

Milí přátelé!

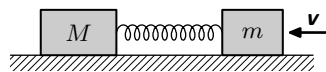
Vítáme vás v XXII. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Všechny informace o semináři naleznete v příloženém letáku. Zde shrneme jen to nejdůležitější.

S první sérií nám prosím pošlete na zvláštním papíru vaše jméno a příjmení, adresu pro korespondenci, e-mail, školu, třídu a rok maturity. Řešení každé úlohy pište na *zvláštní* papír formátu A4 a *všechny* papíry podepište. Není třeba posílat všechny úlohy, řešitelé, kteří zvládnou vše, jsou výjimkou. Letos navíc připravujeme aplikaci pro přímé odevzdávání úloh přes internet, její spuštění předpokládáme v průběhu září.

Další informace najdete také na <http://fykos.mff.cuni.cz>. Přejeme vám spoustu příjemných chvil strávených s naším seminářem. Na vaše řešení úloh první série se těší

organizátoři**Zadání I. série****Termín odeslání: 8. prosince 2008****Úloha I. 1 ... klouzání a kmitání**

Dvě závaží o hmotnostech m a M jsou spojena pružinou o tuhosti k a leží na hladké podložce (tření můžeme zanedbat). Tělesu m udělíme rychlost v (viz obrázek 1). Jaká bude nejkratší vzdálenost mezi tělesy a kdy jí dosáhnou?



Obr. 1

Úloha I. 2 ... pirát a zlatá odměna

Jeden pirát má za odměnu dostat pytel zlaťáků. Ale kapitán lodi je lakomý a chce mu to zkomplikovat. Přetavili zlato do válce. A k tomu ještě odlili druhý, velikostně stejný válec z mosazi. Protože uprostřed zlatého je vzduch, váží oba stejně a jsou stejně velké. Jak si má dotyčný pirát vybrat, aby pak nelitoval?

Úloha I. 3 ... už mě nehoupej

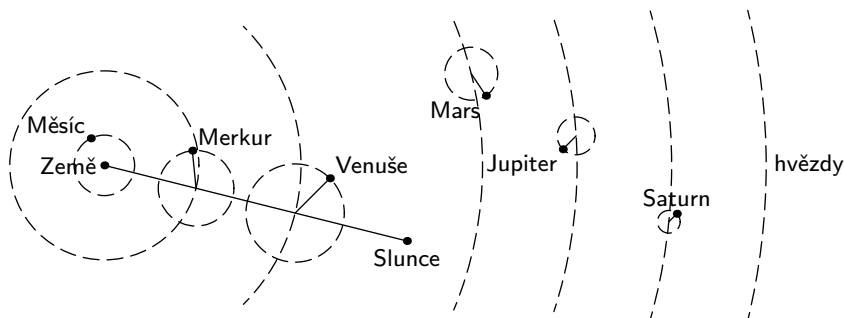
Kačenka se rozhoupává na houpačce následujícím způsobem. Při největší výchylce houpačky se přikřčí, a když je houpačka v nejnižším bodě, opět se postaví. Tyto pohyby neustále opakuje. Poměr vzdálenosti těžiště Kačenky od osy otáčení při pokrčení a při stání je $\sqrt[3]{2} \doteq 1,06$. Kolikrát se Kačenka zhoupne, než se amplituda houpání zdvojnásobí?

Úloha I. 4 ... praktická motoristická

Na nepřehledných křižovatkách či v ostrých zatáčkách někdy bývá vypuklé zrcadlo. Snadno si všimneme, že zrcadlo zakresluje jak vzdálenost, tak i rychlost přijíždějících aut. Naši vzdálenost od zrcadla označíme d , vzdálenost přijíždějícího auta od zrcadla L , jeho skutečnou rychlost v a poloměr křivosti zrcadla R . Na základě toho, co vidíme v zrcadle, určete, jak daleko se nám přijíždějící auto jeví? Jakou zdánlivou rychlostí se přibližuje? A jak se liší skutečná doba, za kterou přijíždějící auto vjede do křižovatky, od doby, kterou odhadneme z jeho zdánlivé vzdálenosti a zdánlivé rychlosti? Zvolte si rozumné hodnoty parametrů a rozhodněte, zda může být tento rozdíl dob nebezpečný.

