Milí přátelé!

Vítáme vás v XXIV. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Všechny informace o semináři naleznete v přiloženém letáku. Zde shrneme jen to nejdůležitější.

S první sérií nám prosím pošlete na zvláštním papíru vaše jméno a příjmení, adresu pro korespondenci, e-mail, školu, třídu a rok maturity. Řešení každé úlohy pište na *zvláštní* papír formátu A4 a *všechny* papíry podepište. Není třeba posílat všechny úlohy, řešitelé, kteří zvládnou vše, jsou výjimkou. Od loňského roku navíc disponujeme aplikací pro přímé odevzdávání úloh přes internet.

Rovněž bychom vás chtěli upozornit na letošní *seriál na pokračování*, který se bude věnovat komplexním číslům a jejich použití ve fyzice, a jehož text najdete hned za zadáním první série úloh. Na konci každé kapitoly seriálu pak naleznete lehké úlohy na procvičení vyložené látky, za jejichž řešení budete bohatě bodově odměněni! K seriálu také patří i vysvětlující videa, která před každou sérií najdete na kanálu „Fykosák“ na YouTube (`http://www.youtube.com/fykosak`). Již nyní můžete sledovat nultou a první kapitolu.

Další informace najdete na `http://fykos.mff.cuni.cz` a nově i `http://www.fykos.cz`. O akcích semináře také informujeme členy skupiny FYKOS na Facebooku. Přejeme vám spoustu příjemných chvil strávených s naším seminářem. Na vaše řešení úloh první série se těší

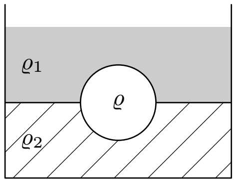
organizátoři

P.S.: Od letoška pořádáme fyzikální seminář i pro žáky základních škol. Jmenuje se **Výfuk** a informace o něm naleznete mezi letáky, které vám právě dorazily. Máte-li mladši sourozence nebo kamarády, dejte jim vědět!

Zadání I. série

Termín odeslání: 4. října 2010 / Termín doručení: 6. října 2010

Úloha I . 1 ... *mezi vodami*



Na rozhraní dvou nemísitelných kapalin se vznáší pevná homogenní koule o hustotě ϱ (viz obrázek). Horní kapalina má hustotu ϱ_1, dolní ϱ_2, přičemž víte, že $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$. Jaká část objemu koule se nachází v horní a jaká v dolní kapalině? *(2 body)*

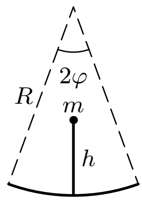
Úloha I . 2 ... *sesterská planeta*

V posledních několika letech již byla objevena spousta planet ležících mimo Sluneční soustavu. Daleko zajímavější by bylo ovšem objevovat planety, které jsou podobné Zemi. Předpokládejte, že chcete objevit podobnou Zemi (terestrická planeta s podobným poloměrem jako Země), která obíhá svou hvězdu podobnou Slunci (stejná spektrální třída – podobná hmotnost, podobný poloměr) jednou za pozemský rok. Předpokládejte, že tato soustava je vzdálená od našeho Slunce zhruba 10 pc. Určete podmínky, za kterých by šlo pozorovat planetu přímo z poklesu jasnosti hvězdy a odhadněte dobu, na kterou tato situace nastane. Jak se zkomplikuje hledání takové hvězdy, když soustava bude mít víc planet? *(2 body)*

Úloha I . 3 ... *káča bez čerta*

Jakub má u babičky káču, na jejíž horní ploše je nakreslená spirála. Káču roztočíme a díváme se na ní shora. Jaké obrazce pozorujeme a proč? *(4 body)*

K úloze I.3: Káča před roztočením



K úloze I.4: Koník

Úloha I . 4 ... *houpací kůň*

Nehmotná tyč délky h je ve středu připevněna na nehmotný oblouk o vrcholovém úhlu 2φ a poloměru R. Na konci tyče je závaží m. Pohyb probíhá pouze v rovině. Určete

a) za jakých podmínek může být soustava stabilní,
b) frekvenci kmitů takového houpacího koně.

