

Úloha III.S ... hvězdný zvěřinec

6 bodů; průměr 2,05; řešilo 21 studentů

- a) Proč je třeba, aby byl molekulární mrak, ze kterého jsou tvořeny hvězdy, chladný? Zkuste odhadnout a zdůvodnit rozumnou teplotu.
- b) Podíváme-li se na HR diagram některé z hvězdokup, najdeme velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti. Jaké jsou způsoby, jak takový rozptyl může vzniknout? Ilustrační obrázek pro hvězdokupu Plejády – M45 – najdete třeba tady¹.
- c) Jak dlouho by žila hvězda, kdyby nebyla živena termonukleárními reakcemi, ale jen energií ze smršťování se?
- d) Planetární mlhovina Helix má průměr 16' a nachází se ve vzdálenosti cca 213 pc od Země. Jaký je její skutečný poloměr a jak je stará, pokud se její obálka rozpíná s rychlostí 20 km/s?

Janapka.

Molekulární mrak

V molekulárních mračích je neustálý tepelný pohyb částic. Částice, které se rychle pohybují, mají vysokou energii, což implikuje i jejich vysokou teplotu. V textu seriálu je zmíněno, že proti gravitačnímu kolapsu mraku působí právě tepelný pohyb částic. Čím je molekulární mrak teplejší, tím lépe vyrovná podněty, které by vyvolaly gravitační zhroucení oblaku a formaci hvězdy. Jednoduchý odhad teploty mraku můžeme udělat pomocí Jeansovy délky

$$\lambda_J \approx \sqrt{\frac{15k_B T}{4\pi G \rho \mu}},$$

kde k_B je Boltzmanova konstanta, T termodynamická teplota, G je gravitační konstanta, ρ je hustota mraku a μ je hmotnost na částici mraku. Hodnoty konstant jsou známé ($G = 6,67300 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $k_B = 1,3806503 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$), typická Jeansova délka a hustota mraku jsou uvedeny v seriálu ($\lambda_J = 10^{15} \text{ m}$, $\rho = 10^{-16} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Poslední hodnota, kterou potřebujeme, je μ . Uvědomíme si, že hvězdy jsou na počátku tvořeny převážně vodíkem, který je také nejčastějším prvkem ve vesmíru. μ tedy bude hmotnost jednoho atomu vodíku, $1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Rozměrovou analýzou zjistíme, že teploty by se měly pohybovat okolo desítek kelvinů.

HR diagram

Pro zodpovězení této otázky je třeba si uvědomit, že vesmír se nám sice promítá na plochu – nebeskou sféru, ale ve skutečnosti mezi námi a objektem mohou být jiné objekty, popřípadě prach a plyn. Velký rozptyl okolo hlavní posloupnosti HR diagramu je částečně způsoben chybou měření, neboť určování hmotností hvězd je stále poměrně nepřesné. Ale i za předpokladu, že hmotnost určit umíme velmi přesně, rozptyl bude existovat právě díky objektům v popředí či v pozadí. V uvedeném příkladu se jedná o hvězdokupu M45. Kupříkladu z internetu nebo kterékoliv chytré knížky si můžeme zjistit, že se jedná o mladou a otevřenou hvězdokupu. Mladé hvězdy jsou typicky modřejší než hvězdy staré, takže většina hvězd, které se jeví být mimo hlavní posloupnost a jsou velmi červené, budou objekty v pozadí nebo na popředí. Tento fakt se dá použít i jako test, zda hvězda náleží hvězdokupě nebo ne. Nápadné zčervenání některých hvězd patřících do hvězdokupy také může značit molekulární oblak mezi pozorovatelem

¹<http://www.astrophysicspectator.com/images/diagrams/PleiadesHRDiagramSup2.jpg>

a hvězdokupou. Pokud bychom měli hvězdokupu kulovou, třeba M13, bude to naopak. Kulové hvězdokupy jsou velmi staré, takže nejhmotnější a nejteplejší modré hvězdy už došly do stádia, kdy jsou červenými obry apod. Takové hvězdokupy se nám budou jevit spíše červené, takže hvězdy výrazně modré, nezapadající na hlavní posloupnost, můžeme považovat za hvězdy v popředí/pozadí.