Úloha I. P ... Mikuláš vs. Klaudios

Rok 2009 je vyhlášen jako Mezinárodní rok astronomie a připomíná 400 let používání dalekohledů lidstvem. Vraťme se o čtyři staletí zpět, kdy byl dalekohled již k dispozici, ale klasická fyzika ještě v plenkách. V otázce uspořádání světa spolu soupeřily Koperníkův heliocentrický názor a Ptolemaiov geocentrický systém. Navrhněte experiment, resp. pozorování, které mezi oběma představami dokáže rozhodnout. Dostatečně okomentujte, jaký výsledek lze očekávat a co z něj plyne v prospěch či nepospěch uvažovaných uspořádání. Vlastní pozorování není nutné, i když vhodné. Navíc vysvětlete, proč jsou v geocentrickém modelu Slunce a Země spojeny úsečkou?

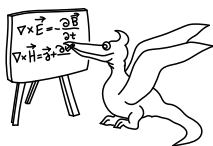


Obr. 2. Představa geocentrického systému

Úloha I. E ... copak nám to tady smrdí?

Změřte rozdíl hustot čerstvého a zkaženého vejce a zjistěte i její časovou závislost! Pokuste se také vysvětlit své výsledky a zvažte užití statistického zpracování.

Tip: Vejce se rychle zkazí například na sluníčku.



Seriál na pokračování

O čem to bude?

V letošním seriálu vás seznámíme s několika zásadními experimenty, které se staly důležitými milníky v historii přírodních věd. Po několika letech teoreticky zaměřených ročníků se tak vrátíme k výhním, ve kterých teorie vznikají a zanikají. Seriál jsme připravili na takové úrovni, aby byl přístupný opravdu každému, což v porovnání s minulými ročníky znamená snad mírné ubrání na obtížnosti. Věříme však, že to je ku prospěchu pochopitelnosti a přínosnosti a že se vám seriál bude líbit. V šesti seriích zavítáme do raně barokní Pisy, do pařížského Panteonu, na africký ostrov Príncipe, ale i do několika špičkových světových laboratoří. Rozhodně se máte na co těšit. Mnoho pěkných chvil se seriálem vám přeje

autoři *Jakub Benda a Pavel Motloch*

Kapitola 1: Galileo a princip ekvivalence

První díl jsme se rozhodli zasvětit proslavenému experimentu Galilea Galileiho, který již v 17. století – nevědomky – ověřoval ideu, která o tři staletí později získala honosný název „princip ekvivalence“. Začneme ale od Adama, tedy od Isaaca.

V roce 1687 publikoval Isaac Newton ve svých slavných Principiích mimo jiné dvě stěžejní myšlenky, vyjádřené v jeho gravitačním a druhém pohybovém zákoně vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{m_g M G \mathbf{r}}{r^3}, \\ \mathbf{F} &= m_i \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (1)$$

s nimiž se student střední školy setkává hned v prvním roce.

Veličiny označené v rovnicích jako m_g a m_i se nazývají *gravitační* a *setrvačná* hmotnost tělesa a běžně se s nimi počítá jako s veličinou jedinou, ztotožněnou s hmotností tělesa. Nicméně již Newton si před třemi sty lety byl vědom toho, že ekvivalence těchto dvou veličin vůbec není samozřejmá a poměr těchto veličin se pro různé látky může lišit.

