Milí řešitelé!

Dvacátý druhý ročník našeho semináře se teprve rozbíhá a my bychom rádi umožnili i novým řešitelům plnohodnotný vstup do soutěže. Proto jsme se rozhodli, že **posuneme termín odeslání 1. série na 8. prosince**, tedy na stejný den jako je termín této série, jejíž zadání si právě pročítáte.

Novým řešitelům chceme vzkázat, ať se nebojí našich úloh a nenechají se odradit faktem, že se v jejich zadání často neobjevuje žádná fyzikální veličina, což je rozdíl oproti klasickým středoškolským učebnicím, kde bývají zadané všechny potřebné hodnoty. V našem semináři se více chceme přiblížit skutečné fyzice a ne pouhému dosazování do vzorečků.

Dále bychom vás všechny chtěli pozvat na *Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy*, který se uskuteční v úterý 2. prosince. Bližší informace najdete na adrese `http://www.mff.cuni.cz/verejnost/dod/`. Na DODu se také budete moci setkat i s organizátory FYKOSu a bude k dostání i ročenka 21. ročníku.

Aktuální dění v semináři sledujte na stránkách `http://fykos.mff.cuni.cz/`, kde naleznete zadání a řešení všech úloh, aktuální pořadí, diskuzní fórum a nově zde můžete uploadovat své soubory s řešením.

Přejeme vám spoustu krásných chvil nad úlohami FYKOSu a těšíme se s vámi na viděnou na jarním soustředění.

Organizátoři

Zadání II. série

Termín odeslání: 8. prosince 2008

Úloha II . 1 ... *duhová energie*

Zkuste se zamyslet a posléze spočítat, kde a kdy na Zemi nelze vidět duhu?

Úloha II . 2 ... *odhalte tajemství „šuplery“*

Vysvětlete nám, jak funguje „šuplera“, že dokáže měřit desetiny milimetru.

Úloha II . 3 ... *ledvinové koule*

Malá koule stojí v klidu na velké kouli, která volně leží na podložce. Do malé koule nepatrně strčíme a ta se svalí na zem. Jak daleko od původního bodu dotyku velké koule se zemí malá koule dopadne?

Úloha II . 4 ... *do nekonečna a ještě dál*

Bohatý vesmírný turista si zaplatil výlet do hlubokého vesmíru. Raketa vyletí ze Země a rovnoměrně zrychluje se zrychlením a, což si turista může ověřit například pouštěním míčku. Nudnou cestu si krátí zíráním ze zadního okénka, pozorováním Země. Po nějaké době (Jaké? Aspoň řádový odhad.) se mu začne zdát, že něco není v pořádku – Země se pomalu přestává zmenšovat. Z toho usoudí, že raketa zpomaluje, což neodpovídá tomu, že posádka stále cítí zrychlení a. To ale turistu nenapadne a rozlobeně jde za kapitánem požadovat vysvětlení. Co mu kapitán řekne?

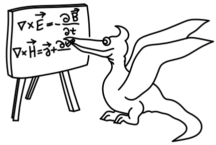
Předpokládáme, že turista vidí celé elektromagnetické spektrum a má železné nervy a pozorování vydrží.

Úloha II . P ... *milenecká*

Jak se změní teplota pod peřinou, pokud jsou pod ní dva lidé místo jednoho?

Úloha II . E ... *šikmá věc*

Kolik vody musí být v PET lahvi postavené na uzávěr, aby její stabilita byla největší (při vychýlení ze svislé polohy spadne ze nejdelší čas)? Nezapomeňte na teoretickou předpověď.



