22. ročník, úloha IV . E ... blowjob *(8 bodů; průměr 4,69; řešilo 13 studentů)*

Kupte si nafukovací balonek, nafoukněte jej, zavažte a proměřte, jak se jeho objem mění s časem. Pokuste se určit, kolik z plochy balonku zabírají póry, kterými vzduch uniká.

Před jarním soustředěním se zamyslel Aleš.

Měřit samovolné vyfukování balonku je poměrně zdlouhavá a náročná experimentální činnost. Ale na naši obranu musíme podotknout, že existují daleko delší měření. Například měření viskozity dehtu[1]. Ale experiment nevyžaduje moc dozoru, takže ve volných chvílích můžeme spočítat, jak to s tím balonkem je teoreticky.

Teorie

Nejdřív odhadneme, jak se mění velikost balonku s časem. Vyjdeme z několika předpokladů.

a) Vyfukování probíhá dostatečně pomalu a teploty uvnitř i vně balonku se stíhají vyrovnávat a jsou stále konstantní. Tedy půjde o izotermický „děj“ a bude platit stavová rovnice

$$pV = \frac{m}{M_\mathrm{m}}\, kT\,,$$

kde m je hmotnost plynu uvnitř, M_m hmotnost jedné molekuly, k Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota.

b) Plocha balonku je svázána s objemem rozměrovou konstantou A vztahem

$$S = AV^{2/3}\,.$$

Jde o to, že balonek není vždy přesně kulový a přepočítávání by zbytečně komplikovalo výpočet. V případě koule platí $A = (36\pi)^{1/3}$, což lze lehce odvodit ze vztahů pro její objem a povrch. My ji vypočteme proměřením zkoumaného balonku.

c) Plyn v balonku je ideální a jeho molekuly mají hmotnost $M_\mathrm{m} = 29{,}2m_\mathrm{u}$, kde m_u je atomová hmotnostní jednotka a 30 je relativní hmotnost průměrné molekuly vzduchu (30 % kyslíku a 70 % dusíku). Dále Z je tok molekul na stěnu (počet nárazů za sekundu) určen vztahem[2]

$$Z = \tfrac{1}{4} n v_\mathrm{a}\,, \tag{1}$$

kde $v_\mathrm{a} = \sqrt{8kT/\pi m_\mathrm{m}}$ označuje střední aritmetickou rychlost molekul (k je Boltzmannova konstanta a T termodynamická teplota) a n je hustotu částic. Pro měření toku hmotnosti na plochu hustotu částic jednoduše nahradíme hustotou plynu. Správně bychom ovšem měli počítat s parciálními tlaky jednotlivých plynů zvlášť, ale u kyslíku a dusíku, které mají téměř stejnou hmotnost, lze počítat s „průměrnou“ molekulou.

d) Rozměry pórů jsou mnohem menší než střední volná dráha molekul vzduchu v balonku a jejich plošná hustota σ se nemění.

e) Tlak v balonku během měření je přibližně konstantní, roven nějaké hodnotě p. Tento odhad ale není přesný, skutečná závislost tlaku v kulatém balonku je jiná, pro zajímavost vypadá takto

$$p(r) = 2s_0 \frac{d_0}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^7 \right) \left(1 - \frac{s_1}{s_{-1}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right)\,,$$

[1] Viz `http://www.smp.uq.edu.au/pitch/`.

[2] Odvození viz např. `http://www.kfy.zcu.cz/Rusnak/skripta.fytv1.pdf`.

kde d_0 a r_0 vyjadřují klidové rozměry balonku a s_1 a s_{-1} jsou materiálové konstanty. My si tuto změnu tlaku dovolíme zanedbat, protože se v tak krátkém časovém období, ve kterém měříme, balonek o moc nezmenší. Ale pro delší měření bychom potřebovali tlak odhadnout aspoň lineárně.

Když přijmeme tyto předpoklady, můžeme začít odhadovat. Nejdříve se zamyslíme nad tím, jak částice odcházejí skrz blánu. Při tak malých rozměrech pórů už totiž lze tvrdit, že částice nejsou z balonku vytlačovány ven, ale že unikají pouhou náhodou, a to, když se některá z molekul právě trefí do póru. Proč? Protože si pórovitou stěnu v tomto extrémním přiblížení můžeme představit jako dům s okny, do kterých někdo hází tenisové míče, a nás zajímá, kolik se mu jich podaří prohodit skrz celou budovu. A to se povede jenom takovým míčům (molekulám), které letí přímo do okna (póru). Známe počet molekul dopadajících na stěnu ze vztahu (1), takže nám vlastně stačí jen dosadit

$$\mathrm{d}m = \tfrac{1}{4} S_\mathrm{p}(t)\, v_\mathrm{a} \varrho(t)\, \mathrm{d}t\,, \tag{2}$$

kde v_a je střední aritmetická rychlost a $S_\mathrm{p} = \sigma A V^{2/3}$ je plocha pórů určená jejich hustotou σ a plochou balonku. Hustota vzduchu v balonku je určena $\varrho(t)$. Teď si ze stavové rovnice vyjádříme $\varrho(t)$ a $m(t)$. Platí

$$\varrho(t) = \frac{pM_\mathrm{m}}{RT} \qquad \text{a} \qquad m(t) = \frac{pV(t)M_\mathrm{m}}{RT}\,.$$

Dosadíme-li tedy do rovnice (2), dostaneme hodnotu pro změnu objemu za čas. Ještě také musíme zohlednit to, že stejný jev jako při prostupu vzduchu z balonku ven funguje i v opačném směru. Pak počet částic prošlých stěnou ven nebude úměrný jen tlaku uvnitř, ale rozdílu tlaků mezi balonkem a atmosférou (p_a).