Spojením obou uvedených vztahů totiž vidíme, že těleso bude mít v gravitačním poli popsaném vztahem (1) (tedy například v gravitačním poli Země, která je v dobrém přiblížení kulová a vztah (1) pro ni platí také) zrychlení

$$\mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i} \frac{M G \mathbf{r}}{r^3}.$$

V případě, že by všechny látky měly poměr gravitační a setrvačné hmotnosti konstantní,

$$\frac{m_g}{m_i} = K, \quad (2)$$

pak bychom mohli vhodnou definicí kilogramu dosáhnout toho, že $K = 1$ a všechna tělesa by v gravitačním poli získala stejné zrychlení

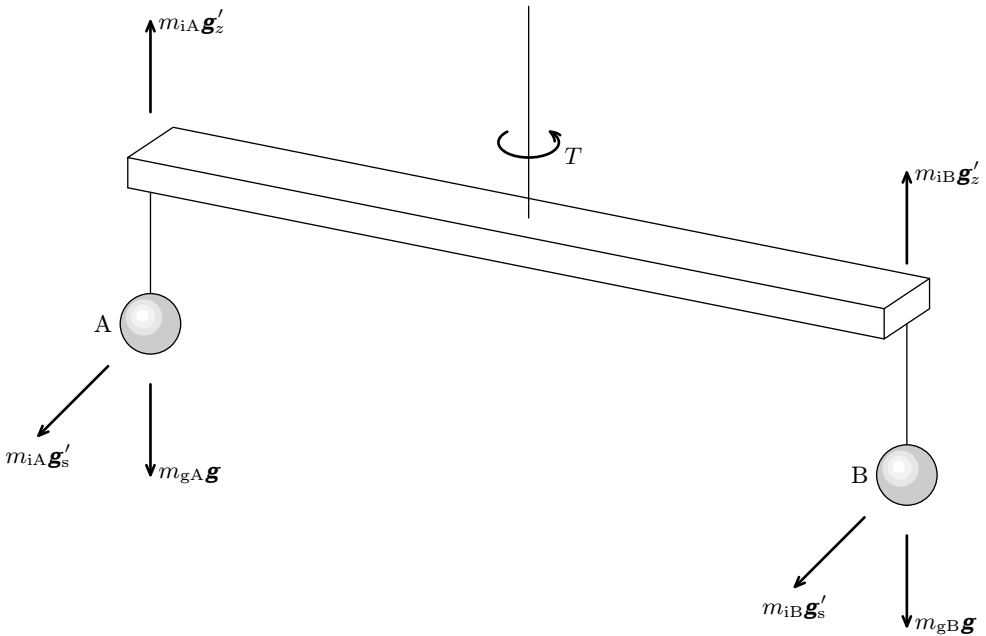
$$\mathbf{a} = \frac{M G \mathbf{r}}{r^3}, \quad (3)$$

nezávislé na svém složení. Hypotéza vyjádřená konstantností poměru (2) je běžně nazývaná jako princip ekvivalence¹ a její předpověď, že zrychlení (3) je nezávislé na studovaném tělese, nám otevírá možnost, jakým můžeme princip ekvivalence ověřit. Tím se nám kruh uzavírá a dostáváme se zpět k našemu milému Galileovi, který údajně uskutečnil následující experiment.

Jednoho pěkného dne vyšplhal na vrchol šikmé věže v Pise, odkud zároveň pustil dvě stejně velké koule: jednu z olova a druhou ze dřeva. Tyto dvě koule dopadly na zem současně, z čehož můžeme usuzovat na to, že byly během celého pádu urychlovány se stejným zrychlením. Můžeme tedy tvrdit, že Galileo svým měřením ověřil platnost vztahu (3), a tedy nepřímo i principu ekvivalence.

¹ Moderní fyzika rozlišuje více principů ekvivalence. Ten námi diskutovaný bychom přesněji měli nazývat „slabým principem ekvivalence“. Takzvaný „silný princip ekvivalence“ je hypotéza, která tvrdí, že pohyb vztažné soustavy nemůžeme zjistit pomocí žádného experimentu, tedy že zákony přírody mají ve všech soustavách stejný tvar, a jsou tedy z hlediska popisu reality rovnocenné.

Princip ekvivalence byl čas od času prověřován i jinými velikány, mimo jiné i Newtonem², ale první kvantitativní měření provedl až Loránd Eötvös roku 1889. Význam tohoto experimentu spočíval jednak v tom, že se na dlouhou dobu jednalo o nejpřesnější známé měření, ale hlavně v souvislosti s obecnou teorií relativity, o které bude v tomto díle seriálu ještě krátce pojednáno.



