %. Nakonec něco málo statistiky – pro naměření této úlohy bylo použito 366 kostek cukru.

## Úloha VI.E . . . alchymistická

*Na Zeměploše je regulérním povoláním alchymie. Proto se organizátoři FYKOSu rozhodli, že by se účastníci měli pokusit složit vstupní zkoušku do Cechu alchymistů.*

*Účastníkům se zadáním série přišly tři vzorky tenkých plátkových kovů. Jejich úkolem bylo, na základě dostatečně vědeckých postupů, určit, o jakou látku se jedná.*

Posílali jsme různé druhy vzorků, každý dostal nějaké tři ze seznamu hliník, měď, palladium, stříbro, platina, zlato a mosaz (slitina mědi a zinku). V následujícím budeme popisovat, jak jednotlivé vzorky reagovaly nebo nereagovaly na naše pokusy.

### Žihání

Při žihání se látky zahřejí na vysokou teplotu. Tím u nich může dojít ke změně chemického složení (např. oxidaci), k odstranění nežádoucích příměsí, ke spálení apod. Taky jsou v plameni excitovány elektrony v atomech kovu, které při přechodech zpátky na nižší energetické hladiny vyzařují světlo charakteristických vlnových délek. Důsledkem je v některých případech změna barvy plamene. Používali jsme plamen z propan-butanového kempového vařiče, který může na vzduchu dosahovat teplot<sup>14</sup> až zhruba 2 000 °C. Tabulka 10 uvádí pozorované reakce.

Výsledek dopadl podle očekávání – hliník a měď (i v mosazi) vypadaly tak, jak měly; zbytek, kromě roztavení, víceméně nereagoval. Pro zajímavost – hliník se používá v prskavkách, kdy během hoření mimo jiné vznikají oxid hlinitý a oxid železitý, které se starají o typický vzhled prskavky.

<sup>13</sup>X. Ge, X. Wang. Estimation of Freezing Point Depression, Boiling Point Elevation and Vaporization enthalpies of electrolyte solutions. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 2009.

<sup>14</sup>[http://www.engineeringtoolbox.com/flame-temperatures-gases-d\\_422.html](http://www.engineeringtoolbox.com/flame-temperatures-gases-d_422.html)

Tab. 10: Žhání kovů – pozorované reakce.

kov	pozorováno
hliník	velmi jasný plamen
měď	zezelenání plamene
palladium	nevzplane
stříbro	roztavilo se
platina	nevzplane
zlato	roztavilo se
mosaz	občasné zezelenání plamene

### Leptání

Další cestou, jak rozlišit kovy a slitiny, je studium jejich chování v kyselém a zásaditém prostředí. Kovy si nejdříve rozdělíme podle barev.

Jediný oranžový kov, co máme, je měď. Tu lze dále prokázat kápnutím zředěné kyseliny dusičné (v poměru 1 : 1), povrch by se měl zbarvit modře (jde o typickou barvu měďnatých iontů).

Další skupinou jsou žluté vzorky, to může být zlato nebo slitiny mědi, tedy mosaz (měď se zinkem) nebo bronz (měď s cínem). Vyzkoušíme reakci s  $\text{HNO}_3$ . Zlato by s ní nemělo reagovat; dále ho můžeme dokázat nanesením pár kapek lučavky královské<sup>15</sup> na povrch – zlato by se mělo rozpustit a roztok zbarvit žlutě. Pro rozlišení mosazi a bronzu je vhodné udělat test na zinek a cín. Pokud je přítomen zinek, po krátkém působení kapky koncentrované  $\text{HCl}$  a dvou kapek 10% roztoku sulfidu sodného by se mělo objevit bílé zabarvení  $\text{ZnS}$ . Pokud je přítomen cín, stejným postupem bychom měli dostat žlutohnědé zabarvení  $\text{ZnS}$ .

Většina ostatních kovů je šedá. Rychle vyloučíme alkalické kovy a kovy alkalických zemin, které by buď nevydržely tak dlouho jen tak na vzduchu, nebo by reagovaly s vodou, nebo by byly alespoň jasně poznat v plameni. Také jsme vám neposílali žádné radioaktivní prvky. Při hrátkách s magnetem lze přijít na to, že vzorky jsou nemagnetické, a tedy vyloučit železo, nikl, chrom.

Neušlechtilé kovy by měly z vody vytěšňovat vodík – z našich vzorků by tedy hliník měl po ponoření do vody uvolňovat bublinky plynu, avšak pouze za zvýšené teploty a za předpokladu, že zvětšíme reakční povrch kovu (např. nadrcením). Za pokojové teploty nebude reakce probíhat, přičemž k nereaktivitě významně přispívá samovolná pasivace kovu na vzduchu, tj. pokrytí vrstvičkou oxidu hlinitého. Můžeme vyzkoušet, zda neušlechtilé kovy reagují s různými kyselinami nebo zásadami, podle výsledků si vytipovat, o jakou látku by se mohlo jednat, a následně si svůj tip ověřit.

$\text{NaOH}$  většinu ušlechtilých kovů nerozpouští. Z našich kovů je jediný neušlechtilý hliník, který se jako jediný v  $\text{NaOH}$  rozpustí. Máme-li hliník v roztoku, lze jej dokázat takto: přidáme 1% roztok alizarinu<sup>16</sup> a přidáváme amoniak, dokud vzorek

<sup>15</sup>Směs koncentrované  $\text{HNO}_3$  a  $\text{HCl}$  v objemovém poměru 1 : 3.

<sup>16</sup>1,2-dihydroxyantrachinon, hojně rozšířený červený organický barvivo.



nezfialoví. Poté přidáváme kyselinou octovou, dokud vzorek nezmění barvu – je-li přítomen hliník, měla by být červená, jinak žlutá. Důvodem je, že volný alizarin je v kyselém prostředí žlutý, ale v přítomnosti hliníku s ním tvoří červený komplex.

S koncentrovanou kyselinou dusičnou z našich prvků reaguje pouze stříbro. To lze dále dokázat tak, že na povrch nanese dvě kapky zředěné  $\text{HNO}_3$  (v poměru 1 : 1), necháme krátce působit a přiložíme filtrační papír, na který kápneme několik kapek 10% dichromanu draselného. Mělo by se objevit červenohnědé zbarvení, způsobené sraženinou dichromanu stříbrného.

Palladium i platina jsou v Beketovově řadě kovů až na konci. Nelze je rozpustit v  $\text{HNO}_3$  ani v  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , rozpouštějí se ale v lučavce královské. Palladium reaguje s koncentrovanou  $\text{HCl}$  za vzniku komplexu žlutozelené barvy.

Během našich experimentů jsme neměli dostatek chemikálií na to, abychom ověřili všechny výše uvedené postupy, uvádíme tedy jen reakce s  $\text{NaOH}$  a  $\text{HNO}_3$ . Pro další posuzování jsme používali jiné metody.

Nejprve jsme všechny kovy vložili do  $\text{NaOH}$ . Pouze hliník se rozpustil, ostatní kovy nereagovaly.

Dále jsme použili  $\text{HNO}_3$ . Mosaz se nejprve zbarvila na hnědo a poté se rozpustila, což ukazuje přítomnost mědi. Jediné kovy se zlatou barvou s mědí jsou mosaz a bronz. Zinek by měl být v leptán v  $\text{HNO}_3$  a také byl, mosaz tedy reagovala, jak měla. Z dalších stříbrných vzorků s  $\text{HNO}_3$  reagovalo pouze stříbro.

Vidíme, že většina kovů reagovala dle očekávání. Nereaktivnost hliníku s kyselinou vysvětlujeme vrstvou oxidu na povrchu.

### Měření teploty tání

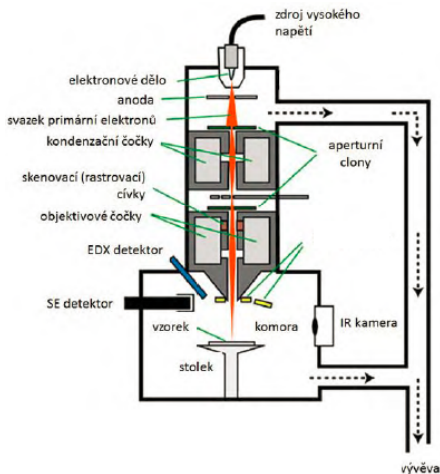
Bod tání je pro každý kov charakteristický a povede-li se nám jej určit, získáme cennou informaci.

Vytvoříme si píčku např. z kanthalového drátu, který žhavíme. Srovnáváme barvu vlákna žárovky s barvou drátu píčky. Do žárovky pouštíme známý proud a je na známém napětí. Považujeme-li je za černá tělesa, mají při stejné barvě stejnou teplotu. Můžeme tedy spočítat odpor vlákna žárovky a porovnat jej s jejím odporem  $R_0$  za pokojové teploty  $T_0$ . Do píčky vložíme kov a žhavíme ji, dokud vzorek nezačne tát. V tom okamžiku si zaznamenáme odpor  $R$  žárovky. V požadovaném rozmezí teplot roste odpor wolframu lineárně s teplotou, proto známe-li teplotní odporový koeficient  $\alpha$  wolframu, můžeme z rovnice  $R = R_0[1 + \alpha(T_t - T_0)]$  určit teplotu vlákna, která je totožná s teplotou tání  $T_t$  vzorku. Pokud bychom znali teplotní závislost odporu drátu píčky, mohli bychom přímo měřit napětí a proud procházející píčkou a z nich počítat příměji teplotu tání vzorku.

K tomuto měření nemůžeme více říci (kromě toho, že jsme byli schopni roztavit všechny zkoumané vzorky), protože jsme jej z časových důvodů neprovedli.

### SEM, EDX

Nejsofistikovanějším způsobem bylo použití SEMu (scanning electron microscope) od firmy TESCAN, typu Mira I LMH, a detektoru EDX (energy-dispersive X-ray spectroscopy) typu Bruker AXS. Nejprve si osvětlíme, co tyto zkratky znamenají.



Obr. 46: Schéma skenovacího elektronového mikroskopu. Zdroj: Studijní text k praktikům MFF k úloze (A24) Využití rentgenové ED analýzy v materiálovém výzkumu, <http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/zadani/424>.

SEM je skenovací elektronový mikroskop. Jeho schéma je na obr. 46. Celé zařízení je umístěno v hlubokém vakuu, které zajišťuje, aby střední dráha elektronů byla dostatečná. Na rozdíl od optického mikroskopu, který používá k prohlížení vzorku viditelné světlo, tento používá elektronový svazek. Elektrony jsou emitovány horkou katodou, na kterou je přivedeno vysoké napětí (to urychluje elektrony pryč od katody a brání jejich zpětnému absorbování). Tyto elektrony, kterým říkáme primární, jsou dále pomocí elektromagnetických čoček zaostřeny na vzorek. Pomocí rastrovacích cívek je možno svazkem pohybovat po vzorku, tedy skenovat ho (odtud název). Kolem vzorku jsou umístěny různé detektory a kamery, abychom mohli získané informace zaznamenat.

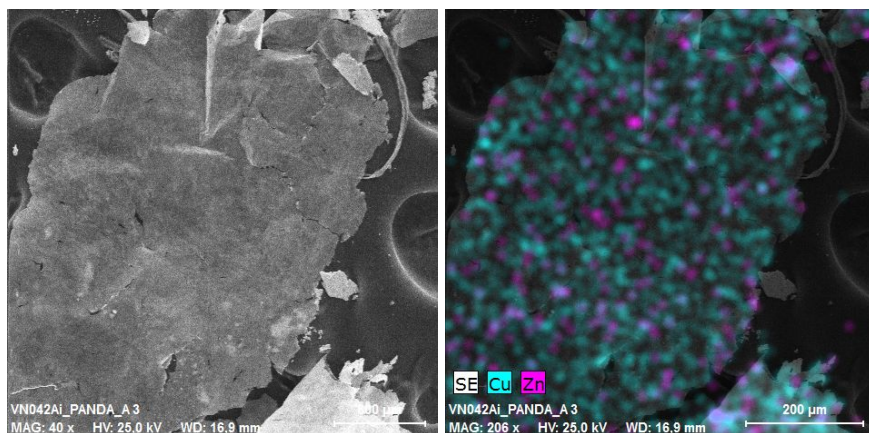
Při dopadu primárních elektronů na vzorek dochází ke složité interakci, při níž se emituje řada různých záření a částic, přičemž každé z nich má jinou fyzikální podstatu a původ. Elektrony, které se od vzorku pružně odrazí, nazýváme zpětně odražené. Nepatrná část se odrazí nepružně – elektron pronikne k vnitřním slupkám atomů a vyrazí z nich sekundární elektron.

Při interakci vzniká také rentgenové záření, které se skládá ze dvou složek. První, tzv. brzdné záření, má charakter spojitého spektra a vzniká v důsledku toho, že dopadající elektrony jsou bržděny elektromagnetickým polem ve vzorku. Vzorek tedy musí být alespoň trochu vodivý a plní funkci anody. Druhá část, tzv. charakteristické záření, vzniká, pokud je při obsazování uvolněných vnitřních slupek atomů elektrony z vyšších slupek vyzářen foton. V rentgenovém spektru se tyto přeskoky projeví jako ostré píky. Poloha těchto píků je pro každý prvek typická a lze podle ní určit, o jaký materiál, případně materiály, se jedná. Navíc

je možné podle intenzity píku určit, jaké množství daného prvku vzorek obsahuje; nám ale bude stačit kvalitativní analýza, tj. bude nás zajímat pouze poloha píků.

K detekci rentgenového záření budeme používat EDX, energiově disperzní X-ray detektor. Když na takový detektor, který je obvykle z dopovaného křemíku, tedy z polovodiče, dopadne foton, absorbují se a vytvoří se pár elektron-díra. Na krystal je aplikováno vysoké napětí, které usměrní pohyb elektronů a děr k opačným elektrodám a vznikne napěťový pulz, který je zaznamenán. Výhodou EDX detektorů je schopnost načítat kontinuálně celé spektrum energií a velká citlivost. Detektor použitý v této úloze disponuje softwarem Esprit pro analýzu dat, který má již zabudovanou databázi charakteristických spekter různých prvků, s kterou naměřená spektra porovnává. Rovnou nám tedy řekne, o který prvek se jedná.

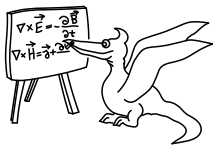
Měření na mosazi potvrdilo přítomnost mědi a zinku ve vzorku. Obrázky z mikroskopu jsou na obr. 47.



Obr. 47: Obrázky mosazi ze SEMu. Vlevo černobílý obrázek vzorku, vpravo barevně odlišené dva nejvíce zastoupené prvky: Cu, Zn.

### Závěr

Tato úloha nebyla jednoduchá. Provedení ztěžovala malá hmotnost a tloušťka vzorků. Výsledky chemických reakcí nemusely odpovídat očekávání kvůli převaze povrchových vlastností, vytvořené vrstvě oxidu či naneseným nečistotám. Některé si také žádaly delší čas. Přesto však s pomocí vizuálního pozorování a několika dalších experimentů šlo kovy určit, nebo alespoň říci, které by to mohly být.



## Seriál o chaosu a numerických simulacích

### Kapitola 1: Jak okřídlit slepici

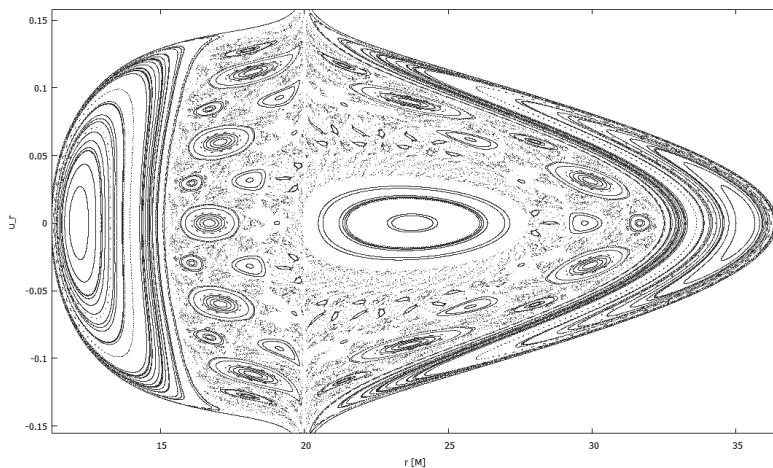
Ve škole se učíte o sféricky symetrických slepicích ve vakuu a pak najednou vyběhnete ven a vidíte jen velmi nesymetrické slepice úplně normálně vnořené do vzduchu. Učíte se o vzduchu jako o ideálním plynu, který nikdy nezkapalní, a na akcích FYKOSu vidíte experimenty s jeho hlavní složkou, dusíkem, v kapalně formě. Při studiu pohybu hmotného bodu v homogenním tíhovém poli dojdete k závěru, že nejdále dohodíte pod úhlem  $45^\circ$ , ale při golfovém turnaji byste s takovou taktikou pohořeli.

Zmíněné modely se ve škole učíme hlavně proto, že jsou jednoduché. Podávají nám kompaktní „vzorečky“, do nichž dosadíme čísla a dostaneme výsledek. Umožňují nám přímo a jednoduše dohlédnout k důsledku nějaké volby parametrů. Ale je to vlastně trochu neuspokojivé a matoucí. Proč je to ve vakuu, proč homogenní, proč můžeme tohle zanedbat a tohle ne? Můžeme nějak určit, jak moc se bude předpověď našeho idealizovaného modelu odchylovat od reality? A kdy nastává ten okamžik, kdy se takové jednoduché přiblížení úplně zhroutí a je úplně k ničemu?

Na tyto a na další otázky narazíme v letošním seriálu. Budeme totiž mluvit o chaosu, to jest o systémech, kde mávnutí motýlího křídla v Brazílii způsobí tornádo v Texasu. V našich zjednodušeních a přiblíženích je to tedy docela bomba, protože malá změna může způsobit zhroucení celého modelu. Po cestě si také ukážeme, jak na naše sféricky symetrické slepice alespoň namontovat elipsoidální křídýlka a připustit jim trochu vzduchu. Chaos na nás totiž čeká sotva za rohem od všech těch idealizovaných systémů ze školy. K výpočtům nám ale už nebude stačit obyčejná kalkulačka a naučíme se sestavovat a pouštět jednoduché simulace.

Numerické simulace nám odemykají svět neuvěřitelné bohatosti složitých vývoju systémů. Vždyť sama příroda je tak bohatá a právě takovéto studium nám umožní alespoň zhruba vidět proč. Už žádné nudné Keplerovy zákony o eliptických orbitách! Už žádné paraboly volného pádu! Už žádná předpověď počasí platná na víc než tři dny! A tak podobně. Alespoň zběžnou představu o tom, jak může jen lehké zkomplikování modelu způsobit nesmírnou rozmanitost pohybů, si můžete udělat z obrázku 48. Ukazuje jakousi mapu možných trajektorií poblíž černé díry s prstencem, ve které najdete nasázené vedle sebe trajektorie všech možných povah i period.

Na to si ale ještě počkejte, protože máte zrovna tělocvik. Dneska se hraje fotbal a na vás vyšla role brankáře. A to není vše, blíží se k vám totiž navíc hřmotná útočnice Alena z protějšího týmu. . .



Obr. 48: Poincarého řez orbitami okolo černé díry s prstencem. Řez vznikl vložením plochy do roviny prstence a poznamenáním vzdálenosti od černé díry  $r$  a rychlost směrem k díře  $u_r$  při každém průtnutí orbity. Různá kolečka odpovídají různým kvaziperiodickým trajektoriiám a „rozsypaný čaj“ odpovídá průtutím chaotických trajektoriiám.

### Výkop se zákrutou

Stojíte v brance a Alena na vás zrovna vypálila míč. Máte sice výborné znalosti fyziky a dokážete přesně počítat, kam dopadne hmotný bod vržený ve vakuu, ale docela najednou si nejste svými předpověďmi tak jistí. Dokáží přesně určit rychlost a polohu míče? A poletí opravdu jako hmotný bod ve vakuu? Neměl(a) bych zahrnout tření vzduchu? A co otáčení míče, to by mohlo mít také vliv, ne? Alena dala té meruně pěknou spinu.

Ale to není všechno, i když chceme zahrnout tření, hrají roli i takové faktory jako hmotnost míče, materiál povrchu, jeho přesný tvar, rozložení hmotnosti uvnitř... Stačí jej vymodelovat jako sférickou šlupku s rovnoměrným povrchem? Vždyť je ten míč sešitý z koženkových pěti a šestiúhelníků, kde některé už mají dost sedřený povrch. A co deformace? Alena nám totiž do té naší dokonalé sféry také naloží kopačkou pořádnou řáhu.

Než se vám však tyto myšlenky stihnou domíhnut hlavou, míč se blíží. Co se zdálo jako dráha mířící nad brankou se najednou stočilo dolů a hrozí vám „šibenicí“ – gólem tečovaným o břevno. Na přemýšlení už není čas, vrhnete se směrem k míči se zdviženými rukama a spoléháte na instinktivní odhad a štěstí. Podařilo se – za cenu téměř zlomených prstů se míč vychýlil vzhůru a odrazil od branky. Pumelici jste vykryli a hra pokračuje.

Síla, která náhlé zahnutí míče směrem do branky zapříčinila, je takzvaná Magnusova síla. Jedná se o sílu, která souhrou proudícího vzduchu okolo míče a jeho

otáčení působí téměř kolmo na směr pohybu a způsobí jeho „faleš“ (pozor, neplést s Falešem, fykosim organizátorem). Vše ale není tak jednoduché, protože pokud by Magnusova síla působila během pohybu rovnoměrně, byl by poměrně předvídatelný. Magnusova síla však závisí na kvadrátu rychlosti míče a na frekvenci jeho otáčení. Obojí rychlost i otáčení míče však podléhají tření okolního vzduchu, takže prostá předpověď rychlosti na základě gravitace může být úplně mimo.

### A jak to spočítat?

Mohli bychom mávat rukama a vypočítat ze sebe kvalitativní argument, proč bude mít nakonec dráha míče typický hákovitý tvar, který se málem zabodnul dovnitř naší branky. To by ale nebylo úplně ono, fyzika je také o počítání. Pokusíme se tedy situaci alespoň zhruba popsat pomocí několika efektivních sil a Newtonova zákona pohybu

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{Magn}} + \mathbf{F}_{\text{Odpor}} + \mathbf{F}_{\text{Tř}} ,$$

kde tíhová síla působí konstantní zrychlení  $g$  dolů ve směru osy  $z$ ,  $\mathbf{F}_{\text{Tř}} = -mg\mathbf{e}_z$  a efekty tření vzduchu vůči míči můžeme efektivně rozložit na Magnusovu sílu  $\mathbf{F}_{\text{Magn}}$  a odpor vzduchu  $\mathbf{F}_{\text{Odpor}}$ . Experimenty ukazují, že Magnusova síla splňuje pro uvažované rozmezí rychlostí

$$\mathbf{F}_{\text{Magn}} = \alpha v(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}) ,$$

kde  $\boldsymbol{\Omega}$  je vektor úhlové rychlosti, který získáte tak, že stočíte prsty pravé ruky po směru otáčení míče a palec vám ukazuje v jeho směru. Velikost tohoto vektoru je pak počet radiánů, o které se otočí míč za sekundu,  $\alpha$  je nějaká konstanta závislá na vlastnostech okolního vzduchu a hladkosti povrchu míče. Odpor vzduchu pak můžeme vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_{\text{Odpor}} = -\beta v\mathbf{v} ,$$

kde  $\beta$  je opět nějaká konstanta závislá na vlastnostech vzduchu a míče. Daný vztah pro odpor vzduchu dobře funguje do rychlosti míče zhruba  $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Obě konstanty  $\alpha$  i  $\beta$  by se ve skutečnosti mohly během letu lehce měnit, ale to pro teď zanedbáme. Víc nás znepokojuje skutečnost, že pokud míč svojí rotací způsobuje Magnusovu sílu, musí docházet třením i ke zpomalení tohoto otáčení. Pokud budeme předpokládat, že se rotace míče mění velmi pomalu, můžeme používat následující kroutivý moment  $\boldsymbol{\tau}$

$$\boldsymbol{\tau} = -\gamma v^3 \boldsymbol{\Omega} ,$$

kde  $\gamma$  je opět konstanta závislá na situaci. Ten pak ovlivňuje rotaci míče opět podle Newtonova zákona upraveného pro rotaci těles

$$\boldsymbol{\tau} = I \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} ,$$

kde  $I$  je moment setrvačnosti tělesa. Pro tenkou sféru o poloměru  $r$  a celkové hmotnosti  $m$  je moment setrvačnosti  $2mr^2/3$ . Kroutivý moment  $\boldsymbol{\tau}$  je však pouze ve směru  $\boldsymbol{\Omega}$ , a tudíž nebude měnit natočení osy rotace, ale pouze její rychlost. Rovnici

tedy můžeme psát pouze pro úhlovou rychlost  $\Omega$  a o natočení vektoru se nestarat, protože zůstává konstantní. Když to pak všechno dáme dohromady a algebraicky upravíme, máme sadu dvou provázaných rovnic, jedné vektorové a jedné skalární (tj. pod vektorovou se schovávají tři a dohromady se jedná o čtyři rovnice)

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= -\frac{3\gamma|\dot{\mathbf{x}}|^3}{2mr^2}\Omega, \\ \ddot{\mathbf{x}} &= -g\mathbf{e}_z + \frac{|\dot{\mathbf{x}}|}{m} [\alpha(\Omega \times \dot{\mathbf{x}}) + \beta\dot{\mathbf{x}}],\end{aligned}$$

kde jsme časovou derivaci přeznačili pomocí teček, tj.  $\dot{\mathbf{x}}$  je rychlost, první časová derivace polohy  $\mathbf{x}$ , a  $\ddot{\mathbf{x}}$  je zrychlení, druhá časová derivace polohy – obdobně to platí pro úhlovou rychlost  $\Omega$ .