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{4}\frac{p_\mathrm{a} - p}{p}\, v_\mathrm{a} \sigma A V^{2/3}\,.$$

Je dobré si všimnout, že podíl $(p_\mathrm{a} - p)/p$ je záporný, tedy objem podle očekávání ubývá. Teď už nezbývá nic než vyřešit tuto separovatelnou diferenciální rovnici, což není problém. Vyjde

$$V(t) = \left(\frac{1}{12}\frac{p_\mathrm{a} - p}{p}\, v_\mathrm{a} \sigma A t + V_0^{1/3}\right)^3\,,$$

kde V_0 je integrační konstanta vypočítaná z počátečních podmínek ($V(0) = V_0$). Tedy závislost objemu na čase v krátkém čase (v poměru k době vypuštění celého objemu) po nafouknutí balonku je klesající kubická funkce závislá na parametrech vzduchu a balonku.

Experiment

U šišatého balonku je docela problém efektivně měřit objem. Abychom zamezili zanášení pórů prachem, uzavřeli jsme zavěšený balonek do krabice, vedle něj pověsili referenční třicenticentimetrové pravítko a v téměř pravidelných intervalech jsme jej z dostatečné vzdálenosti fotili (aby nedošlo ke zkreslení vlivem promítání na snímač). Ústí balonku jsme zalili lepidlem, abychom zamezili úniku částic nedokonale zavázaným otvorem.

Zpracování fotografií proběhlo následovně. Nejprve jsme každou z nich zorientovali na svislo pomocí referenčního pravítka a upravili její velikost tak, aby byla délka pravítka všude stejná.

Tím jsme zjistili poměr rozměrů na obrázku a ve skutečnosti. Takto upravený snímek s balonkem a kontrastním pozadím jsme upravili filtrem Posterizovat v programu Gimp (z barevného balonku vytvoří jednolitou plochu). Objem a povrch balonku (povrch pro určení konstanty $A = SV^{-2/3}$) jsme zjistili zpracováním obrázku ve formátu PPM skriptem v jazyku `C++`. Program postupně počítal počet barevných pixelů y_i v každém řádku a zároveň z nich určil objem i povrch balonku.

$$S = \sum_{i=1}^{x} 2\pi \, \frac{y_i}{2} \sqrt{1 + (y_i - y_{i-1})^2}\,,$$

$$V = \sum_{i=1}^{x} \pi \, \frac{y_i^2}{4}\,,$$

kde x je počet řádků v obrázku. Povrch vypočítáme tak, že vezmeme polovinu délky křivky ohraničující balonek a násobíme 2π, objem je součet objemů válečků vysokých 1 px. Tyto vzorce dávají výsledek v pixelech, pro přepočet na správné jednotky použijeme dříve určenou kalibrační konstantu.

V průběhu experimentu se měnil atmosférický tlak a teplota, pro výpočet jsme uvažovali údaje $p_\mathrm{a} = 101\,300\,\mathrm{Pa}$ a $T = 292\,\mathrm{K}$. Střední aritmetická rychlost tedy činí $v_\mathrm{a} \approx 460\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Ze snímků jsme určili hodnotu konstanty A.

$$A = 5{,}36 \pm 0{,}01\,.$$

Ostatní konstanty – σ, V_0 a p určíme z fitu experimentálních dat. Chybu určení objemu balonku odhadujeme na 10 ml. Naměřená data z dvou týdnů vyfukování jsou v tabulce.

t [dny]	V [ml]	t [dny]	V [ml]
0,0	2541	8,3	2316
0,8	2657	9,1	2315
0,9	2543	9,9	2266
1,1	2480	10,3	2246
2,3	2477	11,0	2279
2,8	2421	11,4	2200
6,9	2337	11,9	2173
7,9	2298	12,9	2157