(4 body)

Úloha I . 5 ... *bublifuk*

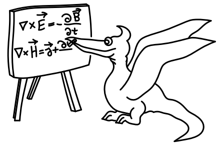
Mára si koupil bublifuk a jal se na balkoně vyfukovat bubliny, venku byl stálý atmosférický tlak p_0. Když se mu jedna obzvláště povedla (měla poloměr r a hmotnost mýdlové vody byla m), zamyslel se a vypočítal její celkovou tepelnou kapacitu. Učiňte totéž. *(5 bodů)*

Úloha I . P ... *Edudant a Francimor*

Dva světaznalí cestovatelé, jeden tlustý a jeden hubený, se cestou v letadle dohadují o tom, kdo z nich by déle přežil v extrémních podmínkách daleko od civilizace. Rozsoudíte je, kdo vydrží déle ve velkém horku (50 °C), v mrazu (−1 °C), po ztroskotání lodi uprostřed Středozemního moře, v hurikánu nebo při silném sněžení? A jak by to mohlo dopadnout, kdyby je zastihlo mohutné zemětřesení v centru velkoměsta? Kromě jejich tělesné stavby mezi nimi nejsou žádné rozdíly, oba jsou stejně oblečení a nic dalšího s sebou nemají (žádné jídlo, vodu, sirky ani jiné vybavení). Snažte se být nápadití a všímejte si i maličkostí. *(5 bodů)*

Úloha I . E ... *vrh koulí*

Všichni dobře víme, že ve vakuu doletí všechny předměty vržené stejnou rychlostí a pod stejným úhlem stejně daleko. Co se ale stane, když je takto házeme za normálního tlaku? Změřte, jak závisí dolet tělesa konkrétního tvaru na jeho hmotnosti. Jak tato závislost vypadá teoreticky? Můžete ji spočítat, nebo nasimulovat na počítači např. v Excelu. *(8 bodů)*



Seriál na pokračování

FYKOSí seriál nezemřel! Protože jdeme s dobou, rozhodli jsme se větší část jeho obsahu přesunout na náš YouTube kanál `http://www.youtube.com/fykosak`. Písemná forma podpůrně zůstává, abychom vám ulehčili utřídění si znalostí.

Kapitola 0: Úvod

Komplexní čísla neskutečně zjednoduší problémy, které mají vnitřní stupeň volnosti (například fázi). Jejich výčet zahrnuje rovinné problémy v mechanice a elektromagnetismu, polarizaci v optice, stacionární stavy elektrických obvodů, spřažené oscilátory ve fyzice pevných látek, krystalografii. Kdekoliv se vyskytuje vlnění a kmitání, tam si zavedením komplexních čísel ušetříme práci, takže jiný přístup se dnes prakticky nepoužívá: Z obecného popisu vlnění vychází i popis kvantové mechaniky, které se věnoval seriál 20. ročníku. Bez komplexních čísel nelze řešit některé zvláštní problémy, třeba Onsagerovo řešení Isingova modelu ve statistické fyzice.

Pokud vám přišel tento výčet příliš abstraktní, zde jsou tři konkrétní příklady z FYKOSu: úloha Smrtící kolotoč (23.IV.3), seriál o optice (23.IV), elektrický obvod (16.I.S).

Dosud jsme pod číslem rozuměli dvojici znaménka a velikosti. Nově pojem znaménka rozšíříme na fázi, takže číslem nově rozumíme dvojici fáze, velikost.[1]

Komplexní čísla mají některé vlastnosti vektorů v rovině (sčítání). Liší se ale tím, že násobením dvou komplexních čísel dostaneme zase komplexní číslo, zatímco vektory v rovině umíme násobit skalárně nebo vektorově, ale vektor v rovině nevyjde nikdy. Dále uvidíme, že komplexní čísla jsou příjemnější v tom, že libovolný polynom $P_n(x)$ stupně n můžeme rozložit na součin lineárních polynomů. (Zatím to pro $P_2 = x^2 \pm 4$ umíme jen se záporným znaménkem, kdy $P_2(x) = (x+2)(x-2)$.) Obecněji lze říci, že kde metoda záležela na znaménku, bude se s komplexními čísly postupovat jednotně.