Obr. 3. Schéma Eötvösova experimentu

Eötvösův experiment využívá principu torzních vah (viz obrázek 3). Na volně zavěšené lanko je upevněna destička, na jejíž koncích jsou v přibližně stejné vzdálenosti od lanka umístěna měřená závaží. Označme si závaží jako A a B, jejich hmotnosti opatřeme indexy i (inerciální) a g (gravitační), vzdálenosti mezi lankem a úchyty závaží označme l_A , l_B . Dále označme g velikost místního gravitačního pole a g'_z vertikální složku odstředivého zrychlení, způsobeného zemskou rotací.

Protože se může destička libovolně natáčet, ustaví se v takové pozici, aby se vyrovnaly horizontální momenty sil, tedy aby platilo

$$l_A (m_{gA}g - m_{iA}g'_z) = l_B (m_{gB}g - m_{iB}g'_z). \quad (4)$$

Eötvösovým štěstím bylo, že v Budapešti není zanedbatelná ani horizontální složka odstředivého zrychlení způsobeného zemskou gravitací g'_s . Ta působí na obě závaží silou a zkroutí tak lanko celkovým momentem síly

$$T = l_A m_{iA}g'_s - l_B m_{iB}g'_s.$$

²) Zájemce o popis jeho metody odkazujeme na experimentální úlohu druhé série 18. ročníku.

který můžeme vyjádřením l_B z podmínky (4) přepsat na

$$T = l_A m_{iA} g'_s \left(1 - \left(\frac{m_{gA}}{m_{iA}} g - g'_z \right) \left(\frac{m_{gB}}{m_{iB}} g - g'_z \right)^{-1} \right).$$

Velikost g'_z , která je mnohem menší než velikost g , můžeme zanedbat a psát tak

$$T = l_A m_{gA} g'_s \left(\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}} \right).$$

Pomocí zrcátkové metody³ můžeme tento moment měřit s vysokou přesností a můžeme tak ověřovat, o jakou hodnotu se liší poměry setrvačné a gravitační hmotností obou těles. Eötvös použil tělesa A a B, vyrobené ze dřeva a z platiny a zjistil, že se lanko vůbec nezkroutilo, to znamená, že poměry pro obě tělesa jsou v rámci přesnosti měření stejné. Vzhledem k přesnosti, s jakou odečítal pootočení lanka tak zjistil, že rozdíl poměru (2) je pro dřevo a platinu menší než 10^{-9} . Měření založená na podobném principu zopakovalo od té doby několik dalších vědců a vědeckých skupin, přičemž se jim podařilo nepřesnost určení poměrů zmenšit již na asi 10^{-13} .

Jako exkurzi do budoucnosti se zde zmíníme i o plánovaném experimentu, jehož hlavním úkolem by mělo být právě ověření platnosti principu ekvivalence. Jmenuje se STEP, pracuje na něm Stanfordská univerzita a předpokládá, že měření budou probíhat v satelitu, kroužícím na oběžné dráze. V plánu je porovnávat zrychlení čtyř různých těles ve vysoce kontrolovaných podmínkách, a jestliže se pokus podaří dotáhnout do konce, měli bychom přesnost ověření principu ekvivalence zvýšit až na 10^{-18} , tedy zhruba milionkrát.

Nyní je na čase slíbená historická odbočka k obecné teorii relativity. Pokud se vám bude zdát příliš složitá, můžete ji přeskočit a vrátit se k ní později.