Seriál na pokračování

Kapitola 2: Young a vlnová povaha světla

V roce 1704 publikoval Isaac Newton své po Principiích nejslavnější dílo, knihu *Optika*, či chcete-li *Opticks or A Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light* (tj. Optika aneb Traktát o odrazech, lomech, ohybech a barvách světla). Shrnul v ní do té doby provedené experimenty – zejména své – a prezentoval vlastní teorii světla. V jeho době byly známé všechny jevy vyjmenované v názvu, včetně toho, jemuž dnes říkáme difrakce. Sám zjistil, že pomocí skleněného hranolu lze světlo rozložit na několik barevných složek, které se dále už týmž způsobem rozložit nedají. Naopak, pomocí čočky a dalšího hranolu lze tyto paprsky spojit do jednoho, který má opět původní vlastnosti. Newton navrhl *korpuskulární* (částicovou) teorii, která tvrdila, že světlo je složené z „barevných“ částic, tedy (pravděpodobně nedělitelných) elementů s jednou vlastností určující, jak se jeví lidskému oku. Dokonce se věnoval i otázce vzniku světla v látce; podle něj světlo i látka byly složeny z příbuzných částic, které se na sebe mohly za určitých okolností přeměňovat.

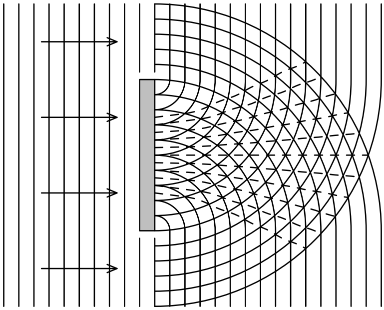
Difrakci jako první důsledně zkoumal a pojmenoval[1] Ital *Francesco Maria Grimaldi* už v polovině 17. století a ta ukazovala na vlnové chování světla, neboť světlo tím zjevně splňovalo Huygensův vlnový princip, tedy že každý bod vlnoplochy je zdrojem dalšího vlnění. Newtonovi dělala difrakce starosti, neboť částice letící vpřed ve světelném paprsku neměly zřejmý důvod zatáčet za překážku, již míjely. Proto už tehdy poprvé promluvil o primitivní formě něčeho, co bychom dnes nazvali vlnově-částicovým dualizmem (viz níže).

Newtonova démokritovská teorie se hlavně díky jeho jménu udržela na výslunní dlouho. Teprve téměř po sto letech, na samém začátku devatenáctého století, provedl anglický vědec *Thomas Young* experiment, který na nějaký čas definitivně utvrdil fyziky v přesvědčení, že světlo má primárně vlnovou povahu.

1) Latinsky *diffringere* = lámat (se) na kousky.

Dvojštěrbinový experiment

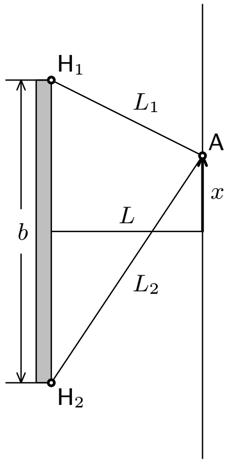
Young provedl dva experimenty související s vlněním, jeden s vodou a jeden se světlem. V prvním případě se jednalo o demonstraci jevu *interference* (skládání) vlnění. Pokud na vodní hladině vyvoláme vlny, totiž pohyblivý vzorek hřebenů a prohlubní, můžeme pozorovat, že v místech setkání dvou vln se vlna zesílí, pokud se tam setkají dva hřbety nebo dvě prohlubně, a naopak téměř zahladí, jestliže se střetnou opačné fáze. Výsledná amplituda hladiny je zřejmě přibližně rovna součtu amplitud obou vln. Výsledná energie (intenzita) závisí obecně na druhé mocnině tohoto součtu; setkají-li se tedy dvě stejné vlny, bude energie vlny složené čtyřnásobná. Young demonstroval, jak by se skládání projevilo, pokud by vyslal rovinnou vlnu proti překážce. Na obr. 1 jsou nakreslené postupující hřebeny vln.



Obr. 1. Interference na rovinné překážce

Ukázal, že okraje takové překážky by se staly zdroji kruhových vln, které by vytvořily za překážkou charakteristický vzorek – pásy stále klidné vody táhnoucí se od překážky pryč do různých směrů. Na obrázku jsou z technických důvodů, čárkovanou čarou, vyznačena naopak místa nejrozbouřenější.