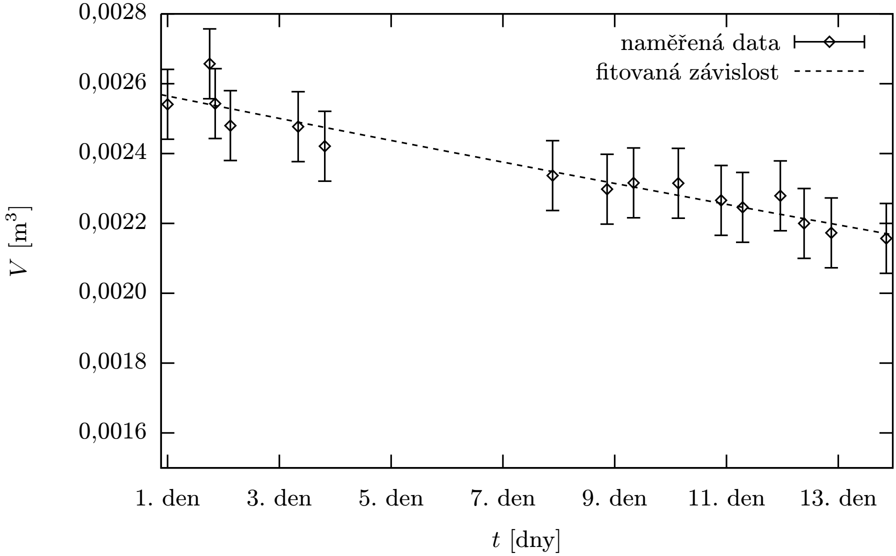
Fitování pomocí programu Gnuplot je popsáno v Sekci experimentů na FYKOSích internetových stránkách. Když postupujeme podle tamějšího návodu, dostaneme se k datům

$$V_0 = (2560 \pm 20)\,\mathrm{ml}\,,$$

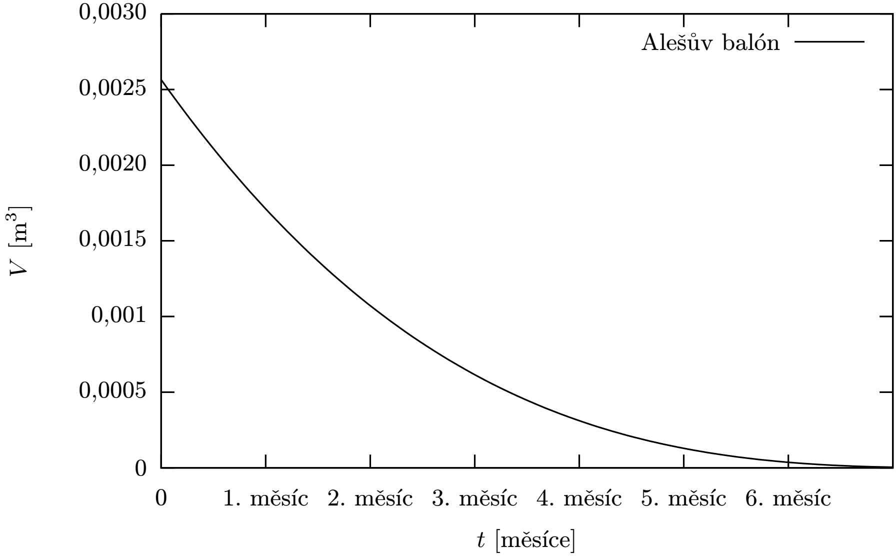
$$p = (104700 \pm 100)\,\mathrm{Pa}\,,$$

$$\sigma = (7{,}6 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-10}\,.$$

Tedy hledaná hustota pórů je asi $(7{,}6 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-10}$, takže zabírají asi $7 \cdot 10^{-8}$ % povrchu balonku. Pokud si vykreslíme závislost objemu na čase, uvidíme, že odpovídá velmi dobře (viz obrázek 1).



Obr. 1. Graf závislosti objemu balónku na čase



Obr. 2. Předpokládaný vývoj vyfukování balónku

Ještě jednou se zamysleme nad tlakem v balonku. Od začátku uvažujeme, že je konstantní jenom v po relativně krátkou dobu našeho experimentu. Ale pokud se podíváme na jeho hodnotu, zjistíme, že se v podstatě neliší od atmosférického tlaku. Můžeme tedy zkusit odhadnout, kdy se balonek vyfoukne úplně. V grafu 2 vidíme, kdy křivka protne osu. Je to asi za půl roku od nafouknutí. Ale doba reálného vyfouknutí bude kratší, protože tlak se přece jenom zmenšuje a časem se vyrovná s vnějším tlakem atmosféry. Navíc se balonek nevyfoukne úplně. Ale za půl roku uvidíme, nakolik byl náš odhad správný.

Změřili jsme závislost objemu balonku na čase. Jeho zmenšování je způsobeno únikem vzduchu přes póry v gumě, které zabírají asi $(7{,}6 \pm 0{,}7) \cdot 10^{-8}$ % povrchu balonku.

Komentáře k řešením

Všichni, kdo se pokoušeli vyřešit tuto úlohu, změřili aspoň vyfukování balonku. Pěkná řešení poslali Ján Bogár a Martin Výška, kteří dospěli ke správné hodnotě hustoty pórů nebo k podstatnému kroku odvození teoretické závislosti. Ale byli i tací, kteří tipovali podle oka v jednotkách procent povrchu. To je ale otvor velký asi jako dlaň!

Aleš Podolník
`ales@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.