Okřídli jsme tedy naši slepici ve vakuu zjednodušenými křídýlky a nechali ji létat ve vzduchu. Při odvození této soustavy rovnic jsme ale dělali to všechno, na co jsme si stěžovali v úvodu. Zanedbávali jsme a zanedbávali, a to bez velkého vysvětlování. Pravda je taková, že jinak fyzika ani dělat nejde. Všechny vlivy vystihnout nemůžeme. Ale můžeme na ně pozapomenout, když nás zajímají pouze přibližné výsledky, a pokud platí jeden veledůležitý předpoklad. Ten předpoklad je, že malé odchylky mají jen malé důsledky. Naše přiblížení míče jako sférické slupky pro moment setrvačnosti se určitě liší jenom málo od opravdového míče, a tudíž se síla zpomalující otáčení míče bude lišit od té opravdové jen málo. Dokážeme ale vyargumentovat to, že to bude mít malý vliv i na chování celé trajektorie?

K řešení tohoto problému existují dvě možnosti – buď zformulujeme praktický model a pak jej otestujeme pozorováním, nebo propočítáme maximum všech možných dalších vlivů. V prvním případě nám funkčnost našeho modelu při experimentu napovídá, že jsme vystihli všechny podstatné vlivy. V druhém případě musíme nalézt a propočítat důsledky všech možných vlivů a zjistit, zda zásadně mění nebo nemění výsledek.

Naši soustavu rovnic ale neumí nikdo analyticky vyřešit – obsahuje totiž souhru mnoha komplikovaných členů, z nichž některé jsou nelineární (obsahují vyšší mocniny proměnných). To znamená, že nedokážeme změnit sílu brzdící otáčení míče a přímo si ověřit, že bude mít tato změna malý důsledek.

S tím se ale dokážeme popasovat numericky, což si ale ukážeme až v příštím díle. Díky své znalosti numerických simulací budete nakonec dozajista špičkovými bankáři. V příštím díle také načneme chaos, těšte se.

V mezičase si můžete nainstalovat program *Octave Forge* ze stránky<sup>1</sup>. Daný odkaz vede na stránky s instalačními soubory pro operační systém Windows, kde si můžete vybrat poslední verzi a instalovat. Pokud používáte raději Linux, jistě se odtud k instalaci také proklikáte. Při instalaci nezapomeňte kromě základních balíčků zaškrtnout také balík *odepkg*, který se nám bude hodit pro řešení diferenciálních rovnic. Základního českého průvodce programem naleznete na webu<sup>2</sup>.

<sup>1</sup><http://sourceforge.net/projects/octave/files/OctaveWindowsbinaries>

<sup>2</sup><http://octave.cz>

## Úloha I.S ... nejistá

6 bodů

1. Sepište si rovnice pro vrh v homogenním tíhovém poli (nemusíte je znovu řešit, ale musíte je umět správně použít). Navrhněte přístroj, který bude vrhat předmět dle vašeho uvážení, a určete, pod jakým úhlem a jakou rychlostí tak činí. Můžete například vrhat pomocí pružiny, změřit její tuhost a hmotnost předmětu a vypočítat kinetickou energii, a tudíž i rychlost předmětu. V jakých rozmezích jste si s rychlostí a úhlem jistí? Dosadte tyto rozsahy do rovnic a ukažte, v jakých rozmezích v důsledku toho můžete očekávat vzdálenost dopadu od vašeho předmětu. Vrhňte svůj předmět daným přístrojem alespoň pětkrát a změřte vzdálenost dopadu – v jakých rozmezích jste si jisti danou vzdáleností? Ukažte, zda se vešly vaše výsledky do toho, co jste předpověděli. (Za odkaz na video s vrhem bonusový bod!)
2. Uvažte kyvadlo s výchylkou  $x$ , které se efektivně kývá harmonicky, ale frekvence jeho kyvů závisí na maximální výchylce  $x_0$

$$x(t) = x_0 \cos[\omega(x_0)t], \quad \omega(x_0) = 2\pi \left(1 - \frac{x_0^2}{l_0^2}\right),$$

kde  $l_0$  je nějaká délková škála. Myslíme si, že pouštíme kyvadlo z  $x_0 = l_0/2$ , ale ve skutečnosti jej vypouštíme z  $x_0 = l_0(1 + \varepsilon)/2$ . O kolik se liší argument kosinu od  $2\pi$  po jedné námi předpokládané periodě? Po kolika periodách bude kyvadlo vychýlené na druhou stranu, než bychom předpokládali?

*Tip* Argument kosinu se bude v tu chvíli od předpokládaného lišit o víc než  $\pi/2$ .

3. Vezměte do ruky propisku a postavte ji na stůl na špičku. Proč spadne? A co rozhoduje o tom, že spadne spíš doprava, než doleva? Proč nedokážete předpovědět výsledek hodů kostkou, i když zákony fyziky by jej měly plně předurčit? Když hrajete kulečnick, je neschopnost dokončit hru pouze v jednom šťouchu pouze v tom, že to nedokážete propočítat? Sepište svoje odpovědi a zkuste vyjmenovat fyzikální jevy ze života, které jsou v principu předpověditelné, ale ani dobrá znalost situace vám v předpovědi moc nepomůže. (řešení str. 177)

## Kapitola 2: Numerická kopaná

A je to tady, naučíme se dělat numerické simulace. Na příkladu rotujícího fotbaláku si ukážeme, jak numericky integrovat diferenciální rovnice v programu Octave. Plánoval jsem do tohoto dílu nacpat ještě nějaké historické povídky, ale možná více oceníte, pokud si opravdu důkladně projdeme krátký prográmeček k výpočtu tohoto problému. Pro člověka neozehnutého programováním může následující text vypadat dost hrozně, ale nestrachujte se, půjdeme krok po kroku a nemusíte všemu ihned rozumět. Pro řešení seriálových úloh stačí program opsat a měnit jen příslušné parametry.



### Milión minikroků

Co to tedy znamená numericky integrovat? Jedná se fakticky o variaci na přiblížení derivace pomocí diskretní změny. Například rychlost je (pro jednorozměrný případ)

$$v = \frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (89)$$

a zrychlení je

$$a = \frac{dv}{dt} \approx \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (90)$$

kde  $\Delta t$  je nějaký malý časový úsek, během kterého se daná poloha a rychlost změnilo o  $\Delta x$ , respektive  $\Delta v$ . S použitím  $F(x) = ma$  a rovnic (89) a (90) tedy můžeme přibližně vypočítat, že

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + v(t)\Delta t \quad \text{a} \quad v(t + \Delta t) \approx v(t) + \Delta t \frac{F(x)}{m}. \quad (91)$$

Když pak použijeme hodně malé  $\Delta t$  a proceduru mnohokrát opakujeme, získáváme přibližný vývoj systému s integračním krokem  $\Delta t$ . Všimněme si, že bychom mohli v rovnici (91) použít bez velkých potíží  $F(x + \Delta x)$  a tím získat přesnější aproximaci. Takovýchto triků a dalších metod existuje velmi mnoho – stačí si jen pamatovat, že numerická integrace přibližně řeší spojitou diferenciální rovnici pomocí jednoduchých diskretních kroků. Pro zmenšující krok se pak jedná o přesnější a přesnější aproximaci opravdového řešení. Pro dostatečně malý krok dostaneme v řadě případů numerickým řešením fakticky přesný vývoj daného systému.

### Nadatlování do Octave

Pojďme se teď podívat na Octave. Po spuštění by se vám měl objevit terminál s příkazovou řádkou. Sám jsem si nainstaloval poslední vydání *Octave Forge* pro Windows a nezapomněl zaškrtnout balík *odepkg* při instalaci. Poslední řádek hned po spuštění pro mě pak vypadá takto:

```
octave-3.6.4.exe:1>_
```

Ve Windows 8 se musí poupravit zástupce programu Octave kliknutím pravým tlačítkem myši, zvolením *Vlastnosti* a přidáním `-i --line-editing` do pole *Cíl*, jinak se vám tato příkazová řádka nezobrazí. Můžete si přečíst základní tutoriál na <http://octave.cz> pro obecnější informace, my se rovnou vrhneme na integraci rovnic pro letící míč.

Než začneme zapisovat rovnice do programu, musím se omluvit za lehkou botu z minulého dílu – napsal jsem špatně znaménko u Magnusovy síly. Správně je Magnusova síla

$$\mathbf{F}_{\text{Magn}} = \alpha v(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}).$$

Rovnice z posledního dílu zformulujeme pro speciální případ, kdy míč dostane počáteční rychlost v rovině  $xz$ , a v ní také přesně rotuje, takže jej Magnusova síla

strhává jen do směrů  $xz$ , a trajektorie tedy nikdy z původní roviny nevybočí. Tj.  $\Omega$  ukazuje do směru osy  $y$  a

$$\Omega \times \mathbf{v} = (0, \Omega, 0) \times (v_x, 0, v_z) = (\Omega v_z, 0, -\Omega v_x),$$

kde pokud zvolíme kladné  $\Omega$ , znamená to, že se míč otáčí „dolů za nosem“, neboli že Magnusova síla strhává míč dolů při kladné  $v_x$ . Dá to trochu úsilí točit s prsty, aby si člověk zkonstruoval pravotočivé pořadí os a dobře zadefinoval směr vektoru úhlové rychlosti, ale doporučuji si ověřit, že Magnusova síla má s tímto znaménkem přesně takovýto efekt.

Zápis pohybových rovnic do Octave začneme napsáním příkazu:

```
pkg load odepkg
```

čímž se načte balík na integraci diferenciálních rovnic. Pak pokračujeme definicí funkce časové derivace našich proměnných:

```
function xidot = f(t,xi)
alfa = 0.1;
beta = 0.4;
gamma = 0.0001;
g = 9.81;
m = 1;
r2 = 0.01;
vx = xi(3);
vz = xi(4);
Omega = xi(5);
v~= sqrt(vx^2+vz^2);
ax = v/m*(alfa*Omega*vz-beta*vx);
az = -g+v/m*(-alfa*Omega*vx-beta*vz);
Omegadot = -3*gamma*v^3/(2*m*r2)*Omega;
xidot = [vx;vz;ax;az;Omegadot];
endfunction
```

Proměnné  $\text{alfa}$ ,  $\text{beta}$ ,  $\text{gamma}$ ,  $\text{g}$ ,  $\text{m}$ ,  $\text{r2}$  odpovídají parametrům  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $g$ ,  $m$ ,  $r^2$  z posledního dílu. Používáme zde trik, ve kterém ukládáme polohu, rychlost a úhlovou rychlost otáčení míče do jednoho vektoru

$$\xi = \xi(x, z, v_x, v_z, \Omega),$$

kde  $v_x$  odpovídá  $\text{vx}$ ,  $v_z$  odpovídá  $\text{vz}$  a  $\Omega$  odpovídá  $\text{Omega}$ . Definujeme pak v tomto bloku funkci  $\text{f}(t, \text{xi})$ , která definuje první časovou derivaci vektoru  $\xi$ , tj.

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}(v_x, v_z, a_x, a_z, \dot{\Omega}).$$

Když se pak někde dále v programu objeví funkce  $\text{f}$ , bude navracet vektor  $\text{xidot}$  tak, jak je sestavený v předposledním řádku.

K tomu, aby se nám integrace včas zastavila, musíme zadefinovat funkci, která integrátoru ohlásí okamžik, kdy míč dopadl na zem. Zvolíme si počátek souřadnic tak, že  $x = 0$ ,  $z = 0$  je startovací poloha míče na zemi a tudíž  $z = 0$  je okamžik dopadu. Funkce  $\text{dopad}$  tedy bude vypadat takto:

```
function [hodnota,ukoncuje,smer] = dopad(t,xi)
hodnota = xi(2);
ukoncuje = 1;
smer = 0;
endfunction
```

Tato funkce vrátí trojici čísel `[hodnota,ukoncuje,smer]`. Když ji vložíme do numerického integrátoru, při každém kroku integrace se podívá na `hodnota`, pokud je nulová, podívá se, jestli má běh ukončit na `ukoncuje` (1 znamená ano) a případně se dokáže rozhodnout podle `smer`, jestli ukončit podle toho, jestli k protnutí došlo z kladné nebo záporné `hodnota`. V našem případě je `hodnota`  $\xi_2 = z$ .

### Třídvajedna integrace

Teď už můžeme řešit rovnici ve třech řádcích:

```
nastaveni =
odeset('Events',@dopad,'InitialStep', 0.00001,'MaxStep',0.0001);
pocPodminka = [0,0.0001,10,3,1];
reseni = ode45(@f,[0,10],pocPodminka,nastaveni);
```

kde `nastaveni` je pomocná proměnná, do které si ukládáme nastavení integrátoru `odeset`. Část `'Events',@dopad` určuje, že integrátor čeká zmíněným způsobem na funkci `dopad`. Možnosti `'InitialStep',0.00001,'MaxStep',0.0001` pak určují, v jakých mezích se pohybuje diskrétní integrační krok  $\Delta t$ .

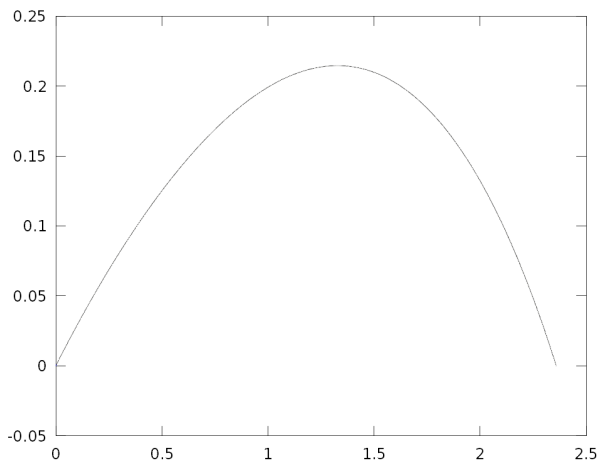
`pocPodminka` určuje počáteční polohu, rychlost a rotaci pomocí pětisložkového vektoru  $\xi$ . Pro jednoduchost jsme nastavili počáteční  $\xi_2 = z = 0,0001$ , aby se nám okamžitě neseplnila podmínka dopadu.

Řádek `reseni=ode45(@f,[0,10],pocPodminka,nastaveni)`; už pak jen říká integrátoru `ode45`, aby zintegroval rovnice s danou počáteční podmínkou a nastavením, derivací  $f(t,xi)$  a s maximálním rozsahem času `[0,10]` (to můžete prodloužit, ale typicky míč spadne mnohem dříve). Výsledek se pak uloží pod proměnnou `reseni`. Pokud vše předcházející správně napíšete do příkazového řádku, spustí se integrace, která by na normálním počítači měla trvat pár desítek sekund. Po jejím skončení si můžete vykreslit výsledky příkazem:

```
plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2))
```

Výsledný objekt `reseni` totiž obsahuje sloupec čísel s časy  $t_i$  pod `reseni.x` a sloupec vektorů  $\xi(t_i)$  v odpovídajících časech (zkuste napsat daná klíčová slova do příkazové řádky a Octave vám ukáže obsah těchto sloupců). Pod `reseni.y(i,j)` najdete  $j$ -tou složku vektoru  $\xi$  v čase  $t_i$ , tj.  $\xi_j(t_i)$ . `reseni.y(:,1)` pak znamená  $\xi_1 = x$  ve všech časech a `reseni.y(:,2)` znamená  $\xi_2 = z$  ve všech časech.

Dohromady tedy `plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2))` říká, aby Octave načtl polohy  $x, z$  skrze všechny časové kroky  $t_i$ . Na obrazovce by vám po tomto příkazu měl vyskočit graf s trajektorií míče v rovině  $xz$  od výkopu až po dopad na zem – docela jako na obrázku 49.



Obr. 49: Trajektorie míče s danými parametry a počátečními podmínkami. Všimněte si, že osa  $z$  má úplně jinou škálu než osa  $x$ . Doopravdy je trajektorie mnohem „plošší“.

Řekneme si už jen poslední tip, v úlohách si budete muset trochu hrát s hodnotami různých konstant a s počátečními podmínkami, a proto by bylo dobré se naučit, jak toto vše Octave zadat pomocí jednoduchého skriptu. To uděláte tak, že vše předchozí sepíšete do jednoho textového souboru s příponou `.m` (ve Windows například v programu Poznámkový blok) a uložíte do nějaké složky. Mějme například skript s cestou `C:/cesta/ksouboru/mujskript.m`. Pustíte si jej pak v Octave takto:

```
chdir('C:/cesta/ksouboru');
mujskript;
```

Doufám, že tento díl seriálu nebyl příliš vyčerpávající a že se vám program na integraci podařilo spustit. V případě obtíží nám napište na e-mail [fykos@fykos.cz](mailto:fykos@fykos.cz).

Příští díl bude oddechovější, dozvíte se o tom, jak James Clerk Maxwell, jeden z nejvýznamnějších teoretických fyziků vůbec, došel k závěru, že je příroda nevypočitatelná, ale že i přesto *žádný levhart nemůže změnit svoje skvrny!* Co tím myslel? A jak to souvisí se slibovaným chaosem? Nechte se překvapit.

## Úloha II.S ... numerická

6 bodů

1. Délkové veličiny zadáváme v metrech, časové v sekundách a hmotnostní v kilogramech. Úhlovou rychlost  $\Omega$  zadáváme v radiánech za sekundu. Když vezmete ze seriálu rovnice pro pohyb míče, nachází se v nich ale ještě tři parametry:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Jaké jsou jejich rozměry?

2. Uvažujte volný pád míče s  $\Omega = 0$  a  $v_x = 0$ . Existuje pak konečná rychlost  $v_z^t$ , při které se vyrovná třecí síla a tíhové zrychlení a pád míče už nezrychluje.
  - a) Určete tuto rychlost pomocí parametrů z rovnic pohybu pro míč.
  - b) Obratěte tuto rovnost tak, aby vyjadřovala  $\beta$ .  $v_z^t$  se dá dobře měřit a pro fotbalový míč o hmotnosti  $m = 0,5 \text{ kg}$  je typicky okolo  $25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Kolik je pak  $\beta$ ?
3. Vyjádřete si počáteční  $v_x$  a  $v_z$  pomocí úhlu výstřelu  $\varphi$  při fixní počáteční rychlosti  $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Sepište program podle seriálu a vyzkoušejte měnit počáteční podmínky a parametry následovně:
  - a) Zvolte nějaké kladné  $\beta$ , vypněte rotaci  $\Omega = 0$  a zjistěte, zda je úhel výstřelu, pod kterým doletí míč nejdál, menší nebo větší než  $45^\circ$ . Svoje zjištění demonstруйте pomocí grafů letu.
  - b) Zvolte nenulové kladné  $\alpha$  s numerickou hodnotou v daných jednotkách stejnou jako  $\beta$ ,  $\gamma = 0,01$  (v daných jednotkách) a  $\Omega = \pm 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jak se v daných případech změní optimální úhel výstřelu?
  - c) *Bonus* Jak byste tedy nejdále dohodili krikeťákem? Je náš model pro tuto úvahu dostatečný? (řešení str. 179)

### Kapitola 3: Dynamické vaření

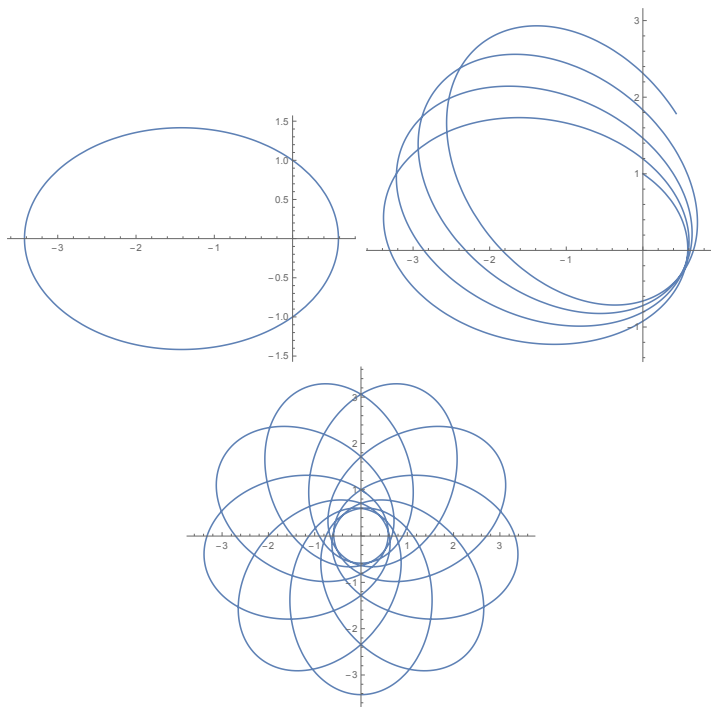
V minulém díle jsme se naučili psát programy na simulaci fyzikálních problémů a v tomto díle se dozvíme, k čemu nám to bude dobré. Začneme krátce o tom, co můžeme čekat od dynamického systému, zmíníme nějaké kulečnický, kurzy vaření, a nesmíme vynechat ani věrného průvodce fyzikovým životem, pružinu. Nezapomeneme také na Jindru, který se letos účastnil Fyziklání online – tedy, chtěl jsem říct na Henriho, který se před více než sto lety účastnil takového offline Fyziklání o cenu švédského krále Oskara II. Ale pěkně popořádě.

#### Stůj nebo kruž!

Ještě v polovině dvacátého století si většina vědců myslela, že pro vázaný systém existují po ustálení jen dva možné druhy vývoje – stacionární nebo statický. Ale co to znamená vázaný systém? To znamená systém, který „neuteče“ pryč z nějakých mezí. Třeba jako kulička na pružině, v klidu si poskakuje, ale pokud by měla ambice vydat se do světa, síla pružiny by ji vždy přitáhla zpět. Dokážeme si představit kuličku, která ve světě bez tření pravidelně stacionárně kmitá donekonečna. Stejně tak ve světě s třením vidíme pružinku, která se ustaluje do statického stavu. Existuje nějaká třetí možnost?

Příkladů, které se ustalují v klidu, známe velmi mnoho. Třeba náš kop fotbalákem nebo hod krikeťákem po jisté době vyústí v úplně zastavený míč někde opodál na zemi. Ale když může třením vycházet energie ven, může proudit i dovnitř. Uvažte například hrnec s vodou, který dáte ohřívat tak jemným plamenem, že se nikdy nezačne vařit, a přiklopíte jej pokličkou, aby se vám to všechno nevypařilo. Voda si pak na dně hrnce ustanoví cyklickou strukturu stoupajících a klesajících sloupců vody, která se souhrnně nazývá Bénardovy buňky (viz obrázek 52).

Do té míry, do jaké můžeme náš pokus na plotně takto idealizovat, jsou jednou ustanovené Bénardovy buňky navždy dané a neměnné – proudění ve vodě je stacionární. Nemusíme však vůbec být tak přízemní a můžeme hledět k nebesům. Také pohyby planet jsou ideální (tj. v přiblížení platném pro tisíce minulých i následujících let) stacionární, tj. periodické nebo alespoň kvaziperiodické.



Obr. 50: V horní polovině obrázku vidíte příklad periodické trajektorie, která se uzavře po jednom oběhu okolo centra, a další, která se po každém oběhu kousek stočí. Některé orbity se mohou po několika obězích uzavřít, jako je vidět pro devět oběhů v dolní polovině obrázku. V drtivé většině případů ale stáčení pericentra orbity znamená, že už se nikdy neuzavře.

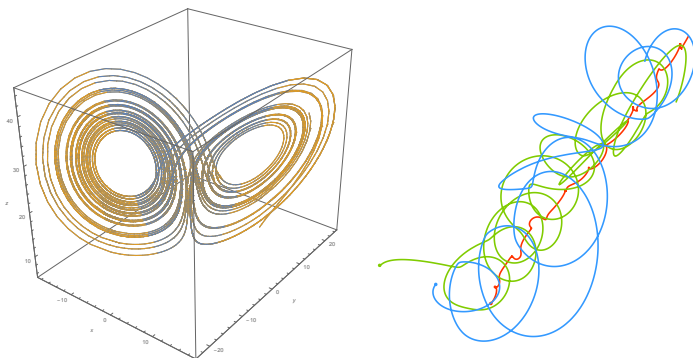
Co ale znamená kvaziperiodická orbita? Příklad můžete vidět na obrázku 50. Jedná se typ pohybu, který může nastat pouze pro systémy s více než jedním stupněm volnosti. V těchto odlišných stupních volnosti se pak mohou systémy pohybovat s jinými periodami. Například na obrázku 50 mění částice periodicky svojí vzdálenost od centra, ale zároveň i okolo centra obíhá. Pokud je oscilace vzdálenosti od centra v celočíselném poměru s periodou oběhu okolo, trajektorie se po nějaké době „strefí“ do svého začátku a dál pokračuje zase stejně. Pokud jsou ale periody nesouměrné, orbita má sice vysoce předvídatelný a jednoduše

popsatelný tvar, ale nikdy se neuzavře a vždy o kousek uhýbá svému počátku.

### Zrod chaosu

Zmíněné systémy jsem vyjmenoval zcela úmyslně, protože všechny z nich jsou příklady dynamických situací, kde stačí málo a vzniká v nich ten zmiňovaný třetí druh pohybu. Třeba pokud máme kuličku na pružince a periodicky do ní šťoucháme (ať už se třením nebo bez něj), s vysokou pravděpodobností můžeme nastavit počáteční podmínky tak, aby se kulička chovala *chaoticky*.

To stejné platí pro ohřev vody, jedná se dokonce zhruba o systém, který studoval v šedesátých letech Edward Lorenz jakožto model počasí a narazil v něm pro určitou volbu parametrů na chaotické chování vykreslené na obrázku 51. S Lorenzovým objevem a numerickými simulacemi teprve chaos prorazil jako široce přijímaný vědecký fakt, ale jeho existence již byla známa nebo tušena mnohem déle.