Analogii tohoto experimentu provedl se světlem. Zatemnil svoji pracovnu a úzkým otvorem v závěsu vpustil dovnitř jeden světelný paprsek, rovinnou vlnu. Do cesty mu vložil úzký (necelý milimetr široký) proužek papíru a pod lupou pečlivě prozkoumával stín vržený proužkem na stěnu. Na obrázku 2 je schéma situace (světlo jde zleva na překážku o šířce b, vpravo je stínítko). Podobně jako ve vodním případě i zde získáme světelný flek o maximální intenzitě v bodě A na stínítku, když do A dorazí dvě vlny se stejnou fází, tedy když se dráhy paprsků od jedné hrany (bodu H_1) a od druhé hrany (bodu H_2) budou lišit o celočíselný násobek vlnové délky použitého světla,



Obr. 2

$$k\lambda = L_2 - L_1 = \sqrt{\left(x_k + \frac{b}{2}\right)^2 + L^2} - \sqrt{\left(x_k - \frac{b}{2}\right)^2 + L^2}\,.$$

Index k u x znamená, že se bavíme o k-tém interferenčním proužku (rozdíl drah je $k\lambda$). Umocněním, přeskupením, dalším umocněním a vyřešením vzhledem k x_k dostaneme

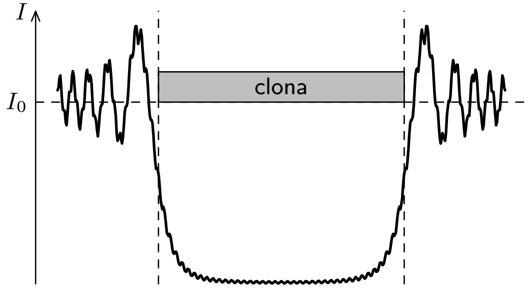
$$x_k = k\lambda \sqrt{\frac{L^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{k^2\lambda^2}{2}}{b^2 - k^2\lambda^2}}\,. \tag{1}$$

Pokud máme stínítko daleko od clonky, je $b \ll L$, a v Youngově době bylo navíc rozhodně $\lambda \ll b$. Nahoře v čitateli v (1) smíme proto ponechat samotné L^2, dole b^2, jelikož sousední členy jsou vždy podstatně menší. Pak je přibližně

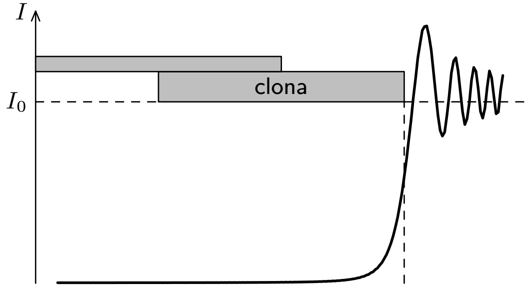
$$x_k \approx L\,\frac{k\lambda}{b}\,, \qquad \frac{x_k}{L} \approx k\,\frac{\lambda}{b}\,. \tag{2}$$

Pokud by Young použil monochromatické světlo, pozoroval by ve stínu papírového proužku rovnoměrně a vůči středu stínu symetricky rozmístěné světlé čáry. Protože x_k závisí na vlnové délce, různé barvy světla se odchylují pod různými směry (pro $k \neq 0$), a tak ve skutečnosti viděl duhové skvrny.

Young poté vzal jinou kartu a odclonil s ní přicházející paprsek tak, aby světlo dopadalo jen na jednu hranu proužku (například na H_1). Zjistil, že jestliže předtím byla intenzita světla na stínítku přibližně jako na obrázku 3, po zakrytí byla jako na obrázku 4 (obojí je v idealizaci pro jednobarevné světlo).