Cardanovy vzorce a Bombelliho rovnice

V roce 1545 vyšel spis *Ars Magna*, kde Geralamo Cardano zkoumal kubickou rovnici $P_3(x) = 0$ a odhalil[2] její řešení:

$$P_3(x) = x^3 - 3px - 2q\,,$$
$$x_1 = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}\,. \tag{1}$$

O několik let později uvažoval Bombelli tuto rovnici pro $p = 5$, $q = 2$. Lze ověřit dosazením, že rovnici $P_3(x) = 0$ řeší $x = 4$. Ve formálním zápise řešení (1) vystupují odmocniny ze

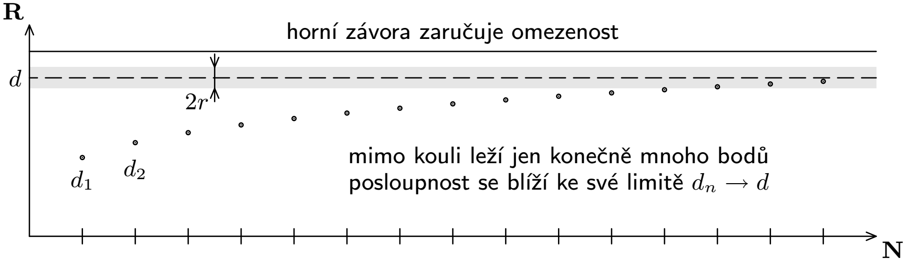
1) Podobně se dá postupovat i u matic: Každou nedegenerovanou matici $\mathbf{C}$ můžeme rozložit na součin $\mathbf{OP}$ positivně definitní matice $\mathbf{P}$ a ortogonální matice $\mathbf{O}$, pokud prostě položíme $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathbf{T}}}$ a $\mathbf{O}$ aby to vyšlo. Pak nás existence komplexních čísel nepřekvapí, protože ta se chovají stejně jako matice 2×2 tvaru $a\mathbf{1} + \mathbf{C}$, kde a je reálné číslo a $\mathbf{C}$ antisymetrická matice.

2) Zkuste si to sami: Dosaďte za $x = (t + at^{-1})$, roznásobte a zvolte a tak, aby vám vyšla bikvadratická rovnice.

záporných čísel, jako to známe z kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, ale řešení $x = 4$ je jistě reálné! Tento problém lze vyřešit právě zavedením komplexních čísel. Cardano se k podobným úvahám vyjádřil, že jsou „tak jemné, jako zbytečné“; asi proto, že mu scházela jasná geometrická představa. Před ní však několik přípravných poznámek.

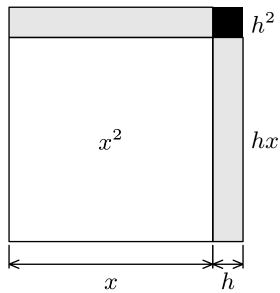
Představa blízkosti

Teď si osvojíme důležitý koncept blízkosti, zde si vystačíme s jednoduchou definicí. Slova *skoro všechny* body posloupnosti pro nás budou znamenat všechny body až možná na nějaký konečný počet bodů. Koule o poloměru r a středu S pro nás bude znamenat všechny body, které mají od středu vzdálenost menší než r. Potom řekneme, že se posloupnost blíží bodu S (limitě), pokud libovolná koule s tímto středem obsahuje skoro všechny body posloupnosti. Tuto skutečnost zapisujeme $d_n \to d$ pro $n \to \infty$ (obr. 1).



Obr. 1. Rostoucí omezená posloupnost má limitu

Reálná čísla $\mathbf{R}$ se odlišují od zlomků $\mathbf{Q}$ tím, že omezená a rostoucí posloupnost má automaticky limitu (věta o omezené a rostoucí posloupnosti). U této posloupnosti pak nemusíme ukazovat, že v libovolné kouli leží skoro všechny body; stačí pokud v ní leží aspoň jeden. U zlomků limita rostoucí a omezené posloupnosti existovat nemusí; stačí za posloupnost prohlásit desetinné rozvoje iracionálního čísla d do prvních n cifer. Tato posloupnost je rostoucí (přidáváme vždy další desetinné místo) a omezená právě číslem $d \notin \mathbf{Q}$, které je zároveň její limitou (tak se dají reálná čísla definovat) v reálných číslech. Posloupnost ale nemůže mít druhou, různou limitu, protože pak bychom sestrojili kolem obou limit koule, které se neprotínají. Skoro všechny body by musely ležet zároveň v jedné i ve druhé kouli. Protože ale koule mají prázdný průnik, není to možné.



