23. ročník, úloha V . S ... světlo v látce *!!! chybí statistiky !!!*

a) *Index lomu v nelineárním materiálu závisí na intenzitě světla I jako $n = n_1 + n_2 I$, kde n_1 a n_2 jsou konstanty větší než nula. Zamyslete se, co se bude dít s paprskem světla dané šířky, který tímto materiálem prochází. Předpokládejte, že intenzita paprsku klesá se vzdáleností od jeho středu. (Stačí kvalitativní úvaha, odvážnější se mohou pokusit vybudovat analytický model.)*

b) *Deska tloušťky a sestává z $2N$ stejně širokých rovnoběných destiček ze dvou materiálů o indexech lomu n_1 a n_2 poskládaných „na střídačku“. Světelná vlna dopadá kolmo na čelní destičku. Jaký bude efektivní index lomu této smíchané desky pro $N \to \infty$? Napadá vás proč? (Nápověda: pro libovolnou matici A platí*

$$\lim_{N\to\infty} \left(I + \frac{A}{N}\right)^N = \exp(A)\,,$$

kde I je jednotková matice a $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots .)$

Sebesoutřeďující paprsek

Na kvalitativní předpověď nám stačí použít Snellův zákon lomu. Intenzita paprsku se zvětšuje směrem do jeho středu, a tím pádem bude i index lomu vzrůstat při pohybu do středu paprsku. Snellův zákon nám říká, že při přechodu do oblasti s vyšším indexem lomu se světlo láme ke kolmici. Zhruba tedy můžeme předpokládat, že okrajové části paprsku se budou lámat víc a víc do středu a paprsek se bude postupně zužovat. Tím ale bude jeho energie koncentrovaná blíž ke středu, kde tak poroste intenzita, a následně i index lomu, takže soustřeďující efekt se bude sám od sebe zesilovat, dokud nebude paprsek příliš úzký, aby platila použitá aproximace. To může nastat například tehdy, kdy ohromná intenzita světla změní kvalitativní chování materiálu, kterým prochází (roztaví ho, ionizuje, atp.) nebo tehdy, kdy šířka paprsku dosáhne řádově vlnové délky světla a geometrické přiblížení přestane platit.

S tím souvisí další problém našeho modelu – vezmeme-li v úvahu vlnové vlastnosti světla, žádný paprsek světla ve vakuu nebo lineárním materiálu nemůže mít všude stejnou šířku, ale musí se vlivem difrakce rozšiřovat. Tento fakt lze nahlédnout nejlépe z principu neurčitosti aplikovného na jednotlivé fotony. Předpokládejme, že připravíme paprsek světla vlnové délky λ o šířce D, což můžeme udělat například tak, že necháme projít rovinou vlnu štěrbinou šířky D. To ale znamená, že při průchodu štěrbinou známe polohu fotonů ve směru kolmém na pohyb světla s přesností $\Delta x_\perp = D$. Kvantově mechanický princip neurčitosti tak ale zaručuje, že hybnost fotonů v kolmém směru můžeme znát nanejvýš s přesností (řádově) $\Delta p_\perp = \hbar/D$. Paprsek se tedy bude vlivem neurčitosti kolmé složky rychlosti rozšiřovat pod úhlem

$$\vartheta = \frac{p_\perp}{p_\parallel} = \frac{\hbar/D}{2\pi\hbar/\lambda} \approx \frac{\lambda}{D}\,. \qquad (1)$$

V materiálu tedy proti sobě působí dva jevy – rozšiřování paprsku vlivem difrakce, a zužování vlivem závisloti indexu lomu na intenzitě. Pokusme se odhadnout, kdy budou tyto dva jevy v rovnováze. Máme-li paprsek konstantní intenzity I a tloušťky D, index lomu se na hranici paprsku skokově mění z $n_1 + In_2$ na n_1. Bude-li intenzita dostatečně velká, hodnota kritického úhlu[1] na rozhraní překročí rozptylový úhel a k žádnému rozptylu paprsku pak nedojde. Pro

[1]) Kritický úhel je minimální úhel, měřený od rozhraní, pod jakým může světlo dopadat, aby ještě nedošlo k úplnému odrazu.

