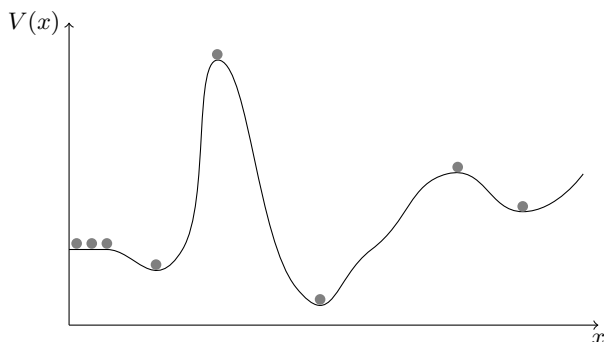


Seriál: Akční

V minulém dílu jsme si představili problémy se sjednocením interakcí a formulací teorie kvantové gravitace. Seznámili jsme se se základními pojmy teorie relativity jakožto teorie gravitace. Také jsme si řekli, že teorie strun je, zdá se, doposud jedinou známou konzistentní teorií, která má potenciál popsat všechny interakce a částice. Teorie strun je kvantovou teorií relativistické struny, tedy jednorozměrného objektu pohybujícího se v prostoročasu.

Než začneme mluvit o této složité teorii, musíme nejdřív uvést jazyk, ve kterém je budována. V tomto díle si povíme něco o variačních principech, které zahrnují i takzvané „zákony kosmické lenosti“. Ukazuje se totiž, že příroda v mnohých okamžicích koná co nejméně *akce*, nebo tak to alespoň formulovali osvícenější fyzici. Co to ale přesně znamená? A je to zcela obecně pravda? O tom se dozvíte v následujícím textu.

Řetěz v podivném údolí



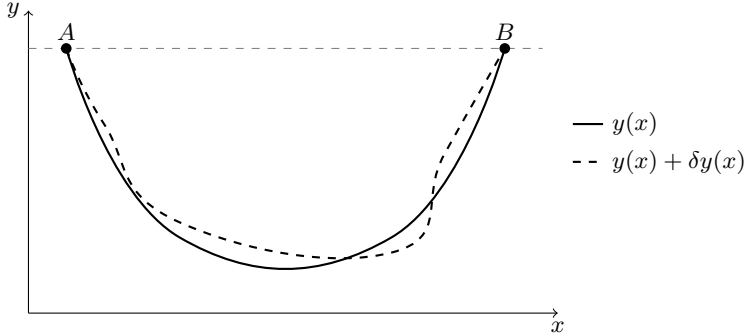
Obr. 1: Výška zvlněné krajiny $V(x)$ v závislosti na x . Šedé puntíky označují místa, kde je derivace nulová ($V'(x) = 0$) a kde může kulička nehybně stát.

Představme si kuličku, která se nachází ve zvlněné krajině popsané výškovou funkcí $V(x)$ jako na obrázku 1. Kulička se může nacházet v rovnováze, leží-li na rovince. Matematik by řekl, že výška terénu musí v daném bodě být *stacionární* – derivace (neboli sklon) výšky $V'(x)$ musí být v daném bodě nulová.

Kromě plochých oblastí nastává podmínka stacionarity v lokálních minimech nebo maximech funkce $V(x)$ (tj. na vrchu kopce nebo v nejnižším bodě údolí) nebo v tzv. sedlových bodech, které odpovídají plošině, jako má například funkce $V(x) = x^3$ v nule. (Přesvědčte se, že zde má funkce nulovou derivaci, a jde tedy o stacionární bod.)

Podobné úvahy dost možná znáte s funkcí $V(x)$ jakožto potenciální energií, kde její derivace $-V'(x)$ (spád) odpovídá síle příslušného pole. Potenciální energie je obecně funkcí polohy a její rozdíl mezi dvěma body O a P určuje energii, kterou dané silové pole (třeba gravitační) předá

částici, pokud se přesune z O do P . Nulová derivace potenciální energie znamená nulovou sílu, a tudíž lokální rovnováhu částice (nulová síla znamená nulové zrychlení, a tedy možnost klidu).



Obr. 2: Tvar řetízku $y(x)$ v homogenním gravitačním poli a jeho variace.