Obr. 51: Příklady slavných systémů s chaotickým chováním – Lorenzův atraktor (vlevo) a příklad chaotických trajektorií tří těles (vpravo).

Například James Clerk Maxwell, objevitel slavných rovnic elektromagnetismu, se zabýval také kinetickou teorií plynů. V té se informace a znalost počátečních podmínek rozpouští se srážkami atomů podobně jako ve hře kulečnicků spolu se srážkami kulečnickových koulí. Ve svém esejí o svobodné vůli z roku 1873 argumentoval, že s determinismem to nebude tak žhavé, protože naše existence je protkána nesmírným množstvím takovýchto neurčitých okamžiků, které nelze vědecky rozšifrovat. Nakonec ale došel k závěru, že musí existovat nějaký rámec a mez této nepředvídatelnosti, protože jak už zmíněno – *žádný levhart nemůže měnit svoje skvrny*.

Dvanáct let na to vyhlásil švédský král Oskar II. při příležitosti svých šedesátých narozenin cenu pro kohokoliv, kdo matematicky vyřeší problém pohybu  $N$  těles přitahujících se newtonovskou gravitační silou. Již tou dobou proslulý francouzský matematik Henri Poincaré tušil, že se jedná o poněkud velké sousto a snažil se řešit alespoň speciální případ pohybu tří takových těles.

Ke svému zděšení zjistil, že existují počáteční podmínky, pro které je pohyb nesmírně komplikovaný a nepředvídatelný. I když problém vlastně nevyřešil, cenu stejně vyhrál, protože se všichni shodli na tom, že si to Henri docela podal.

Byli i další vědci a matematici, kteří kráčeli ve stopách Maxwella a Poincarého, ale doopravdy vznikl pojem chaosu v šedesátých letech minulého století s nalezením Lorenzova modelu atmosférické konvekce.

### *Lorenzův model*

Vlastně ještě nevíte, co to ten chaos je, kromě toho, že je to neperiodické a nestatické chování vázaného systému. Jediný další díl do skládky je *globální nestabilita* takového chování.

Stejně jako propiska postavená na špičce spadne při sebemenší výchylce, tak stačí sebemenší výchylka od chaotické trajektorie a dostanete se úplně jinam. Vtip je nicméně v tom, že u propisky je nestabilita pouze v jednom okamžiku úplného klidu na špičce a uprostřed pádu už ji nic moc nerozhodí. U chaotického pohybu je tomu naopak – stačí libovolně malá výchylka *kdekoliv a kdykoliv* a časem se systém dostane do úplně jiného stavu. Jak přesně tento koncept osedlat se dozvíte v příštím díle.

Pro úplnost ještě zmíním velmi speciální třídu systémů, která byla objevena až před nějakými třiceti lety a od té doby ještě nebyla docela prozkoumána. Tyto systémy totiž vykazují aperiodický velmi komplikovaný vývoj, ale nenastává v nich zmíněná globální nestabilita. Říká se jim nechaotické aperiodické systémy. K jejich vytvoření je ale potřeba dost zvláštních podmínek, a proto když už narazíme na komplikovaný aperiodický pohyb, bývá v drtivé většině případů chaotický.

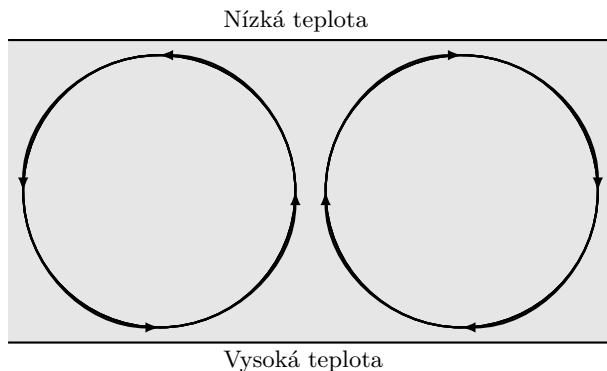
Pojďme se nyní podívat na první příklad chaotického systému, Lorenzův model. Edward Lorenz nebyl spokojen s paradigmaty předpovídání počasí tak, jak byly nastaveny v šedesátých letech minulého století. Rozhodl se tedy na superjednoduchém modelu ukázat, že nelineární efekty v modelech atmosféry mohou způsobit pěkné divočiny.

Začal s předpokladem periodicky opakujících se Bénardových buněk ve dvou-rozměrné kapalině jako na obrázku 52. Tentokrát ale místo dna hrnce byl vespod povrch Země ohřátý sluncem a místo vody proudil atmosférický vzduch, který se nahoře v atmosféře ochladil a pak klesal zase zpět. Předpokládal pak, že konvekce neboli proudění má takovýto pevný charakter, který lze parametrizovat pouze třemi bezrozměrnými proměnnými  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $Z(t)$ .  $X(t)$  parametrizuje rychlost proudění v buňkách a  $Y(t)$  teplotní rozdíl mezi stoupajícími a klesajícími sloupci vzduchu. V případě nulové konvekce by byl průběh teploty odzdoła nahoru lineární, vzhledem ke konvekci se ale výškový profil prohne a míru tohoto prohnutí parametrizuje  $Z(t)$ .

Pro tento model získal Lorenz soustavu třech efektivních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X), \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y, \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}$$





Obr. 52: Nákres Bénardových buněk. Buňka točící se po směru musí mít za souseda vždy buňku točící se proti směru a naopak – je proto lepší chápat konvekci spíše jako zdvihající se a rozutíkáající sloupce horké a studené tekutiny.

kde kladné  $\sigma$  charakterizuje disipaci v kapalině,  $r$  je parametr závisející na vlastnostech kapaliny a lineárně také na rozdílu teplot mezi vrchní a spodní vrstvou buňky a  $b$  je opět kladný faktor, který závisí na konkrétní geometrii buňky.

V rovnicích můžete vidět, že všechny proměnné se v čase samy tlumí, tedy  $\dot{X} = -\sigma X + \dots$ ,  $\dot{Y} = -Y + \dots$ ,  $\dot{Z} = -bZ + \dots$ , tj. zmenšují se s vlastní velikostí. To je důsledkem toho, že modelují disipativní tekutinu, kde se třením a difúzí ztrácí i teplo i rychlost proudění. V řadě případů to znamená, že se tekutina ustálí na nějakém stacionárním stavu, v tomto případě však se stoupajícím teplotním rozdílem (a tedy se stoupajícím  $r$ ) parametry začnou chaoticky oscilovat, jako je vykresleno v obrázku 51. Předělové  $r$  numericky zjistíte v seriálové úloze.

Edward Lorenz se netvářil, že se jedná o nějaký extra realistický model – naopak, říkal, že je to ten nejjednodušší alespoň trochu uvěřitelný model, který dokázal vymyslet a který zároveň vykazuje takovéto aperiodické chování. Byla tu ale jedna další věc, kterou vůbec nečekal a narazil na ní jen náhodou. Při opětovném puštění simulace totiž zadal přístroji počáteční podmínku na menší počet desetinných míst, protože desetitisícinky se přeci na výsledku vůbec neprojeví. Ale bylo tomu přesně naopak. O tom však až příště.

### Úloha III.S ... dynamická

6 bodů

- Podívejte se na rovnice Lorenzova modelu a sepište skript na jeho simulaci v Octave (na to si případně osvěžte i druhý díl seriálu). Spolu s vykreslujícím příkazem by váš skript měl vypadat zhruba takto:

```
...
function xidot = f(t,xi)
...
xidot=...;
```

```

ydot=...;
zdot= ...;
xidot = [xdot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f,[0,300],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));

```

Jen místo tří teček doplňte zbytek programu podobně jako v druhém dílu seriálu a použijte  $\sigma = 9,5$ ,  $b = 8/3$ . Pak zjistěte alespoň s přesností na jednotky, pro jaké kladné  $r$  přechází systém z asymptotického zastavování se na chaotickou oscilaci (na počátečních podmínkách nezáleží).

2. Zde je plný text octavovského skriptu pro simulaci a vizualizaci pohybu částice v gravitačním poli hmotného tělesa v rovině  $xy$ , kde všechny parametry a konstanty jsou rovny jedné:

```

clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
alfa=0.1;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)/r^3;
ay=-xi(2)/r^3;
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
x0=0;
y0=1;
vx0=...;
vy0=0;
pocPodminka=[x0,y0,vx0,vy0];
reseni=ode45(@f,[0,100],pocPodminka,nastaveni)
plot(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2));
pause()

```

- a) Zvolte počáteční podmínky  $x_0=0, y_0=1, v_{y0}=0$  a počáteční rychlost ve směru  $x$  nenulovou tak, aby byla částice vázaná, tj. neulétla z dosahu centra.
- b) Přidejte ke gravitační síle ve skriptu sílu  $-\alpha r/r^4$ , kde  $\alpha$  je malé kladné číslo. Volte postupně několik zvětšujících se  $\alpha$  počínaje  $\alpha = 10^{-3}$  a ukažte, že způsobují kvaziperiodický pohyb. (řešení str. 181)

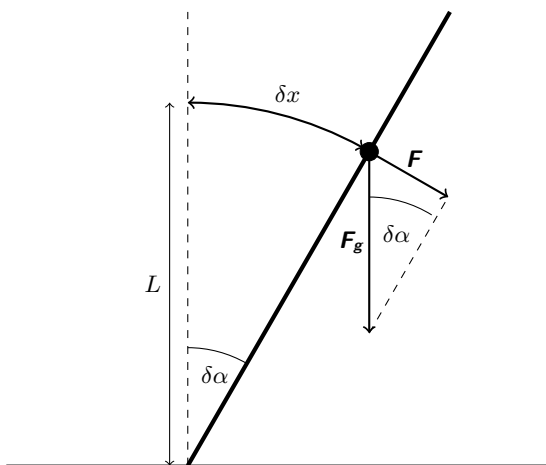
## Kapitola 4: Definujeme chaos!

V prvních dvou dílech tohoto seriálu jsme se naučili namontovat křídýlka na slepici ve vakuu. Tedy, na příkladu rotujícího fotbalového míče jsme se naučili jak zformulovat jednoduchý model a pak také spočítat jeho důsledky pomocí numerických simulací. Ve třetím dílu jsme pak probrázili krajinu dynamických systémů a ukázali si pár ochutnávek toho, co lze čekat od chování různých vázaných pohybů.

Vázaný pohyb může být statický (tedy vlastně „nepohyb“), kvaziperiodický (kde periodický je speciální případ takového pohybu) a aperiodický. Aperiodický pohyb je navíc v drtivé většině případů chaotický. Ale co že to znamená ten chaotický pohyb? To si právě teď řekneme, počkejte minutku.

### Ztráta desetinných čísel s propiskou

Teď potřebuji, abyste si vzpomněli na úplně první seriálovou úlohu, kterou jste v tomto ročníku řešili. Měli jste v ní za úkol uvažovat nad tím, jak to, že žijeme v deterministickém světě, kde je i přesto tolik nejistoty. Chaos a s ním spojená ztráta informace s tím má mnoho do činění. My si ale teď ukážeme, jak se informace ztrácí v příkladu z úlohy – u propisky postavené na špičku.



Obr. 53: Nákres sil působících na propisku vychýlenou o úhel  $\delta\alpha$  z nestabilní rovnovážné polohy.

U propisky budeme uvažovat pouze dva její možné pohyby – doleva a doprava. Výchylku polohy těžiště budeme značit  $\delta\alpha$  a vzdálenost těžiště od špičky  $L$ . Celá situace je načrtnutá na obrázku 53. Kdybychom uvažovali, že se propiska může pohnout i dopředu a dozadu, došli bychom k těm stejným závěrům, k jakým za chvíli dojdeme, jen bychom se museli starat o více rozměrů.

Když je těžiště propisky odchýlené o nějaký malý oblouk  $\delta x$  od polohy nad špičkou, část tíhové síly se vyruší tlakem špičky o povrch, ale část se promítne do směru pádu. Síla působící ve směru pádu je tedy  $F = mg \sin(\delta\alpha)$ . Délka oblouku od rovnovážné polohy těžiště je<sup>3</sup>  $\delta x = L\delta\alpha$  a Newtonův druhý zákon je při promítnutí do oblouku  $F = m\delta\ddot{x}$ . Dostáváme tedy diferenciální rovnici

$$m\delta\ddot{x} = mg \sin\left(\frac{\delta x}{L}\right). \quad (92)$$

Protože ale mluvíme o hodně malých vychýleních platí přibližně  $\sin\delta\alpha \approx \delta\alpha = \delta x/L$ . Když to pak dosadíme do rovnice (92) a podělíme jí  $m$ , dostáváme

$$\delta\ddot{x} = \frac{g}{L} \delta x.$$

Máme tu tedy rovnici, co říká „druhá derivace funkce = něco krát funkce“. Funkcí, které vypadají v podstatně stejně i po dvou derivacích, není mnoho – v reálném oboru je to pouze sinus, kosinus a exponenciála.<sup>4</sup> Sinus a kosinus ale po dvojnásobném derivování před sebe vyhodí znaménko mínus, což v tomto případě nemáme, a proto řešením může být pouze exponenciála. Můžete si sami ověřit, že naši rovnici řeší

$$\delta x = C_1 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + C_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{g}{L}} t\right),$$

kde  $C_1, C_2$  jsou dvě konstanty odpovídající různým počátečním podmínkám. Pokud například nastavíme  $C_1 = \delta x_0$  a  $C_2 = 0$ , pak derivováním dostaneme pro rychlost v čase  $t = 0$

$$\delta v_0 \equiv \delta\dot{x}(t=0) = \delta x_0 \sqrt{\frac{g}{L}} \exp\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)\Big|_{t=0} = \delta x_0 \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

Naopak pokud  $C_1$  úplně vynulujeme a nastavíme  $C_2 = \delta x_0$ , pak dostaneme  $\delta v_0 = -\delta x_0 \sqrt{g/L}$ .

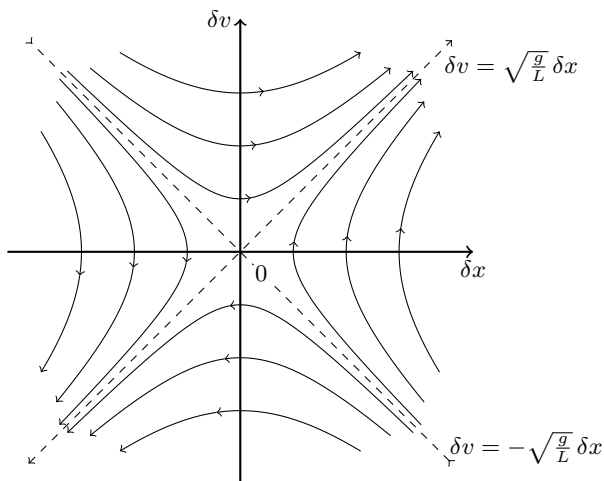
Hlavní ale je, že pokud je malá výchylka v kladných  $\delta x$  (tj. doprava) a rychlost těžiště také doprava, výchylka roste exponenciálně (což je děsně rychle). To vše ale platí jen do okamžiku, kdy začnou být  $\delta x$  a  $\alpha$  příliš velké na to, aby platilo  $\sin\alpha \approx \alpha$ .

Na obrázku 54 vidíte náčrt různých vývojų propisky v prostoru rychlostí a poloh. Na obrázku 55 vidíte vývoj kruhu počátečních podmínek okolo  $\delta x = 0$  a  $\delta v = 0$ . Když totiž roztřesenou rukou umístíme propisku na stůl špičkou dolů, nejsme si jisti, jestli jsme těžiště umístili přímo nad špičku. Nejsme si také jisti, jestli jsme na poslední chvíli do propisky trochu nedrknuli a neudělili jí tím malou rychlost – ať na jednu nebo na druhou stranu. Jsme si tedy jisti jen tím, že jsme propisce dali počáteční podmínky jen někde v podobném kruhu neurčitosti.

Jak ale vidíte na obrázku 55, tvar kruhu se rychle mění. Po chvíli jsme si vlastně velmi jisti tím, že těžiště propisky již není nad špičkou, ani blízko takovému

<sup>3</sup>Úhly zadáváme v radiánech!

<sup>4</sup>Pak ještě hyperbolické funkce  $\sinh$  a  $\cosh$ , ale to jsou jen lineární kombinace reálných exponenciál.



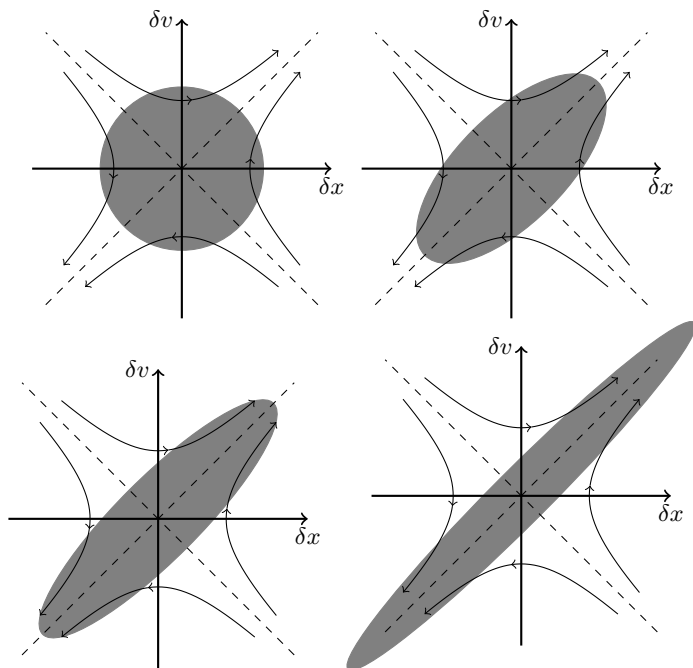
Obr. 54: Náčrt různých vývoju malých výchylek propisky na špičce. Najděte si na grafu nějaké počáteční výchylky  $\delta x$ ,  $\delta v$  a svůj vývoj pak získáte následováním šipek. Vidíte, že všechny vývoje až na přímku  $\delta v = -\sqrt{g/L} \delta x$  asymptoticky konvergují k  $\delta v = \sqrt{g/L} \delta x$ , a tudíž vedou k pádu propisky. Pokud vás graf s jednou osou  $\delta x$  a s další  $\delta v$  mate, můžete si osu  $\delta v$  zakrýt a sledovat, kam směřuje všechen vývoj ve směru výchylky  $\delta x$ .

bodu, protože se kruh neurčitosti vývojem úplně rozmázl do pádu buď nalevo nebo napravo. Paradoxně jsme si velmi jisti tím, že systém skončil ledaskde, jen ne tam, kde bychom v idealizovaném případě předpokládali.

### *Ljapunov a jeho exponenti*

Podobné jako v případě s propiskou je to s chaosem. Systém jako třeba povětrnostní podmínky nějak změříte a podle ideálních hodnot svého měření předpovíte počasí v následujících dnech. Jenže víte také o nejistotách svého měření a chaotičnosti počasí. Stejně jako v případě propisky si po několika dnech jste fakticky jisti tím, že se systém nachází s nejvyšší pravděpodobností všude možné, jen ne tam, kde jste jej předpověděli na základě naměřených hodnot.

Veličinou, která charakterizuje tento rozpad informace, je takzvaný Ljapunovův exponent. Ljapunovův exponent charakterizuje exponenciální rozbíhání pro velmi blízké stavy. V případě propisky se malá odchylka  $\delta x_0$  od nestabilní rovnováhy na špičce rozbíhala v nejhorším případě jako  $\delta x_0 \exp(\sqrt{g/L} t)$ , v nejlepším by se sbíhala jako  $\delta x_0 \exp(-\sqrt{g/L} t)$ . V tomto případě by tedy Ljapunovovy exponenty byly  $\pm\sqrt{g/L}$ . Jak ale vidíte na obrázku 55, pro rostoucí nejistotu je důležitý hlavně kladný exponent  $\sqrt{g/L}$ , který roztahuje počáteční podmínky, a na hodnotě



Obr. 55: Náčrt časového vývoje naší oblasti nejistoty ve výchylce propisky. Při předpokladu  $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $L = 5 \text{ cm}$  bude naše oblast nejistoty zdeformovaná jako v posledním obrázku během 80 ms. Pokud je na vás graf složitý, stačí z něj jen vysledovat, jak se naše nejistota roztahuje jen podél osy  $\delta x$  tím, že si na ni zdeformovaný kroužek promítnete.

záporného exponentu vlastně zase až tolik nezáleží.

Pro obecný dynamický systém můžeme definovat Ljapunovův exponent *pro nějakou celou trajektorii* a vlastně nám nevádí, pokud se původní odchylka kromě růstu velikosti okolo původního směru nějak kroutí. Ljapunovův exponent je tedy nějaké číslo  $\lambda$  takové, že platí, že se nějaká obecně vícerozměrná odchylka  $\delta \mathbf{Z}_0$  od dané trajektorie  $\mathbf{Z}(t)$  ve své velikosti vyvíjí jako  $|\delta \mathbf{Z}(t)| = \exp(\lambda t) |\delta \mathbf{Z}_0|$ .

V jakém čase bychom ale začali sledovat rozbíhavost trajektorií? Na jakém místě bychom měli začít s malinko odchýleným trajektorijním kamarádem? Nejlepší odpověď zní, že rozbíhavost musíme nějak vystředovat přes celou trajektorii. Pokud ale sledujeme trajektorii ve vázaném systému a trajektorie nekonverguje ke statické, pohyb musí nutně pokračovat nekonečně dlouho. Formálně je tedy Ljapunovův exponent definován jako

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta \mathbf{Z}_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{|\delta \mathbf{Z}(t)|}{|\delta \mathbf{Z}_0|} \right),$$

kde limita  $\delta \mathbf{Z}_0 \rightarrow 0$  jen značí, že se zajímáme o nekonečně malé odchylky a jejich rozbíhavost. Limita  $t \rightarrow \infty$  pak zajišťuje, že zahrnujeme do výpočtu celou trajektorii. To se může zdát dost divné, tak vylíčím, jak se takový Ljapunovský exponent spočítá v praxi:

1. Program začne numericky integrovat trajektorii  $\mathbf{Z}_A(t)$ , jejíž Ljapunovův exponent chceme zjistit a vedle ní úplně malinko odchýlenou trajektorii  $\mathbf{Z}_B(t)$ .
2. Program sleduje odchýlování nebo sbíhání těchto trajektorií a pokusí se na tuto tendenci napasovat exponenciely s různými exponenty. Ten nejlepší fit si poznamená jako lokální Ljapunovův exponent.
3. Jakmile se trajektorie v čase  $t_{\text{moc}}$  moc rozeběhnou, vezme odchylku

$$\Delta = \mathbf{Z}_A(t_{\text{moc}}) - \mathbf{Z}_B(t_{\text{moc}}),$$

zahodí  $\mathbf{Z}_B$  a začne zase integrovat  $\mathbf{Z}_A(t)$  spolu s méně odchýlenou trajektorií s počáteční podmínkou  $\mathbf{Z}_C(t_{\text{moc}}) = \mathbf{Z}_A(t_{\text{moc}}) + \varepsilon \Delta$ , kde  $\varepsilon < 1$ .

4. Tento proces se dlouho opakuje a nakonec program získá přibližnou hodnotu vystředování všech lokálních Ljapunovových exponentů.

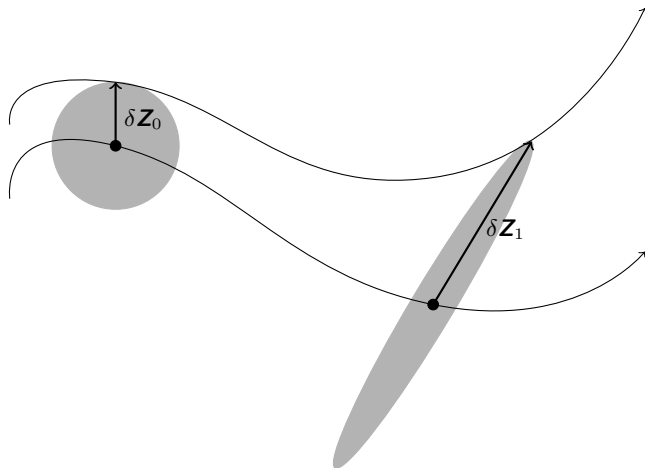
Není to tedy žádná věda, Ljapunovův exponent je jen globální (nebo prostě zprůměrovanou) mírou sbíhavosti či rozbíhavosti blízkých trajektorií. Celá procedura dává nějaký smysl jen díky tomu, že se bavíme o vázaných trajektoriích. Chaotická trajektorie se totiž sice nikdy neopakuje zcela přesně, ale musí pořád létat v těch samých částech prostoru, takže se dříve nebo později začne opakovat *přibližně*. Když tedy zmíněnou procedurou počítáme Ljapunovský exponent po hodně dlouhou dobu, jsme si velmi jisti, že jsme vystihli typické chování trajektorie a že jsme exponent spočetli s poměrně vysokou přesností.

Na obrázku 56 můžete vidět ilustraci ne nepodobnou rozbíhání kruhu počátečních podmínek z obrázku 55. Vidíme na něm, že stejně jako u propisky může nejistota u trajektorie s kladným Ljapunovovým exponentem úplně rozmáznout vývoj tak, že jsme si *téměř jisti* tím, že se nenacházíme tam, kde bychom si idealizovaně mysleli. Na obrázku také vidíte, že pro odhad růstu nejistoty je nejdůležitější *největší* Ljapunovův exponent a ty menší nejsou podobně jako u propisky tak důležité.