kritický úhel ϑ platí podle Snellova zákona

$$(n_1 + I_c n_2) \cos\vartheta = n_1 \,.$$

Pro rozumně tlusté paprsky viditelného světla máme $\lambda \ll D$, tedy $\vartheta \ll 1$, a můžeme použít přibližný vzorec pro kosinus malých úhlů $\cos\vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$. Dosadíme-li za ϑ z rovnice (1), dostaneme po zanedbání členů vyšších řádů a numerických konstant kritickou intenzitu

$$I_\mathrm{c} \approx \frac{n_1 \lambda^2}{n_2 D^2} \,. \tag{2}$$

Tento vztah nám říká, jak intenzivní paprsek dané vlnové délky musíme připravit, aby sám sebe udržel v oblasti šířky D. Většina běžně dostupných materiálů (voda, sklo, polymery) skutečně vykazuje pro dostačně silné světlo lineární závislost indexu lomu na intenzitě, a popsaný jev se v praxi často využívá při práci s laserovými paprsky.

Podívejme se nyní, jestli se nám podaří úlohu vyřešit přesně – za použití vlnového modelu světla. Nebudeme vás napínat, a prozradíme, že problém má elegantní analytické řešení. Najdeme upravenou vlnovou rovnici pro elektrické pole $\boldsymbol{E}$ a ukážeme, že má řešení ve tvaru postupujícího paprsku s charakteristickým profilem intenzity.

Předpokládejme, že vektor polarizace $\boldsymbol{P}$ materiálu závisí na elektrickém poli podle vztahu

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 (\chi_0 + \chi_2 |\boldsymbol{E}|^2 \boldsymbol{E}) \,,$$

kde χ_0 a χ_2 jsou konstanty charakteristické pro daný materiál. Ke vztahu z pátého dílu seriálu jsme tedy přidali člen úměrný $|\boldsymbol{E}|^2$, a tedy intenzitě světla. Označíme-li $I = |\boldsymbol{E}|^2$, pro index lomu bude platit (podle téhož dílu)

$$n = \sqrt{1 + \chi_0 + \chi_2 |\boldsymbol{E}|^2} \approx n_1 + n_2 I \,,$$

přičemž použitá aproximace platí pro $\chi_2 |\boldsymbol{E}|^2 \ll 1$, což je bezpečně pravda pro běžné materiály a intenzity světla, které jsou schopné vytvořit pozemské laboratoře. Hodnoty n_1 a n_2 pak s χ_0 a χ_2 souvisí vztahy

$$n_1 = \sqrt{1 + \chi_0} \,, \qquad n_2 = \frac{\chi_2}{2\sqrt{1 + \chi_0}} \,.$$

Hledejme nyní upravenou vlnovou rovnici pro elektrické pole. Ampérův zákon v našem materiálu má tvar

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(n_1^2 \boldsymbol{E} + \chi_2 |\boldsymbol{E}|^2 \boldsymbol{E} \right) \,.$$

Vezměme nyní jeho časovou derivaci a použijme Faradayův zákon (ten je stejný jako ve vakuu)

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(n_1^2 \boldsymbol{E} + \chi_2 |\boldsymbol{E}|^2 \boldsymbol{E} \right) = 0 \,,$$

což můžeme přepsat pomocí vektorového zaklínadla „*rot rot = grad div − laplace*“ jako

$$\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(n_1^2 \boldsymbol{E} + \chi_2 |\boldsymbol{E}|^2 \boldsymbol{E} \right) = 0 \,. \tag{3}$$

Nebýt prvního členu s divergencí elektrického pole, a kvadratického členu v druhé časové derivaci, měli bychom vlnovou rovnici pro elektrické pole. Hledáme řešení, které má tvar paprsku světla s vlnovým číslem k_z a frekvencí ω, šířícího se ve směru z, jehož intenzita (amplituda) ale závisí na x a y.

$$\boldsymbol{E}(t,\,x,\,y,\,z) = \boldsymbol{E}_0(x,\,y)e^{i(k_z z-\omega t)}\,,$$

kde $\boldsymbol{E}_0(x,\,y)$ je velké jen v určitém okolí počátku $x, y = 0$, a jde k nule pro $x, y \to \pm\infty$. Takové řešení odpovídá rovnovážnému paprsku, který se při postupu materiálem nerozbíhá, ani nezužuje. Pro jednoduchost se omezíme na situaci, kdy[2] $\boldsymbol{E}_0(x,\,y) = E(y)\hat{\boldsymbol{x}}$, přičemž $E(y) \to 0$ pro $y \to \pm\infty$ a $E'(0) = 0$, protože intenzita je maximální na ose pohybu. Máme tedy paprsek polarizovný ve směru x, jehož intenzita závisý jen na směru y. Člen s divergencí v rovnici (3) je pak rovný nule, a po dosazení se z x-ové složky této rovnice stane následující diferenciální rovnice pro $E(y)$.