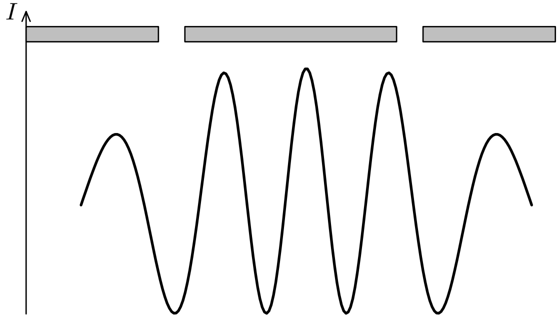
Obr. 3. Intenzita světla dopadajícího na stínítko



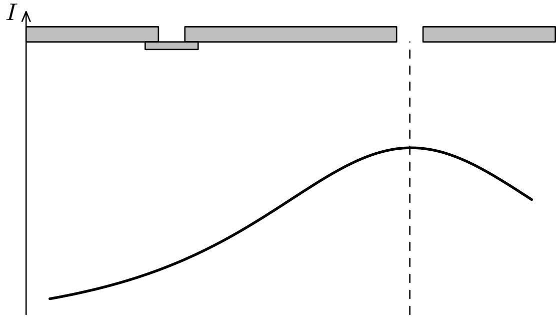
Obr. 4. Modifikace předchozího pokusu

Tedy na některých místech intenzita po zatemnění vzrostla! Zmizelo totiž několik tmavých interferenčních proužků – snad to na grafu vidíte; případně si také vezměte lupu. Něco takového je v korpuskulární teorii světla nepřipustitelné, tam je skládání paprsků vždy aditivní, nikdy subtraktivní, tzn. *zvýšením* celkového počtu částic nelze *snížit* osvit a naopak. Vlnová povaha světla byla tedy slavně a nade vší pochybnost dokázána[2].

Na závěr odstavce o dvojštěrbinovém experimentu stojí za to zmínit, proč jsme o žádných štěrbinách nakonec nemluvili. Young ve své publikaci *Experiments and Calculations Relative to Physical Optics* popisuje svůj pokus tak, jak jsme ho zde rozebrali, tedy spíše jako dvojhranový experiment. Skutečnou dvojštěrbinovou verzi provedl asi až *Augustin Jean Fresnel* o několik let později – čímž jednak odstranil postupující rovinné vlny po stranách překážky, které oslňovaly pozorovatele, a jednak umožnil pozorování proužků i mimo prostor mezi hranami clony. Výsledný obraz je zřetelnější a známý z každé učebnice optiky (průběhy intenzit na obrázcích 5 a 6).



Obr. 5. Interference na dvojštěrbině



Obr. 6. Interference na dvojštěrbině, přičemž jedna ze štěrbin je zacloněna

[2] Zmiňme tu pro zajímavost – pro nás dnes poměrně veselou – myšlenku, již Newton v *Optice* nadhodil při pokusu o vysvětlení zřetelného kolísání intenzity osvětlení po stranách stínu clonky: *„Are not the rays of Light in passing by the edges and sides of Bodies, bent several times backwards and forwards, with a motion like that of an Eel? And do not these three fringes of coloured Light above-mentioned (tj. tři nejjasněji viditelné duhové pruhy po stranách geometrického stínu; viz. obr. 3), arise from three such bendings?"*

Kvantověmechanická obdoba Youngova pokusu

Youngův dvojštěrbinový experiment sehrál obrovskou roli v částicové (kvantové) fyzice na začátku 20. století. Tehdy se ale většinou jednalo o myšlenkovou variantu, případně jen přeinterpretování pokusů se světlem. Skutečné fyzické experimenty byly provedeny až v druhé polovině 20. století. Roku 1961 *Claus Jönsson* ukázal, že svazek elektronů vyslaný proti dvojštěrbině dopadá na fotografickou desku za ní tak, že produkuje stejné rozdělení jako světlo na obrázku 5. Jinými slovy, přestože elektrony vyslané skrze jedinou štěrbinu vytvoří rozložení podobné Gaussově křivce (obr. 6) jak se na částice sluší a patří, při otevření druhé štěrbiny na některých místech ubude četnost dopadů[3], což – jak jsme komentovali výše – je proti výlučné aditivitě částicových experimentů.