Délka života hvězdy

Vzpomeneme si, jak vzniká hvězda. Vnější síla působí na molekulární oblak o vhodných parametrech, ten se začne smršťovat a ve chvíli, kdy je jeho centrum dostatečně husté, zažehnou se termonukleární reakce. Hvězdou se objekt stane tehdy, dostane-li se do hydrodynamické rovnováhy a ztráty energie smršťováním se jsou uhrazeny termonukleárními reakcemi. Pokud se zajímáme o délku života hvězdy bez termonukleárních reakcí, bude to to samé, jako kdybychom se zabývali časem, který trvá volný pád materiálu na centrum oblaku. Na počátku je takový oblak v hydrostatické rovnováze, kterou musíme narušit ve prospěch gravitace.

$$\frac{dp}{dr} = -\rho g = -\frac{GM_r}{r^2} \rho.$$

Dále v řešení zanedbáme tlak a budeme uvažovat pouze gravitaci. Obě strany rovnice vykrátíme hustotou (levou stranu si musíme vyjádřit jako sílu na plochu, dp/dr je v podstatě rozdíl tlaku na vršek jednotkového objemu a spodek jednotkového objemu) a získáme tvar

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G \frac{M_r}{r^2}.$$

Abychom získali kolaps jako funkci času, budeme muset rovnici integrovat. Hmotnost mraku se nám navíc nemění, takže M_r nahradíme $4\pi r_0^3/3$. Abychom mohli rovnici dobře zintegrovat, pomůžeme si vynásobením obou stran rychlostí dr/dt .

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} &= -\left(\frac{4}{3}\pi G r_0^3 \rho_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}, \\ \int \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} dt &= \int -\left(\frac{4}{3}\pi G r_0^3 \rho_0\right) \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} dt, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{4}{3}\pi G r_0^3 \rho_0\right) \frac{1}{r} + C_1. \end{aligned}$$

Integrační konstantu C_1 odvodíme z faktu, že na začátku kolapsu, kdy $dr/dt = 0$, je $r = r_0$ a potom $C_1 = 4\pi G r_0^2 \rho_0/3$. Dosadíme do rovnice a po vytknutí dostaneme

$$\frac{dr}{dt} = -\left[\frac{8}{3}\pi G r_0^2 \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} - 1\right)\right]^{1/2}.$$

Pro integraci takové rovnice si musíme pomoci substitucemi $\psi \equiv r/r_0$ a $\chi \equiv (8\pi G \rho_0/3)^{1/2}$. Získáme rovnici

$$\frac{d\psi}{dt} = -\chi \left(\frac{1}{\psi} - 1\right)^{1/2}.$$

Takovou rovnici není nejjednodušší vyřešit, nejlepší je sáhnout po nějaké šikovné kuchařce nebo programu, co si s podobnou rovnicí poradí. Je totiž nutná ještě jedna substituce $\psi \equiv \cos^2 \xi$. Řešení nalezneme ve tvaru

$$\frac{\xi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\xi = \frac{\xi}{2}t + C_2,$$

kde konstantu C_2 opět odvodíme z předpokladu $r = r_0$ pro $t = 0$. Po dosazení do substitucí dostaneme $C_2 = 0$, takže rovnice kolapsu je

$$\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi = \xi t,$$

odkud už můžeme odvodit čas volného pádu za předpokladu, že víme, že na konci bude poloměr nulový a proto ze substituce $\psi = 0$ a tedy $\xi = \pi/2$. Po dosazení vyjde vztah pro čas volného pádu $t_{\text{ff}} = \frac{\pi}{2\xi}$. Po odsubstituování dostaneme finální vztah

$$t_{\text{ff}} = \left(\frac{3\pi}{32G\rho_0} \right)^{1/2}.$$

Zkusme si do takového vztahu dosadit nějaká čísla. Pro hustotu $3 \cdot 10^{-17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ nám vyjde čas volného pádu $3,8 \cdot 10^5$ let. Došli jsme ke stotísicům let, což je prokazatelně méně, než je stáří Země samotné. Kdyby hvězdy byly poháněny pouze díky volnému pádu, jevilo by se nám nebe mnohem dynamičtější a proměnlivější.

Poznámka k řešení Vyřešit onu diferenciální rovnici není zrovna triviální, jako správné řešení je tedy uznáno i takové, které rovnici jen navrhne, popřípadě pěkně popíše, co všechno je třeba uvážit.

Planetární mlhovina Helix

Jedná se o jednoduchý trigonometrický problém. Skutečný poloměr určíme z pravouhlého trojúhelníku, u něhož známe jeden úhel a jednu odvěsnu – vzdálenost. Označíme-li si vzdálenost d , poloměr r a úhel čili úhlový poloměr objektu α , pak

$$r = d \operatorname{tg} \alpha.$$

Vzhledem k tomu, že α je blízké nule, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ a $r = d\alpha$. Po dosazení vychází $r = 4,73$ pc. Známe skutečnou velikost a rychlost rozpínání. Uvědomíme si, že v nulovém stáří můžeme říct, že objekt byl nulové velikosti. Po převedení na roky nám vychází stáří 23 125,3 let.

Poznámka k řešení Na Wikipedii objevíte jiná čísla. V zadání jsou prostě a jenom starší údaje, z toho není třeba si dělat hlavu.

Jana Poledníková
janap@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported. Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.