Úloha V.S ... strunná

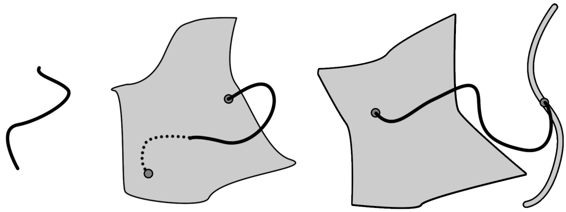
6 bodů; průměr 4,00; řešilo 17 studentů

1. *Uvažujme otevřené struny a omezme se jen na tři prostorové rozměry. Namalujte, jak vypadá*
   a) *struna volně se pohybující v časoprostoru,*
   b) *struna připevněná oběma konci k D2-bráně,*
   c) *struna natažená mezi D2-bránou a D1-bránou.*

   Jaké jsou možnosti, kde mohou struny končit v případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán?
2. *Vyberte si jednu z funkcí $\mathcal{P}^\tau_\mu$ nebo $\mathcal{P}^\sigma_\mu$ definovanou v první části seriálu a najděte její explicitní tvar (tj. přímo závislost na $\dot{X}^\mu$ a X'^μ). Ukažte, že podmínky $\boldsymbol{X}' \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$ a $\left|\dot{\boldsymbol{X}}\right|^2 = -\left|\boldsymbol{X}'\right|^2$ opravdu vedou na zjednodušení uvedené v textu.*
3. *Najděte spektrum energií harmonického oscilátoru.*
   a) *Energie harmonického oscilátoru je dána Hamiltoniánem*
   $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\,.$$
   Druhý člen je očividně potenciální energií, zatímco první dává po dosazení $\hat{p} = m\hat{v}$ kinetickou energii. Definujme lineární kombinaci $\hat{\alpha} = a\hat{x} + \mathrm{i}b\hat{p}$. Určete reálné konstanty a a b, tak aby měl Hamiltonián tvar
   $$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha} + \frac{1}{2}\right)\,,$$
   kde $\hat{\alpha}^\dagger$ je komplexní sdružení $\hat{\alpha}$.
   b) *Ukažte ze znalosti kanonických komutačních relací pro $\hat{x}$ a $\hat{p}$, že platí*
   $$\left[\hat{\alpha},\hat{\alpha}\right] = 0\,,\quad \left[\hat{\alpha}^\dagger,\hat{\alpha}^\dagger\right] = 0\,,\quad \left[\hat{\alpha},\hat{\alpha}^\dagger\right] = 1\,.$$
   c) *Ve spektru oscilátoru bude jistě stav s minimální energií odpovídající nejmenšímu možnému kmitání. Označme ho $|0\rangle$. Tento stav musí splňovat $\alpha|0\rangle = 0$. Ukažte, že je jeho energie rovna $\hbar\omega/2$, tj. $\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega/2|0\rangle$. Dále ověřte, že pokud by bylo $\alpha|0\rangle \neq 0$, pak máme spor s tím, že má $|0\rangle$ minimální energii, tj. $\hat{H}\alpha|0\rangle = E\alpha|0\rangle$, kde nyní je $E < \hbar\omega/2$. Všechny vlastní stavy Hamiltoniánu můžeme potom psát jako $\left(\alpha^\dagger\right)^n|0\rangle$ pro $n = 0, 1, 2, \ldots$ Najděte energie těchto stavů, tj. čísla E_n taková, že $\hat{H}\left(\alpha^\dagger\right)^n|0\rangle = E_n\left(\alpha^\dagger\right)^n|0\rangle$.*

   Tip *Použijte komutační relace pro $\hat{\alpha}^\dagger$ a $\hat{\alpha}$.*

1. Na obrázku 1 vidíte postupně otevřenou strunu, strunu s oběma konci na D2-bráně a na D2-bráně a D1-bráně. V textu jsme se dopustili chyby, když jsme psali, že Dp-brána svazuje p stupňů volnosti. Je tomu právě naopak, p stupňů volnosti v rámci Dp-brány zůstává volných a zbytek směrů je pro konec struny svázaný. Pokud vás to zmátlo, uznáváme samozřejmě plný počet bodů i za obrácené řešení. V případě konfigurace tří rovnoběžných D2-brán mohou konce struny končit kdykoliv na kterékoliv bráně, takže možností je 6.
2. Derivací Lagrangiánu relativistické struny získáváme
$$\mathcal{P}^\tau_\mu = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{X}')X'_\mu - |\boldsymbol{X}'|^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{X}}\cdot\boldsymbol{X}')^2 - |\boldsymbol{X}'|^2|\dot{\boldsymbol{X}}|^2}}\,.$$



Obr. 1: Nákresy strun.

