Úloha II.S ... akční

6 bodů; průměr 3,22; řešilo 49 studentů

a) *Jaký je fyzikální rozměr akce? (Jaké má tato veličina jednotky?) Má stejnou jednotku jako některá z fundamentálních konstant z první otázky k minulému dílu seriálu? Která?*

b) Od Nielse Bohra – *Uvažujte pohyb hmotného bodu po kružnici s dostředivou silou*

$$F_\mathrm{d} = ma_\mathrm{d} = \frac{\alpha}{r^2}\,,$$

kde r je poloměr kružnice a α nějaká konstanta. Pak

1. *Spočítejte redukovanou akci $\mathcal{S}_0$ pro jeden oběh po kružnici jako funkci jejího poloměru r.*
2. *Určete hodnoty r_n, pro které je hodnota $\mathcal{S}_0$ přirozeným násobkem konstanty z podúlohy a).*
3. *Celková energie hmotného bodu je $E = T + V$. Pro tuto sílu je $V = -\alpha/r$. Vyjádřete energie E_n částic v závislosti na poloměrech r_n za pomoci uvedených konstant.*

Tip *Jistě jste ve fyzice probírali pohyb po kružnici a odpovídající vztahy mezi pohybovými veličinami. Použijte je a pak se integrace akce po obvodu kružnice s konstantním r podstatně zjednoduší (veličiny konstantní při integraci můžete před integrál vytknout). Nezapomeňte také, že samotný dráhový integrál „ničeho“ je prostě délka zintegrované dráhy.*

c) *Poslední podúloha může znít komplikovaně, ale je pouhým cvičením na derivaci a integraci jednoduchých funkcí. Vystačíte si se základními tabulkovými derivacemi a integrály. Ověřte, že plná akce $\mathcal{S}$ pro volnou částici pohybující se z bodu $[0;0]$ do bodu $[2;1]$ je pro trajektorii odpovídající přímočarému pohybu (první případ) minimální, tedy je větší v ostatních dvou případech*

$$\boldsymbol{y}(t) = (2t, t)\,,$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(1 - \cos(\pi t) + \frac{1}{\pi}\sin 2\pi t, t\right)\,,$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \left(2t, \frac{\mathrm{e}^t - 1 + t^2(t-1)}{\mathrm{e} - 1}\right)\,,$$

kde e *je Eulerovo číslo.*

Tip *Nejprve spočtěte derivaci $\boldsymbol{y}(t)$, dosaďte do výrazu pro akci a zintegrujte.*

a) Rozměr integrované veličiny určíme vždy jako rozměr toho, co je integrováno, krát rozměr toho, přes co je integrováno. Když se tedy podíváme na definici redukované akce, je její rozměr [hybnost·délka], což dává $\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$ nebo též J·s. Stejně tak má lagrangián rozměr energie a je integrován přes čas, takže i pro neredukovanou akci získáváme rozměr J·s. Jediná ze tří konstant G, h, c má takovýto rozměr, a to Planckova konstanta h.

b) *Od Nielse Bohra*

1. Abychom spočítali redukovanou akci, potřebujeme nejdříve vyjádřit hybnost, a tudíž i rychlost částice na kružnici. Pro rovnoměrný pohyb s rychlostí v a dostředivým zrychlením a_d po kružnici s poloměrem r máme

$$\frac{v^2}{r} = a_\mathrm{d} = \frac{F_\mathrm{d}}{m} = \frac{\alpha}{mr^2}\,. \tag{1}$$

Získáváme tedy úpravou $p = mv = \sqrt{\alpha m/r}$. To je ovšem výraz konstantní pro celý kruhový pohyb, a tudíž dostáváme po integraci redukované akce podél kružnice

$$\mathcal{S}_0 = \int_{\bigcirc} p\,\mathrm{d}s = \sqrt{\alpha m/r}\int_{\bigcirc} \mathrm{d}s = 2\pi r\sqrt{\alpha m/r}\,. \tag{2}$$

2. Akci (2) upravíme a položíme pro nějaké poloměry r_n rovnu n-násobkům Planckovy konstanty h (viz výsledek podúlohy a)):

$$2\pi\sqrt{\alpha m r_n} = nh\,. \tag{3}$$

Umocněním celé rovnice (3) na druhou a převedením všech členů kromě r_n dělením na pravou stranu získáváme

$$r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m\alpha}\,.$$

3. Vyjádříme si nejdříve kinetickou energii částice na kružnici pomocí již použitých vztahů (1)

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ma_\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{r}\,.$$

Protože $V = -\alpha/r$, dostáváme pro celkovou energii $E = T + V = -\alpha/2r$. Dosazením r_n a krácením dostáváme

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m\alpha^2}{n^2h^2}\,.$$

Zkuste si za α dosadit $e^2/4\pi\varepsilon_0$, kde e je náboj elektronu a ε_0 permitivita vakua, a za m hmotnost elektronu – dostanete energetické hladiny elektronu v atomu vodíku. Pokud jste se dostali až sem, gratulujeme. Právě jste totiž spočítali něco, za co dostal Niels Bohr před 91 lety Nobelovu cenu.