Samozřejmě lze namítnout, že v tomto případě mohlo dojít k vzájemnému ovlivňování nabitých elektronů, tedy možnost vzniku nějakých vln není úplně vyloučena (byť po důkladné analýze se ukáže, že by efekt nevysvětlila). Stejný interferenční pokus byl ale v průběhu minulého století proveden i s neutrony, vodíkovými atomy a nedávno, v roce 1999, dokonce i s fullereny, mohutnými šedesátiuhlíkovými sférickými molekulami. Všechny vytvářely stejný vzorek přičítaný Youngem vlnové povaze použitého svazku.

Ukázalo se tak, že světlo je *vlna* stejně tak dobře jako jsou vlnami elementární *částice*, a vlnová teorie světla byla proto alespoň v mikrosvětě nadobro opuštěna, neboť už od objevení fotoefektu – procesu, při němž se světlo pohlcuje „po kouskách“, – měla značné potíže. V určitém smyslu jsme dnes opět blíže Newtonově představě. Částicím světla říkáme *fotony*.

Fantastický na kvantověmechanické variantě Youngova pokusu není přímo vznik samotného interferenčního obrazce, nýbrž to, že jeho vytvoření není dáno kolektivním chováním použitých částic. Totiž: Vychází-li ze dvou štěrbin „oblak částic“ tak, že v prostoru mezi štěrbinami a stínítkem jich je v každém okamžiku mnoho, dokážeme si představit, že mezi sebou interagují – ačkoliv není úplně jasné jakým způsobem – a proto dochází k interferenci. Jenže stejný obrazec dostal italský výzkumný tým vedený *P. G. Merlim* v roce 1974 při použití tak slabého zdroje elektronů[4], že bylo garantováno, že v každý okamžik existoval v aparatuře elektron nanejvýš jeden. Jeden elektron v jednu chvíli také dopadnul na stínítko. Přesto se takto vytvořené tečky postupem času slily znovu do interferenčního vzorku. Klasicky interpretovat takový výsledek není možné, neboť celistvá částice nemůže projít oběma otvory naráz a tudíž by na ni neměla mít nejmenší vliv existence jiného otvoru než toho, kterým se vydá. Korpuskulární teorie by v takovém případě požadovala vznik dvou neostrých světlých skvrn naproti otvorům – a nic víc.

Vypůjčíme-li si sousloví od R. P. Feynmana, musíme konstatovat, že „elementární *částice* [včetě světla] jsou *jev*, který se vyznačuje diskrétním vznikem a detekcí [tj. jeden ionizovaný atom a jedna tečka na stínítku], ale proces mezi těmito dvěma událostmi lze popsat pouze *vlnově* [‚elektron prochází oběma otvory‘]“.

Tento vlnový popis je podobný postupu, který jsme použili u světla. Místo „intenzity“ mluvíme o „četnosti dopadu částic“ na jisté místo detektoru, která je úměrná pravděpodobnosti p výskytu částice na uvažovaném místě. Jak zjistíme pravděpodobnost? Analogicky s klasickými vlnami, i v mikrosvětě zavedeme *amplitudu pravděpodobnosti* $\mathcal{A}$, což je tentokrát komplexní číslo nebo dvojsložkový vektor – podle toho, s čím se nám pracuje lépe (my tu budeme používat druhou možnost). Pravděpodobnost p je pak rovna druhé mocnině velikosti amplitudy,

[3] To jest poměr částic dopadlých v okolí tohoto místa ku celkovému vyslanému počtu.

[4] Podobný pokus s fotony byl provedený podstatně dříve.