K tomu jsme použili faktu, že $\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X}' = \eta_{\alpha\beta}\dot{X}^{\alpha}X'^{\beta}$ a že $\eta_{\alpha\beta}\dot{X}^{\alpha} = \dot{X}_{\beta}$, to vše samozřejmě v Einsteinově sumační konvenci. Zcela obdobně pro druhou hybnost získáváme

$$\mathcal{P}^{\sigma}_{\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X}')\dot{X}_{\mu} - |\dot{\boldsymbol{X}}|^2 X'_{\mu}}{\sqrt{(\dot{\boldsymbol{X}} \cdot \boldsymbol{X}')^2 - |\boldsymbol{X}'|^2|\dot{\boldsymbol{X}}|^2}} \,.$$

Dosazením $\boldsymbol{X}' \cdot \dot{\boldsymbol{X}} = 0$ a substitucí $-|\boldsymbol{X}'|^2 = \left|\dot{\boldsymbol{X}}\right|^2$ do prvního vztahu (opačně do druhého) pak získáváme triviálně vztahy z textu.

3. a) Dosadíme prostě $\hat{\alpha} = a\hat{x} + ib\hat{p}$ do výrazu

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{\alpha}^{\dagger}\hat{\alpha} + \frac{1}{2}\right) ,$$

a pak nastavíme konstanty tak, aby dával výraz původní Hamiltonián. Pro sdružený operátor platí $\hat{\alpha}^{\dagger} = a\hat{x} - ib\hat{p}$, protože $\hat{x}, \hat{p}$ jsou samosdružené operátory a jinak sdružení působí jako komplexní sdružení. Po dosazení a roznásobení dostáváme[1]

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(a^2\hat{x}^2 + b^2\hat{p}^2 - ab\hbar + \frac{1}{2}\right) .$$

Porovnáním s původním Hamiltoniánem z toho už snadno plyne

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} , \quad b = \sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}} .$$

b) První dva komutátory nemusíme počítat, stačí si uvědomit, že je to rozdíl dvou úplně stejných výrazů. Třetí komutátor je složitější, podobně jako v předchozím příkladě spočítáme

$$\hat{\alpha}^{\dagger}\hat{\alpha} = a^2\hat{x}^2 + b^2\hat{p}^2 - ab\hbar \,, \hat{\alpha}\hat{\alpha}^{\dagger} = a^2\hat{x}^2 + b^2\hat{p}^2 + ab\hbar \,.$$

Rozdíl těchto dvou je právě kýžený komutátor. S použitím hodnot a a b z předchozího bodu dostáváme již

$$\left[\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^{\dagger}\right] = 1 \,.$$

[1] Nezapomeňte, že $\hat{x}, \hat{p}$ *nekomutují*, musíme proto jejich násobení prohazovat s pomocí komutátoru!

c) Zapůsobením Hamiltoniánu z předchozích bodů zničí α z prvního členu náš $|0\rangle$ vektor a přispívá pouze člen druhý, tj. $\hbar\omega/2$. To je tedy energie stavu značeného $|0\rangle$. Pro další část tohoto bodu si ukážeme, že operátor α vlastní stav Hamiltoniánu $|\Psi\rangle$ převede na další s nižší energií. Jediná nekonstantní část Hamiltoniánu je $\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}$, počítáme tedy

$$\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}\hat{\alpha}|\Psi\rangle = \hat{\alpha}\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}|\Psi\rangle - \left[\hat{\alpha},\hat{\alpha}^\dagger\right]\hat{\alpha}|\Psi\rangle = \hat{\alpha}\left(\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha} - 1\right)|\Psi\rangle \,.$$

Když toto porovnáme s Hamiltoniánem, zjistíme, že zapůsobení operátorem $\hat{\alpha}$ sníží energii vektoru o $\hbar\omega$. Pokud by tedy operátor $\hat{\alpha}$ vektor $|0\rangle$ neanihiloval, znamenalo by to, že jej zobrazil na vektor s nižší energií, což je spor. Obdobným odvozením můžeme ukázat, že operátor $\hat{\alpha}^\dagger$ naopak o $\hbar\omega$ *zvyšuje*. Energetické hladiny pak jednoduše začínají na $\hbar\omega/2$ a pak jdou nahoru o celé násobky $\hbar\omega$, tedy

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \,.$$

Vojtěch Witzany
witzanyv@fykos.cz

Miroslav Rapčák
miro@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.