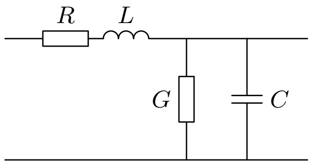
24. ročník, úloha II . S ... *zakompexovaná* *!!! chybí statistiky !!!*

a) *Po jaké trajektorii (polodii) se pohybuje pól při pohybu tyče padající v rohu? Vyřešte užitím komplexních čísel.*
b) *Pro $\varepsilon \to 0$ uvažujte otočení o úhel ε, které zapisujeme R_ε, a posunutí T_ε. Vyšetřete a porovnejte zobrazení $R_\varepsilon T_\varepsilon R_{-\varepsilon} T_{-\varepsilon}$ a komutátor $[R_\varepsilon T_\varepsilon]$.*
c) *Otočení jsme v úvodní poznámce poskládali z miniaturních otočení $e^{i\vartheta} = (1 + i\vartheta/N)^N$. Dokážete pomocí exponenciály zapsat také posunutí funkce?*
d) *Nakreslete obrázek, na co funkce z^2 zobrazí mříž rozteče ε. Za bonus můžete nakreslit obraz mříže po funkci $\cos(z)$.*
e) *Pomocí komplexních čísel vypočtěte impedanci střídavého obvodu série cívky, rezistoru a paralelně zapojeného kondenzátoru s odporem, přičemž obvod pokračuje iterativně dále (viz obr. 1).*



Obr. 1. Koaxiální kabel

Jakub Michálek a Lukáš Ledvina

Pohyb pólu

Uvažujme tyč v poloze charaktrizované: vzdáleností konce na podlaze od počátku x a vzdáleností druhého konce od počátku y. Předpokládejme, že se tyč otočí kolem bodu P o úhel $\Delta\varphi$, resp. dojde k posunutí konců tyče o Δx, Δy.

Uvažujme bod z, tento otočíme o malý úhel $\Delta\varphi$ okolo bodu P, potom pro novou polohu bodu $\tilde{z}$ platí

$$\tilde{z} = P + e^{i\Delta\varphi}(z - P) \approx P + z - P + (z - P)i\Delta\varphi = z + (z - P)i\Delta\varphi \,. \tag{1}$$

Nyní aplikujme vztah (1) na pohyb konců tyče

$$x + \Delta x = x + (x - P)i\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (x - P)i\Delta\varphi \,,$$
$$iy + i\Delta y = iy + (iy - P)i\Delta\varphi \quad \Rightarrow \quad i\Delta y = (iy - P)i\Delta\varphi \,.$$

My však víme, že Δx a Δy jsou reálné, protože se tyč pohybuje po souřadnicových osách. Proto musí být výrazy $(x - P)$ ryze imaginární a $(iy - P)$ reálné číslo. Z této úvahy jednoduše plyne $P = x + iy$, což je pól otáčení.

Otáčíme svět

Z textu seriálu víme, že platí $\mathrm{T}_\varepsilon(z) = a + z$, $\mathrm{R}_\varepsilon(z) = e^{i\varphi} z \doteq (1 + i\varepsilon - \varepsilon^2/2)z$. Dosaďme nyní do výrazu z úkolu, kde budeme zanedbávat členy ε^3

$$\mathrm{R}_\varepsilon \mathrm{T}_\varepsilon \mathrm{R}_{-\varepsilon} \mathrm{T}_{-\varepsilon} = \left(1 + i\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left(\varepsilon + \left(1 - i\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)(z - \varepsilon)\right) =$$
$$= \left(1 + i\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left(\varepsilon + z - i\varepsilon z - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 z - \varepsilon + i\varepsilon^2\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 + \mathrm{i}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)\left(z - \mathrm{i}\varepsilon z - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 z + \mathrm{i}\varepsilon^2\right) = \\
&= z - \mathrm{i}\varepsilon z - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 z + \mathrm{i}\varepsilon^2 + \mathrm{i}\varepsilon(z - \mathrm{i}\varepsilon z) - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 z = \\
&= z + \mathrm{i}\varepsilon^2 \,.
\end{aligned}
$$

Jde tedy o translaci ve směru osy y. Zbývá vyšetřit komutátor. Komutátor je operátorů A a B je definovaný $[A, B] = AB - BA$. Vypočtěme tedy $[\mathrm{R}_\varepsilon \mathrm{T}_\varepsilon]$

$$
\begin{aligned}
\left(1 + \mathrm{i}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right)(z + \varepsilon) - \left(\varepsilon + \left(1 + \mathrm{i}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) z\right) - = \\
= -\varepsilon + \varepsilon\left(1 + \mathrm{i}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) = \mathrm{i}\varepsilon^2 \,.
\end{aligned}
$$

Posouváme svět

Vyjděme z toho, jak jsme definovali derivaci. Pro malé ϑ platí

$$
f(z + \theta) = f(z) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\theta = \left(1 + \theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) f \,.
$$

Nyní jsme našli operátor posunutí, je to výše uvedený výraz v závorce. Pokud tento „operátor“ budeme aplikovat na nějakou funkci, dostaneme její hodnotu ve vzdálenosti θ, však pouze pro malé θ. Toto posutí můžeme však aplikovat i vícekrát. Proto pro posunutí $\Delta = N\theta$ platí

$$
f(z + \Delta) = \left(1 + \theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^N f(z) = \left(1 + \frac{\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}}{N}\right)^N f(z) \,.
$$

Tento výraz můžeme však zapsat jednodušším způsobem, uvážíme-li $N \to \infty$,

$$
f(z + \Delta) = \left(1 + \frac{\Delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}}{N}\right)^N f(z) = \mathrm{e}^{\Delta\,\mathrm{d}/\,\mathrm{d}z} f \,.
$$