Obr. 2. Roztažení plechu

Značení s malým o

Proč zavádět značení s malým o? Ve fyzice nás většinou zajímá, jak se chovají jisté veličiny v malém okolí daného bodu (mluvili jsme též o kouli se středem v daném bodě). Ku příkladu nás může zajímat, jak se mění obsah čtverce, pokud o málo změníme velikost jeho strany.

Ukažme si nejdříve na příkladu změny délky, obsahu a objemu, jak používat malé o. Mějme úsečku, čtverec resp. krychli se stranou délky x, kterou zvětšíme o h a budeme uvažovat, že h je malé vůči x (obr. 2). Pro jejich objemy platí

$$L = x + h\,,$$

$$S = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 = x^2 + 2xh + o(h) \ ,$$
$$V = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3 = x^3 + 3x^2h + o(h) \ . \tag{2}$$

Členy, ve kterých objem tělesa závisel na vyšší mocnině h než druhé, jsme zahrnuli do symbolu $o(h)$. Do jakého řádu budeme zanedbávat zkoumané veličiny závisí na samozřejmě na úloze, kterou řešíme; např. zjišťujeme-li potenciální energii matematického kyvadla, zajímá nás přinejmenším druhý řád; další nás zajímají při opravách na velké výchylky.

Nyní již přikročme k řádné definici symbolu malé o. Řekneme-li, že pro nějakou veličinu platí $f(h) = o(h^n)$, znamená to

$$f(h) = o(h^n) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(h)}{h^n} \to 0 \qquad \text{pro} \qquad h \to 0\,. \tag{3}$$

Aplikujeme tuto definici na vztahy uvedené výše pro objemy rozličných těles. Pro úsečku jsme uvažovali $0 = o(h)$. Pro čtverec $h^2 = o(h)$, ale dle definice (3) je $h^2/h = h \to 0$ z předpokladu. Stejnou úvahu můžeme provést pro krychli. Zkuste si zopakovat podobné úvahy pro kruh a kouli.

Bernoulliho limita

Kolem roku 1683 si Jacob Bernoulli položil otázku, zda má pro pevné $x \in \langle 0, 1)$ posloupnost

$$B_N = \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N = 1 + x + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{x^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{2}{N}\right)\frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^N}{N^N}$$

limitu (rovnost ověřte roznásobením). Posloupnost je pro x z uvažovaného intervalu součet N kladných členů. Proto je ale určitě rostoucí, protože když zvětšujeme N, zvětšují se i všechny členy typu $(1 - k/N)$ a navíc vždy jeden kladný člen přibude. Je také omezená, konkrétně číslem

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \\ &\le 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Poslední rovnost se nazývá součet geometrické řady, a lze ji ověřit vynásobením obou stran $1 - x$ (pro $x \ge 1$ tato úvaha neplatí!). Podle věty o omezené a rostoucí posloupnosti má B_N limitu.[3] Protože B_N je rostoucí, není těžké si rozmyslet, že se blíží e^x. Bernoulliho limitou definujeme *exponenciálu*[4]

$$\mathrm{e}^x = \left(1 + \frac{x}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N, \quad N \to \infty\,.$$

Jistě lze funkci roznásobit

$$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y = \left(1 + \frac{x+y}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N = \mathrm{e}^{x+y}\,,$$

čímž jsme ověřili, že exponenciálu lze definovat i pro x záporná, položíme-li $y = -x$.

---

3) Zkuste si přepisem $N = N'k$ ve vztahu pro B_N zdůvodnit, že totéž platí i pro $x \ge 1$. Naše zavedení Bernoulliho limitou funguje i pro komplexní čísla, ale důkazy jsou složitější.

4) Exponenciálu lze zavést na libovolném lineárním prostoru s představou velikosti; obvykle se používá výraz (4). Nabízí se aplikace na matice nebo na operátor derivace, který odpovídá posunutí (stačí dosadit a vzorec se formálně shoduje s Taylorovým).

