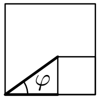
24. ročník, úloha IV . S ... *Möbiova transformace a konformní zobrazení* *!!! chybí statistiky !!!*

a) *Dokažte tvrzení d), podle něhož Möbiova transformace zachovává úhly. Jedna z možností je uvědomit si, že v kruhové inverzi existují kružnice, které se zobrazují samy na sebe.*
b) *Najděte podmínku na koeficienty Möbiovy transformace, aby zobrazovala komplexní kruh na komplexní kruh ($|z| \leq 1$) a najděte konkrétní transformaci, která zobrazuje komplexní kruh na horní komplexní polorovinu. Co to fyzikálně znamená?*
c) *Podle teorie relativity se tělesa pohybující se rychlostí blízkou rychlosti světla zkracují (Lorentzova kontrakce). To ovšem ještě neznamená, že bychom je viděli kratší (například, že bychom místo pohybující se koule viděli pohybující se elipsoid). Využijte představy, který jsme v tomto díle vybudovali, abyste odvodili, že předměty letící rychlostí světla vidíme o kousek pootočené, nikoliv zkrácené (Terellova rotace).*

Möbiova transformace zachovává úhly

Jak jsme si ukázali v předešlých dílech, holomorfní funkcí realizované zobrazení nám zobrazuje čtverečky na čtverečky, které jsou zvětšené/zmenšené a pootočené, nanejvýš zrcadlené Budeme-li nyní uvažovat libovolný úhel, tak jej můžeme pomocí čtverečků vymezit např. jako na obrázku 1.



Obr. 1

Bude-li větší čtvereček pouze posunut, otočen, přeškálován nebo zrcadlen, bude toto platit i pro menší z nich a jimi vymezený úhel bude nezměněn.

Ukažme si, že funkce $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ je holomorfní. Toto ukážeme tak, že ji zderivujeme.

$$f'(z) = \frac{1}{\Delta z}\left(f(z+\Delta z) - f(z)\right) = \frac{1}{\Delta z}\frac{az+b}{cz+d}\cdot\left(\frac{1+\frac{a}{az+b}\Delta z}{1+\frac{c}{cz+d}\Delta z} - 1\right) .$$

Ještě si rozeberme několik problematických případů. Pokud $az + b = 0$, potom nemůžeme provést vytýkání v čitateli a výraz pro derivaci by měl tvar

$$f'(z) = \frac{1}{\Delta z}\frac{a\Delta z}{cz+d+c\Delta z} = \frac{a}{cz+d} ,$$

tedy v tomto bodě derivace existuje a není žádný problém. Pokud by platilo, že $cz+d = 0$, tak Möbiova transformace zobrazuje takovýto bod z do nekonečna, ale budeme-li uvažovat jakýkoli libovolně blízký bod, tak již nebudeme míti problém s holomorfností, ale velikost zkoumaného úhlu se změní libovolně málo.

Pro ostatní hodnoty proměnné z již můžeme výraz pro derivaci upravovat libovolně. Protože je Δz malé, jmenovatel rozvineme, jako součet geometrické řady a zanedbáme členy řádu Δz^2 a vyšší

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{\Delta z}\frac{az+b}{cz+d}\left(\left(1+\frac{a}{az+b}\Delta z\right)\left(1-\frac{c}{cz+d}\Delta z\right) - 1\right) \\ &= \frac{az+b}{cz+d}\left(\frac{a}{az+b} - \frac{c}{cz+d}\right) = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} . \end{aligned}$$

Protože existuje derivace, tak toto zobrazení zachovává úhly.

Hledání transformací

Má-li nějaká transformace zobrazovat např. kruh $|z| < 1$ na sebe, musí být transformací identickou, to znamená, že $f(z) = z$. Pro koeficienty Möbiovy transformace to znamená: $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.

Möbiova transformace má relativně málo volných parametrů, proto konstanty pro transformaci odpovídající zobrazení kruhu na polorovinu. V korespondenci s geometrickou představou budeme požadovat aby platilo: $f(\mathrm{i}) = \infty$, $f(-\mathrm{i}) = 0$ a pro ostatní z, aby byla $f(z)$ reálná. Z první podmínky plyne: $a(-\mathrm{i}) + b = 0$, z druhé $c\mathrm{i} + d = 0$. Dáme-li tyto podmínky dohromady, dostáváme

$$f(z) = \frac{az + a\mathrm{i}}{cz - c\mathrm{i}}\,.$$

Dosadíme-li např. $z = 1$, aby $f(1)$ byla reálná můžeme položit např. $c = 2\mathrm{i}$, $a = 1$. Výsledná transformace bude mít tvar

$$f(z) = \frac{z + \mathrm{i}}{2\mathrm{i}z + 2}\,.$$

Ještě musíme ověřit, zdali jde opravdu o zobrazení na horní, nikoli dolní polorovinu, platí $f(0) = \mathrm{i}/2$, proto jsme zvolili správné znaménko u koeficientů a a c.

Pohybující se koule

Podobná úloha byla zadána ve 22. ročníku v 6. sérii. Její řešení naleznete na webové adrese `http://fykos.cz/rocnik22/reseni/reseni6-3.pdf`.

Lukáš Ledvina
`lukasl@fykos.cz`