Pokud by platil princip ekvivalence, pak bychom nebyli v principu schopni říci, zdali je síla na nás působící gravitační, nebo setrvačná (nepravá). Slavný je Einsteinův příměr k lidem ve výtahu. Představme si, že stojíme v uzavřeném výtahu (takže nevidíme, co se děje mimo výtah) v kosmickém prostoru daleko od všech planet a jiných hmotných těles. V prvním případě bychom tahali za výtahové lano takovým způsobem, že by se výtah rozjížděl konstantním zrychlením. Potom by vzhledem k výtahu působily setrvačné síly tak, že by hruška, kterou pustíme z ruky, zrychlovala se zrychlením g (kreslete si!). Ve druhém případě bychom s výtahem⁴ nehýbali, ale přesunuli do jeho blízkosti planetu tak, aby naše hruška opět padala se zrychlením g . Tentokrát by však padala z toho důvodu, že by na ni působila planeta gravitační silou⁵.

Nyní přijde ta podstatná část – osoba ve výtahu by nebyla schopna rozlišit, která z obou možností nastala. Mohli bychom buď hýbat planetou, nebo tahat za lano výtahu, ale v obou případech bychom viděli hrušku, jak padá se zrychlením g . Pokud bychom místo hrušky pustili

³⁾ Pokud svítíme světelným paprskem na zrcátko pevně upevněné na lanku, můžeme sledovat otočení lanka pomocí pohybu stopy paprsku na stínítku. Vysokých přesností dosáhneme několikametrovou vzdáleností stopy od zrcátka.

⁴⁾ Výtah musí být dostatečně malý, aby gravitační pole planety mohlo být považováno za homogenní. Jinak je možné k odlišení obou případů použít účinky slapových sil.

⁵⁾ Toto je pouze myšlenkový experiment – to znamená, že pochopitelně nikdy nebudeme hýbat se planetou, abychom urychlovali věci ve výtahu. Stačí nám, že si dokážeme představit, co by se v takovém případě stalo.

například jablko, pak by jeho zrychlení v obou případech bylo také g . V prvním případě je tato rovnost snad zřejmá, ve druhém plyne z rovností

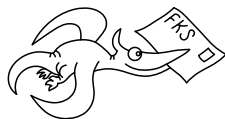
$$g = \frac{m_{g,\text{hruška}}}{m_{i,\text{hruška}}} \frac{MGr}{r^3} = \frac{m_{g,\text{jablko}}}{m_{i,\text{jablko}}} \frac{MGr}{r^3} = a_{\text{jablko}},$$

kde jsme užili předpokládaného principu ekvivalence.

Sledováním pohybu jakéhokoli tělesa bychom tedy nebyli schopni rozlišit, zdali nastala první či druhá možnost, tedy zdali je zrychlováno důsledkem působení síly gravitační či setrvačné. Fakt, že na základě pohybu těles nemůžeme rozlišit, zdali za jejich urychlováním stojí gravitace nebo setrvačnost, údajně velmi fascinoval Einsteina a vedl jej k myšlence, že by oba druhy sil, tedy gravitační i setrvačné, mohly mít stejný původ. To byl jeden z prvních kroků, který jej vedl k formulaci jeho obecné teorie relativity; to už jsme se ale dostali opravdu daleko od tématu našeho seriálu⁶.

Úloha I. S ... princip ekvivalence

- Jaké by musely nastat podmínky, aby Galileův pokus nevyšel? Šikmá věž v Pise je vysoká $h = 55$ m, předpokládejte, že obě koule mají poloměr $R = 8$ cm a že jedna koule je vyrobena z olova o hustotě $\rho = 11300 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Jakou hustotu by musela mít druhá koule, aby rozdíl v časech dopadu obou koulí byl větší než $\Delta T = 0,3$ s?
- S jakou přesností ověřuje původní Eötvösovo měření rovnosti poměru (2) pro neutrony a protony, pokud ve dřevě tvoří neutrony 50 procent hmotnosti, zatímco v platině 60 procent hmotnosti? Zanedbejte hmotnost elektronů a vazebné energie.
- Ověřte užívaný předpoklad o tom, že v Budapešti je g'_s v porovnání s g zanedbatelné.



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail pro řešení: fykos-solutions@mff.cuni.cz

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

⁶⁾ Pokud by někoho problematika Obecné teorie relativity zajímala, vřele doporučujeme například učebnici B. F. Schutz: *A First Course In General Relativity*.