### Konečně ta definice

Nebudeme to už zbytečně ždímat, definujme chaos. Chaotická trajektorie je taková, která je aperiodická a zároveň má alespoň jeden kladný Ljapunovův exponent. Znamená to, že její tvar je nesmírně komplikovaný a neopakující se, ale také to, že dřív nebo později nějakým vyrušením sklouzne vývoj daného dynamického systému úplně jinam – a to nejčastěji k další chaotické trajektorii.

Existují i alternativní definice chaosu, které se opírají o různé topologické pojmy a představu mísení prostoru počátečních podmínek. To dává samozřejmě velký smysl, protože si člověk dokáže lehkou představit, že se malý kroužek počátečních podmínek při kladné rozbíhavosti trajektorií a komplikovaném pohybu rozmaže po celém možném prostoru stavů dynamického systému. Je proto přirozené obejít



Obr. 56: Náčrt časového vývoje oblasti nejistoty v případě trajektorie s kladným Ljapunovovým exponentem. Malá odchylka  $\delta Z_0$  se po nějakém čase vyvine do lehce pootočené a exponenciálně prodloužené odchylky  $\delta Z_1$ . V tomto obrázku existuje i směr se záporným exponentem, ale vidíte, že maximální vzdálenost odchýlených trajektorií na záporném exponentu nezávisí.

aperiodičnost a exponenty a rozmíchávání blízkých vývoji vložit rovnou do definice. Vymezení chaosu pomocí exponentů a aperiodičnosti je pro nás ale zdaleka nejpraktičtější.

To je v tomto dílu vše, teď už máme základní výbavu na chápání chaosu. V příštích dílech se konečně podíváme na nějaké zajímavé aplikace toho, co jsme se doteď naučili. Víte třeba, jak se v počítači generují náhodná čísla? A jsou opravdu náhodná? Odpověď se dočkáte.

### Úloha IV.S ... Ljapunovská

6 bodů

1. Uvažujte propisku o délce 10 cm s těžištěm přesně v půlce a  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Nyní si představte, že jste propisku postavili na stůl s nulovou výchylkou  $\delta x$  s přesností na  $n$  desetinných míst a s nulovou rychlostí. Za jak dlouho po postavení propisky si budete moct být jisti pouze s  $n - 1$  desetinnými místy nulovostí výchylky?
2. Vezměte model počasí s největším Ljapunovovým exponentem  $\lambda = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Předpověď počasí přestává být použitelná, pokud je její chyba více než 20%. Pokud jste dokázali změřit stav počasí s přesností na 1%, na jak dlouho byste odhadovali, že bude dobrá vaše předpověď? Odpověď podejte v dnech a hodinách.
3. Vezměte si Lorenzův model konvekce z minulého dílu, opište si z něj funkci  $f(x_i, t)$  a nasimulujte a vykreslete si hodnotu parametru  $X(t)$  pro dvě různé



trajektorie pomocí příkazů:

```
X01=1;
Y01=2;
Z01=5;
X02=...;
Y02=...;
Z02=...;
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka1=[X01,Y01,Z01];
reseni1=ode45(@f,[0,45],pocPodminka1,nastaveni);
pocPodminka2=[X02,Y02,Z02];
reseni2=ode45(@f,[0,45],pocPodminka2,nastaveni);
plot(reseni1.x,reseni1.y(:,1),reseni2.x,reseni2.y(:,1));
pause()
```

Místo tří teček u X02,Y02,Z02 musíte zadat počáteční podmínky pro druhou trajektorii. Pusťte kód alespoň pro pět řádově odlišných, ale malých odchylek a poznamenejte si čas, ve kterém se druhá trajektorie od první kvalitativně odlepí (tj. směřuje například úplně na druhou stranu). Odchylku nezměňujte pod řád cca  $10^{-8}$ , protože pak se začnou projevovat nepřesnosti numerické integrace. Načrtněte závislost odlepacího času na řádu odchylky.

*Bonus* Pokuste se ze získané závislosti odlepacího času na velikosti odchylky odhadnout odpovídající Ljapunovův exponent. Budete potřebovat víc než pět běhů a můžete předpokládat, že v okamžiku odlepení velikost odchylky pokaždé zrovna překročila nějaké konstantní  $\Delta_c$ . (řešení str. 184)

## Kapitola 5: Rotor a jeho kopačky

V minulých dílech jsme se podívali na to, jak numericky integrovat diferenciální rovnice a definovali si chaos. Tento díl bude o něčem trochu jiném; naučíme se, jak *vyrobit* chaos. Nandejte si šéfkuchařské čepice, vezměte si jako ingredience různé pružinky, táhla, kuličky, kyvadla a podívejte se na to, co je na chaos potřeba:

1. Zajistěte si, aby vám různé části dynamického systému neulétly do nekonečna. Pamatujte, že chaos je definovaný pro vázaný systém.
2. Pokud v systému hodně dochází ke tření a k disipaci, musíte systému poskytnout nějaký systém poštuchování nebo buzení, aby se nepřestal pohybovat. Zase ale nesmí poštuchování způsobit, že se části systému pohybují nekonečně rychle, to by bylo také svým způsobem porušení podmínky na vázanost systému, protože by unikal někam do pryč v „prostoru rychlostí“.
3. Uvolněte dostatečné množství stupňů volnosti systému. Pokud se nemůže trajektorie pohybovat v dostatku rozměrů, k chaosu z principu nemůže dočázet.
4. Přidejte nelinearitu, tj. přidejte do systému síly, které nejsou jen konstantní nebo lineárně závislé na souřadnicích. Žádné nudné síly lineárně závislé na výchylce  $x$  jako u pružinky  $F = -kx$ ! Chceme alespoň něco jako  $F = -kx^2$ !

Garantuji vám, že když všechny tyto ingredience použijete, v drtivé většině případů dostanete chaotický systém. Dost možná z tohoto receptu ještě nejste úplně moudří, ale to nevadí. Od toho, abyste to pochopili, je tu tento díl seriálu. Postupně si v něm každý ze zmíněných kroků vysvětlíme, a nakonec dokonce uvaříme velmi delikátní chaotickou *mapu*.

### Terminátor? Kdepak, rotor

Začneme hodně jednoduše první ingrediencí, vázaností systému, a uvidíme, kam se to vyvine. Nejjednodušší způsob, jak mít systém vázaný, je jej přivázat nebo dokonce zafixovat tak, aby se sice mohl pohybovat, ale pouze v konečné oblasti prostoru. Představme si, že na tenkou osu připevníme nehmotnou tyčku, na jejímž druhém konci je hmotný bod. Tyčka se může zcela volně otáčet kolem osy, nemůže se však po ní posouvat. K určení polohy bodu v daném okamžiku nám pak stačí jenom jedno číslo, jako vhodný se jeví úhel otočení okolo osy od zvolené referenční polohy. Tomuto úhlu budeme říkat  $\varphi$ . Máme tedy něco, čemu se říká *rotor*, věcičku, co se může otáčet jen kolem dokola v nějakém směru a má *jen jeden stupeň volnosti*, který je navíc automaticky vázaný. Když totiž protočíte úhel  $\varphi$  (v radiánech) o  $2\pi$ , jste zase na tom samém místě, takže existuje jen konečný interval hodnot  $\varphi$ , ve kterém se náš rotor může z principu pohybovat.

Zopakujme pro pořádek, že pokud popisujeme polohu těžiště rotoru pomocí úhlu  $\varphi$ , je rychlost  $v_\varphi$  ve směru rostoucího<sup>5</sup>  $\varphi$  dána jako

$$v_\varphi = R\dot{\varphi},$$

kde  $\dot{\varphi}$  je časová derivace  $\varphi$  a  $R$  je vzdálenost těžiště rotoru od osy. Pokud chceme zjistit, jaké je zrychlení  $a_\varphi$  ve směru rostoucího  $\varphi$ , předchozí rovnici prostě zderivujeme podle času a dostaneme

$$a_\varphi = \dot{v}_\varphi = R\ddot{\varphi},$$

kde jsme užili toho, že  $R$  je konstantní.

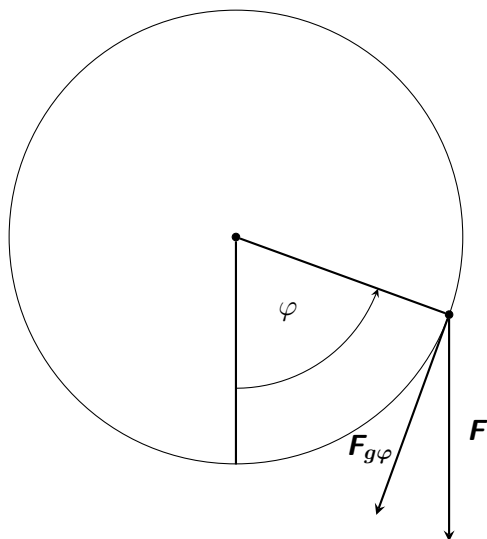
Pokud pak použijeme Newtonův zákon  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ , kde  $m$  je hmotnost rotoru, a uvážíme, že veškeré síly mimo směr otáčení se vyruší díky uchycení na ose, dostáváme jenom jednu rovnici pro pohyb rotoru

$$F_\varphi = ma_\varphi = mR\ddot{\varphi}.$$

Pokud byste rotorem otočili tak, aby rotor při  $\varphi = 0$  visel dolů ve směru tíhové síly, na rotor by v libovolné poloze působila (jako vždy) konstantní tíhová síla  $\mathbf{F}_g = -mg\mathbf{e}_d$ , kde  $\mathbf{e}_d$  je vektor mířící dolů. Zprvu se tedy zdá, že na chaos je tíhová síla příliš nudná, ale nesmíme zapomenout, že rotor je vázaný a při každém natočení  $\varphi$  se část tíhové síly vyruší a zbude z ní jen část  $\mathbf{F}_{g\varphi}$  ve směru možného

---

<sup>5</sup>Tj.  $\varphi$  roste proti směru nebo po směru hodinových ručiček na rotoru. Záleží jen na nás, kterou ze dvou možností *orientace úhlu* si vybereme. Pokud ale zvolíme rostoucí  $\varphi$  třeba po směru hodinových ručiček, kladné  $v_\varphi$  znamená, že se rotor pohybuje právě po směru hodinových ručiček.



Obr. 57: Náčrt tíhové nebo elektrostatické síly působící na rotor a jejího průmětu do směru otáčení. Směr, ve kterém úhel  $\varphi$  roste je schválně načrtnutý tak, aby bylo jasné znaménko u  $F_{g\varphi} = -F \sin \varphi$ . Síla totiž působí *proti* směru růstu  $\varphi$ , a proto musí mít záporné znaménko.

otáčení rotoru (viz obrázek 57). Když si nakreslíme všechny náležité trojúhelníky a použijeme základní goniometrii, dostaneme, že z tíhové síly přežije jen

$$F_{g\varphi} = -mg \sin \varphi, \quad (93)$$

což už je taková zábavnější *nelineární* síla (nezávisí jenom tak na  $\varphi$ , ale i na něčem složitějším). Způsobí ale chaos? Jistě si pamatujete z hodin fyziky, že ne. Svislý rotor je totiž realizací tzv. *fyzikálního kyvadla*, které buď osciluje, pěkně periodicky sem a tam okolo svislé polohy, nebo se při dostatečné rychlosti protáčí kolem dokola – také periodicky.

Jak to, že tedy ale nevyrobíme chaos? Zapomněli jsme snad na nějakou z ingrediencí? Nebo jsme jen měli smůlu? První ingredienci máme, systém je vázaný. Tření neuvažujeme, takže druhá ingredience je také v zásadě splněna. A čtvrtou také, síla je přeci nelineární. A třetí? Je jeden stupeň volnosti dost na chaos? Skoro.

### *Kolik dimenzí na chaos?*

Pojďme nejdřív přemýšlet nad tím, kolik dimenzí má stav našeho rotoru. Určitě má nejméně jednu, a to úhel  $\varphi$ . Ale vystihuje pouze  $\varphi$  úplný stav našeho dynamického systému? Představte si, že rotor je na  $\varphi = 0$  a úplně v klidu. Teď si ale představte, že je na  $\varphi = 0$ , ale řítí se nějakým směrem,  $\dot{\varphi}$  je nenulové. Jsou to ty samé stavy

systému? Jistě ne. K vystižení stavu rotoru tedy potřebujeme dvě čísla,  $\varphi$  a  $\dot{\varphi}$ . Říkáme tedy, že se jedná o dvourozměrný dynamický systém.

Tak ale co ten chaos. Existuje matematická věta, takzvaný *Poincarého-Bendixonův teorém*, jejímž důsledkem je, že chaos nemůže nastat pro dynamický systém<sup>6</sup> o méně než třech rozměrech. Ouha, to náš rotor ale ještě zatím nespĺňuje. Představte si ale teď, že se rotor pohybuje pod časově proměnnou silou  $\mathbf{F}(t)$ . K vystižení úplného stavu systému by pak nestačilo jen říct  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ , ale museli bychom také určit čas  $t$ , ve kterém se nacházíme a ze kterého se situace může vyvíjet docela jinak než v jiném čase  $t'$ .

Pokud tedy umístíme rotor do nějakého pole nelineární časově proměnné síly  $\mathbf{F}_\varphi(t)$ , máme třidimenzionální dynamický systém a už bychom měli najít chaotické chování.

### *Dávám ti kopačky, rotore!*

Pokoušet se řešit pohyb v poli proměnné síly může ale být docela fuška. Budeme tedy předpokládat, že rotor si po většinu času vesele rotuje a po nějakém čase  $T$  se náhle zapne síla, která mu během krátkého okamžiku předá impuls a pak se zase vypne. Můžete si ověřit, že pokud působíme po nějaký čas  $\Delta t$  konstantní silou ve směru otáčení, působíme na rotor konstantním zrychlením a dostáváme změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{F_\varphi \Delta t}{mR}.$$

Bude se nám hodit rovnici vyjádřit pomocí *impulsu*, který je definován jako

$$I = \int_{\Delta t} F_\varphi dt,$$

což speciálně v případě konstantní síly dává  $I = F_\varphi \Delta t$ . Pro změnu úhlové rychlosti pak dostáváme

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{I}{mR}. \quad (94)$$

Pokud ale chceme dostat nějaký chaos, musí síla záviset třeba na úhlu,  $F_\varphi = F_\varphi \varphi$ . Na druhou stranu, pokud je síla takto závislá, nemáme takový hezký vztah pro změnu rychlosti jako (94), protože  $\varphi$  se samozřejmě během  $\Delta t$  změní a tím nebude konstantní působící síla.

Jediný způsob, jak toto jednoduše vyřešit, je předpokládat, že síla působí po tak krátkou dobu  $\Delta t$ , že její efekt předá impuls v jediném bodě  $\varphi$ . Ve výsledku tedy budeme mít, že rotor dostane jednou za časovou periodu  $T$  kopanec (impuls)  $I = I(\varphi)$  závislý jen na okamžité poloze rotoru. Tento kopanec pak způsobí okamžitou změnu úhlové rychlosti

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{I(\varphi)}{mR}, \quad (95)$$

<sup>6</sup>Bavíme se o fyzikálních systémech se spojitým časem. Pokud například vezmeme funkci  $f(x)$ , pak posloupnost postupných iterací této funkce daná vztahem  $x_{n+1} = f(x_n)$  může být v jistém slova smyslu chaotická, i když je  $x$  jednorozměrné.

a jinak se bude rotor volně protáčet po svém. Tj. mimo kopance bude  $\dot{\varphi}$  konstantní a  $\varphi$  bude rovnoměrně růst s touto rychlostí  $\dot{\varphi}$ .

V daném přiblížení tedy můžeme explicitně sledovat vývoj systému. Nejlepší je sledovat sekvenci bodů po uběhnutí každé „kopací periody“  $T$ . Úhlovou rychlost a úhel po  $n$  kopnutích  $\dot{\varphi}_n, \varphi_n$  můžeme z hodnot po předchozím kopnutí  $\dot{\varphi}_{n-1}, \varphi_{n-1}$  vyvodit následovně: rotor se mezi kopanci prostě volně otáčí s úhlovou rychlostí  $\dot{\varphi}_{n-1}$  a kopance si nevšimne, pro úhel  $\varphi_n$  tedy máme

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}.$$

Naopak úhlová rychlost  $\dot{\varphi}$  se mezi kopanci nemění vůbec, ale samotný kopanec ho posune podle předpisu (95)

$$\dot{\varphi}_n = \dot{\varphi}_{n-1} + \frac{I(\varphi_n)}{mR}.$$

### Vypínání a zapínání tíhy

Představte si nyní, že na rotor umístíme náboj  $e$  a umístíme jej mezi dvě velké desky kondenzátoru tak, že mezi nimi vzniká nějaké homogenní<sup>7</sup> elektrostatické pole  $\mathbf{E}$  ve směru tyčky rotoru, když je  $\varphi = 0$  (opět jako na obrázku 57). Na rotor tedy působí síla  $e\mathbf{E}$ , ale do směru otáčení se promítne při tomto natočení jen  $F_\varphi = -eE \sin \varphi$ . Pokud zapneme toto elektrostatické pole jen na chvilíčku, bude předaný impuls zhruba  $I(\varphi) = -eE\Delta t \sin \varphi$  a po  $n$  kopnutích budeme mít

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}, \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K} \sin \varphi_n,\end{aligned}$$

kde  $\tilde{K} = eE\Delta t/(mR)$ . Když označíme  $x = \varphi$  a  $y = \dot{\varphi}$ , jsou tyto iterace mapováním roviny  $xy$  opět na rovinu  $xy$ . Takovýmto iteracím dynamických systémů se tedy říká *mapy*. Tato mapa, kterou jsme si zrovna odvodili, je jedna z nejjednodušších a nejelegantnějších map chaotického dynamického systému, a proto se jí říká *standardní mapa*. Vývoj v této mapě je pro řadu počátečních podmínek chaotický a lze to i pro některé hodnoty  $\tilde{K}$  a  $T$  matematicky dokázat.

Přidejme ještě krátkou poznámku k počítačovému generování náhodných čísel zmíněnému v předchozím díle. Mnoho generátorů náhodných čísel v počítači jsou takové trochu legrační triky, jak vzít předchozí pseudonáhodné číslo a nové pseudonáhodné číslo získat pomocí nějaké banální operace (*nechaotické mapy*), která jen není na první pohled vidět. Řada náhodných generátorů tedy produkuje kvaziperiodickou posloupnost čísel, jen se špatně vysledovatelnou pravidelností. Pro potřeby kryptografie toto ale nestačí a často se používají chaotické mapy, kde je pseudonáhodnost o hodně kvalitnější<sup>8</sup>

Ale zpátky ke standardní mapě. Když si vzpomenete na rovnici (93), vidíte, že naše kopání elektrickým polem odpovídá zapínání a vypínání tíhového pole. Pokud

<sup>7</sup>Tj. stejné ve všech bodech prostoru.

<sup>8</sup>Protože ale máme v počítači čísla na konečný počet desetinných míst, bude nakonec i chaotická trajektorie v této reprezentaci periodická, ale s olbřími periodou.

tedy hodně snížíme periodu spínání  $T$  a spolu s tím budeme adekvátně snižovat  $\tilde{K}$ , měli bychom efektivně získat něco jako pohyb kyvadla v homogenním tíhovém poli. V příštím díle si numerickými experimenty ověříme, že standardní mapa má chaotické vlastnosti a že vskutku tyto trajektorie  $\dot{\varphi}_n, \varphi_n$  připomínají trajektorie v případě fyzikálního kyvadla. Ale zjistíme ještě něco – někde chaos je a někde není. A kde bude? Na špičce propisky. Cože? Uvidíte.

## Úloha V.S ... mapovací

6 bodů

1. Ukažte, že pro libovolné hodnoty parametrů  $\tilde{K}$  a  $T$  můžete standardní mapu ze seriálu vyjádřit jako

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\y_n &= y_{n-1} + K \sin x_n,\end{aligned}$$

kde  $x, y$  jsou nějak přeškálovaná  $\dot{\varphi}, \varphi$ . Určete fyzikální rozměr  $K, x, y$ .

2. Podívejte se znova na model nakopávaného rotoru ze seriálu a vezměte tentokrát předávaný impuls  $I(\varphi) = I_0$ , po periodě  $T$  pak  $I(\varphi) = -I_0$ , po další zase  $I_0$  a takto dokola kopejte rotor tam a zpátky.

- a) Napište mapu  $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$  na základě hodnot  $\varphi_{n-1}, \dot{\varphi}_{n-1}$  před dvojkopem  $\pm I_0$ .
- b) Bude zkonstruovaná mapa chaotická? Proč ne?
- c) Vyřešte  $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$  na základě nějakých počátečních podmínek  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$  pro libovolné  $n$ .

*Bonus* Zkuste podle ingrediencí ze seriálu navrhnout kopání, které *bude* dávat chaotickou dynamiku. Dávejte ale pozor na to, že  $\varphi$  je  $2\pi$ -periodické a že by se vám  $\dot{\varphi}$  nemělo vyšroubovat kopáním donekonečna. (řešení str. 188)

## Kapitola 6: Zase na špičce propisky

Je to tu zas, seriál o chaosu. A je to šestý, závěrečný díl, ve kterém se zblízka podíváme na standardní mapu a její chaos, který je přeci jen o dost jiný než v případě Lorenzova modelu.

### Standardní kyvadlo

V minulém díle jsme si odvodili, jak se bude vyvíjet rotor (tyčka upevněná na osu tak, aby se mohla otáčet pouze v jednom směru) pod vlivem náhlých pulsů síly. Konkrétně pokud byla síla homogenní v prostoru, způsobil průmět této síly do směru otáčení rotoru  $\varphi$ , že po  $n$  pulzech byla rychlost a natočení rotoru

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}, \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K} \sin \varphi_n.\end{aligned}\tag{96}$$

Této „mapě“ jsme říkali *standardní mapa*.

Můžete si vzpomenout na druhý díl seriálu, kde jsme diskutovali numerickou integraci, to jest přibližné řešení pohybových rovnic pomocí jednoduchých iterací.

Pokud bychom se snažili přibližně numericky integrovat pohyb rotoru v poli nějaké<sup>9</sup> síly  $F_\varphi$ , dělali bychom to zhruba takto

$$\varphi(t + \Delta t) \approx \varphi(t) + \frac{d\varphi}{dt}(t)\Delta t = \varphi(t) + \dot{\varphi}(t)\Delta t, \quad (97)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(t + \Delta t) \equiv \dot{\varphi}(t + \Delta t) \approx \dot{\varphi}(t) + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\Delta t = \dot{\varphi}(t) + \frac{F_\varphi}{mR}\Delta t,$$

kde čím menší krok  $\Delta t$  použijeme, tím přesnější řešení postupným posouváním dostáváme. Pokud se ale nacházíte v poli homogenní tíhové síly, do směru rotoru se promítne (viz minulý díl seriálu)  $F_\varphi = -mg \sin \varphi$ . Pokud ale označíme  $\varphi(t + \Delta t)$  jako  $\varphi_n$ ,  $\varphi(t)$  jako  $\varphi_{n-1}$  a obdobně s rychlostmi, vypadá rovnice (97) setsakramentsky podobně jako rovnice standardní mapy (96). Pokud navíc položíte  $\tilde{K} = g\Delta t/R$  a  $T = \Delta t$ , vypadá dokonce jeden krok numerické integrace úplně stejně jako iterace standardní mapy! Standardní mapa bude ale relativně dobře odpovídat opravdovému vývoji rotoru v tíhovém poli (tj. chování fyzikálního kyvadla) pouze v tom případě, že  $\Delta t$  je malé, a tudíž pouze pokud jsou hodně malé parametry  $\tilde{K}$  a  $T$ . To nám dává i fyzikální smysl – když zapínáme a vypínáme sílu po velmi kratoučkých okamžicích a jednotlivé impulsy nejsou moc velké, je to tak trochu jako kdyby byla síla pořád zapnutá, akorát s nějakým podivným šumem.

Připomeňme ještě rychle, jak se vlastně fyzikální kyvadlo chová. Když míří kyvadlo (rotor) svisle dolů (tj.  $\varphi = 0$ ), je v rovnovážné poloze a pro malé výchylky kmitá sem a tam, říká se tomuto typu pohybu *librace*. Jakmile se ale rozkmitá moc, začne se víc a víc „zdržovat“ – blíží zcela opačného vychýlení směrem nahoru. Rotor vychýlený úplně nahoru v homogenním tíhovém poli je sice v rovnováze, ale je to rovnováha *nestabilní*, docela jako u propisky postavené na špičku. Stačí malinké vychýlení doprava nebo doleva, ať už v poloze nebo v rychlosti, a kyvadlo začne sklouzávat exponenciálně rychle nalevo nebo napravo.

Už v samotném fyzikálním kyvadle se tedy nachází „zárodek chaosu“, v našem případě je to v bodě nestabilní rovnováhy  $\varphi = \pi$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ . Pokud je ale úhlová rychlost rotoru dost velká, přes nestabilní rovnováhu nahoře prostě přeletí. V tom případě se pohybu říká *rotace* a je to skoro jako volné otáčení rotoru, až na to, že v poloze „nahore“ rotor vždy trochu zpomalí, zatímco ve svislé poloze má vždy největší rychlost.

### Čtverec na čtverec

Je jasné, že souřadnice  $\varphi$  je periodická, ale zvláštní je, že i rychlost  $\dot{\varphi}$  je v nějakém slova smyslu periodická. Proč? Protože když rotoru udělíme takovou rychlost, že se během periody  $T$  přetočí o celou otočku, z hlediska našeho „snímkování“  $\varphi_n$  po periodě  $T$  rotor vlastně stojí na místě, protože jej po periodě nalezneme zase v té samé poloze. Takto může během periody  $T$  udělat i dvě, tři, čtyři... prostě kolik chceme otoček, ale z hlediska snímkování po periodě  $T$  bude vlastně pořád stát na místě.

