Úloha IV.4 ... rána kladivem

4 body; průměr 2,05; řešilo 21 studentů

Pokud udeříte kladivem do jednoho konce kovové tyče (jejíž průměr je mnohem menší než její délka), začnou se okolo ní šířit zvukové vlny. Narýsujte a co nejpřesněji popište, jak se bude s časem měnit tvar vlnoploch v rovině tyče. Mezi vašimi obrázky by měly být znázorněny vlnoplochy, a to v okamžicích, kdy se vlna dostala na druhý konec tyče a kdy se po odrazu vrátila opět do místa úderu. Nezapomeňte konstrukci popsat. Uvažujte pouze podélné kmity tyče. Poměr rychlosti šíření zvuku v tyči a ve vzduchu je $\beta = v_{\mathrm{tyc}}/v_{\mathrm{vzduch}} \approx 10$.

Lukáš se prohraboval starými archivy.

Na riešenie použijeme Huygensov princíp. Ten tvrdí, že každý bod *vlnoplochy* sa stáva malým zdrojom guľových vĺn, ktoré ďalej vysielajú žiarenie. Obalom miest, kam sa dostane za malý čas toto vlnenie, je nová vlnoplocha. Čo to ale je vlnoplocha? Nám bude stačiť pracovné chápanie, že sú to práve tie body, kde sa nachádzajú maximá výchylky.[1,2]

Aby nám vzniklo vlnenie, potrebujeme zdroje. V tomto prípade je zdroj reprezentovaný rázom v tyči. Ráz ide po tyči tam a spať a tam. Kde sa nachádza, spôsobí rozvlnenie okolitého vzduchu. Fyzikálne sa to dá dobre predstaviť tak, že tyč sa v mieste rázu mierne deformuje, a tým rozhýbe vzduch.

Máme teda zdroj, ktorý sa hýbe rýchlosťou v_{tyc}. To, že je táto rýchlosť väčšia ako rýchlosť zvuku vo vzduchu, je veľmi dôležité. V každom mieste vytvorí guľovú vlnoplochu, ktorá sa postupne rozširuje do priestoru. Vieme, že jej polomer rastie s rýchlosťou v_{vzduch}.

Prvá vec, ktorú si môžeme všimnúť je, že celý problém má rotačnú symetriu okolo tyče. Preto sa nemusíme zaoberať popisom v celom priestore, ale stačí nám ľubovoľná rovina obsahujúca tyč. Skutočný obraz by sme dostali rotáciou našich vlnoplôch okolo tyče.

Skúmajme moment, v ktorom ráz prvýkrát dorazí na druhý koniec tyče. Polomer kružníc, ktoré predstavujú body s rovnakou fázou pochádzajúce od zdrojov na tyči, porastie lineárne so vzdialenosťou od tohoto konca.[3] Nech úder do tyče nastal v okamihu 0 a vlna cestovala tyčou čas Δt. Vieme, že určite platí

$$\Delta t = \frac{L}{v_{\mathrm{tyc}}}\,,$$

kde sme L označili dĺžku tyče. Kružnica vychádzajúca z konca tyče, do ktorého sme udreli, sa zatiaľ stihla nafúknuť na polomer

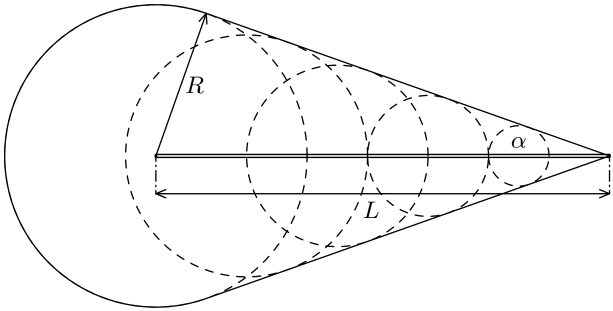
$$R = v_{\mathrm{vzduch}}\Delta t = v_{\mathrm{vzduch}}\frac{L}{v_{\mathrm{tyc}}} = \frac{L}{\beta}\,.$$

Obálka ostatných postupne zmenšujúcich sa kružníc predstavuje trojuholník, ako je zrejmé z náčrtku postupne zmenšujúcich sa kruhových vĺn. Tento trojuholník má v čase Δt vrchol práve vo vrchole tyče. Opäť z náčrtku vidíme, že trojuholník sa na kruhovú vlnu (tú, ktorá vznikla v čase 0) napája hladko. Teda strana trojuholníka je dotyčnica ku kružnici s polomerom R. Nakreslime si teda celú situáciu (pre ilustratívnosť volíme $\beta = 3$), naznačiac aj vrcholový uhol trojuholníka.