Doteď jste se možná nedozvěděli nic zas tak nového, ale zkuste přemýšlet nad následující úlohou: máte ideální řetízek konstantní délky l a pověsíte jej mezi body A a B v homogenním gravitačním poli. Potenciální energie hmotného bodu v tomto poli je dána vztahem $V(x, y) = mgy$. Uvažujme řetízek, jehož tvar je popsán funkcí $y(x)$ (viz obrázek 2). Rozdělíme-li náš řetízek na malé elementy délky ds , bude potenciální energie elementu v bodě $y(x)$ rovna $dV(x) = \rho g y(x) ds$, kde ρ je hustota řetízku a g tíhové zrychlení. Otázka zní: jaký bude tvar řetízku v rovnováze?

Mohli bychom nyní dlouhosáhle počítat síly, které na řetízek působí, a pak se je pokoušet vyrovnávat a zjišťovat tvar řetízku. Můžeme si ale vzpomenout na předchozí odstavce a prostě říct: řetízek se uspořádá do tvaru $y(x)$ tak, aby měl minimální celkovou potenciální energii $\mathcal{V}(y(x))$.¹ Celkovou energii míníme součet energií všech kousíčku řetízku. Pokud je řetízek dostatečně jemný, můžeme vysčítání příspěvků jednotlivých článků k celkové potenciální energii nahradit integrálem přes jeho délku. Pro ty, kteří nejsou na integrály zvyklí, je na internetu mnoho textů, nebo si stačí přečíst příslušnou část z textu ke třetí sérii 24. ročníku našeho seriálu. Říkáme tedy, že

$$\mathcal{V}(y(x)) = \int_A^B \rho g y(x) ds \quad (1)$$

je minimální pro stabilní tvar $y(x)$. Minimalizovat musíme však při zachování délky řetízku a uchycení na koncích.

Matematik se na naši formulaci zběžně podívá a říká: to znamená, že integrál v rovnici (1) musí být nutně *stacionární*. Co to ale znamená? Že jakákoliv nekonečně malá výchylka od rovnovážného rozložení $y \rightarrow y + \delta y$ (viz obrázek 2) zachovávajíc délku řetízku a uchycení na koncích nezmění hodnotu celkové potenciální energie z rovnice (1).

To nám ale jako fyzikům dává smysl, protože zatímco u částice v potenciálu nekonečně malá výchylka δx z rovnovážné polohy způsobí nekonečně malou změnu potenciální energie úměrnou jejímu sklonu $V'(x)$, něco podobného se děje i tady, jen v mnohem obecnějším duchu. Místo

¹Všimněte si, že je celková energie funkcí funkce $y(x)$, tj. každé funkci $y(x)$ popisující tvar řetízku přiřadí číslo. Takovým objektům matematikové říkají funkcionály.

malé změny potenciální energie $V(x+\delta x) \approx V(x) + V'(x)\delta x$ máme takzvanou variaci δV celkové potenciální energie $\mathcal{V}(y(x) + \delta y(x)) = \mathcal{V}(y(x)) + \delta \mathcal{V}$.

Když se ovšem znovu podíváme na obrázek 2, přijde nám divné, že by se potenciální energie při variaci $\delta y(x)$ neměnila vůbec – stejně jako se při malé výchylce doopravdy trochu mění ve stacionárních bodech i funkce $V(x)$ na obrázku 1. Pravda je taková, že ve stacionárních bodech se potenciální energie $V(x)$ i celková potenciální energie $\mathcal{V}(y(x))$ nemění až na *nekonečně malé veličiny vyššího řádu*. Požadavek $\delta \mathcal{V} = 0$ do prvního řádu přesnosti je tedy matematicky preciznější formulací stacionarity.

Podmínky na nulovou variaci $\delta \mathcal{V}$ nakonec vedou na úplně stejné podmínky rovností určitých vektorů v každém bodě, jako bychom dostali při úvahách nad silovým působením v řetězu. To se nám povedlo bez nutnosti složitého analyzování sil. Potvrzuje se tak správnost našeho tvrzení o minimalizaci celkové potenciální energie.

Křivce $y(x)$, která minimalizuje integrál (1), se říká od této slavné úlohy *řetězovka* a jedná se o součet dvou exponenciál symetrický okolo středu řetězu též známý jako hyperbolický kosinus. Můžete ji nalézt ve tvaru opravdových prověšených řetězů nebo i v přírodě, například na prověšených vláknech pavučiny.