<sup>9</sup>Tato síla může být docela obecná, nemusí to být žádné divoké impulsy.

Když si to dobře rozmyslíte, zjistíte, že nějaké počáteční  $\varphi$  bude mít úplně ty samé důsledky pro naše snímkování, pokud se bude lišit o násobek  $2\pi/T$ , tj. vývoj ve  $\varphi_n$  bude při takovém rozdílu stejný nejen po jedné, ale po libovolném počtu period! Formálně tedy můžeme zavést úhlovou rychlost  $\dot{\varphi}$  jako  $2\pi/T$ -periodickou. Nemá to žádný valný fyzikální význam, ale umožňuje nám to standardní mapu studovat kompaktním způsobem.

V seriálové úloze jste si ještě mohli problém převést do trochu jiných proměnných, ve kterých se standardní mapa většinou uvádí v učebnicích chaosu. Když vezmeme  $x \equiv \varphi$ ,  $y \equiv T\dot{\varphi}$ ,  $K \equiv -\dot{K}T$  (viz vzorové řešení k minulé sérii), dostaneme

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\y_n &= y_{n-1} + K \sin x_n.\end{aligned}$$

Kromě toho, že v této formě má mapa pouze jeden parametr  $K$ , dostáváme ještě hezký výsledek pro „periodičnost“  $y$ , protože ve smyslu, v jakém jsme diskutovali  $\dot{\varphi}$  jako  $2\pi/T$ -periodické, je také  $y$   $2\pi$ -periodické. Pokud si tedy v rovině  $xy$  načrtnete čtverec  $2\pi \times 2\pi$ , standardní mapa tento čtverec vezme a zobrazí ho na sebe sama. Na obrázku 58 můžete vidět, jak se po tomto čtverci „procházejí“ náhodně zvolené počáteční body při mnoha iteracích mapy pro různé hodnoty parametru  $K$ .

Na obrázku 58 ale můžete vyzorovat ještě jednu věc. Některé body po čtverci uspořádaně krouží po uzavřené křivce, některé se naopak zdánlivě náhodně a bez jakéhokoliv řádu procházejí v nějaké oblasti. Uspořádaně kroužící body totiž odpovídají nechaotickému nebo též *regulárním*u módu nakopávaného rotoru, jak se mnohdy nechaotickému chování říká. U těchto počátečních podmínek se nakopávání prostě sešlo tak, že je chování jen kvaziperiodické. Naopak u druhého typu počátečních podmínek se jedná o chaotické chování, kopance se u nich scházejí tak, že rotor bez jakéhokoliv řádu putuje mezi různými možnostmi svého protáčení.

My ale můžeme porozumět obrázku 58 ještě jiným způsobem. Jak jsme si ukázali o pár odstavců výše, pro malé  $T$  a  $K$  dává standardní mapa zhruba vývoj fyzikálního kyvadla. V nové formulaci pak odpovídá hrubý vývoj kyvadla hodně malé hodnotě parametru  $K$ . Stabilní rovnováha by pak měla být někde okolo  $x = 0$ ,  $y = 0$  a nestabilní okolo  $x = \pi$ ,  $y = 0$ . Když se podíváme na obrázek 58, vidíme něco, co nás vlastně tolik nepřekvapuje. Chaos, to globálně nestabilní chování, se pro větší  $K$  vyrojil okolo bodu nestabilní rovnováhy a regulární chování naopak nejdéle přežívá v okolí stabilní rovnováhy.

Tj. chaos je přesně okolo „propisky na špičce“ a není to žádná náhoda. Toho, že nestabilní rovnováha může nakonec generovat hrozivě komplikovaný pohyb, si všiml už Henri Poincaré při řešení problému tří těles před více než sto lety. Bohužel tu v seriálu nemáme dostatečný prostor pro nastínění mechanismu vzniku chaosu a náležitých struktur, ale vězte, že je to krásná matematicko-fyzikální teorie dvacátého století.

Obrázek 58 ale explicitně ukazuje jen první charakteristiku chaosu, aperiodičnost. I když je v zásadě jasné, že v chaotické oblasti se budou různé počáteční podmínky nahodile míchat, budete si to moct sami ověřit v seriálové úloze. Pro-



to ještě zmíním, jak v Octave nasimulovat iterace standardní mapy pro nějakou počáteční podmínku  $x_0, y_0$ . Stačí napsat:<sup>10</sup>

```
function [X] = iterace_stanMap(x0,y0,N,K)
X = zeros(N,2);
X(1,:) = [x0 y0];
for n = 2:N
x1 = mod(x0 + y0, 2*pi);
y1 = mod(y0 + K*sin(x1) + pi, 2*pi)-pi;
x0 = x1;
y0 = y1;
X(n,:) = [x0 y0];
end
endfunction
```

Funkce `iterace_stanMap` vezme počáteční podmínky  $x_0, y_0$  a  $N$ -krát iteruje standardní mapu pomocí cyklu `for n=2:N ... end`. Tyto iterace ukládá do velkého sloupce čísel  $X$ , který pak také vrací na výstupu. Když se ale podíváte dovnitř cyklu `for`, nemusíte úplně poznat standardní mapu v definicích  $x_1$  a  $y_1$ , jsou tam navíc nějaká podivná  $\pi$  a `mod`. Funkce `mod(..., 2*pi)` totiž zacyklí výsledek tak, že vrátí zbytek po dělení  $2\pi$  a daná souřadnice je pak  $2\pi$ -periodická. Žonglování s  $\pm\pi$  u  $y_1$  je tam pak jenom proto, aby  $y$  bylo periodické na  $(-\pi, \pi)$  místo  $(0, 2\pi)$  a nulová rychlost otáčení rotoru byla uprostřed iterovaného čtverce (přesně jak je to na obrázku 58).

Výsledek tisíce iterací při nějakém  $K$  si pak můžete pro jedny počáteční podmínky `pocX`, `pocY` vykreslit například následovně:

```
pocX=...;
pocY=...;
K=...;
Iterace=iterace_stanMap(pocX,pocY,1000,K);
plot(Iterace(:,1),Iterace(:,2),' ');
```

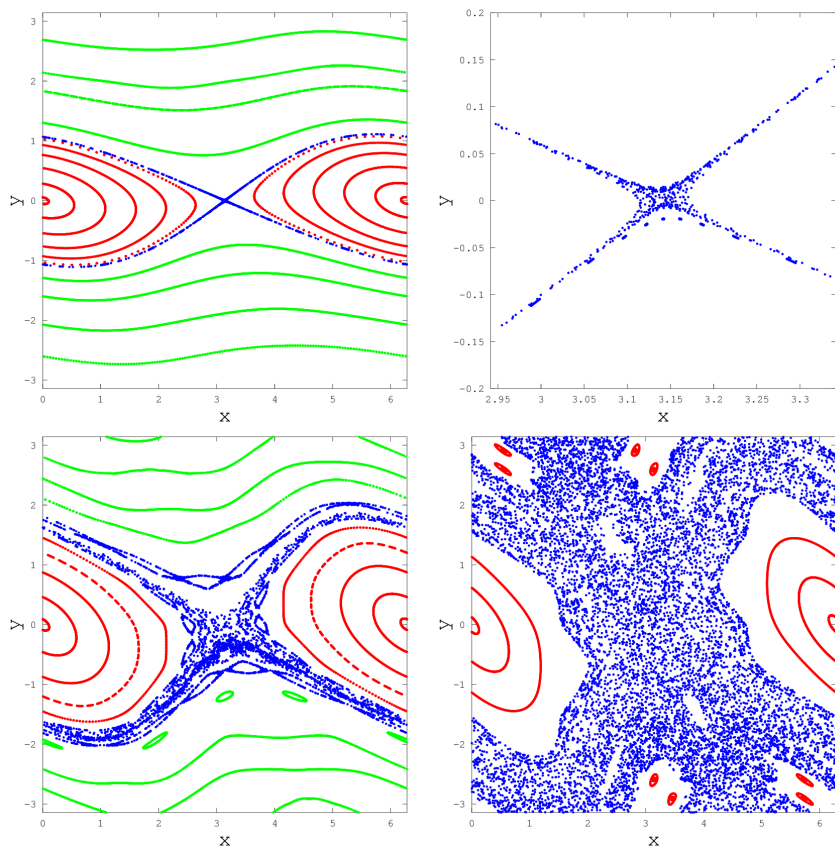
Podobně byl v Octave získán i obrázek 58.

## Závěr

Chaos je skvělá věc, protože nám ukazuje, jak se můžeme mýlit v našich nejpřirozenějších představách. Něco jako chaos, nepředvídatelnost už při dvou stupních volnosti fyzikálního systému, by si ještě v devatenáctém století nedokázal nikdo představit. Stejně tak by nikdo nebyl s to předpovědět, že jednoduché rovnice jako rovnice Lorenzova modelu dokážou vyprodukovat *fraktál*, podivnou nehladkou geometrickou strukturu.

Důležitost chaosu ale nespočívá jen v jeho nečekanosti, ale i v jeho faktických důsledcích. Kladný Ljapunovův exponent znamená, že přicházíme nesmírně rychle

<sup>10</sup> Octave pod Windows může vyžadovat shodu názvu funkce a názvu skriptu, je-li definice funkce na prvním řádku. Lze vyřešit přejmenováním, vložením do zvláštního souboru atp.



Obr. 58: Sekvence bodů získané iterací standardní mapy pro různé počáteční podmínky. Pro dobré pochopení obrázku si musíte uvědomit, že pravý a levý okraj každého obrázku je ztotožněný, protože  $x$  je vlastně jen úhlová souřadnice  $\varphi$ . Pokud byste měli problém si levý a pravý okraj ztotožnit, můžete si obrázek vytisknout, vystříhnout a pravý a levý okraj prostě slepit. Analogie librace je vyznačena červeně – pokud zapomenete na osu  $y$ , vidíte, že na červených křivkách se body pohybují sem a tam v  $x$ , prostě jako u normální oscilace kyvadla. Naopak zeleně je vyznačena analogie *rotace*, pokud opět zapomenete na osu  $y$ , putují body bez přetržení buď doprava nebo doleva, rotor se prostě protáčí na snímcích dokola. *Modře* je ovšem vyznačen chaos. V horním řádku jsou iterace standardní mapy pro  $K = -0,3$ , vlevo je celý  $2\pi \times 2\pi$  čtverec, vpravo je pak detail okolí původní rovnováhy, „špičky propisky“. Dolní řádek jsou pak celé čtverce pro  $K = -0,8$  (vlevo) a  $K = -1,5$  (vpravo). Vidíte, že s rostoucím  $K$  se analogie s fyzikálním kyvadlem rozpadá, roste chaos a dokonce úplně mizí regulární „rotace“ kyvadla.

o naši znalost stavu systému. Je proto důležité o této možnosti vědět a uvědomovat si, v jakých oblastech fyziky i praktického života s tím musíme počítat.

Co je na tom všem ale nejzávažnější je, že chaotické chování není vůbec nic výjimečného, jedná se o jev zdokumentovaný napříč fyzikou, od počasí přes oscilace hvězd, od modelů atomických jader<sup>11</sup> po pohyby planet. Lze dokonce matematicky ukázat, že pokud si sednete ke stolu a náhodně si vymyslíte rovnice pohybu nějaké vázané dynamiky, bude téměř vždy alespoň trochu chaotická.

Na druhou stranu můžete i u Lorenzova modelu nebo standardní mapy vidět, že jakkoli zní název „chaos“ hrozivě, jeho nepředvídatelnost má vždy své meze. U Lorenzova modelu konvekce je chování kapaliny fakticky vždy někde na podivném atraktoru, onom zvláštním motýlím tvaru v prostoru parametrů  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , a naopak u standardní mapy se chaos pro velké rozmezí parametru  $K$  schovává jen v malé šlupičce počátečních podmínek a doopravdy se rotor v chaotickém módu může pohybovat právě jen v této omezené šlupce vybraných  $x$  a  $y$ . Analýza chaosu tedy má smysl v tom, že dokážeme dobře odhadovat, kdy a v jakém rozmezí o znalosti stavu systému přicházíme, a za jakou mez naše nejistota už neroste.

Přestože je chaos tak fascinující a důležitý, moc se o něm ve školách neučí, a to hlavně proto, že je poměrně těžké jej osedlat. Proto doufám, že v tomto seriálu jste měli příležitost alespoň ochutnat, jak s chaosem pracovat. Sotva za rohem od poměrně fádních dynamických systémů probíraných ve škole se totiž nachází fascinující dálavy dynamiky roztodivné na všech škálách. Pravda, čistě s papírem a tužkou tam nedosáhnete, ale viděli jste, že dnes můžete napsat pár řádků ve volně dostupném programu na průměrném počítači a chaos se vám rozvine přímo před očima. Doufám, že i to jste měli příležitost se alespoň základně naučit a třeba se k tomu někdy vrátíte. Tím tedy uzavírám letošní seriál a přeji vám jen to nejlepší do chaotických zítřků!

## Úloha VI.S ... rozmixovávací

6 bodů

Opište si funkci `iterace_stanMap` ze seriálu a pomocí následujících příkazů si vyberte deset velmi blízkých počátečních podmínek pro nějaké  $K$ .

```
K=...;
X01=...;
Y01=...;
Iter1 = iterace_stanMap(X01,Y01,1000,K);
...
X10=...;
Y10=...;
Iter10 = iterace_stanMap(X10,Y10,1000,K);
```

<sup>11</sup>Tam by se dokonce jednalo o příklad *kvantového chaosu*.

V `Iter1` až `Iter10` je tedy schováno tisíc iterací daných počátečních podmínek pomocí standardní mapy. K tomu, abyste viděli, jak vypadá všech deset bodů po  $n$ -té iteraci, musíte napsat:

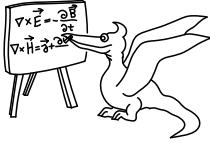
```
n=...;
plot(Iter1(n,1),Iter1(n,2),"o",...,Iter10(n,1),Iter10(n,2),"o")
xlabel ("x");
ylabel ("y");
axis([0,2*pi,-pi,pi],"square");
refresh;
```

"o" do příkazu `plot` píšeme, aby se body pro přehlednost vykreslily jako kroužky. Zbytek příkazů je pak zahrnut kvůli tomu, aby graf zahrnoval celý čtverec a měl ty správné popisky.

- Nastavte nějaké silné kopání,  $K$  alespoň tak  $-0,6$ , a umístěte svých deset počátečních podmínek velmi blízko sebe někam doprostřed chaotické oblasti (tj. třeba „na špičku propisky“). Jak se s iteracemi těchto deset počátečních podmínek oddaluje či přibližuje? Zdokumentujte na grafech. Jak vypadá deset původně velmi blízkých počátečních podmínek po 1000 iteracích? Co z toho můžeme vyvodit o „míchavosti“ počátečních podmínek v dané oblasti?
- Vezměte opět nějaké poměrně silné kopání a umístěte svých deset počátečních podmínek poblíž svislé rovnováhy rotoru, tj.  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Jak se těchto deset počátečních podmínek oddaluje/přibližuje v čase? Co o jejich vzdálenosti lze říci po velkém počtu kopnutí?

*Bonus* Zkuste naprogramovat a vykreslit i chování nějaké jiné nakopávané mapy. (Pro inspiraci se můžete podívat do vzorového řešení minulé série.)

(řešení str. 190)



## Řešení úloh ze seriálu

### Úloha I.S ... nejistá

1. Sepište si rovnice pro vrh v homogenním tíhovém poli (nemusíte je znovu řešit, ale musíte je umět správně použít). Navrhněte přístroj, který bude vrhat předmět dle vašeho uvážení, a určete, pod jakým úhlem a jakou rychlostí tak činí. Můžete například vrhat pomocí pružiny, změřit její tuhost a hmotnost předmětu a vypočítat kinetickou energii, a tudíž i rychlost předmětu. V jakých rozmezích jste si s rychlostí a úhlem jistí? Dosadte tyto rozsahy do rovnic a ukažte, v jakých rozmezích v důsledku toho můžete očekávat vzdálenost dopadu od vašeho předmětu. Vrhňte svůj předmět daným přístrojem alespoň pětkrát a změřte vzdálenost dopadu – v jakých rozmezích jste si jisti danou vzdáleností? Ukažte, zda se vešly vaše výsledky do toho, co jste předpověděli. (Za odkaz na video s vrhem bonusový bod!)
2. Uvažte kyvadlo s výchylkou  $x$ , které se efektivně kývá harmonicky, ale frekvence jeho kyvů závisí na maximální výchylce  $x_0$

$$x(t) = x_0 \cos[\omega(x_0)t], \quad \omega(x_0) = 2\pi \left(1 - \frac{x_0^2}{l_0^2}\right),$$

kde  $l_0$  je nějaká délková škála. Myslíme si, že pouštíme kyvadlo z  $x_0 = l_0/2$ , ale ve skutečnosti jej vypouštíme z  $x_0 = l_0(1 + \varepsilon)/2$ . O kolik se liší argument kosinu od  $2\pi$  po jedné námi předpokládané periodě? Po kolika periodách bude kyvadlo vychýlené na druhou stranu, než bychom předpokládali?

Tip Argument kosinu se bude v tu chvíli od předpokládaného lišit o víc než  $\pi/2$ .

3. Vezměte do ruky propisku a postavte ji na stůl na špičku. Proč spadne? A co rozhoduje o tom, že spadne spíš doprava, než doleva? Proč nedokážete předpovědět výsledek hodu kostkou, i když zákony fyziky by jej měly plně předurčit? Když hrajete kulečník, je neschopnost dokončit hru pouze v jednom štouchu pouze v tom, že to nedokážete propočítat? Sepište svoje odpovědi a zkuste vyjmenovat fyzikální jevy ze života, které jsou v principu předpověditelné, ale ani dobrá znalost situace vám v předpovědi moc nepomůže.

1. Můžete si lehkou ověřit, že pokud vrhnete hmotný bod v homogenním tíhovém poli  $g$  s vertikální rychlostí  $v_y$ , dopadne na zem v čase

$$t = \frac{2v_y}{g}.$$

V horizontálním směru se však pohybuje rychlostí  $v_x$  a tudíž částice před dopadem dolétne do horizontální vzdálenosti  $s = v_x t = 2v_x v_y / g$ . Zároveň si ale

můžeme složky rychlosti  $v_x$ ,  $v_y$  vyjádřit pomocí velikosti rychlosti  $v$  a úhlu  $\varphi$ , který počáteční rychlost svírá s horizontálním směrem. Máme pak  $v_x = v \cos \varphi$ ,  $v_y = v \sin \varphi$  a s použitím  $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$  získáváme

$$s = \frac{v^2}{g} \sin 2\varphi.$$

Do tohoto vzorce pak můžete nasázet rozmezí své nejistoty a porovnávat s experimentem. Vidíte, že když máme chybu v rychlosti  $\varepsilon$ , posune se výsledek úměrně  $(v + \varepsilon)^2 = v^2 + 2\varepsilon v + \varepsilon^2$ , tj. pro hodně malá  $\varepsilon$  fakticky úměrně  $2\varepsilon v$ . U úhlu je to složitější, ale když si vykreslíte funkci  $\sin 2\varphi$  v radiánech, můžete zjistit, že posun  $\delta$  v radiánech nezpůsobí nikdy v této funkci větší chybu než  $2\delta$ . Největší problém je při experimentu s určením počáteční rychlosti  $v$ . Pokud máte například pružinu s tuhostí  $k$ , víte, že jejím stlačením o  $d$  a uvolněním získáte energii

$$E_p = \frac{1}{2} k d^2,$$

a s použitím vztahu pro kinetickou energii  $E_k = mv^2/2$  jste mohli sestavit mrštidlo, které ideálně přesunulo všechnu energii pružiny do vrženého objektu. Změřením stlačení  $d$  byste pak získali jednoznačně rychlost  $v$  jako

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}} d.$$

Očekávatelný problém při mnoha realizacích takového pokusu ale je, že se všechna energie nepřesune do předmětu, ale ztratí se při výstřelu třením. Ve výsledcích tedy velmi pravděpodobně máte tendenci k nižším doletům.

2. Při  $x_0 = l_0/2$  by se tedy kyvadlo mělo kývat s frekvencí  $\omega_0 = 2\pi(1 - 0,25)$ . Doopravdy se však kývá s frekvencí  $\omega = 2\pi [1 - 0,25(1 + \varepsilon)^2]$ . Jedna perioda je, když je argument kosinu násobek  $2\pi$ , tedy když  $t$  je násobek  $2\pi/\omega$ . (Pozorný čtenář si jistě všimne, že v této úloze pracujeme s bezrozměrným časem.) Při předpokládané periodě bude však argument kosinu

$$2\pi \frac{\omega}{\omega_0} = 2\pi \frac{1 - 0,25(1 + \varepsilon)^2}{0,75} = 2\pi \left( 1 - \frac{2\varepsilon + \varepsilon^2}{3} \right)$$

a argument se tedy od  $2\pi$  liší o  $2\pi(2\varepsilon + \varepsilon^2)/3$ . Kyvadlo jsme tedy pustili s maximální výchylkou a postupně jej nalézáme po periodách níže a níže. V úloze se ptáme na to, kdy už při našich kontrolách nebude kyvadlo ani na té správné straně, ale už trochu vychýlené na druhou. Když se podíváte na graf kosinu, najdete tento bod, kdy funkce prochází na druhou stranu do záporných hodnot, v bodě  $\pi/2$ . K výpočtu tedy stačí vzít  $\pi/2$  a vydělit to získaným rozdílem. Zjistíme, že kyvadlo překročí tuto hranici vychýleností po

$$\frac{3}{4(2\varepsilon + \varepsilon^2)}$$

periodách, kde musíme zaokrouhlit nahoru, abychom dostali celočíselný počet period. Můžete si spočítat, že pokud bychom udělali třeba 10% chybu v měření a tudíž měli  $\varepsilon = 0,1$ , kyvadlo by se přechýlilo po čtyřech námi předpokládaných periodách. Obecnějším výpočtem lze ukázat, že pro kývání okolo malinkatých  $x_0/l_0$  se obdobná chyba kumuluje podstatně pomaleji. Pokud pouštíme z  $(1 + \varepsilon)l_0c$  a myslíme si, že z  $l_0c$ , dostaneme, že fázový posun kyvadla po jedné periodě bude

$$2\pi \frac{c^2}{1 - c^2} (2\varepsilon + \varepsilon^2) .$$

3. Všechny tyto otázky se vás snaží upozornit na něco, čemu se říká *špatně podmíněné problémy* a jak v nich vystupuje naše konečná schopnost vystihnout situaci a počáteční podmínky. Špatně podmíněné problémy jsou okamžiky, kdy nás malá výchylka může svést na úplné scestí v jeho řešení, a přesně proto jsou takové problémy pro fyziku velká obtíž. Na tuto otázku neexistuje žádná vzorová odpověď snad až na snahu se kriticky zamyslet nad tím, jaké fyzikální příčiny vedou k vyjmenovaným jevům – a podle toho je také tato otázka bodována. Budeme o tomto tématu mluvit v příštím seriálu, takže se pro další objasnění se můžete podívat tam.

## Úloha II.S . . . numerická

- Délkové veličiny zadáváme v metrech, časové v sekundách a hmotnostní v kilogramech. Úhlovou rychlost  $\Omega$  zadáváme v radiánech za sekundu. Když vezmete ze seriálu rovnice pro pohyb míče, nachází se v nich ale ještě tři parametry:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Jaké jsou jejich rozměry?
- Uvažujte volný pád míče s  $\Omega = 0$  a  $v_x = 0$ . Existuje pak konečná rychlost  $v_z^t$ , při které se vyrovná třecí síla a tíhové zrychlení a pád míče už nezrychluje.
  - Určete tuto rychlost pomocí parametrů z rovnic pohybu pro míč.
  - Obratle tuto rovnost tak, aby vyjadřovala  $\beta$ .  $v_z^t$  se dá dobře měřit a pro fotbalový míč o hmotnosti  $m = 0,5 \text{ kg}$  je typicky okolo  $25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Kolik je pak  $\beta$ ?
- Vyjádřete si počáteční  $v_x$  a  $v_z$  pomocí úhlu výstřelu  $\varphi$  při fixní počáteční rychlosti  $v = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Sepište program podle seriálu a vyzkoušejte měnit počáteční podmínky a parametry následovně:
  - Zvolte nějaké kladné  $\beta$ , vypněte rotaci  $\Omega = 0$  a zjistěte, zda je úhel výstřelu, pod kterým doletí míč nejdál, menší nebo větší než  $45^\circ$ . Svoje zjištění demonstруйте pomocí grafů letu.
  - Zvolte nenulové kladné  $\alpha$  s numerickou hodnotou v daných jednotkách stejnou jako  $\beta$ ,  $\gamma = 0,01$  (v daných jednotkách) a  $\Omega = \pm 5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Jak se v daných případech změní optimální úhel výstřelu?
  - Bonus Jak byste tedy nejdále dohodili krikeťákem? Je náš model pro tuto úvahu dostatečný?

1. V této úloze stačilo vzít rovnice z prvního dílu a uvědomit si, že každý člen na levé i pravé straně jedné rovnice musí mít ten samý rozměr. Z rovnice pro zrychlení míče tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \text{m}\cdot\text{s}^{-2} &= [\alpha] \cdot \frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{\text{kg}} \cdot \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow [\alpha] = \text{rad}^{-1}\cdot\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}, \\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} &= [\beta] \cdot \frac{\text{m}\cdot\text{s}^{-1}}{\text{kg}} \cdot \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow [\beta] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}, \end{aligned}$$

kde vůbec nevodí, pokud jste vypustili radiány, protože to je pouze odvozená jednotka SI. Rozměr  $\gamma$  pak plyne z rovnice pro úhlové zrychlení

$$\text{rad}\cdot\text{s}^{-2} = [\gamma] \cdot \frac{\text{m}^3\cdot\text{s}^{-3}}{\text{kg}\cdot\text{m}^2} \cdot \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} \Rightarrow [\gamma] = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^2.$$

2. Při dosažení terminální rychlosti má míč nulové zrychlení a rychlost pouze zápornou ve směru  $z$ . Tj. pokud máme  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = (0, 0, -v_z)$ , pak máme z rovnice pro zrychlení z prvního dílu seriálu

$$0 = -g + \frac{(v_z^t)^2}{m}\beta \Rightarrow v_z^t = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \Rightarrow \beta = \frac{mg}{(v_z^t)^2}.$$

Když do této rovnice dosadíme hmotnost  $m = 0,5 \text{ kg}$ , tíhové zrychlení  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $v_z^t = 25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , dostáváme  $\beta = 0,008 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ .

