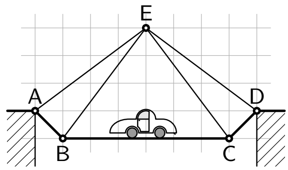
Úloha IV.5 . . . stavme mosty

4 body; průměr 2,00; řešilo 31 studentů



Mějme dvourozměrnou část jednoduché mostní konstrukce jako na obrázku tvořenou z tyčí spojených v bodech A, B, C, D *a* E. *Zjistěte, které tyče jsou namáhány tlakem a které tahem a jak velkými silami, pokud jsou tyče nehmotné a na tyči* BC *stojí autíčko o hmotnosti m. Délky tyčí určete z obrázku.*

Bonus *Uvažujte, že všechny tyče mají konstantní délkovou hustotu λ.*

Karel vzhlížel k zuřivým mostním konstrukcím.

Každý z kloubů mostu je v klidu, a tedy celková výsledná síla na něj působící je nulová. Tento fakt nám dává do vztahů síly působící na tyče. Označme T_{XY} sílu, kterou je stlačována tyč spojující body XY. Pak například tyč AE působí na kloub E silou velikosti T_{AE}. Tato síla působí rovnoběžně s tyčí AE směrem od ní. Auto působí na tyč BC tíhovou silou mg. Ta se rozkládá do kloubů B a C rovnoměrně, tedy $mg/2$ směrem dolů na každý z nich. Na klouby A a D pak působí reakční síla od země.

Počítejme rovnou bonusový případ. Řešení základní úlohy pak bude pouze dosazení $\lambda = 0$. Tíha každé tyče se rozkládá rovnoměrně do jejích koncových bodů. Tyč AE tedy navíc působí na kloub E silou $5\lambda g/2$ směrem dolů. Hmotnost celého mostu i s autem je pak $(26+2\sqrt{2})\lambda+m$.

Jelikož toto jsou jediné síly působící na klouby, můžeme přejít k výpočtu. Všimněme si, že most je osově souměrný, a proto stačí problém vyřešit pro levou polovinu mostu. Jelikož se jedná o vektorové rovnice, bude nejsnazší si je zapsat po složkách ve vodorovném a svislém směru. Pro svislý směr dostáváme pro klouby A, B a E

$$-\frac{3}{5}T_{\mathsf{AE}} + \frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} + (13+\sqrt{2})\lambda g + \frac{mg}{2} - \frac{5}{2}\lambda g - \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda g = 0\,,$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} - \frac{4}{5}T_{\mathsf{BE}} - \frac{mg}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{2} + 3\right)\lambda g = 0\,,$$

$$\frac{3}{5}T_{\mathsf{AE}} + \frac{4}{5}T_{\mathsf{BE}} - 5\lambda g = 0\,.$$

Vodorovná složka sil působících v kloubu E se vyruší automaticky ze symetrie. Vodorovná složka v kloubu B je

$$\frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} - \frac{3}{5}T_{\mathsf{BE}} - T_{\mathsf{BC}} = 0\,.$$

Kdybychom řekli, že kloub A je pevně zasazen v zemi, reakce od země by právě vyrušila působení od mostu i ve vodorovném směru, a tedy by vodorovná složka síly byla automaticky vyvážená. Ovšem čtyři rovnice, které v tuto chvíli máme, nemají jednoznačné řešení. Z fyzikálního hlediska si to můžeme představit tak, že země může tlačit klouby A a D k sobě libovolnou silou a jediným důsledkem bude, že se bude měnit napětí v tyčích. To by nastalo třeba při změnách teplot. Abychom tomu zabránili, řekneme, že body A a D nejsou pevně uchyceny ve vodorovném směru. To nám přidává poslední rovnici

$$-\frac{4}{5}T_{\mathsf{AE}} - \frac{1}{\sqrt{2}}T_{\mathsf{AB}} = 0\,.$$

Vyřešením této soustavy pěti lineárních rovnic získáme

$$
\begin{aligned}
T_{\mathsf{AB}} &= -\frac{2\sqrt{2}}{7}m - \frac{2}{7}\left(2 + 21\sqrt{2}\right)\lambda g\,,\\
T_{\mathsf{AE}} &= \frac{5}{14}m + \frac{5}{14}\left(21 + \sqrt{2}\right)\lambda g\,,\\
T_{\mathsf{BC}} &= -\frac{1}{8}m - \frac{1}{8}\left(51 + \sqrt{2}\right)\lambda g\,,\\
T_{\mathsf{BE}} &= -\frac{15}{56}m + \frac{5}{56}\left(7 - 3\sqrt{2}\right)\lambda g\,.
\end{aligned}
$$

Vidíme tedy, že tyč AE bude vždy namáhaná tlakem, zatímco tyče AB a BC budou vždy namáhané tahem. Tyč BE je pro malá λ a tedy i základní případ namáhaná tahem. Ovšem pokud

$$\lambda > \frac{3}{7 - 3\sqrt{2}}m\,,$$

je tyč BE namáhaná tlakem.

Jáchym Sýkora
jachym@fykos.cz