22. ročník, úloha V . E ... *záchodová* *(8 bodů; průměr 5,67; řešilo 12 studentů)*

Změřte, jak vysoko vystříkne voda při upuštění různých těles na vodní hladinu. Studujte závislost na výšce, tvaru a hmotnosti. Jaká část energie se využije na rozvlnění hladiny?

Na oné místnosti zplodil Jakub Benda.

Zadání úlohy dává značnou volnost v tom co měřit. Následující úvahy jsou snahou o pochopení závislosti výšky „cáknutí“ na rozměru d, hmotnosti m a tvaru (popsaném koeficientem obtékání w) padajícího tělesa a výšky h bodu, ze kterého těleso uvolňujeme s nulovou počáteční rychlostí, nad hladinou vody.

Teorie

Zanedbáme-li odpor vzduchu, začne těleso volně padat s konstatním zrychlením g. Nad hladinou tak získá hybnost $p = mv = m\sqrt{2gh}$. Rozhodující pro výšku vystříknuvších kapek vody je jejich celková hybnost P, kterou získají prostřednictvím interakce s tělesem, a celkový objem V.

Hybnost P určuje úbytek hybnosti padajícího tělesa bezprostředně pod hladinou, řekněme do charakteristické hloubky dané rozměrem tělesa d. Úbytek hybnosti tělesa způsobuje odporová síla F_o vody (proti směru pohybu tělesa) – ta je (v nejsprostším modelu) pro laminární proudění přímo úměrná rychlosti a rozměru tělesa (Stokesův vztah), pro turbulentní proudění je úměrná kvadrátu rychlosti a kvadrátu rozměru (Newtonův vztah). Odporová síla přirozeně závisí i na tvaru tělesa. Charakter proudění určuje Reynoldsovo číslo (všimněte si, že je bezrozměrné) $\mathcal{R}e = vd\varrho/\eta$, kde v je rychlost tělesa, ϱ je hustota vody a η její dynamická viskozita. S roustoucím Reynoldsovým číslem přechází laminární proudění v turbulentní, mezní hodnota je asi 1000. Úbytek hybnosti v časovém intervalu Δt je $\Delta p = (F_\mathrm{n} - F_\mathrm{o}(w, dv))\Delta t$, kde F_n je rozdíl tíhové a vztlakové síly působící na těleso. Časový interval, během kterého dochází k vystřikování vody, si dovolíme jednoduše zvolit jako $\Delta t = d/v$.

Kromě odporové síly působí na těleso také povrchová síla F_p, která souvisí se změnou povrchové energie vody. Povrchová síla závisí přímo úměrně na povrchovém napětí a rozměru tělesa $F_\mathrm{p} \sim d$.

Objem vystříknuté vody bude srovnatelný s objemem samotného tělesa, předpokládejme tedy, že $V \sim d^3$.

Pokud by všechna voda vystříkla do stejné výšky H, bylo by to

$$H = \frac{1}{2g}\left(\frac{P}{\varrho V}\right)^2 .$$

Dosazením za P a V z výsledků předchozích úvah, dospějeme k tvaru hledané závislosti (nezapomínejme, že v tom nejhrubším přiblížení)

$$H \sim \left(\frac{F_\mathrm{o}(w, d\sqrt{h}) + F_\mathrm{p}(d) - F_\mathrm{n}(d)}{d^2\sqrt{h}}\right)^2 .$$

Za předpokladu dominantní odporové síly pro laminární proudění dostaneme

$$H \sim \frac{w^2}{d^2} + \Lambda_1 w - \Lambda_2 w d^2$$

a pro turbulentní

$$H \sim w^2 h + \Lambda_1 w d\sqrt{h} - \Lambda_2 w d^3\sqrt{h}\,, \tag{1}$$

kde Λ_1 je konstanta, která určuje vzájemný poměr velikosti povrchové a odporové síly (závisí tedy na povrchovém napětí), Λ_2 určuje poměr velikosti síly F_n a odporové síly (závisí tedy na rozdílu hustoty tělesa a hustoty vody).

Zabývejme se dále turbulentním případem, protože s ním se typicky v našich experimentech setkáme. Laminární případ by nastal pro velice malá tělesa (menší než milimetr) a malé rychlosti.

Z výsledku (1) plyne:

1) Výška H vystříknuté vody je přibližně lineárně úměrná výšce h, ze které těleso uvolňujeme.
2) Výška H roste s rostoucím koeficientem obtékání w.
3) Výška H klesá s roustoucí hmotností tělesa (při ostatním parametrech nezměněných), neb hmotnost udává rozdíl hustoty tělesa a vody, na kterém závisí koeficient Λ_2.
4) Závislost výšky H na d (při konstantní hustotě tělesa) je komplikovanější. „Povrchový“ člen s rozměrem d roste, „tíhový“ člen klesá s d^3. Musí tedy existovat jistý rozměr tělesa, při kterém převládne tíhová síla nad silou povrchovou a odporovou a výška vystříknutí začne klesat až na nulu. Povrchová síla dominuje (pokud vůbec) při malých rozměrech a způsobuje lineární nárůst výšky H.

Experiment a výsledky

Výsledky vás – našich řešitelů – potvrzují teoretické závěry v bodech 1) a 2). Tedy voda stříká více, házíme-li těleso z větší výšky či házíme-li krychli místo koule.

Experimentální důvtip vyžaduje ověření tvrzení 3). Například můžeme dutou nádobku postupně vyplňovat závažími.