3. a) Když zapnete pouhé tření, je nejlepší házet pod úhlem lehce pod  $45^\circ$ . V našem modelu jsme zvolili hmotnost  $m=1$ , třecí koeficient  $\beta=0.4$ , poloměr míče 10 cm, a tudíž  $r=0.01$ , a prostým posouváním úhlu výstřelu jsme našli ideální úhel cca  $36^\circ$ . (Z úlohy nebylo potřeba dělat žádnou vědu, opravdu stačilo jen říct, jestli je úhel pod, nebo nad 45 stupni.)
- b) V tomto případě jsme použili ty samé parametry jako v předchozím a hodnotu  $\alpha=0.4$ . Daný koeficient  $\gamma$  dost rychle rotaci zbrzdí, takže je výsledek skoro stejný jako v předchozím případě – ideální úhel jsme našli jako  $37^\circ$  pro kladnou úhlovou rychlost a  $35^\circ$  pro zápornou.
- c) V případě relativně hustého kriketáku můžeme vliv Magnusovy síly i tření považovat za poměrně slabý, protože po většinu pohybu bude dominovat setrvačnost míče. Z numerických experimentů je poměrně jasné, že vliv rotace na pohyb je dost nepředvídatelný – například v našich simulacích se v realistických mezích rotace nepodařilo nijak podstatně měnit dolet, jen optimální úhel výstřelu. Nedostatek našeho modelu je především v tom, že kriketový míč má výrazný šev, jehož natočení může zásadně ovlivnit strhávání magnusovskou silou při pohybu.

Realistické modely rychlého pohybu hrubých předmětů ve vzduchu jsou velmi složité a pohyb má typicky řadu nečekaných vlastností, které lze předvídat fakticky jen s pomocí zkušeností. To je důvod, proč rotaci používají jen ostřílení sportovci při fajnovějších kouscích, jako třeba nadhazovači v baseballu. Ti dokáží pouhou pozicí švu na míči a rotací správně vychýlit jeho



trajektorii a zmást pálkaře z protějšího týmu. Na čistý, přímý hod kompaktním kriketovým míčem ale není na místě věnovat rotaci svoje soustředění a fyzické síly.

Nejlepší by tedy bylo změřit terminální rychlost kriketáku, spočítat  $\beta$  a pomocí simulace odhadnout optimální úhel hodů. Ten ale bude záviset na rychlosti, takže navíc musíte úhel počítat pro nějaký odhad maximální rychlosti, se kterou dokážete házet. Nyní si už jen stačí vypůjčit z kabinetu matematiky obří dřevěný úhloměr a donutit své dokonale vycvičené tělo k vrhu pod daným úhlem.

### Úloha III.S ... dynamická

1. Podívejte se na rovnice Lorenzova modelu a sepište skript na jeho simulaci v Octave (na to si případně osvěžte i druhý díl seriálu). Spolu s vykreslujícím příkazem by váš skript měl vypadat zhruba takto:

```
...
function xidot = f(t,xi)
...
xidot=...;
ydot=...;
zdot= ...;
xidot = [xidot;ydot;zdot];
endfunction
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01,'MaxStep',0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f,[0,300],pocPodminka,nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1),reseni.y(:,2),reseni.y(:,3));
```

Jen místo tří teček doplňte zbytek programu podobně jako v druhém dílu seriálu a použijte  $\sigma = 9,5$ ,  $b = 8/3$ . Pak zjistěte alespoň s přesností na jednotky, pro jaké kladné  $r$  přechází systém z asymptotického zastavování se na chaotickou oscilaci (na počátečních podmínkách nezáleží).

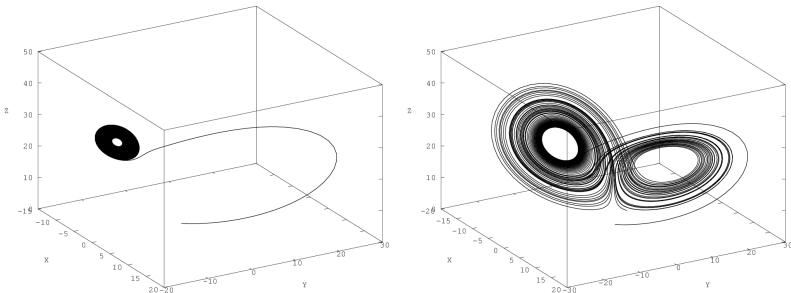
2. Zde je plný text octavovského skriptu pro simulaci a vizualizaci pohybu částice v gravitačním poli hmotného tělesa v rovině  $xy$ , kde všechny parametry a konstanty jsou rovny jedné:

```
clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
alfa=0.1;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)/r^3;
ay=-xi(2)/r^3;
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
```

```

nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01, 'MaxStep', 0.1);
x0=0;
y0=1;
vx0=...;
vy0=0;
pocPodminka=[x0,y0,vx0,vy0];
reseni=ode45(@f, [0,100], pocPodminka, nastaveni)
plot(reseni.y(:,1), reseni.y(:,2));
pause()
    
```

- a) Zvolte počáteční podmínky  $x_0=0, y_0=1, v_{y0}=0$  a počáteční rychlost ve směru  $x$  nenulovou tak, aby byla částice vázaná, tj. neulétla z dosahu centra.
- b) Přidejte ke gravitační síle ve skriptu sílu  $-\alpha r/r^4$ , kde  $\alpha$  je malé kladné číslo. Volte postupně několik zvětšujících se  $\alpha$  počínaje  $\alpha = 10^{-3}$  a ukažte, že způsobují kvaziperiodický pohyb.



Obr. 59: Výstup skriptu pro  $r=23.8$  (vlevo) a  $r=24$  (vpravo). Na obrázku vlevo zjevně trajektorie konverguje ke stacionárnímu cyklu, zatímco napravo pozorujeme složité neperiodické chování. Předělové  $r$  tedy leží mezi těmito hodnotami a s přesností na jednotky jej určujeme jako  $r_p = 24$ .

1. Váš kód pro Lorenzův model by měl s pomocí rovnic z třetího dílu seriálu vypadat zhruba takto:

```

clear all
pkg load odepkg
function xidot = f(t,xi)
r = 23;
sigma = 9.5;
b=8/3;
xidot=sigma*(xi(2)-xi(1));
ydot=-xi(1)*xi(3) + r*xi(1)-xi(2);
zdot= xi(1)*xi(2)-b*xi(3);
xidot = [xidot;ydot;zdot];
endfunction
    
```

```
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01, 'MaxStep', 0.1);
pocPodminka=[0.2,0.3,0.4];
reseni=ode45(@f, [0,100], pocPodminka, nastaveni);
plot3(reseni.y(:,1), reseni.y(:,2), reseni.y(:,3));
```

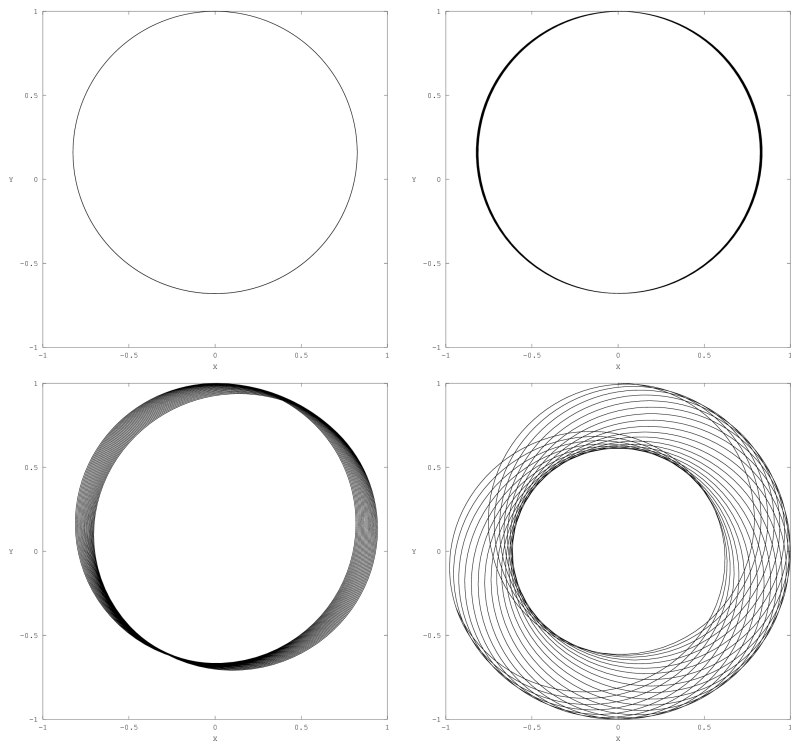
Tento kód jste pak mohli spouštět s různými  $r = \dots$  a pozorovat, pro která je už pohyb chaotický a pro která ještě ne. Asi nejlepší technika pro nalezení parametru bylo kontrolovat trajektorii pro hrubá  $r$  a pak postupně púlit interval mezi dvěma body, mezi kterými docházelo k předělu od stacionárního chování k chaosu. K vyřešení úlohy stačilo nalézt předěl jako na obrázku 59 a pak samozřejmě zaokrouhlit na počet platných cifer, tj. máme přibližně předělové  $r = 24$ . Jemnějším dělením intervalu jste mohli dojít třeba až k  $r = 23,90$ .

2. Skript s pozměněnou silou byl téměř identický tomu ze zadání, změnila se pouze funkce `xidot` následujícím způsobem:

```
function xidot = f(t,xi)
alfa=0;
vx=xi(3);
vy=xi(4);
r=sqrt(xi(1)^2+xi(2)^2);
ax=-xi(1)*(1/r^3+alfa/r^4);
ay=-xi(2)*(1/r^3+alfa/r^4);
xidot = [vx;vy;ax;ay];
endfunction
```

Pokud jste zvolili  $vx_0$  o hodně jiné než 1, skript vám začal hlásit, abyste se pokusili změnit `MaxStep` nebo `InitialStep`, aby se dokázal prointegrovat skrze oblast poblíž  $r = 0$ , kde na částici působí veliké síly a má vysokou rychlost. Pro některé počáteční podmínky se dokonce mohlo stát, že integrátor neintegroval trajektorii dobře a vycházela vám kvaziperiodická už pro `alfa=0`. Pokud se vám toto přihodilo a stejně jste to dobře zdokumentovali spolu s různými hodnotami `alfa`, určitě dostanete plný počet bodů.

Pokud jste ale tuto smůlu neměli a zvolili třeba  $vx=0.9$ , získali jste grafy jako na obrázku 60. Vidíte, že i pro zcela maličká  $\alpha$  se trajektorie začíná stáčet a není periodická. Takováto efektivní síla s nenulovým  $\alpha$  působí například při zahrnutí obecně-relativistických korekcí k newtonovské gravitaci a lze ji pozorovat již ve sluneční soustavě na stáčení perihelia Merkuru.



Obr. 60: Grafy pro pohyb částic v téměř newtonovském gravitačním poli s  $\alpha = 0; 10^{-3}$  (vlevo a vpravo nahoře v pořadí respektive) a  $\alpha = 10^{-2}; 5 \cdot 10^{-2}$  (vlevo a vpravo dole v pořadí respektive). Pro  $\alpha = 10^{-3}$  je efekt téměř nepostřehnutelný, zatímco pro  $\alpha = 5 \cdot 10^{-2}$  již o kvaziperiodicitě nemůže být žádných pochyb.

### Úloha IV.S ... Ljapunovská

1. Uvažujte propisku o délce 10 cm s těžištěm přesně v půlce a  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Nyní si představte, že jste propisku postavili na stůl s nulovou výchytkou  $\delta x$  s přesností na  $n$  desetinných míst a s nulovou rychlostí. Za jak dlouho po postavení propisky si budete moct být jisti pouze s  $n - 1$  desetinnými místy nulovostí výchytky?
2. Vezměte model počasí s největším Ljapunovovým exponentem  $\lambda = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Předpověď počasí přestává být použitelná, pokud je její chyba více než 20%. Pokud jste dokázali změřit stav počasí s přesností na 1%, na jak dlouho byste odhadovali, že bude dobrá vaše předpověď? Odpověď podejte v dnech a hodinách.

3. Vezměte si Lorenzův model konvekce z minulého dílu, opište si z něj funkci  $f(x_i, t)$  a nasimulujte a vykreslete si hodnotu parametru  $X(t)$  pro dvě různé trajektorie pomocí příkazů:

```
X01=1;
Y01=2;
Z01=5;
X02=...;
Y02=...;
Z02=...;
nastaveni = odeset('InitialStep', 0.01, 'MaxStep', 0.1);
pocPodminka1=[X01, Y01, Z01];
reseni1=ode45(@f, [0, 45], pocPodminka1, nastaveni);
pocPodminka2=[X02, Y02, Z02];
reseni2=ode45(@f, [0, 45], pocPodminka2, nastaveni);
plot(reseni1.x, reseni1.y(:, 1), reseni2.x, reseni2.y(:, 1));
pause()
```

Místo tří teček u  $X02, Y02, Z02$  musíte zadat počáteční podmínky pro druhou trajektorii. Pusťte kód alespoň pro pět řádově odlišných, ale malých odchylek a poznamenejte si čas, ve kterém se druhá trajektorie od první kvalitativně odlepí (tj. směřuje například úplně na druhou stranu). Odchylku nezmenšujte pod řád cca  $10^{-8}$ , protože pak se začnou projevovat nepřesnosti numerické integrace. Načrtněte závislost odlepacího času na řádu odchylky.

Bonus Pokuste se ze získané závislosti odlepacího času na velikosti odchylky odhadnout odpovídající Ljapunovův exponent. Budete potřebovat víc než pět běhů a můžete předpokládat, že v okamžiku odlepení velikost odchylky pokaždé zrovna překročila nějaké konstantní  $\Delta_c$ .

1. Přesný vývoj linearizovaných rovnic ze seriálu nám dává, že při  $\delta v(0) = 0$  se počáteční výchylka propisky  $\delta x_0$  vyvíjí jako<sup>1</sup>

$$\delta x(t) = \delta x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}t\right).$$

My chceme vědět, kdy v nejhrošším případě výchylka zasáhne i  $(n-1)$ -té desetinné místo, i přestože začínala o řád níže. Zajímá nás tedy, v jaký okamžik se počáteční odchylka desetkrát zvětší, neboli hledáme čas  $T$ , kdy je  $\delta x(T) = 10\delta x_0$ . Nemusíme tedy do rovnic vůbec dosazovat nějaké konkrétní  $\delta x_0$  a řešíme jen rovnici

$$10 = \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}T\right),$$

což lze pomocí inverzního kosinu hyperbolického arccosh obrátit jako

$$T = \operatorname{arccosh}(10)\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

<sup>1</sup>Vzpomeňte na definici kosinu hyperbolického  $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$ .

Pro  $L = 5 \text{ cm}$  a  $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  pak máme  $T \doteq 0,2 \text{ s}$ .

2. Náš model počítá vývoj počasí  $\mathbf{Z}(t)$ , ale kvůli tomu, že jsme počasí změřili s nějakou odchylkou, doopravdy se vyvíjí jako  $\mathbf{Z}'(t) = \mathbf{Z}(t) + \delta\mathbf{Z}(t)$ . Díky tomu, že má ale tento systém největší Ljapunovův exponent  $\lambda$  větší než nula, bude se výchylka v nejhorsím případě vyvíjet zhruba jako

$$|\delta\mathbf{Z}(t)| \approx |\delta\mathbf{Z}(0)|e^{\lambda t}.$$

Pokud je na začátku relativní chyba měření 1 % a ptáme se po chybě 20 %, vlastně nás zajímá, za jak dlouho se relativní odchylka v nejhorsím případě zdvacetinásobí. Předpis pro  $\delta\mathbf{Z}(t)$  je platný jenom pro *absolutní* odchylku, a pokud neznáme  $|\mathbf{Z}(t)|$  v ve všech časech, není možné relativní odchylku  $|\delta\mathbf{Z}(t)|/|\mathbf{Z}(t)|$  přesně sledovat. My tu ale už tak děláme hodně jednoduchý odhad, a proto si můžeme tipnout, že relativní odchylka se zdvacetinásobí zhruba v ten okamžik, co se zdvacetinásobí<sup>2</sup>  $|\delta\mathbf{Z}(t)|$ . Hledáme tedy čas  $T$  takový, že

$$20 = e^{\lambda T}.$$

To je jednoduché počítání, získáváme pro tento čas

$$T = \frac{\ln(20)}{\lambda}.$$

Pro  $\lambda = 1,16 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  dostáváme  $T$  jako tři dny a nula hodin. Přesnost výsledku samozřejmě není vzhledem k hrubosti odhadu na počty hodin, ale na jednotky dní můžeme brát odhad poměrně vážně. Hodnota exponentu byla také vybrána tak, aby zhruba vystihovala spolehlivost předpovědi počasí v praxi, ale doopravdy je samozřejmě odhadování spolehlivosti předpovědi ještě o něco složitější.

3. Tato úloha by měla být přímočarým použitím kódu ze zadání a z minulého vzorového řešení. Jak vidíte na obrázku 61, „odlepovací čas“ není úplně precizní pojem; trajektorie se často viditelně odchylovala už před kvalitativním „odlepením“, a proto nemělo cenu čas odlepení  $T$  zachycovat na přesnost větší než jednotky.

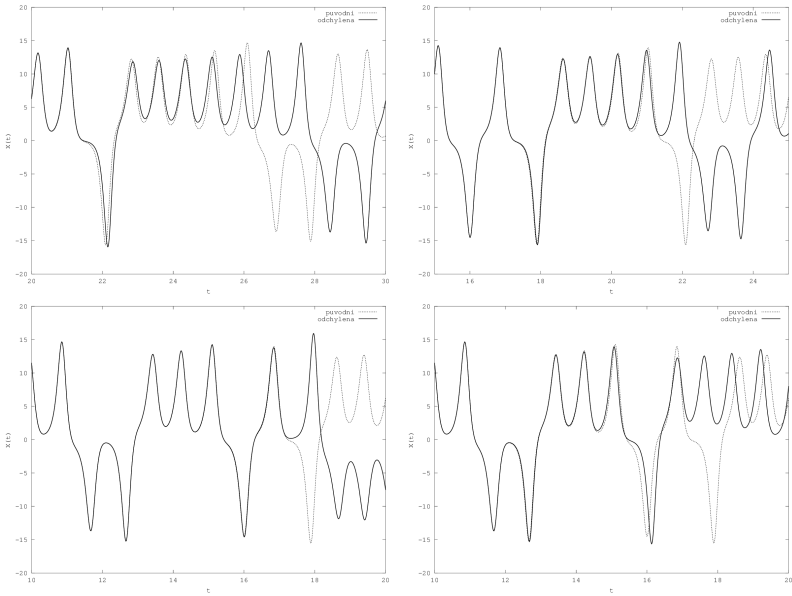
V tabulce 11 je zachyceno několik odlepovacích časů spolu s vybranými počátečními výchylkami  $\delta X_0$ . Výchylku jste ale mohli vnést do libovolné počáteční souřadnice, ne jen do  $X_0$ .

Místo  $\delta X_0$  v tabulce píšeme  $\log_{10}(\delta X_0)$ , protože nejlepší bylo odchylky posouvat o celé řády. Náčrt závislosti najdete v grafu na obrázku 62.

V grafu je také načrtnuta přímka přibližně vystihující sklon závislosti  $T$  na hodnotě  $\log_{10}(\delta X_0)$ , protože z tohoto sklonu lze odhadnout největší Ljapunovův exponent systému (což byla bonusová část úlohy). Předpokládáme-li totiž, že zhruba platí  $\Delta_c = \delta X_0 \exp(\lambda T)$  a závislost zlogaritmujeme a algebraicky upravíme, dostáváme

$$T = -\frac{1}{\log_{10}(e)\lambda} \log_{10}(\delta X_0) + \frac{\log_{10}(\Delta_c)}{\log_{10}(e)\lambda}.$$

<sup>2</sup>Tj. předpokládáme, že  $|\mathbf{Z}|$  bude po zdvacetinásobení zhruba stejně jako na začátku.

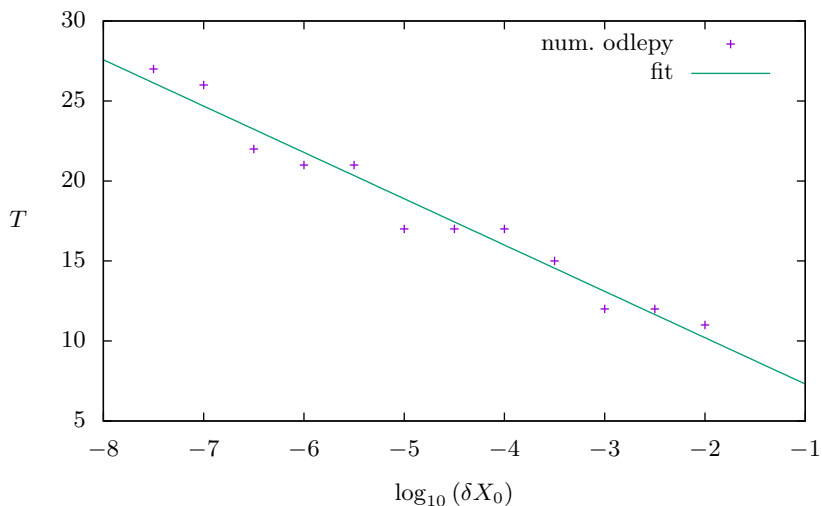


Obr. 61: Zleva doprava a shora dolů postupně odlepení souřadnice  $X(t)$  Lorenzova modelu tak, jak mi to spočítalo a nakreslilo Octave. Odchyly jsou  $\delta X_0 = 10^{-7}; 10^{-6}; 10^{-5}; 10^{-4}$ .

Tab. 11: Časy odlepení pro vybrané počáteční výchylky.

$\log_{10}(\delta X_0)$	$T$
-7,5	27
-7,0	26
-6,5	22
-6,0	21
-5,5	21
-5,0	17
-4,5	17
-4,0	17
-3,5	15
-3,0	12
-2,5	12
-2,0	11

Předpokládáme, že poslední člen na pravé straně rovnice je konstantní, proto by měla být mezi  $T$  a  $\log_{10}(\delta X_0)$  lineární závislost se sklonem  $-1/(\log_{10}(e)\lambda)$ .



Obr. 62: Zleva doprava a shora dolů postupně odlepení souřadnice  $X(t)$  Lorenzova modelu s odchylkou  $\delta X_0$  z tabulky 11.

Dobře vidíte na obrázku 62, že závislost není tak úplně lineární, ale naopak taková hrbolatá. Nějaký sklon ale dokážeme body proložit a z toho dostáváme přibližné  $\lambda \doteq 0,8 \text{ s}^{-1}$ . Doopravdy je největší Ljapunovův exponent spočítaný sofistikovanějšími metodami  $\lambda = 0,9 \text{ s}^{-1}$ , což je vzhledem k hrubosti metody opravdu dobrá shoda.

## Úloha V.S ... mapovací

1. Ukažte, že pro libovolné hodnoty parametrů  $\tilde{K}$  a  $T$  můžete standardní mapu ze seriálu vyjádřit jako

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + y_{n-1}, \\y_n &= y_{n-1} + K \sin x_n,\end{aligned}$$

kde  $x, y$  jsou nějak přeškálovaná  $\dot{\varphi}, \varphi$ . Určete fyzikální rozměr  $K$ ,  $x$ ,  $y$ .

2. Podívejte se znova na model nakopávaného rotoru ze seriálu a vezměte tentokrát předávaný impuls  $I(\varphi) = I_0$ , po periodě  $T$  pak  $I(\varphi) = -I_0$ , po další zase  $I_0$  a takto dokola kopejte rotor tam a zpátky.
  - a) Napište mapu  $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$  na základě hodnot  $\varphi_{n-1}, \dot{\varphi}_{n-1}$  před dvojkopem  $\pm I_0$ .
  - b) Bude zkonstruovaná mapa chaotická? Proč ne?
  - c) Vyřešte  $\varphi_n, \dot{\varphi}_n$  na základě nějakých počátečních podmínek  $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$  pro libovolné  $n$ .



Bonus Zkuste podle ingrediencí ze seriálu navrhnout kopání, které bude dávat chaotickou dynamiku. Dávejte ale pozor na to, že  $\varphi$  je  $2\pi$ -periodické a že by se vám  $\dot{\varphi}$  nemělo vyšroubovat kopáním donekonečna.

1. Víme, že  $\sin \varphi_n$  je nelineární funkce, tj. pokud bychom nějak přeškálovali  $\varphi \rightarrow C\varphi$ , určitě obecně  $\sin(C\varphi) \neq C \sin \varphi$  ani nic podobného. Při přeškálování  $\varphi$  tedy máme svázané ruce a musíme zvolit  $x = \varphi$ . Máme tedy mezivýsledek

$$\begin{aligned}x_n &= x_{n-1} + T\dot{\varphi}_{n-1}, \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_{n-1} - \tilde{K} \sin x_n.\end{aligned}$$

Z toho už je jasné, že musíme zvolit  $y = T\dot{\varphi}$ . Když pak navíc druhou rovnici vynásobíme  $T$ , dostáváme už bez dalších úprav  $K = -\tilde{K}T$ . Fyzikální rozměr  $x_n$  je tedy stejný jako  $\varphi$ , radiány (nebo nic, radiány nejsou opravdová fyzikální jednotka, jenom nám naznačují, že se jedná o úhlovou veličinu). Derivace  $\dot{\varphi}$  má rozměr radiány za čas, takže po vynásobení časovou periodou  $T$  má  $y$  opět rozměr radiány (nebo nic). Podle seriálu snadno zjistíte, že  $[\tilde{K}] = s^{-1}$ , a tedy  $[\tilde{K}T] = [K] = 1$ .