[1] Správna definícia hovorí, že vlnoplocha je množina bodov s rovnakou fázou. Uvidíme ale, že tu by nám niečo takéto nebolo veľmi užitočné a len by sme zbytočne zavádzali ďalší pojem *fázy*.

[2] A o akej výchylke to vlastne hovoríme? Zvuk je len zmena tlaku vzduchu, takže môžeme popisovať napríklad výchylky tlaku. Hustota je rovnako dobrý popis, ale náš ušný bubienok reaguje práve na tlak vzduchu.

[3] Tu práve prichádza do hry Huygensov princíp. Namiesto textu vám ale odporúčam vziať si papier, nakresliť si kružnicu a aplikovať Huygensov princíp. Uvidíte, že výsledkom je len nafúknutá pôvodná kružnica.



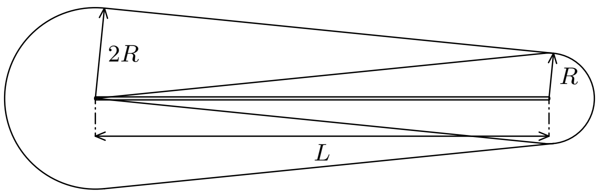
Obr. 1: Tvar vlnoplôch v čase Δt

Keďže vyznačený priemer je kolmý na dotyčnicu ku kružnici, uhol α môžeme vyjadriť jednoducho

$$\sin\alpha = \frac{R}{L} = \frac{1}{\beta}\,.$$

V momente Δt sa ráz otočí a vráti sa späť. Vlna, ktorá existovala v čase Δt, sa bude ďalej nafukovať, čo si najlepšie predstavíme na nafukovaní pôvodných zdrojov vlnenia umiestnených na tyči. V čase $2\Delta t$ sa pôvodná kružnica zväčší na polomer $2R$, ostrý vrchol sa zmení na kružnicu s polomerom R a spája ich dotyčnicová priamka so sklonom α.

Naviac sa vytvára obdoba trojuholníka zakončeného kružnicou. Podobne ako pri pohybe od času 0 do Δt. Keď tieto dva obrazce nakreslíme, dostávame pre zadanú hodnotu $\beta = 10$



Obr. 2: Tvar vlnoplôch v čase $2\Delta t$

Toto je teda hľadaný tvar vlnoplochy. To, čo sme tu opísali, sú vlastne vrcholy vlniek, ktoré doputovali do naznačených miest. Fáza hovorí o istej vnútornej premennej, ktorá sa vyskytuje pri matematickom popise a na ktorej závisí výchylka (pre harmonický oscilátor je fáza rovná ωt, kde ω je uhlová frekvencia). V naznačených miestach teda predpokladáme rovnakú výchylku a snažili sme sa popisovať čelo vlny. Teda tam by bolo práve maximum výchylky (nezabúdajme, že hovoríme o tlaku).

Máme ešte jeden problém, rozdvojenie vlnoplochy. Ak sa vám to zdá neprirodzené, zdá sa vám dobre. Naša analýza totiž jednoducho uvažovala o šírení vzruchu dopredu a nafukovaní vlnoplochy podľa Hugyensovho princípu. Ak by sme chceli byť presnejší, museli by sme ísť o úroveň nižšie a pozrieť sa na vlnovú rovnicu. V skutočnosti totiž vzruch nepostupuje iba dopredu, ale zanecháva za sebou nenulové výchylky. S týmito výchylkami by potom interferovala vlna od vzruchu vracajúceho sa späť.

Kvalitatívne môžeme povedať, že vonkajší tvar tak, ako sme ho opísali, bude zachovaný (náš popis nehovorí nič o vnútrajšku, pre vonkajšiu obálku funguje dobre). Trojuholník, ktorý vzniká vo vnútri, bude v blízkosti rázu stále viditeľný, práve vytvorené kruhové vlny totiž majú najvyššiu výchylku, a teda len tak ľahko nezinterferujú so slabými zvyškovými vlnami.

V blízkosti rozdvojenia vlnoplochy sú ale obe vlny približne rovnako silné, a tu by nastávala interferencia. V mieste napojenia vnútorného trojuholníka na kružnicu s polomerom R by teda nebola viditeľná tak jasne, ako je na obrázku. Toto všetko je diskusia nad rámec toho, čo sme požadovali od vašich riešení. Tak sa nestrachujte, môžete akurát dostať bonus.

Ján Pulmann
`janci@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.