Abychom si to tedy zrekapitulovali, v minulé části textu jsme ukázali, že pokud si odvodíme nějaký fyzikální princip minima nebo maxima například pro bod, bezrozměrný (0-dimenzionální) objekt, s trochu opatrnosti ho můžeme lehko rozšířit i na mnohem obecnější případy, jako je řetízek nebo struna – 1-dimenzionální objekt s nekonečně mnoha body.

Výhoda daného přístupu je v tom, že se příliš nemusíme zabývat nějakou fyzikou sil atp., která je s problémem spojená, ale můžeme rovnou formulovat princip celkového maxima nebo minima s nějakými dodatečnými podmínkami, jako je pevná délka řetězku. *Fyzikální rovnice pak ale získáme zpětně z podmínek nulové variace minimalizované nebo maximalizované veličiny okolo řešení problému!*

Tento způsob „hádání“ fyziky se může zdát dost divný u klasické mechaniky, kde nám síly přijdou intuitivně zřejmé. Ve zkoumání úplně nové fyziky, kde mechanická intuice už dávno selhává, se ale jedná o úspěšnou a často používanou metodou formulování nových teorií.

Nejmenší, největší, nejlepší

Principy minima a maxima uhranuly matematiky a fyziky počínaje začátkem 18. století. Ne, že by předtím nebyly takové principy známy, ale osvětenší matematici měli tendenci je hledat *všude*. Například filozof, matematik a spoluvynálezce integrálního a diferenciálního počtu Gottfried Wilhelm Leibniz tvrdil, že náš svět je ten nejlepší z nekonečného počtu možných světů, kde dobro je maximalizováno a zlo minimalizováno. Jiný matematik, Leonard Euler, kterého budete nejspíš znát díky Eulerovu číslu e , třeba v jedné své práci tvrdil, že „nemůže býtí. . . nejmenší pochybnosti, že veškeré účinky ze Všemohůru lze dovésti jak metodou maxim a minim, tak z působení příčin.“

Cítovat bychom mohli ještě dlouho, ale pojďme se podívat na nejstarší principy maxim a minim, kterým budeme říkat jedním slovem *extremální* nebo též *variační*. Princip, podle kterého se dá odvodit zákon odrazu a lomu paprsku světla, byl používán v různých obdobích už od počátku našeho letopočtu a definitivně jej formuloval v 17. století Pierre de Fermat. Tento *Fermatův princip* prostě tvrdí, že *světlo cestuje po drahách, které ho mezi každými dvěma body dopraví za nejkratší dobu*.

Čas T spotřebovaný na cestu paprsku mezi body M a N lze také přepsat jako

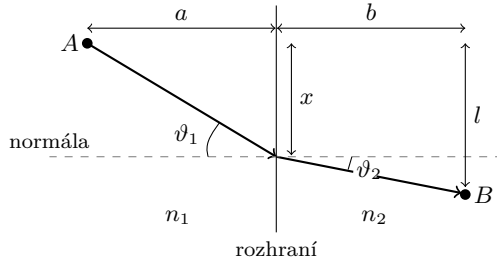
$$T = \int_{t_M}^{t_N} dt = \int_M^N \frac{dt}{ds} ds = \frac{1}{c} \int_M^N n ds,$$

kde $n = c/v$ je index lomu optického prostředí v daném bodě, c rychlost světla ve vakuu, a kde jsme při úpravě využili skutečnosti, že

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Pravda je ovšem taková, že v některých speciálních případech se světlo pohybuje i po dráze s *maximálním* časem. Takže obecně platí, že se světlo pohybuje po drahách s extrémálním časem, neboli *po drahách s nulovou variací doby potřebné k uražení*, jak to nyní formulujeme v souladu s předchozí částí textu.

Pokud je rychlost světla v nějaké oblasti konstantní, je jasné, že paprsky nebudou dělat žádné zatáčky, ale že se bude pohybovat po nejkratších spojnicích mezi body – přímkách. Nyní si ale odvodíme, co se stane, pokud paprsek dopadne na rozhraní dvou prostředí.



Obr. 3: Nákres lomu paprsku.