$p = |\mathcal{A}|^2$. Pokud máme dvě nerozlišitelné alternativy, jak se částice (foton) do zkoumaného bodu může dostat, totiž pokud nemáme možnost (nebo se vzdáme možnosti) jak zjistit, která varianta nastala, amplitudy přiřazené každé cestě sečteme,

$$p_{1+2} = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 .$$

Pokud jsme schopni zjistit cestu, například pomocí detektoru umístěného u každého otvoru dvojštěrbiny, sčítají se až výsledné pravděpodobnosti,

$$p'_{1+2} = p_1 + p_2 = |\mathcal{A}_1|^2 + |\mathcal{A}_2|^2 .$$

Jediná věc, která nám nyní chybí k vypočítání pravděpodobnosti dopadu částice na jakékoliv místo stínítka za dvojštěrbinou, je znalost amplitud pravděpodobnosti. Pro volný foton s barvou λ (nebo jakoukoliv jinou částici s vlnovou délkou danou de Broglieovým vztahem $\lambda = h/mc$) se jedná o vektory[5]

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \dfrac{2\pi ct}{\lambda} \\ \sin \dfrac{2\pi ct}{\lambda} \end{pmatrix} .$$

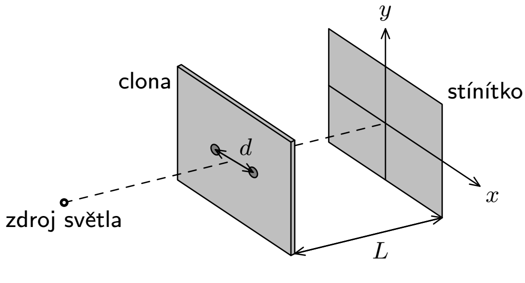
Protože ct je dráha, kterou světlo (nebo jiná částice) urazí od štěrbiny do vyšetřovaného bodu, můžeme ve shodě s obrázkem 2 dosadit $ct = L_1$ resp. $ct = L_2$ do amplitudy $\mathcal{A}_1$ resp. $\mathcal{A}_2$. Po vyčíslení pravděpodobnosti dopadu na stínítko (využijeme při tom sčítací vzorce pro goniometrické funkce) můžeme psát, že intenzita osvitu fotografické desky je úměrná

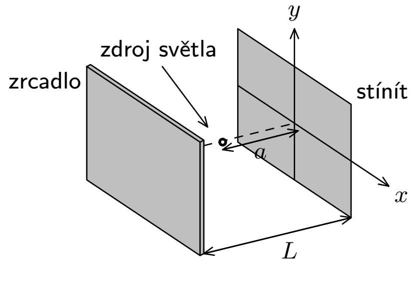
$$I \sim p = |\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2|^2 = 4\cos^2\left(\pi \frac{L_1 - L_2}{\lambda}\right) . \qquad (3)$$

Když si rozmyslíte, jak vypadá $\cos^2$, budete souhlasit, že jsme právě dostali interferenční proužky (obrázek 5). Tlumení k okrajům, dané různým dopadovým úhlem na stínítko (a tedy maximální plošnou hustotou fotonů), jsme tu nezapočítali, pro ilustraci uvažovaného jevu se jedná o zbytečnou komplikaci.

Úloha II . S ... *Young a vlnová povaha světla*

a) Jaký tvar interferenčních proužků na stínítku byste očekávali v následujícícho dvou sestavách? Najděte rovnice křivek maximální intenzity a zkuste jich několik načrtnout.





5) Nebo komplexní čísla $\mathcal{A} = e^{2\pi ict/\lambda}$.

b) Ukažte, jak by dopadl Youngův experiment, jestliže by se světlo chovalo podle Newtonových představ (tzn. difrakce *ano*, interference *ne*). Nezapomeňte vzít v úvahu různý úhel dopadu světla na různá místa stínítka.

c) Užitím vyloženého kvantověmechanického popisu určete rozložení intenzity, jaké by dostal Jöhnsson při použití čtyřštěrbiny (tedy čtyř úzkých rovnoběžných ovorů rozmístěných ve vzdálenostech b od sebe). Načrtněte reprezentativní úsek grafu a okomentujte přednosti většího počtu otvorů.

FYKOS
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://fykos.mff.cuni.cz`
e-mail pro řešení: `fykos-solutions@mff.cuni.cz`
e-mail: `fykos@mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.