V tomto „vzorovém řešení“ se pokusíme experimentálně doložit závěr v bodu 4). Zejména proto, že se o to žádný z řešitelů nepokusil. Zdůrazňujeme, že neočekáváme žádné exaktní závěry, proto příprava i provedení nedosahují takové preciznosti, jak by si řešení experimentální úlohy FYKOSu zasluhovalo.

Jako padající těleso použijeme gelových kuliček, které necháme nabobtnat ve vodě. Získáme tak sadu 30ti těles stejného tvaru, hustoty o málo větší než je hustota vody a rozměrů v rozmezí 1,5 mm –10 mm. Počáteční výška h bude během experimentu konstantní.

Výstřik vody po dopadu tělesa na hladinu je velice dynamický jev, a je proto dosti obtížné výšku vystříknutí H měřit. Nejefektivnější (nikoliv nejpřesnější) je využití digitální kamery, jejíž záznam průběhu experimentu posléze vyhodnotíme.

Pro každou velikost kuličky jsme provedli dvě měření, jejichž průměr shrnuje následující tabulka.

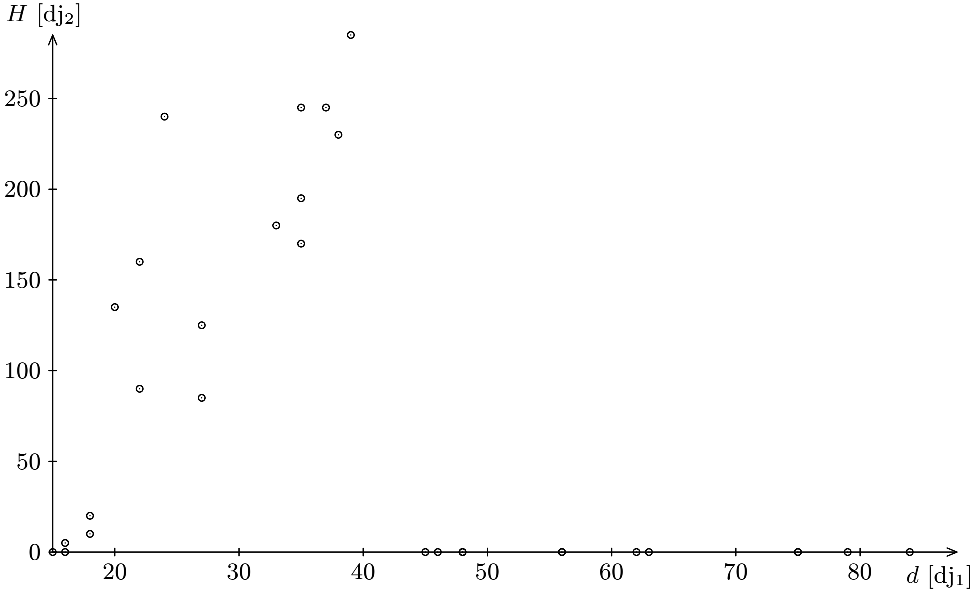
Tabulka výsledků měření

d [dj$_1$]	15	16	16	18	18	20	22	22	24	27	27	33	35	35	35
H [dj$_2$]	0	0	5	10	20	135	160	90	240	85	125	180	170	195	245

d [dj$_1$]	37	38	39	45	46	48	48	56	56	62	63	75	75	79	84
H [dj$_2$]	245	230	285	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Jednotky dj$_1$ a dj$_2$ jsou *délkové jednotky*, které jsme si ad hoc definovali při odečítání rozměrů kuliček a výšky vystříknutí z digitální fotografie, resp. digitálního záznamu. Jelikož jsme na exaktní výsledky rezignovali, nemá smysl měření kalibrovat a převádět naměřené hodnoty do jednotek SI.

Pro názornost je nezbytné zobrazit data i graficky (obr. 1). Pak je vidět, že naše výsledky



Obr. 1. Graf výsledků měření

nejsou nijak ohromující. Zpočátku se dá vypozorovat růstová tendence hodnot. Od rozměru kuličky asi $d = 40\,\mathrm{dj}_1$ však vystřikování vody po dopadu naprosto ustalo. Kulička tedy dosáhla takových rozměrů (tj. hmotnosti), že její zbrzdění odporovou a povrchovou silou se blíží nule a nedochází tak k žádnému vystříknutí. Kulička projde hladinou naprosto hladce, bez pozorovatelného zpomalení. Tento jev je v našem experimentu zesílen tím, že koeficient obtékání je velice malý jednak díky tvaru a jednak díky hladkému a kluzkému povrchu kuličky.

Tímto je potvrzen závěr 4) teoretického úvodu.

Graf rovněž demonstruje obrovskou chybu měření a veliký vliv náhody na každé měření. K jejímu eliminování bychom potřebovali mnohem více trpělivosti a opakování pokusů.

Závěr

V případě hydrodynamických fyzikálních jevů je velice obtížné vyvodit teoretické předpovědi a stejně tak provést reprezentativní a exaktní měření. V této úloze šlo tedy především o kvalitativní experimentální analýzu jevu. Z tohoto úhlu pohledu jsou naše výsledky uspokojivé, ba co víc, došlo k jakési shodě s teoretickou predikcí.

Velkou pochvalu zaslouží všichni řešitelé této úlohy. Drtivá většina z nich k experimentu přistoupila s chutí a odhodláním a dospěla tak k podrobným experimentálním závislostem vystříknutí na různých parametrech tělesa alias hovna.

Honza Prachař
`honzik@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.