Zvolíme si dva body A a B, jeden v optickém prostředí s indexem lomu n_1 a druhý v prostředí s indexem lomu n_2 jako na obrázku 3. Víme, že v každém prostředí zvlášť se bude světlo pohybovat po přímce a na rozhraní může tedy pouze změnit směr. Vzhledem k tomu, že body A a B jsou pevné, jediný volný parametr je výška x , ve které paprsek dopadá na rozhraní. Vyjádříme si dobu T , kterou dráha z bodu A do B zabere, za pomoci rychlostí v_1 , v_2 a drah d_1 , d_2 v prvním, respektive druhém prostředí.

$$T(x) = \frac{d_1(x)}{v_1} + \frac{d_2(x)}{v_2},$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}{v_2}, \quad (2)$$

kde jsme použili Pythagorovu větu pro výpočet vzdáleností d_1 a d_2 s použitím značení vzdáleností z obrázku 3. Podmínka pro extrém doby $T(x)$ je nulová derivace podle x , takže když rovnici (2) zderivujeme, získáváme podmínku na x

$$0 = \frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}. \quad (3)$$

Pokud si navíc uvědomíme, že

$$\sin \vartheta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \sin \vartheta_2 = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + b^2}},$$

pak po úpravě rovnice (3) použitím definice $n_{1,2} = c/v_{1,2}$ získáváme známý zákon lomu

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2.$$

Zákon lomu je dobře ověřená skutečnost, na jehož principu například funguje většina klasických optických přístrojů, a proto vidíme, že *variační principy mají uplatnění nejen ve statice, ale i v dynamice*, tj. v časovém vývoji.

To je podstatně méně intuitivní skutečnost, protože nás nutí si klást otázky typu: *jak paprsek ví, že bude narážet na rozhraní nebo že bude potřebovat dorazit do bodu B?* Odpověď samozřejmě zní, že to paprsek prostě neví a vědět k takovému chování nemusí. Fermatův princip nám říká, že pokud body A a B prochází nějaký paprsek, tak bude mít určitě takovýto tvar. Není to přímý způsob, jak předvídat vývoj jednotlivého paprsku, když ještě nevíme, kde skončí (bod B předem neznáme). Fermatův princip je obecné tvrzení o přirozenosti paprsků, ze kterého lze pak okamžitě zákony chování jako zákon lomu odvodit. Obdobně to bude platit i pro další principy, které nyní uvedeme.

Tři, dva, jedna – AKCE!

Všichni známe Newtonovu klasickou mechaniku, podle které se hmotné body pohybují vlivem síly $\mathbf{F}(t)$ po trajektoriích $\mathbf{x}(t)$, které jsou řešením druhého Newtonova zákona

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}.$$

Dost možná vás překvapí, že osvětenší fyzikové uspěli ve vymýšlení extrémálního principu i v případě zmíněných Newtonových rovnic. Zatímco u světla se z trajektorií mezi dvěma body vybírala ta správná trajektorie na základě extrémální *doby*, u mechaniky je to mnohem hůře pochopitelnější veličina, takzvaná *akce*. Historicky první byl *Maupertuisův princip akce*, postulovaný v 18. století. Maupertuisův princip tvrdí, že suma velikostí hybností po délce trajektorie (akce) je mezi libovolnými dvěma body minimální, pokud je energie po celou dobu pohybu stejná. Tedy integrál

$$S_0 = \int_A^B mv \, ds$$

má určitě nulovou variaci při nekonečně malé variaci $\delta \mathbf{x}(t)$ vedoucí na variaci

$$\delta \mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t).$$

Tento tvar takzvané redukované akce reprodukuje z podmínky na nulovou variaci Newtonovy rovnice v časově neměnných konzervativních polích a použil jej například Niels Bohr na začátku 20. století, když odvozoval kvantování energetických hladin vodíku. Opět nemůžeme říci, jestli je redukovaná akce nutně minimální, proto pro jistotu říkáme, že je stacionární.

Existuje ale i jiná, „neredukovaná“ akce \mathcal{S} , jejíž stacionarita je v časově neproměnných situacích ekvivalentní se stacionaritou redukované akce S_0 , a která určuje trajektorie i v časově

proměnných situacích. Musíme ale definovat novou funkci, jejíž integrál se po dobu běhu extremalizuje, a tou je *Lagrangián* (čti lagranžián). Lagrangián je definovaný jako rozdíl kinetické a potenciální energie $L = T - V$.