2. Po jednu periodu  $T$  se rotor volně otáčel a pak se náhle změnila jeho úhlová rychlost o  $+I_0/mR$ . Protože jako  $\varphi_{n+1}$  značíme stav rotoru až po „dvojkopu“ a po prvním kopu jsme teprve v polovině tohoto procesu, budeme tento stav značit jako  $\varphi_{n+1/2}$ . Máme tedy

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1/2} &= \varphi_n + T\dot{\varphi}_n, \\ \dot{\varphi}_{n+1/2} &= \dot{\varphi}_n + \frac{I_0}{mR}.\end{aligned}$$

Po další periodě  $T$  se opět rotor volně otočil a jeho rychlost byla naopak zpátky pokopnuta o  $-I_0/mR$ , máme tedy

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_{n+1/2} + T\dot{\varphi}_{n+1/2}, \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_{n+1/2} - \frac{I_0}{mR}.\end{aligned}$$

Pokud předchozí dvě mapy zkombinujeme, dostáváme

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + 2T \left( \dot{\varphi}_n + \frac{I_0}{2mR} \right), \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_n.\end{aligned}$$

Tj. rychlost je po  $\pm I_0$  kopnutí zase stejná (což se dalo čekat) a mohli bychom říct, že rotor rotuje volně s efektivní rychlostí  $\dot{\varphi}_0 + I_0/(2mR)$ , kde  $\dot{\varphi}_0$  je počáteční rychlost. Můžeme tedy po čase  $2nT$  napsat

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \varphi_0 + 2nT \left( \dot{\varphi}_0 + \frac{I_0}{2mR} \right), \\ \dot{\varphi}_n &= \dot{\varphi}_0.\end{aligned}$$

Co se týče bonusové otázky, mohli jste navrhnout jakoukoli mapu ve tvaru

$$\begin{aligned}\varphi_{n+1} &= \varphi_n + T\dot{\varphi}_n, \\ \dot{\varphi}_{n+1} &= \dot{\varphi}_n + \kappa f(\varphi),\end{aligned}$$

kde  $f(\varphi)$  musela být podle ingrediencí ze seriálu nelineární funkce. Těžší je navrhnout funkci, která je navíc periodická ve  $\varphi$ , aby to dávalo nějaký fyzikální smysl, a zároveň kopala „dopředu i dozadu“, tj. aby nepoháněla otáčení rotoru do nekonečně vysokých rychlostí. Můžete si představit, že zapínáte sílu podobně jako v seriálu, ale ta není ve všech bodech prostoru stejná, obecně pak dostanete

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)]$$

kde  $a_k, b_k$  jsou nějaké (i nulové) koeficienty. Pokud například vezmete sílu, která se mění ve vswlém směru, dostanete  $f(\varphi)$  ve tvaru  $\sin(\varphi) + c \sin(2\varphi)$ . Obecně jsou všechny tyto mapy chaotické, jak to ale ověřit se dozvíte v příštím dílu seriálu.

## Úloha VI.S ... rozmixovávací

Opište si funkci `iterace_stanMap` ze seriálu a pomocí následujících příkazů si vyberte deset velmi blízkých počátečních podmínek pro nějaké  $K$ .

```
K=...;
X01=...;
Y01=...;
Iter1 = iterace_stanMap(X01,Y01,1000,K);
...
X10=...;
Y10=...;
Iter10 = iterace_stanMap(X10,Y10,1000,K);
```

V `Iter1` až `Iter10` je tedy schováno tisíc iterací daných počátečních podmínek pomocí standardní mapy.  $K$  tomu, abyste viděli, jak vypadá všech deset bodů po  $n$ -té iteraci, musíte napsat:

```
n=...;
plot(Iter1(n,1),Iter1(n,2),"o",...,Iter10(n,1),Iter10(n,2),"o")
xlabel ("x");
ylabel ("y");
axis([0,2*pi,-pi,pi],"square");
refresh;
```

"o" do příkazu `plot` píšeme, aby se body pro přehlednost vykreslily jako kroužky. Zbytek příkazů je pak zahrnut kvůli tomu, aby graf zahrnoval celý čtverec a měl ty správné popisky.

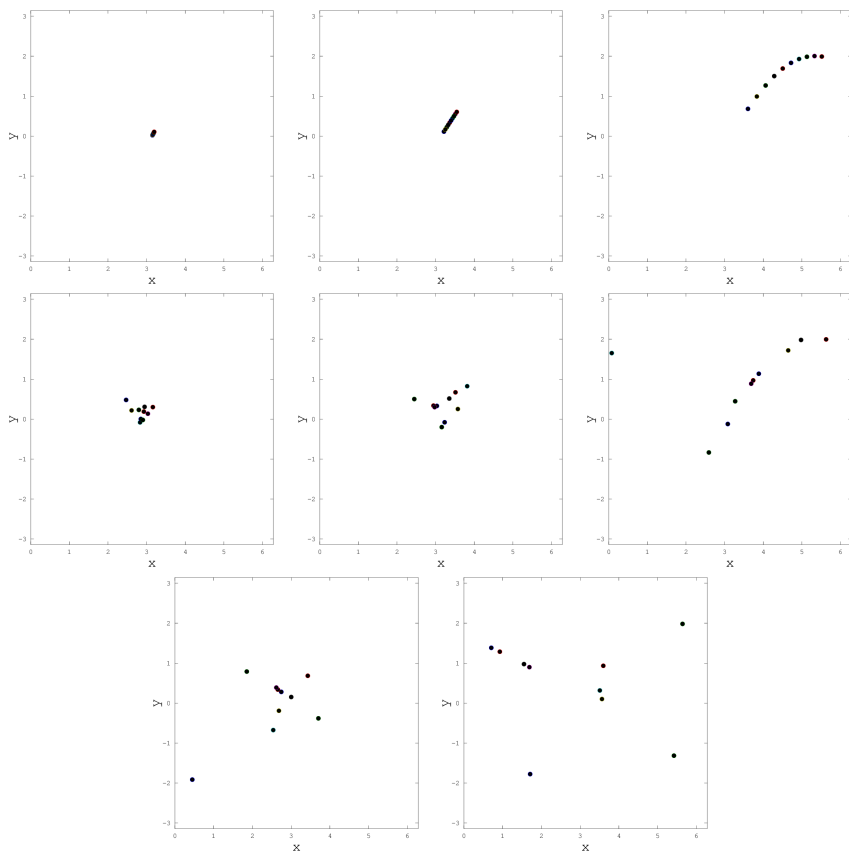
a) Nastavte nějaké silné kopání,  $K$  alespoň tak  $-0,6$ , a umístěte svých deset počátečních podmínek velmi blízko sebe někam doprostřed chaotické oblasti (tj. třeba „na špičku propisky“). Jak se s iteracemi těchto deset počátečních podmínek

oddaluje či přibližuje? Zdokumentujte na grafech. Jak vypadá deset původně velmi blízkých počátečních podmínek po 1000 iteracích? Co z toho můžeme vyvodit o „míchavosti“ počátečních podmínek v dané oblasti?

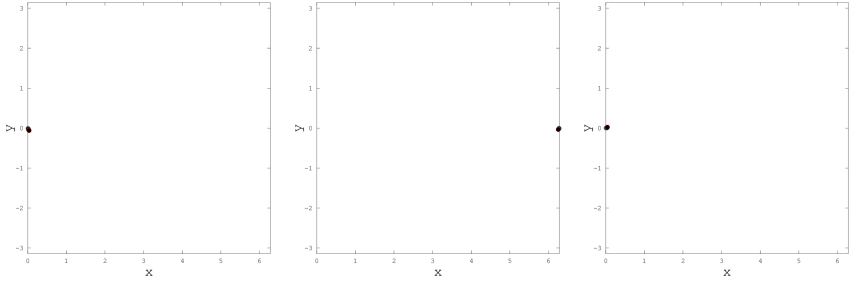
- b) Vezměte opět nějaké poměrně silné kopání a umístěte svých deset počátečních podmínek poblíž svislé rovnováhy rotoru, tj.  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Jak se těchto deset počátečních podmínek oddaluje/přibližuje v čase? Co o jejich vzdálenosti lze říci po velkém počtu kopnutí?

Bonus Zkuste naprogramovat a vykreslit i chování nějaké jiné nakopávané mapy. (Pro inspiraci se můžete podívat do vzorového řešení minulé série.)

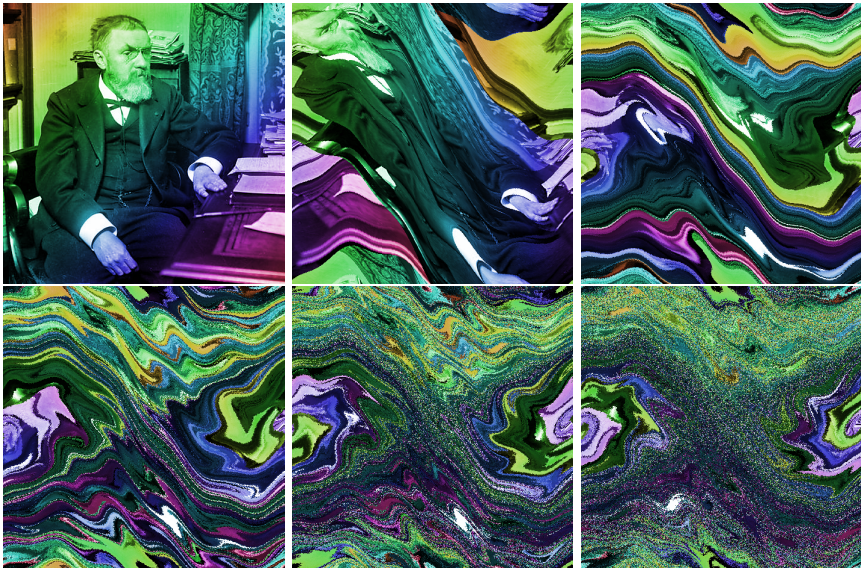
- a) 1. Pro první část jsme zvolili počáteční podmínky všechny  $x_0 = \pi$ ,  $y_0 = 0,01$ ;  $0,015$ ;  $\dots$ ;  $0,055$  a  $K = -0,9$ . Vybrané body se při daném  $K$  vždy roztáhnou po celém čtverci, a pak se po cca 9 iteracích standardní mapy shlukují zase okolo nestabilní rovnováhy. Při každém „shluknutí“ se ale body trochu pomíchají a po nějakých 30 iteracích už fakticky nelze rozpoznat, že tyto body měly blízké počáteční podmínky (natožpak po 1000). Odpovídající grafy jsou na obrázku 63.
2. Pro druhou část jsme zvolili počáteční podmínky všechny  $x_0 = 0$ , a opět  $y_0 = 0,01$ ;  $0,015$ ;  $\dots$ ;  $0,055$  a  $K = -0,9$ . Nevýhoda dané volby souřadnice  $x$  a její periodičnosti je, že body přeskakují z levého kraje na pravý, i když zůstávají fakticky na místě. Když se přes toto dokážeme přenést, ukazuje obrázek 64, že body zůstávají blízko sebe po desítky, stovky i tisíce iterací.
- b) Zde záleželo na vaší fantazii a troše obratnosti v Octave. My jsme třeba nasimulovali kopací mapu  $x_{n+1} = x_n + y_n$  a  $y_{n+1} = y_n + K(\sin(x) + 0,1 \cos(5x))$ . Je to taková zvlněná standardní mapa, kterou jsme s parametrem  $K = -0,9$  pro zajímavost aplikovali na body obrázku Henriho Poincarého, výsledek si můžete prohlédnout v obrázku 65 (srovnat jej můžete například s obrázky z posledního dílu seriálu).



Obr. 63: Na grafech jsou postupně zleva doprava a shora dolů vyobrazeny body okolo nestabilní rovnováhy po 2, 4, 6, 10, 18, 20, 24 a 30 iteracích. Od 30 iterací dále vypadají všechny obrázky vlastně pořád stejně, ve statistické fyzice by se řeklo, že soubor dosáhl statistické rovnováhy.



Obr. 64: Na grafech jsou postupně zleva doprava vyobrazeny body okolo stabilní rovnováhy po 10, 100 a 1000 iteracích. Detailnější dokumentace není potřeba, obrázky až na občasné přeskočení bodu z okraj zůstávají fakticky stejné.



Obr. 65: Henri Poincaré podroben pozměněné standardní mapě po 0, 3, 6, 12, 18 a 30 iteracích. Opět je po 30 iteracích obrázek „ustálený“ a jeho charakter už se moc nemění. Na obrázku zase můžete vidět, že v chaotických oblastech se původní prostor počátečních podmínek úplně rozmíchá, zatímco v regulárních lze dosledovat i po mnoha iteracích původní části obrázku.



## Akce FYKOSu

### Podzimní soustředění v Obůrce

Podzimní soustředění proběhlo v Obůrce u Blanska ve dnech 4.–12. 10. 2014.

#### Organizátoři

Tomáš Bárta, Michal Červeňák, Veronika Dočkalová, Lubomír Grund, Miroslav Hanzelka, Erik Hendrych, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Lukáš Ledvina, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Aleš Podolník, Radka Štefaníková, Lukáš Timko, Ivo Vinklárek.

#### Účastníci

Filip Ayazi, Jáchym Bártík, Pavel Blažek, Lucie Brichová, Jakub Dolejší, Petr Doležal, Jan Došek, Vít Horáček, Jakub Jambrich, Samuel Kočiščák, Tomáš Kremel, Jozef Lipták, Jakub Maruška, Matěj Mezera, Michal Moravec, P. P. Arthur Petráš, Daniela Pittnerová, Jakub Sláma, Kateřina Smítalová, Pavel Souček, Miloslav Staněk, Klára Stefanová, Kateřina Stodolová, Přemysl Štastný, Petra Štefaníková, Minh Tran Anh.



Účastníci se seznamují.



Účastníci podzimního soustředění v Obůrce-Blansko.

### *Legenda*

Podzimní soustředění bylo věnováno památce Járy da Cimrmana a jeho skvělým vynálezům a objevům. Účastníci byli vybráni, aby se vydali po jeho stopách na cestě okolo světa při hledání ztracené třídní knihy. Během týdne se pro každý den použila jiná Cimrmanova hra charakterizující daný kontinent, na kterém bylo nutné vykonat mnoho úkolů, abychom zjistili, zda se zde třídní kniha nachází či ne-nachází. Při jednom z večerů si také účastníci měli tu úžasnou možnost vyslechnout organizátory zpívanou operu Úspěchy českého inženýra v Indii, která sklídila obrovský potlesk. Součástí soustředění byl také každodenní seminář na téma Járy C. a jeho průkopnických myšlenek. Po rozmanitých cestách napříč Evropou, Afrikou, krajinou jižního pólu, Indií a Jižní Amerikou bylo však nutné se vrátit zpět do Rakouska-Uherska, kde na nás čekalo slavnostní ohlášení zemského školního rady, že je vše odpuštěno a třídní knihu už nemusíme hledat.



## Jarní soustředění v Zelené Lhotě

Jarní soustředění proběhlo v Zelené Lhotě u Nýrska ve dnech 25. 4. – 3. 5. 2015.

### Organizátoři

Tomáš Bárta, Miroslav Brož (návštěva), Michal Červeňák, Veronika Dočkalová, Lubomír Grund, Miroslav Hanzelka, Erik Hendrych, Karel Kolář, Lukáš Ledvina, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Aleš Podolník, Jakub Šafin, Radka Štefaníková, Lukáš Timko, Ivo Vinklárek.

### Účastníci

Alžběta Andrýsková, Filip Ayazi, Jáchym Bártík, Vít Beran, Marek Biely, Petr Doležal, Dominika Jochcová, Ondřej Knopp, Šimon Knoška, Peter Kubaščík, Peter Lučanský, Matěj Mezera, Václav Mikeska, Filip Náčovský, Daniel Pajer, Sára Rosecká, Viktor Rosman, Kateřina Smítalová, Pavel Souček, Kateřina Stodolová, Jakub Suchánek, Petr Šimůnek, Přemysl Štastný, Petra Štefaníková, Jiří Tuháček, Veronika Úlovcová, Lenka Vincenová, David Vokrouhlický.

### Legenda

Legenda soustředění probíhala na motivy filmové trilogie Matrix.

Účastníci byli vytrženi ze všedních dnů jejich „reality“, jen aby poznali, že vše co viděli, slyšeli, všechno, co kdy chutnali a čeho se kdy dotýkali, byla lež. Ocitli se ve skutečném světě – zdevastovaném válkou a řízeném stroji a programy.



Posádka (účastníci) se připravuje na útok nepřátelských lodí (organizátoři).





Účastníci při hře.

Dozvěděli se, že lidstvo, jak jej znali, žije v simulaci s názvem Matrix a slouží pouze jako zdroj energie pro stroje, které jsou ve válce se svobodným lidstvem odnepaměti. A aby toho nebylo dost – oni mají být budoucností lidské rasy!

Hned po odpojení byli účastníci nahnáni do sprch – z hygienických důvodů. Poté byli spřáteleným programem seznámeni s tím, co je a co bude.

(Téměř) každý den je čekalo několik hodin ve výukovém prostředí, kde se učili o tom, jak svět kolem nás funguje – od povahy kvantového světa přes elektroniku po strukturu vesmíru.

Kromě studia se odpojení příslušníci lidské rasy museli věnovat i dalším věcem nezbytným pro přežití. Nejprve bylo třeba, aby se všichni navzájem seznámili a po rozdělení do posádek přišla stavba a testování lodí-vznášedel, uzpůsobených pro pohyb po zdevastované Zemi. Dále je čekala různá řada překážek a nástrah jak reálného, tak virtuálního světa, včetně šifrovačky, soutěže ve výpočtu fyzikálních problémů či měření, zpracování a prezentace experimentů.

Nakonec byli účastníci postaveni před morální dilema – zničit Matrix a vyřadit tak většinu strojů z provozu a zároveň zabít všechny lidi v Matrixu, či neučinit tak, ponechat připojené naživu, ale nechat tak lidstvo v otroctví strojů. Ukázalo se, že to není volba nikterak těžká. Ba naopak, posádka, která získala možnost tak učinit jako první, vyřadila Matrix z provozu v takovou chvíli, aby se nejen zbavili strojů, ale také většiny posádek konkurenčních lodí. Takže nejen, že se lidská populace snížila z miliard na desítky, ale z těchto desítek přežila pouhá hrstka, která se ponořila do války – krevní msty, po které nezbyl nikdo, kdo by o ní mohl vyprávět...

## FYKOSí Fyziklání

Devátý ročník FYKOSího Fyziklání proběhl v pátek 13. 2. 2015 v budovách Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Rekordní počet 81 týmů soutěžil ve třech kategoriích, do kterých byly týmy rozřazeny podle ročníku studia jednotlivých členů. V kategorii A (tedy kategorii nejstarších) zvítězil tým ze Slovenska z Gymnázia Jura Hronca v Bratislavě – *Nebolo to tesne*. Druhé místo obsadil opět slovenský tým *Fyzici GVBN* z Gymnázia Vavrince Benedikta Nedožerského v Prievidzi. Na třetím místě se umístil tým *Sprinterí 27* z Gymnázia Pelhřimov. V kategorii B vyhrál tým *Gymtri* z Gymnázia Třinec a v kategorii C tým *Kepleráci* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, který by dokonce vyhrál i v kategorii B, což je nevídaný úspěch.

### Pravidla

Soutěže se účastní družstva s nejvýše pěti členy z nejvýše dvou škol. Družstvo může tvořit i méně členů, ale žádné zvýhodnění nebude poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo sedm příkladů. Za úspěšně vyřešený příklad si družstvo připíše počet bodů, který závisí na počtu pokusů potřebných k jeho vyřešení. Dále si od organizátorů vyzvedne nový příklad. Samotná soutěž probíhá tři hodiny a jejím cílem je samozřejmě získat co největší počet bodů. Během soutěže je dovoleno používat jakoukoliv literaturu v papírové podobě, neprogramovatelnou kalkulačku, psací a rýsovací potřeby. Přesná pravidla jsou k dispozici na webových stránkách semináře.



Soutěžící diskutují o řešení úlohy.



Vítězné týmy přebírají ceny.

### Výsledky

#### **Středoškoláci A**

- |    |  |        |
|----|--|--------|
| 1. | Gymnázium Jura Hronca Bratislava       | 188 b. |
| 2. | Gymnázium V. B. Nedožerského Prievidza | 183 b. |
| 3. | Gymnázium Pelhřimov                    | 177 b. |

#### **Středoškoláci B**

- |    |                                  |        |
|----|----------------------------------|--------|
| 1. | Gymnázium Třinec                 | 139 b. |
| 2. | Gymnázium Jura Hronca Bratislava | 131 b. |
| 3. | ŠpMNDaG, SR                      | 98 b.  |

#### **Středoškoláci C**

- |    |                          |        |
|----|--------------------------|--------|
| 1. | Gymnázium Jana Keplera   | 159 b. |
| 2. | Gymnázium Havlíčkův Brod | 107 b. |
| 3. | Gymnázium Olomouc-Hejčín | 84 b.  |

*Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.*

### **Fyziklání online**

V pořadí čtvrtý ročník internetové soutěže Fyziklání online se konal 4. 12. 2014. Do soutěže se aktivně zapojilo 103 týmů českých středoškoláků, 32 zahraničních středoškolských týmů a 29 týmů v kategorii open, celkem tedy 164 týmů, čímž byl v účasti vyrovnán předchozí rok.

Nejllepším se stal tým *Smoluchowski's team* z kategorie open, který získal 254 bodů. Tým *pySkoFtáK* se umístil se 244 body na místě druhém a třetí celkově skončil *physics\_spirit* se ziskem 224 bodů, oba dva též z kategorie open. Vítězem kategorie A českých a slovenských středoškoláků se stal tým *Niesom si isty* se 177 body, které mu vynesly sedmé místo celkově a první místo mezi týmy středoškolskými. Zisk 90 bodů stačil týmu *Grupa Jedla a Horaliek* na první místo v kategorii B a 29. místo celkově. Mezi týmy kategorie C na první příčku dosáhl tým *Kepleráci*, který získal 149 bodů a celkově skončil na krásném 10. místě. Nejlepší zahraniční středoškolský tým *The Resistors are Back* se umístil celkově 18. se 118 body.

### Pravidla

Na začátku soutěže každý, maximálně pětičlenný, tým obdržel sedm úloh, jejichž výsledkem bylo číslo. Po zadání správného výsledku do internetového systému tým získal zadání nové úlohy. Soutěž trvala tři hodiny, přičemž v průběhu soutěže proběhla také půlhodinová hurry-up část, v níž byly úlohy rozděleny do tří fyzikálních témat a vyřešení jedné úlohy od všech témat bylo hodnoceno bonusovými body. Protože se tato soutěž koná přes internet, nebyly povolené pomůcky nijak omezeny.

### Výsledky

#### Středoškoláci A

1.	Niesom si isty	177 b.
2.	Qaterknan	148 b.
3.	INCONTROVERTIBLE FLAMBOYANCE	122 b.
4.	The Devils	105 b.
5.	SG1	101 b.

#### Středoškoláci B

1.	Grupa Jedla a Horaliek	90 b.
2.	Gymtri	87 b.
3.	Dream team	67 b.
4.	Schrödinger's Pussies	61 b.
5.	vytautas	58 b.

#### Středoškoláci C

1.	Kepleráci	149 b.
2.	Jdeme si zahrát	58 b.
3.	$P^2 * M^3$	51 b.
4.	Error 404. Team not found!	46 b.
5.	Gymhol	42 b.

#### Zahraníční středoškoláci

1.	The Resistors are Back	118 b.
2.	Bosna i Hercegovina	110 b.
3.	QEGS Wakefield	80 b.
4.	One Man Army	72 b.
5.	Atm do zé	70 b.

**Open**

1. Smoluchowski's team	254 b.
2. pySkoFtÁK	244 b.
3. physics_spirit	224 b.
4. SIMPAN	216 b.
5. omama	205 b.

*Ve výsledkové listině jsou pouze nejlepší týmy. Kompletní výsledková listina včetně bodování jednotlivých úloh je na našich webových stránkách.*

**Týden s aplikovanou fyzikou**

Po roční pauze jsme se opět v rámci Týdne s aplikovanou fyzikou vydali s FYKOSem do zahraničí. Tentokrát jsme formou technicko-vědeckého poznávacího autobusového zájezdu putovali po největších městech Německa – Hamburku, Berlíně a Mnichově. Akce proběhla v termínu od 11. do 17. listopadu 2014 a zúčastnilo se jí 33 studentů. Podrobnější představu o akci si můžete vytvořit z reportu, který o ní napsal Lubomír „Lubošek“ Grund<sup>1</sup>

**Organizátoři**

Lubomír Grund, Alena Havlíčková, Dominika Kalasová, Karel Kolář, Kristína Nešporová, Michal Nožička, Vojtěch Witzany.