Kombinace malého o a exponenciály

Ukážeme ještě důležitý aproximativní vztah, který je zobecněním vztahů pro objemy těles (3). Platí

$$(1+x)^n = 1 + nx + o\,(x)\ , \quad x \to 0\,.$$

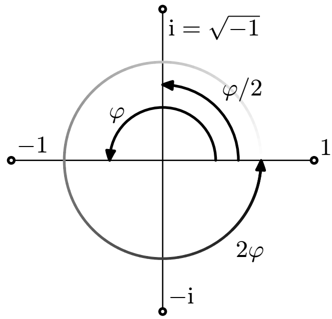
Pro n přirozené to je přímý důsledek binomické věty, viz (2), pro n záporné si pomůžeme rozvojem výrazu do geometrické řady

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^n = (1 - x + o(x))^n = 1 - nx + o(x)\,.$$

Zajímavé je, že tento vztah platí pro obecné, tedy i komplexní n. Chcete-li si jej ověřit, použijte identitu $z = \exp\,(\ln z)$ a $\exp\,(y) = 1 + y + o\,(y)$ pro $y \to 0$.

Výše uvedeného aproximativního vztahu můžeme například využít při výpočtu periody kmitání adiabatického oscilátoru, kde platí $p \sim F \sim x \sim V$ a $pV^{\varkappa} = \text{konst.}$

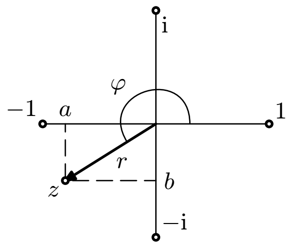
Uvážíme-li malou výchylku a použijeme-li výše uvedený aproximativní vzorec, dostaneme pohybovou rovnici, která tvarem odpovídá rovnici harmonického oscilátoru. Proto můžeme již jednoduše vypočítat periodu.



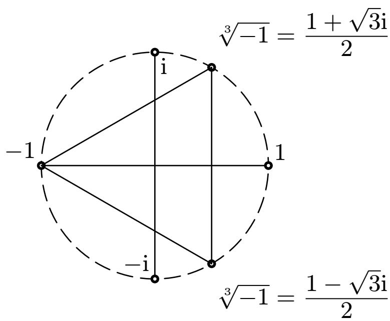
Obr. 3. Umocňování a dmocňování -1

Kapitola 1: Geometrická představa

Pro motivaci uvažujme čísla -1 a $+1$: Zkoumejme jejich druhé mocniny. Druhá mocnina přenese obě tato čísla do obrazu, který je $+1$ (obr. 3). Ze základních geometrických shodných zobrazení známe následující: středová souměrnost, zrcadlení (osová souměrnost) a otočení. Pokud trváme na tom, že umocňování čísel, jejichž absolutní hodnota se rovná jedné (tzv. komplexních jednotek), koresponduje s nějakým shodným geometrickým zobrazením,[5] musí to být otočení, které jediné podmínkám na obrazy ± 1 vyhovuje. Konkrétně u -1 o přímý úhel a u $+1$ o žádný úhel.



Obr. 4. Různá vyjádření čísla $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = e^{\mathrm{i}\varphi} = a + b\mathrm{i}$



Obr. 5. Třetí odmocnina z -1

Zbývá k tomu definovat inverzní operaci: Protože úhel se vždy zdvojnásobil, odpovídá odmocňování půlení úhlu. Definujeme i jako takové číslo, pro něž $\mathrm{i}^2 = -1$. Nesmíme se divit, že

[5] Libovolné shodné zobrazení lze složit z otočení a zrcadlení.

jsme definovali něco, co nespadá pod reálná čísla; vždyť víme, že žádné reálné číslo nemá druhou mocninu zápornou! Naším argumentem o násobení nebo dělení úhlu bychom mohli postupovat pro libovolnou mocninu a zavádět další imaginární jednotky. Ty už ale lze vyjádřit pomocí námi zvoleného i. Například ověřte $\sqrt[3]{-8} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Pro nově definovaná komplexní čísla, která jsou tvaru $a + b\mathrm{i}$ platí stejná algebraická pravidla jako pro reálná čísla a představujeme si je jako body v komplexní rovině (obr. 4).

Každé komplexní číslo lze dostat jako obraz jednotky při geometrickém zobrazení otočení a roztažení roviny. Tento poznatek použijeme ve druhém díle.