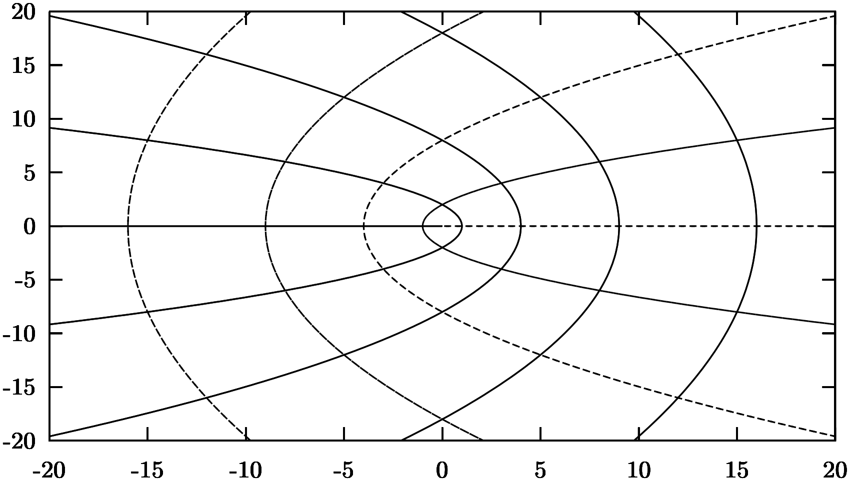
Proto můžeme objekt $\mathrm{e}^{\Delta\,\mathrm{d}/\,\mathrm{d}z}$ považovat za operátor posunutí o Δ.

Zobrazení mřížky

Začněme nejdříve s funkcí $f(z) = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xy\mathrm{i}$. Pro svislé přímky mříže platí $m(t) = x_0 + \mathrm{i}t$, pro vodorovné $n(t) = t + \mathrm{i}y_0$; jim odpovídající křivky jsou

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) &= \left(x_0^2 - t^2\right) + 2x_0 t\mathrm{i} \,, \\
\psi(t) &= \left(t^2 - y_0^2\right) + 2y_0 t\mathrm{i} \,.
\end{aligned}
$$

Vidíme, že hledané křivky jsou paraboly s vrcholem v počátku. Grafy si můžeme prohlédnout na obrázku 2.

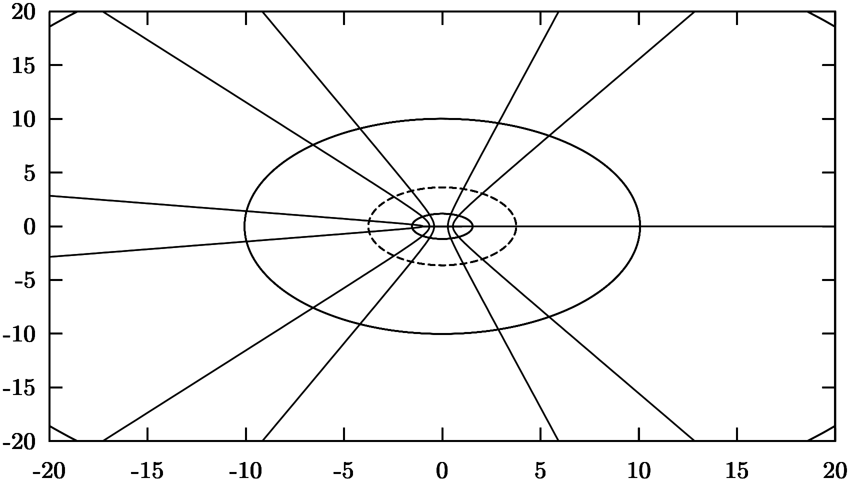


Obr. 2. Zobrazení mříže funkcí $f(x) = z^2$

Dále si zkusme nakreslit funkci $f(z) = \cos z$. Položíme-li $z = x + \mathrm{i}y$ a $\cos z = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right) / 2$, dostáváme

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{y}\right)\cos x + \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{y}\right)\sin x = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y\,.$$

Je vidět, že hledanými křivkami jsou elipsy se středem v počátku. Můžeme si je prohlédnout na obrázku 3.



Obr. 3. Zobrazení mříze funkcí $f(z) = \cos z$

Impedance proudu

Protože uvažujeme nekonečně dlouhý kabel, jeho impedance se nezmení, ani pokud odebereme jeden článek. Užijeme nyní vztahu pro sériové a paralelní zapojení odporů. Proto platí

$$\begin{aligned} Z &= R + \mathrm{i}\omega L + \left(\mathrm{i}\omega C + \frac{1}{G} + \frac{1}{Z}\right)^{-1} ,\\ Z &= R + \mathrm{i}\omega L + \left(\frac{\mathrm{i}\omega CGZ + Z + G}{ZG}\right)^{-1} ,\\ Z &= R + \mathrm{i}\omega L + \frac{ZG}{\mathrm{i}\omega CGZ + Z + G} ,\\ 0 &= Z^2 - (R + \mathrm{i}\omega L)Z - G\frac{R + \mathrm{i}\omega L}{\mathrm{i}\omega CG + 1} . \end{aligned}$$

Pro typický koaxiální kabel platí $C \to 0$ a $G \to \infty$. Díky tomu lze pro malá ω zanedbat lineární člen a určit

$$Z = \sqrt{\frac{R + \mathrm{i}\omega L}{\mathrm{i}\omega C + \frac{1}{G}}} .$$

Lukáš Ledvina
lukasl@fykos.cz