c) V této podúloze je potřeba znát derivace mocnin $(t^n)' = nt^{n-1}$, sinů $(\sin t)' = \cos t$ a kosinů $(\cos t)' = -\sin t$ a exponenciální funkce $(\mathrm{e}^t)' = \mathrm{e}^t$ a derivaci funkce s přenásobeným argumentem $(f(\alpha t))' = \alpha f'(\alpha t)$, kde derivaci podle t značíme v celém řešení čárkou. Dále potřebujeme znát primitivní funkce k mocninám $\int t^n\,\mathrm{d}t = t^{n+1}/(n+1)$, sinu $\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t$ a kosinu $\int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t$ a exponenciální funkci $\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t$ spolu se substitucí $\int f(\alpha t)\,\mathrm{d}t = (1/\alpha)\int f(t)\,\mathrm{d}t$ a integrací per-partes zmíněnou již v textu seriálu. Všechny tyto vztahy naleznete v libovolném textu k diferenciálnímu a integrálnímu počtu.

Všimněte si, že každá z trajektorií je v čase $t = 0$ v bodě $[0;0]$ a v čase $t = 1$ v bodě $[2;1]$ (argumenty sinu a cosinu jsou v radiánech). Víme, že akce je integrál z $(my'^2)/2$, ale protože $m/2$ je jen pouhá konstanta, bude nám úplně stačit porovnávat integrál

$$\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t$$

pro každou zadanou trajektorii. Pro první trajektorii získáme derivací podle t rychlost $\boldsymbol{y}' = (2,1)$. Vynásobením na druhou získáváme $y'^2 = \boldsymbol{y}'\cdot\boldsymbol{y}' = 5$. Integrál z pětky přes interval o délce jedna je snadný, je to prostě $5\cdot 1$. Celkově tedy musíme ověřit, že ostatní integrály z kvadrátu rychlosti jsou větší než 5.

Derivace pro druhou trajektorii je už těžší, ale při správném použití všech zmíněných pravidel získáváme

$$\boldsymbol{y}' = (\pi\sin(\pi t) + 2\cos 2\pi t, 1)\,.$$

Musíme tedy spočíst integrál

$$\int_0^1 \left((\pi \sin(\pi t) + 2\cos 2\pi t)^2 + 1\right)\, \mathrm{d}t\,.$$

Integrál z jedničky spočteme opět snadno. Po roznásobení závorky dostaneme tři členy, které lze zintegrovat velmi podobně. Integrace těchto tří členů je trochu pracnější a nám stačilo, když jste si příslušné integrály našli na internetu. Ukažme si jako příklad, jak integrovat jeden z těchto členů. Integrál můžeme přepsat následovně

$$\int_0^1 \sin^2(\pi t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\pi t)}{2}\,\mathrm{d}t\,,$$

což plyne z identit $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ a $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ jejich vzájemným odečtením. První člen výše opět zintegrujeme snadno, protože jde o konstantu, a druhý člen je již tabulkový integrál. Primitivní funkci ke kosinu jsme si uvedli výše a pro náš integrál máme tedy

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \cos(2\pi t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\left(\sin(2\pi\cdot 1) - \sin(2\pi\cdot 0)\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}\,.$$

Podobně vypočteme zbylé dva členy a celkově dostáváme hodnotu 5,27, což je větší než předchozích 5.
V posledním případě máme derivaci rovnu

$$\boldsymbol{y}' = \left(2, \frac{\mathrm{e}^t + 2(t-1)t + t^2}{\mathrm{e}-1}\right)\,.$$

Dosadíme-li do výrazu pro akci, zjistíme, že musíme po umocnění zintegrovat výrazy tvaru t^n pro $n = 2, 3, 4$, e^t, $t\mathrm{e}^t$ a $t^2\mathrm{e}^t$. První dva případy jsou přímo tabulkové integrály. Druhé dva integrály lze spočíst pomocí metody per partes. Ukažme si první případ. Druhý je zcela analogický. Dostáváme

$$\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1\cdot \mathrm{e}^1 - 0\cdot \mathrm{e}^0 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = 1\,.$$

Spočteme-li poctivě všechny integrály, dostaneme hodnotu akce 5,23, což je opět více než původních 5.
V této podúloze jsme si tedy uvědomili, že akce každé trajektorii přiřadí nějaké číslo. Fyzikální trajektorie, podél které se částice pohybuje, odpovídá pak extremální hodnotě akce. Ukázali jsme si, jak spočíst pár základních derivací a integrálů a věříme, že se vám tyto znalosti budou v budoucnu hodit.

Vojtěch Witzany
`witzanyv@fykos.cz`

Miroslav Rapčák
`miro@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte `http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.