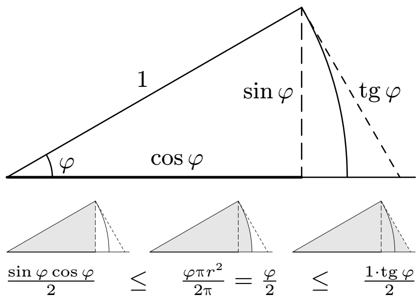
Goniometrické funkce

Funkce sin, cos a tg zavedeme jako orientované vzdálenosti podle náčrtku jednotkové kružnice (obr. 6). Z nerovnosti obsahů trojúhelníků plyne

$$\tfrac{1}{2}\cos\varphi \cdot \sin\varphi \leq \tfrac{1}{2}\varphi \leq \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\,.$$

Úpravou a přechodem $\varphi \to 0$ zjistíme, že výraz $\sin\varphi/\varphi$ je sevřen jedničkami a sám se tedy blíží jedničce. Z toho vyplývá přibližná rovnost

$$\sin\varphi = \varphi + o(\varphi)\,.$$



Obr. 6. Jednotková kružnice s goniometrickými funkcemi a nerovnost mezi obsahy

Nyní přijde na řadu součtový vzorec pro poloviční úhel. Jeho aplikací obdžíme rovnost

$$\frac{\cos\varphi - 1}{\varphi^2} = \frac{2\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}{4\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} + o(1)\,.$$

V předchozích limitách pro sin a cos klidně pišme v malém o mocninu o řád vyšší, protože vyjadřovaná funkce je lichá, resp. sudá.

Násobení komplexních čísel

Každé komplexní číslo $z = a + b\mathrm{i}$ lze přepsat do *goniometrického tvaru*

$$a + b\mathrm{i} \equiv \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \mathrm{i}\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,,$$

kde jsme zavedli velikost čísla $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ a orientovaný úhel $\varphi = \operatorname{arctg}(b/a) = \arg z$, které mají názornou geometrickou interpretaci v podobě polárních souřadnic místo původních kartézských (obr. 4).

Vynásobíme teď dvě komplexní jednotky $\arg(z_1) = \varphi_1$ a $\arg(z_2) = \varphi_2$ (pro obecná čísla by přibyl jen součin velikostí)

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\,, \end{aligned}$$

kde jsme použili známé součtové vzorce, které jsou přímočarým důsledkem zavedení z náčrtku jednotkové kružnice. Náš postup je konzistentní s původní geometrickou představou v tom smyslu, že pro libovolné číslo n dostáváme z násobení dvou komplexních čísel *Moivrovu větu*

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi\,.$$

Eulerův vzorec

Moivrovu větu, poznatky o goniometrických funkcích a definici exponenciály zkombinujeme do *Eulerova vzorce*

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{N}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{N}\right)\right)^N = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\varphi}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)^N = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,, \quad N \to \infty\,.$$

Přičtení nebo odečtení komplexně sdruženého výrazu vyjeví komplexní vyjádření kosinu a sinu

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\,, \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\,.$$

Úloha I . S ... *komplexní rychlokvaška*

a) Uvědomte si, že n-té odmocniny z komplexní jednotky leží na n-úhelníku, a dořešte Bombelliho rovnici $x^3 - 15x - 4 = 0$. Nápovědu naleznete v textu seriálu.
b) Vyjádřete goniometrické součtové vzorce pomocí komplexních exponenciál.
c) Ukažte oprávněnost zanedbání vyšších mocnin v odvození Bernoulliho limity, tj. že do závorky můžeme přidat člen $o(1/N)$.
d) Použijte značení s malým o, abyste vyřešili úlohu, s jakou frekvencí kmitají body hmotnosti m po ose x v Yukawově potenciálu $k\mathrm{e}^{x/\lambda}/x$ kolem rovnovážné polohy.
e) Dokažte, že Čebyševovy polynomy $\cos(n \arccos x)$ jsou skutečně polynomy. Návod: Uvažujte komplexní jednotku z, která má reálnou část x. Pak se vyšetřovaný výraz rovná reálné části z^n, což musí být polynom, protože odmocniny a imaginární jednotky drží pospolu.

(6 bodů)

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://www.fykos.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.