$$-E''(y) + \left(k_z^2 - \frac{n_1^2\omega^2}{c^2}\right)E(y) + \frac{\chi_2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{E}_x\right) = 0\,.$$

Nelineární materiály obvykle nereagují na okamžitou, rychle oscilující intenzitu elektrického pole, ale spíš na jeho střední hodnotu. Budeme tedy předstírat, že jediný na čase závislý člen v posledním členu předchozí rovnice je $\boldsymbol{E}_x$, a okamžitou intenzitu $|\boldsymbol{E}|^2$ nahradíme její střední hodnotou[3] $E^2(y)/2$. Druhá časová derivace je tedy ekvivalentní násobení faktorem $-\omega^2$, a dostáváme obyčejnou diferenciální rovnici

$$E''(y) - \Gamma^2 E(y) + \frac{\chi_2}{2}k^2E^3(y) = 0\,,$$

kde $k = \omega/c$ a $\Gamma^2 = k_z^2 - (n_1 k)^2$, spolu s okrajovými podmínkami $E(y) \to 0$ pro $y \to \pm\infty$ a $E'(0) = 0$. Tato ovnice je ekvivalentní druhému Newtonovu zákonu pro pohyb částice v dvoujámovém kvartickém potenciálu tvaru

$$-\frac{1}{2}\Gamma^2E^2 + \frac{\chi_2}{8}k^2E^4\,.$$

Můžete si promyslet, jak nám tato analogie napoví, že pro $\Gamma^2 > 0$ existuje právě jedno řešení s danými okrajovými podmínkami (a že pro $\Gamma^2 < 0$ žádné takové neexistuje). Samotné řešení pak můžeme najít přes analogii zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}E'^2 - \frac{1}{2}\Gamma^2E^2 + \frac{\chi_2}{8}k^2E^4 = 0\,,$$

a separací proměnných dostaneme

$$E(y) = \frac{2\Gamma}{\sqrt{\chi_2}k}\,\frac{1}{\cosh(\Gamma y)}\,.$$

Tvar této funkce je znázorněn na obrázku 1.

Jak bychom očekávali, výsledné elektrické pole má maximum pro $y = 0$ šířky řádově $D = 2/\Gamma$ a je zanedbatelné pro větší y, neboť funkce cosh stoupá exponenciálně, neboli zatraceně rychle. S naším výsledkem nyní můžeme přesně vypočítat kritickou intenzitu světla

$$I_c = E^2(0) = \frac{4\Gamma^2}{\chi_2 k^2} = \frac{4\lambda^2}{\pi^2\chi_2 D^2}\,,$$

[2] Symbol $\hat{\boldsymbol{x}}$ značí jednotkový vektor ve směru x.

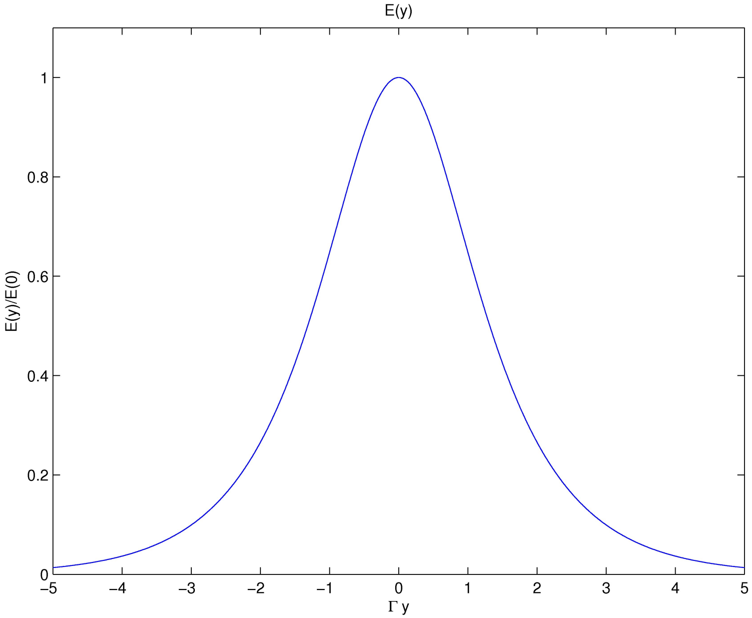
[3] Střední hodnota $\cos^2$ je 1/2.