Kinetickou energii hmotného bodu o hmotnosti m a rychlosti \mathbf{v} vypočteme jako

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2.$$

Jedná se o energii, kterou libovolná síla musela do částice vložit, aby se urychlila na rychlost \mathbf{v} . Pro potenciální energii již takto explicitní vztah nemáme. Tato energie je obecně funkcí času a polohy hmotného bodu $V(\mathbf{x}, t)$. Jak bylo řečeno v první části textu, je to právě potenciální energie, kterou předává silové pole částici nebo hmotnému bodu při pohybu v prostoru.

Když tedy nyní známe Lagrangián a jeho význam, můžeme zformulovat Hamiltonův princip stacionární akce. Hamiltonův princip tvrdí, že pro trajektorii $\mathbf{x}(t)$, která se nachází v čase t_1 v bodě P a v čase t_2 v bodě Q, je stacionární následující akce

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), t) dt.$$

Vidíte, že nyní neklademe požadavek jen na koncové body trajektorie, *ale i na časy, ve kterých se v daných bodech P, Q nachází*. To je prostě důsledek faktu, že se nám například silové pole může pod trajektorií měnit a pozice v různých časech může znamenat docela jinou fyzikální situaci. Nebudeme vás dlouho napínat a rovnou vám řekneme, že z podmínky $\delta S = 0$ dostáváme Newtonovy rovnice se silou odpovídající poli potenciální energie V . Zkusme si i něco jednoduššího spočítat, třeba rovnice plynoucí pro volnou částici.

Variace na svobodné lety

Ukážeme si, jak zkonstruovat akci pro volnou částici a jak z ní odvodíme pohybové rovnice z podmínky $\delta S = 0$. Na volnou částici nepůsobí žádná síla, a proto můžeme zvolit potenciální energii nulovou $V = 0$. Do Lagrangiánu přispěje proto jen kinetický člen a dostáváme

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2 dt.$$

Nyní provedme malou variaci $y(t) \rightarrow y(t) + \delta y(t)$. Dostaneme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m(\dot{y}(t) + \delta\dot{y}(t))^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2 dt.$$

Pokud je ale $\delta y(t)$ malé (řekneme o řád menší než $y(t)$), pak je $(\delta y(t))^2$ již zcela zanedbatelné a budeme ho považovat za nulové. Potom máme

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m(\dot{y}(t)^2 + 2\dot{y}(t)\delta\dot{y}(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{y}(t)\delta\dot{y}(t) dt.$$

Poslední úpravu, kterou musíme provést, je integrace per partes,² podle které je

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\dot{g}(t) dt = f(t_2)g(t_2) - f(t_1)g(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{f}(t)g(t) dt.$$

²Čtenář, který se nespokojí s pouhým uvedením příslušné formulky, může nahlédnout do libovolné učebnice matematické analýzy nebo třeba na Wikipedii.

V našem případě dostáváme

$$\delta S = \dot{y}(t_2)\delta y(t_2) - \dot{y}(t_1)\delta y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(t)\delta y(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(t)\delta y(t) dt,$$

kde jsme využili toho, že ze zadání víme přesně počáteční a koncovou polohu bodu, a proto je $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$. Protože může být $\delta y(t)$ jinak libovolné, musí platit

$$\ddot{y}(t) = a(t) = 0,$$

abychom splnili podmínku $\delta S = 0$. Vidíme, že jsme v tomto jednoduchém případě odvodili druhý Newtonův zákon pro bod, na který nepůsobí žádná síla (tj. zrychlení je nulové).

Snad jste během této krátké ochutnávky z historie a praxe variačních principů okusili alespoň část jejich elegance a možnosti. Zvláště principy stacionární akce se během historie fyziky již mnohokrát osvědčily a můžeme je snadno rozšířit z dynamiky hmotného bodu na dynamiku vícerozměrného tělesa jako struny nebo celého třírozměrného objektu. Zobecnit se princip stacionarity akce dá zcela obdobně, jako jsme to udělali s principem minimalizace potenciální energie a řetízkem. To si ale ukážeme až v příštím díle. Začneme s akcí pro volnou relativistickou částici a zobecníme ji na relativistickou strunu. Máte se tedy určitě ještě na co těšit.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.