**Účastníci**

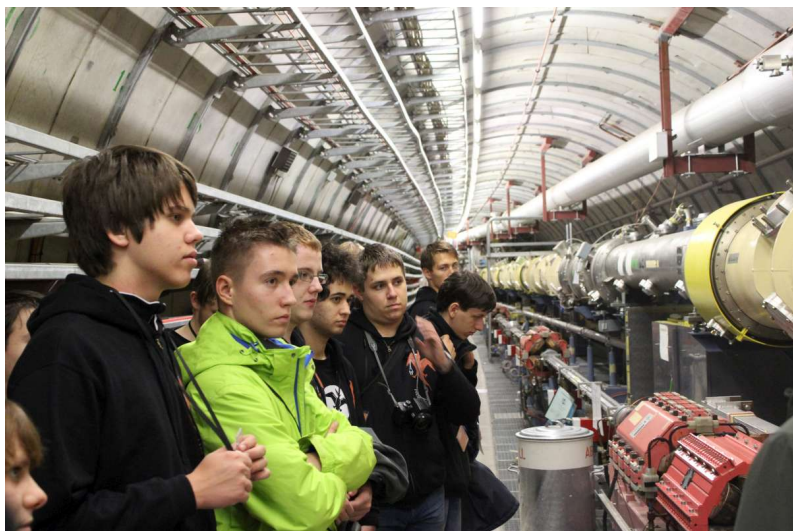
Alžběta Andrášková, Filip Ayazi, Jozef Bucko, Michal Červenec, Jakub Dolejší, Petr Doležal, Jakub Dvořák, Petr Hrubý, Jakub Jambrich, Anežka Jančová, Jaroslav Janoš, Jakub Maruška, Václav Mikeska, Marek Otýpka, Jan Pekař, Jan Preiss, David Pokorný, Šára Rosecká, Jakub Sláma, Petr Smíšitel, Dominik Starý, Klára Stefanová, Petr Šimůnek, Petra Štefaníková, Přemysl Štastný, Luboš Vozdecký.

**Report z TSAFu**

Akce s názvem TSAF neboli Týden s aplikovanou fyzikou je týden nabitý exkurzemi především pro studenty středních škol. Jak už název napovídá, je to výprava za různými aplikacemi fyziky, a to jak výrobními (různé továrny a podniky), tak i vědeckými (výzkumná centra), nebo i za využitím fyzikálních poznatků v historii (technická muzea). Již tradičně TSAF za svými hlavními cíli zamířil za hranice ČR, tentokrát k našemu západnímu sousedovi – Německé spolkové republice.

Součástí TSAFu byl DSEF – Den s experimentální fyzikou, který proběhl v úterý 11. 11. v Praze a Řeži. Po ukončení DSEFu se účastníci TSAFu přesunuli do budovy MFF v Tróji. Tam byli svědky přednášky doc. RNDr. Jana Mlynáře, Ph.D. o řízené termojaderné fúzi – tedy hlavního cíle putování. Poté si vyslechli organizační pokyny, obdrželi různé předměty, mimo jiné také mikinu letošního Týdne s aplikovanou fyzikou, a seznámili se mezi sebou a s organizátory, kteří je na pouti doprovodí.

<sup>1</sup>Další dva reporty a materiály k akci najdete na <http://fykos.cz/archiv/rocnik28/tsaf>.



Účastníci v DESY.

O půlnoci přijel objednaný autobus, který výpravu provázel po celou dobu trvání. Po nočním přejezdu se účastníci ocitli v Hamburku, kde dopoledne podnikli exkurzi do výzkumného střediska DESY. V rámci návštěvy bylo možno nahlédnout do tunelu unikátního elektron-protonového urychlovače, dozvědět se o jeho fungování i o technologických problémech při jeho konstrukci a provozu. Krom samotného urychlovače také navštívili srážkový experiment s detektorem částic a centrem zabývajícím se experimentálním využitím synchrotronového záření. Odpoledne absolvovali prohlídku komplexu Airbus, která se zabývá především montáží trupů dopravních letadel. Po přespání v mládežnické ubytovně následovala prohlídka města Hamburk a poté autobusový přejezd do německé metropole Berlína.

Do Berlína autobus dorazil již za tmy a zbyl již jen čas na zkrácenou prohlídku západního Berlína, po které výprava vyhledala nocleh opět v mládežnické ubytovně. Druhý den berlínský patřil návštěvě technického a vědeckého muzea. S Berlínem se družina rozloučila opět noční prohlídkou zbytku historického města a poté na řadu přišel další noční přejezd.

Další ráno TSAFí skupinku přivítala další destinace – Mnichov. Konkrétně ráno nejprve zavítala do prezentačního salónu BMW Welt a do muzea BMW. Po prohlídce historické Mnichova opět našel výjezd útočiště v mládežnické ubytovně, kde přespal i další noc.





Skupinová fotka před Brandenburskou bránou v Berlíně.

Celý další den byl dedikován největšímu vědeckému a technickému muzeu v Německu – Deutsches Museum. I přes to, že v muzeu strávili celý den, tak vzhledem k velikosti a rozličnosti výstav pochybuji o tom, že někdo stihl uspokojit všechnu svoji zvědavost. Součástí expozic byly i historické výrobní stroje, stroje na zpracování materiálů, transportní stroje (lodě, vlaky, letadla i raketoplány), expozice z různých vědeckých oborů od optiky přes farmacie ke geometrii. Za zmínku rovněž stojí expozice týkající se historického vývoje hornictví, která byla umístěna v tunelovém komplexu tak rozsáhlém, že se v něm i organizátoři málem ztratili.

Poslední den autobus zamířil do ipp pracoviště Plancks Institute, konkrétně na pracoviště ASDEX upgrade – druhý největší tokamak (tj. typ fúzního reaktoru) v Evropě. Kvůli velké náročnosti na proud sklídil značný obdiv kabel ve formě hliníkového hranolu, za jehož rozměry by se nemusela stydět ani podpěrná traverza výškové budovy. Ještě větší obdiv snad sklídila pojistka tohoto obvodu – nálož, která by při přesáhnutí kritického proudu explodovala, a přerušila tak obvod. Kromě již zmíněného si účastníci mohli prohlédnout jak samotnou místnost s reaktorem, tak i velín, kde sedí samotní operátoři a experimentální fyzikové. Poté již všichni zamířili směr Praha.

Do českého hlavního města autobus dorazil úspěšně ve večerních hodinách, kde byla akce oficiálně ukončena. Pro zájemce ještě bylo zajištěno přespání v místním hostelu.

## Den s experimentální fyzikou

Jedná se o každoroční akci FYKOSu, při které se účastníci podívají do fyzikálních laboratoří a dozvědí se zajímavosti o aktuálním výzkumu. V tomto akademickém roce se výjimečně konaly dva DSEFy.

První proběhl 11. 11. 2014. Dopolední část programu se odehrála v budově MFF UK Ke Karlovu 5, Praha 2. Den začal přednáškou na téma Pevnost materiálů zblízka. Poté byli studenti vedeni do laboratoří podle předem zvolených skupin. Viděli například elektronové mikroskopy SEM a AFM, výzkum materiálů pro spintroniku, přípravu vzorků pro biofyziku či chování intermetalických krystalů v extrémních podmínkách. Odpoledne se jedna část studentů přesunula do Řeže u Prahy, kde navštívili Ústav jaderné fyziky AV ČR, v. v. i. Druhá část viděla laboratoře vysokého napětí a osvětlení na katedře energetiky ČVUT v Dejvicích. Na tuto akci navazoval Týden s aplikovanou fyzikou. Zúčastnilo se celkem 38 studentů.

Dne 13. 5. 2015 se uskutečnil druhý DSEF. Začal na MFF UK v Troji přednáškou doc. Touška o fotovoltaike. Následovaly prohlídky laboratoří nízkých teplot (supravodivost a nukleární magnetická rezonance), přednášky o geofyzice a geomagnetismu, povídání o vlastnostech polymerů, elektronový mikroskop STM, oční kamera pro ovládání počítače či přednáška o výrobě polovodičových detektorů částic. Účastníci absolvovali exkurze podle předem zvolených skupin. Odpoledne se polovina studentů přesunula do Fyzikálního ústavu AV ČR, v. v. i. k tokamaku COMPASS (největší v ČR), prohlédli si též PALS a vodní plazmatron. Druhá polovina se na vlastní oči poučila o funkci přístroje pro pozitronovou emisní tomografii ve Všeobecné fakultní nemocnici v Praze. Akce se zúčastnilo 59 studentů a několik středoškolských učitelů.



Prohlídka ve Fyzikálním ústavu AV ČR.



## Víkend s aplikovanou fyzikou

Víkend s aplikovanou fyzikou je akce, na níž se sejdou studenti se zájmem o fyziku a společně stráví celý víkend. Tento rok jsme spolu s účastníky přespávali v budově MFF UK v Praze a měli jsme tedy k fyzice ještě blíže. Navštívili jsme Štefánikovu hvězdárnu a zrcadlové bludiště. V plánu jsme měli i Národní technické muzeum, ale kvůli nepříznivým okolnostem jsme se rozhodli naše plány pozměnit, a proto jsme se šli podívat na něco méně tradičního – do Národního polnohospodářského muzea. Našli jsme si však čas i na zábavu. Vybláznili jsme se v aquaparku, obdivovali jsme výhled na Prahu z Petřínské rozhledny a zahráli jsme si spoustu her.

### Účastníci

Anna Marta Hricová, Borek Požár, Filip Ayazi, Iveta Janitorová, Ján Hurák, Marek Otýpka, Matej Martaus, Ondřej Knopp, Peter Kubaščík, Petr Šimůnek, Sára Rosecká.



Štefánikova hvězdárna.

## Cyklus přednášek pro středoškoláky

Přednášky pořádané spolu s pražským výborem Fyzikální olympiády se konaly dohromady devětkrát, pětkrát v semestru zimním a čtyřikrát v letním. První set přednášek byl cílený na rozšíření znalostí studentů SŠ před Fyzikální olympiádou. Druhá várka přednášek se zaměřila na složitější témata často probíraná až v maturitním ročníku nebo na vysoké škole pro inspiraci posluchačů.

Témata zimních přednášek byla: Od problémů klasické fyziky ke QM (Václav Bára), Stejnoseměrné obvody (Ján Pulmann), Pohyby těles v planetární soustavě (Ivo Vinklárek), Hydrostatika a aerostatika (Ján Pulmann) a Zpracování měření (Miroslav Hanzelka).

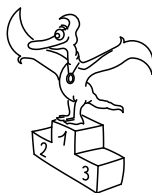
Letní přednášky se zabývaly pokročilejší látkou: Derivace a integrály ve fyzice (Václav Bára), Diferenciální operátory ve fyzice (Václav Bára), Diferenciální rovnice (Tomáš Bárta) a Rotace tuhého tělesa (Jiří Nárožný). Poslední z naplánovaných přednášek byla bohužel pro malou účast zrušena, její záznam na internetu tedy nenajdete.

Díky výměně kamery, ke které letos došlo, se lze na záznamy dívat ve FullHD. Z akademické sítě CESNET se přesunuly toky dat na YouTube, kde jsou záznamy automaticky ukládány v plném rozlišení. Seznamy videí se nacházejí na stránkách YouTube<sup>2</sup> nebo v seznamu přednášek FYKOSu.<sup>3</sup>

---

<sup>2</sup><https://www.youtube.com/user/fykosak/playlists>

<sup>3</sup>[http://fykos.cz/akce/prednasky\\_archiv](http://fykos.cz/akce/prednasky_archiv)



## Pořadí řešitelů

### Kategorie čtvrtých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	<b>Σ</b> <b>214</b>
1. <i>Jakub Sláma</i>	G Opatov, Praha	<b>132</b>
2. <i>Domínika Jochcová</i>	Wichterlovo G, Ostrava	<b>131</b>
3. <i>Petr Doležal</i>	G Z. Wintra, Rakovník	<b>87</b>
4. <i>Jozef Bucko</i>	G PdC, Piešťany	<b>85</b>
5. <i>Kateřina Smítalová</i>	G Dašická, Pardubice	<b>84</b>
6. <i>Filip Ayazi</i>	G Ludovíta Štúra, Trenčín	<b>83</b>
7. <i>Luboš Krnáč</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	<b>54</b>
8. <i>Kryštof Šulc</i>	VOŠ, SOŠ a G Evropská, Praha	<b>41</b>
9. <i>Mojmír Poprocký</i>	G Matyáše Lercha, Brno	<b>37</b>
10. <i>Pavel Blažek</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	<b>31</b>
11. <i>Marek Biely</i>	G, Považská Bystrica	<b>30</b>
12. <i>Samuel Kočiščák</i>	G Poštová, Košice	<b>29</b>
13. <i>Tomáš Kremel</i>	G J. Škody, Přerov	<b>22</b>
14. <i>Andreea-Alexandra Varas- teanu</i>	CNI Tudor Vianu, Romania	<b>20</b>
15. <i>Jakub Dolejší</i>	G B. Němcové, HK	<b>19</b>
16. <i>Michal Moravec</i>	G Jana Keplera, Praha	<b>17</b>
17. <i>Michal Kalousek</i>	G Dašická, Pardubice	<b>16</b>
18. <i>Jakub Dvořák</i>	G Botičská, Praha	<b>15</b>
19. <i>Jakub Hornáček</i>	G V. Mihálka, Sereď	<b>14</b>
20.–21. <i>Petr Smíšitel</i>	G, Bučovice	<b>13</b>
20.–21. <i>Miloslav Staněk</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	<b>13</b>
22. <i>Zdeněk Turek</i>	G a SOŠ, Rokycany	<b>10</b>
23. <i>Marek Biroš</i>	G J. A. Raymana, Prešov	<b>9</b>
24.–25. <i>Zuzana Mičková</i>	G, Dolný Kubín	<b>8</b>
24.–25. <i>Václav Rozhoň</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	<b>8</b>
26.–27. <i>František Dráček</i>	G, Považská Bystrica	<b>7</b>
26.–27. <i>David Flieger</i>	Reálné G a ZŠ, Prostějov	<b>7</b>
28. <i>Jan Škvára</i>	G J. Škody, Přerov	<b>6</b>
29. <i>Anna Gajdová</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	<b>5</b>
30. <i>Lucie Brichová</i>	PSG jazykové, HK	<b>4</b>

Kategorie třetích ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>214</b>
1. <i>Tomáš Hrbek</i>	G J. Ressela, Chrudim	152
2. <i>Andrej Uhlíarik</i>	G A. Bernoláka, Námestovo	97
3. <i>Pavel Souček</i>	G, Nymburk	83
4. <i>Tomáš Fárník</i>	G P. de Coubertina, Tábor	73
5. <i>Klára Stefanová</i>	G B. Němcové, HK	67
6. <i>Jiří Tuháček</i>	Masarykovo G, Plzeň	62
7. <i>Jakub Pílař</i>	G J. Ressela, Chrudim	61
8. <i>Kristina Mrázová</i>	G, Český Krumlov	49
9. <i>Šimon Knoška</i>	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	48
10. <i>Jakub Marták</i>	G Golianova, Nitra	41
11. <i>Peter Lučanský</i>	G, Bardejov	36
12. <i>Sára Rosecká</i>	G Botičská, Praha	31
13.–15. <i>Jakub Jambrich</i>	G J. A. Raymana, Prešov	30
13.–15. <i>Jozef Mišt</i>	G A. H. Škultétyho, V. Krtíš	30
13.–15. <i>Marian Poljak</i>	G J. Škody, Přerov	30
16. <i>Kateřina Hladká</i>	G, Karviná	27
17. <i>Tomáš Drozdík</i>	G Andreja Vrábla, Levice	26
18. <i>Kryštof Kolář</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	25
19. <i>Anna Linhartová</i>	G Mikulášské n. 23, Plzeň	24
20. <i>Martin Vítoušek</i>	G P. de Coubertina, Tábor	23
21. <i>Tianyuan Lu</i>	IMSA, Aurora, USA	20
22.–23. <i>Jan Gocník</i>	G J. Škody, Přerov	15
22.–23. <i>Domínika Jurdová</i>	G, Velké Meziříčí	15
24. <i>Jiří Zeman</i>	PSG jazykové, HK	14
25. <i>Pavel Kůs</i>	G J. Š. Baara, Domažlice	7
26.–30. <i>Karel Chládek</i>	G, Lanškroun	6
26.–30. <i>Vojtěch Jelínek</i>	G Neumannova, Žďár n. S.	6
26.–30. <i>Marek Otýpka</i>	G, Židlochovice	6
26.–30. <i>Martin Scheubrein</i>	G Masarykovo nám., Třebíč	6
26.–30. <i>Milan Suk</i>	G, Boskovice	6
31. <i>Domínika Ďurovčíková</i>	G Jura Hronca, Bratislava	5
32. <i>Jiří Rýdl</i>	Jiráskovo G, Náchod	4
33. <i>Jindřich Kvita</i>	Angl. G, SOŠ a VOŠ, Pardubice	3
34.–35. <i>Markéta Doležalová</i>	G, Brno-Řečkovice	2
34.–35. <i>Robert Šimon</i>	G Mensa, Praha	2
36.–38. <i>Barbora Bujalková</i>	G L. Štúra, Zvolen	1
36.–38. <i>Martin Gažo</i>	ŠpMNDaG, Bratislava	1
36.–38. <i>Jakub Kvasil</i>	G Mozartova, Pardubice	1

## Kategorie druhých ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>238</b>
1. <i>Jáchym Bártík</i>	G, Havlíčkův Brod	172
2. <i>David Vokrouhlický</i>	G Jana Keplera, Praha	168
3. <i>Matěj Mezera</i>	G, Havlíčkův Brod	160
4. <i>Daniel Pajer</i>	G Jana Keplera, Praha	130
5. <i>Přemysl Štastný</i>	G, Žamberk	128
6. <i>Daniela Pittnerová</i>	G L. Svobodu, Humenné	123
7. <i>Štěpán Stenclák</i>	G, Třinec	122
8. <i>Martin Štyks</i>	G Jana Keplera, Praha	120
9. <i>Adam Poloček</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	96
10. <i>Aleš Krčil</i>	G dr. A. Hrdličky, Humpolec	92
11. <i>Peter Kubaščík</i>	G, Kysucké Nové Mesto	86
12. <i>Jakub Kožušník</i>	Wichterlovo G, Ostrava	82
13.–14. <i>Kateřina Stodolová</i>	G Dašická, Pardubice	81
13.–14. <i>Veronika Úlovcová</i>	Církevní G, Plzeň	81
15. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	76
16. <i>Klára Ševčíková</i>	G, Uherské Hradiště	74
17. <i>Petr Šimůnek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	64
18. <i>Petra Štefaníková</i>	G O. Havlové, Ostrava	63
19. <i>Václav Mikeska</i>	G F. Palackého, Val. Mez.	53
20.–21. <i>Alžběta Andrášková</i>	G, Olomouc-Hejčín	51
20.–21. <i>Veronika Rajnáková</i>	G, Nové Zámky	51
22. <i>Martin Hanák</i>	G nám. E. Beneše, Kladno	48
23. <i>Veronika Gintnerová</i>	G Sv. Františka, Žilina	42
24. <i>František Zach</i>	G, Litomyšl	35
25. <i>Vít Horáček</i>	G L. Jaroše, Holešov	30
26.–27. <i>Jozef Lipták</i>	G Tajovského, B. Bystrica	21
26.–27. <i>Ronald Luc</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	21
28. <i> Ondřej Lomický</i>	G, Plasy	20
29. <i>Miroslav Vejvoda</i>	G, Nový Bydžov	17
30. <i>Jaroslav Janoš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	15
31. <i>Petr Zelina</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	12
32. <i>Jakub Staš</i>	G J. Słowackiego, Český Těšín	11
33.–34. <i>Matěj Pur</i>	G a SOŠPg Jeronýmova, Liberec	6
33.–34. <i>Daniel Šerý</i>	G, Rožnov pod Radhoštěm	6
35. <i>Martin Barnovský</i>	G, Stará Lubovňa	5
36. <i>Pavel Turinský</i>	G, Brandýs n. L.	4

## Kategorie prvních ročníků

<b>jméno</b> <i>Student Pilný</i>	<b>škola</b> MFF UK	$\Sigma$ <b>238</b>
1. Viktor Rosman	G, Pelhřimov	129
2. Jan Preiss	G, Lovosice	126
3. Ondřej Knopp	G, Třeboň	122
4. Filip Čermák	G Golianova, Nitra	118
5.–6. Vít Beran	Masarykovo G, Plzeň	107
5.–6. David Němec	G, Tanvald	107
7. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	91
8. Šimon Karch	G Komenského, Havířov	85
9. Ladislav Nagy	G a SOŠZZE, Vyškov	63
10. Dominik Starý	G, Benešov	58
11. Jakub Suchánek	G Opatov, Praha	56
12. Ondřej Chloupek	G, Mostecká, Chomutov	52
13. Filip Náčovský	G, Dvůr Králové n. L.	51
14. Jan Došek	G, Brandýs n. L.	47
15. Jaroslav Paidar	SPŠ Masarykova, Liberec	42
16. Pavla Trembulaková	G Jírovceva, České Budějovice	33
17.–18. Ondřej Bílek	SPŠ, Vlašim	32
17.–18. Paulína Smolárová	ŠpMNDaG, Bratislava	32
19. Matej Parada	G Grösslingova, Bratislava	30
20. Veronika Venclová	G J. Resslera, Chrudim	26
21. Jiří Vala	G, Mikulov	23
22. Petr Jakubčík	PORG, Praha	21
23.–24. Tomáš Dvořák	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	18
23.–24. Lenka Vincenová	G, Olomouc-Hejčín	18
25. Patrik Novotný	G Opatov, Praha	17
26. Jan Pekař	G dr. J. Pekaře, Ml. Boleslav	16
27. Jakub Sadílek	G, Litomyšl	15
28.–29. Antonín Krmíček	G, Uherské Hradiště	12
28.–29. Martin Repčík	G, Olomouc-Hejčín	12
30.–31. Matouš Pikous	Podještědské G, Liberec	11
30.–31. Rudolf Stanko	G Andreja Vrábla, Levice	11
32. Jan Prokop	SPŠ Purkyňova, Brno	10
33. Petr Kadlec	G, Zábřeh	8
34.–35. Martin Hubata	G Mikulášské n. 23, Plzeň	7
34.–35. Miloš Kubáček	G F. Hajdy, Ostrava	7
36.–38. Borek Požár	G Z. Wintra, Rakovník	4
36.–38. Jan Trejbal	G Lučka Pika, Plzeň	4
36.–38. Martina Tureníčová	G Jura Hronca, Bratislava	4
39. Tomáš Troján	G, Cheb	3
40.–43. Jakub Komárek	G, Uherské Hradiště	2
40.–43. Matěj Konvalinka	G a SOŠE, Sedlčany	2
40.–43. Antonín Šámal	G J. Palacha, Mělník	2
40.–43. Jakub Zemek	G, Uherské Hradiště	2







ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XXVIII. ročník – 2014/15**

*Předmluva:* Miroslav Hanzelka, Kristína Nešporová

*Náměty úloh:*

Karel Kolář (I.1, I.2, I.E, II.2, II.5, III.1, III.2, III.4, III.5, III.E, IV.1, IV.2, IV.4, IV.E, V.1, V.2, VI.4, VI.P, VI.E), Miroslav Hanzelka (III.P, IV.3, IV.5, V.4, V.5, VI.2, VI.3), Vojtěch Witzany (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Michal Koutný (I.5, IV.P, V.P), Lukáš Ledvina (II.4, II.E, III.3), Kristína Nešporová (I.4, VI.1), Kuba Vošmera (I.P, V.3), Dominika Kalasová (I.3), Jakub Kocák (II.3), Jakub Michálek (VI.5), Tomáš Pikálek (V.E), Aleš Podolník (II.P), Tereza Steinhartová (II.1)

*Autoři řešení úloh:*

Lubomír Grund (II.4, III.4, IV.4, V.P, VI.5, VI.P), Miroslav Hanzelka (I.5, II.3, III.P, IV.3, V.5, VI.3), Vojtěch Witzany (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S), Kristína Nešporová (I.1, II.2, IV.E, VI.1), Jakub Šafin (II.5, IV.P, V.3, VI.2), Karel Kolář (III.1, IV.2, VI.4), Erik Hendrych (I.E, III.E), Dominika Kalasová (V.1, VI.E), Jakub Kocák (V.4, VI.E), Lukáš Ledvina (III.3, VI.E), Michal Nožička (I.2, IV.1), Ján Pulmann (I.4, III.5), Tereza Steinhartová (II.1, II.E), Lukáš Timko (I.P, VI.E), Tomáš Bárta (IV.5), Michal Červeňák (II.P), Marek Martaus (V.2), Jiří Nárožný (VI.E), Tomáš Pikálek (V.E), Viktor Skoupý (III.2), Ivo Vinklárek (I.3)

*Seriál o chaosu a numerických simulacích:* Vojtěch Witzany

*Legenda podzimního soustředění:* Ivo Vinklárek

*Legenda jarního soustředění:* Lubomír Grund

*Sazba:* Lukáš Ledvina, Tomáš Pikálek, Lukáš Timko

*Obrázky a grafy:* Michal Červeňák, Miroslav Hanzelka, Lukáš Ledvina, Tomáš Pikálek, Jakub Šafin

*Jazykové korektury:* Jakub Kocák, Kristína Nešporová

*Odborné korektury:* Miroslav Hanzelka, Lukáš Ledvina, Jakub Šafin, Jakub Vošmera



ALEŠ FLANDERA A KOLEKTIV  
**Fyzikální korespondenční seminář**  
**XXVIII. ročník – 2014/15**

Vydal **MATFYZPRESS**  
vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty  
Univerzity Karlovy v Praze  
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8  
jako svou 504. publikaci

Vytiskl TISK SPRINT

Publikace neprošla recenzním ani lektorským řízením  
Vydáno pro interní potřebu MFF UK  
Neprodejná publikace

216 stran, 65 obrázků  
Sazba písmem Latin Modern v programu X<sub>q</sub>L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X  
Vydání první  
Náklad 400 výtisků

Praha 2015

ISBN 978-80-7378-310-5