a dosazením $\chi_2 = 2n_1n_2$ získáme konečně

$$I_\mathrm{c} = \frac{2}{\pi^2}\frac{\lambda^2}{n_1n_2D^2}\,. \tag{4}$$

Ale téměř stejný výsledek (2) jsme dostali z jednoduchého odhadu pomocí Snellova zákona! Kvadratická závislost na λ/D a úměrnost $1/n_2$ jsou stejné, a jediný rozdíl činí n_1 ve jmenovateli, namísto v čitateli. Tuto nesrovnalost můžeme vysvětlit tím, že jsme použili nesprávný předpis pro dopřednou hybnost světla v materiálu. Šíří-li se totiž světlo materiálem, rozkmitává nabité částice, a celková hybnost pak sestává z elektromagnetické hybnosti světla, a mechanické hybnosti částic. Můžete si ověřit, že když budeme psát[4] $p_{||} = n_1\hbar k$, vzorce (2) a (4) získají stejný tvar, až na číselnou konstantu.

Vidíme, že jednoduchý řádový odhad nám může hodně napovědět a ušetřit spoustu práce s přesným řešením rovnic.



Obr. 1. Velikost elektrického pole v rovnovážném paprsku v závislosti na vzdálenosti od středu.

Limita sendviče

Tento příklad ukazuje, jak užitečná může být metoda transferových matic popsaná v seriálu. Označíme-li stejně jako v seriálu amplitudy dopadající, odražené a prošlé vlny po řadě E_d, E_o

[4] Vysvětlení, proč je tento vztah ten pravý, není vůbec jednoduché. Fyzikům trvalo celou první polovinu dvacátého století, než se na něm shodli. Rozbor tohoto problému můžete najít v knížce *Rudolf Peierls: More Surprises in Theoretical Physics.*

a E_p, můžeme vztah mezi nimi vyjádřit maticově

$$\begin{pmatrix} E_p \\ 0 \end{pmatrix} = T^{-1}(A_2A_1)^N T \begin{pmatrix} E_d \\ E_o \end{pmatrix} , \tag{5}$$

kde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}k & -\mathrm{i}k \end{pmatrix} , \qquad A_{1,2} = \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{n_{1,2}ka}{2N}\right) & \dfrac{1}{n_{1,2}k}\sin\left(\dfrac{n_{1,2}ka}{2N}\right) \\ -n_{1,2}k\sin\left(\dfrac{n_{1,2}ka}{2N}\right) & \cos\left(\dfrac{n_{1,2}ka}{2N}\right) \end{pmatrix} .$$

$A_{1,2}$ jsou transferové matice odpovídající elementárním vrstvám šířky $a/2N$ a indexu lomu $n_{1,2}$. Nás zajímá limita rovnice (5) pro $N \to \infty$. V tom případě jsou argumenty goniometrických funkcí v $A_{1,2}$ mnohem menší než 1, a můžeme tak vzít prvních pár členů Taylorova rozvoje

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & a/2N \\ -(n_{1,2}k)^2 a/2N & 1 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

kde byly zanedbány členy úměrné $1/N^2$ a vyšších řádů. Součin A_2A_1 pak nabývá tvaru[5]

$$A_2A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a/N \\ -(n_1^2 + n_2^2)ak^2/2N & 1 \end{pmatrix} .$$

Označme pro přehlednost $n^2 = (n_1^2 + n_2^2)/2$. Výraz $(A_2A_1)^N$ z rovnice (5) se pak rovná

$$(A_2A_1)^N = \left(I + \frac{A}{N}\right)^N ,$$

kde I je matice identity a

$$A = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(nk)^2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nápověda nám radí, že pro matice platí stejný limitní vztah, jako pro normální čísla (jedná se vlastně o jednu z definic exponenciály), tedy že

$$\lim_{N\to\infty} \left(I + \frac{A}{N}\right)^N = \exp(A) .$$

Na úplné vyřešení naší úlohy tedy stačí spočítat exponenciálu matice A. To můžeme udělat buď za pomocí vlastních čísel a vektorů, a využít toho, že vlastní čísla exponenciály matice jsou exponenciálami vlastních čísel, anebo přímo spočítat obecnou mocninu A^j, použít alternativní definici exponenciály $\exp(A) = I + A + A^2/2! + A^3/3! + \ldots$ a pak si vzpomenout na Taylorův rozvoj sinu a kosinu. Oba postupy vedou k výsledku

$$\lim_{N\to\infty} (A_2A_1) = \exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(nka) & \dfrac{1}{nk}\sin(nka) \\ -nk\sin(nka) & \cos(nka) \end{pmatrix} .$$

[5] Stále zanedbáváme kvadratické a vyšší členy $1/N$. Ačkoli ještě není úplně jasné proč, přesně takovou přesnost potřebujeme.

Nalistujete-li nyní poslední stránku pátého dílu seriálu, nebo se podíváte na rovnost (6), zjistíte, že náš výsledek přesně odpovídá tranferové matici desky tloušťky a vyrobené z materiálu o indexu lomu n. V limitě $N \to \infty$ bude tedy chování naší složené desky vůči kolmo dopadající rovinné vlně úplně stejné jako chování homogenní desky stejné tloušťky a efektivního indexu lomu

$$n = \sqrt{\frac{n_1^2 + n_2^2}{2}}\,. \tag{7}$$

Efektivní index lomu tedy, trochu neočekávaně, není aritmetický průměr n_1 a n_2, ale jakýsi kvadratický průměr. Za intuitivní fyzikální vysvětlení tohoto překvapivého výsledku můžeme vzít fakt, že pracujeme-li se světlem jako s vlnou, je přirozenější popisovat materiál nikoli jeho indexem lomu, ale jeho relativní permitivitou ε. Index lomu je s ní ve vztahu $n^2 = \varepsilon$. Efektivní permitivita sendviče je tedy aritmetickým průměrem permitivit obou materiálů

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\,,$$

což je už méně překvapivé. Zajímavá otázka je, jestli výsledný efektivní index lomu složeného materiálu závisí na způsobu, jakým jsou oba materiály poskládané, anebo jen na průměrném zastoupení obou složek. Dostaneme jiný výsledek, když destičky poskládáme rovnoběžně s paprskem světla, namísto kolmo? Anebo když vezmeme trojrozměrné šachovnicové rozložení, ve kterém se pravidelně střídají krychličky dvou materiálů?

Poznámky k došlým řešením

Většina z došlých řešení (kterých bylo poskrovnu) správně kvalitativně předpověděla chování paprsku v nelineárním materiálu. Přestože se nikdo nepokusil o analytický model, ukázali jsme ho zde jako příklad zajímavé a komplikované úlohy, která jde vyřešit víceméně přesně.

Petr Ryšavý použil pro řešení úlohy se sendvičovým materiálem následující úvahu: světlo urazí právě polovinu dráhy v každém z materiálů, a jeho efektivní (průměrná) rychlost by tedy měla být

$$v_{\mathrm{ef}} = \frac{a}{t} = \frac{a}{t_1 + t_2} = \frac{2c}{n_1 + n_2}\,,$$

z čehož dostaneme index lomu jako aritmetický průměr $n = (n_1 + n_2)/2$, v rozporu s předchozím výsledkem (7). Problém je v tom, že pro složený materiál, obzvlášť pak v limitě nekonečně tenkých vrstev, pojem fázové rychlosti světla přestává dávat smysl, protože v každé destičce máme dvě vlny, které se pohybují opačnými směry, a výsledná efektivní vlna, kterou pozorujeme, může mít dost nečekané vlastnosti. Protože nás ale vlnový model nemůže klamat, musíme přijmout fakt, že když na naši desku budeme kolmo svítit světlem dané vlnové délky, bude se chovat přesně jako materiál s indexem lomu daným vztahem (7). Jediný *Jakub Vošmera* v této úloze použil metodu transferových matic, za což mu patří náš obdiv, ačkoli ji nedotáhl úplně do konce.

Dalimil Mazáč
dalimil.mazac@gmail.com

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.