20. ročník, úloha II . E ... *vlny na vodě* *(8 bodů; průměr 3,92; řešilo 13 studentů)*

Na základě rozměrové analýzy najděte vztah pro rychlost vln na vodě. Teoretický vztah ověřte a najděte neznámé konstanty z měření rychlosti vln v závislosti na jejich vlnové délce. Uvědomte si, že existují dva typy vln – jedny jsou způsobené gravitací Země a druhé povrchovým napětím.

Úloha napadla Honzu Prachaře při čtení Feynmanových přednášek z fyziky.

Jednoho krásného večera si nejmenovaný řešitel úžasného FYKOSu vzpomněl, že se blíží termín odevzdání druhé série a on musí najít vztah pro rychlost vln v na vodě. Zajel si tedy k rybníčku o celkové hmotnosti M. Měsíček o hmotnosti m si jen tak svítil, vlnky na rybníčku o ploše S se jen tak proháněly a voda o hustotě ϱ si v něm jen tak žblunkotala. A protože zlatá rybka v tuhle pozdní noční hodinu již tuze chrápala na dně v hloubce l, musel si řešitel FYKOSák pomoci se svým problémem úplně sám.

Po chvíli přemýšlení došel k těmto vztahům:

$$v_g = A\sqrt{\frac{g}{\lambda}}\,, \tag{1}$$

$$v_g = A\sqrt{g(\lambda + \mathrm{konst})}\,, \tag{2}$$

$$v_g = A\sqrt{g\lambda}\,, \tag{3}$$

$$v_g = A\sqrt{g\lambda \,\mathrm{tgh}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}\,. \tag{4}$$

Tušíte, které mohou vystihovat reálnou situaci? Víte, co mají společného?

A jak to vypadá s přesným řešením?

Teorie

Vlnění na vodě je úžasně komplikovaný proces, kterého se zúčastňuje odhadem 10^{44} molekul (to odpovídá přibližně vlně tsunami). Myslíte, že bude jednoduché dospět k přesnému řešení? Asi ne, a proto si pomůžeme jinak.

Voda je nestlačitelná, a proto rozhodně není možný pohyb molekul vody v rámci jakéhosi sloupce vody na jednom místě nahoru a dolů. Kam by se v takovém případě ztrácela voda? Právě naopak, částečky vody se při ideálním harmonickém vlnění pohybují po trajektoriích tvaru kružnice [1]. Tenhle pohyb je ale nerovnoměrný, a to znamená působící sílu. Tou je tíhové zrychlení g, které by mělo v hledaném vztahu vystupovat.

Jaké veličiny mohou být podstatné?

Poloha Měsíce nebo jeho hmotnost jsou evidentně šílenosti (když tak jsou zahrnuté v gravitačním zrychlení). Další astronomická tělesa asi též nebudou podstatná. Ale co takhle hustota vody? Čím hustší je kapalina, tím větší je na ni působící tíha. Jenomže pozor, setrvačná síla je také větší tolikrát! Z toho intuitivně vychází, že rychlost vln nebude záviset na hustotě vody. Je to obdobné, jako když rychlost padajícího tělesa nezávisí na jeho hustotě.

Závisí rychlost vln na výšce vln? Nebo na hloubce vody? Představte si, že by náš řešitel viděl na rybníčku vlny o výšce dvou metrů, jenomže ten rybníček by byl skutečně malinký o hloubce deseti centimetrů. Nebylo by to divné? Jistá závislost, která tomuhle zabrání, tedy musí existovat. Jenže my budeme předpokládat, že náš rybníček je skutečně velmi hluboký a tyto vlivy zanedbáme. Z rozumných vlivů zůstává tedy jenom vlnová délka a gravitační zrychlení.

Zkombinujeme tedy gravitační zrychlení s vlnovou délkou. Jedním z rozumných (ne však jediným) vztahů tak bude (3).

Na povrchu vody ale existuje ještě jedna síla. Pokud někde nadzvedneme povrch kapaliny, zvětšíme tím její povrch, a tedy povrchovou energii kapaliny. Ta se bude snažit povrch zmenšit, tedy na místě, kde byla voda zdvižená, se snaží ustanovit rovnou hladinu. Voda má však nějakou pohybovou energii získanou při navrácení do rovnovážné polohy, kterou odevzdá sousední vodě, aby mohla stoupnout a zvýšit svou povrchovou energii, a tak dál. Takhle může na vodě existovat ještě druhý typ vlnění, způsobený povrchovým napětím. Není těžké uhádnout, že rychlost vlny bude v tomto případě záviset na povrchovém napětí σ. Teď použijeme obdobné argumenty jako výše u gravitačních vln. Předpokládáme, že rychlost závisí také na vlnové délce a speciálně tady také na hustotě, protože hustší kapalina se hýbe pomaleji (tentokrát už síla není úměrná hustotě). Po chvíli zkoušení zjistíme, že rozumnou kombinací se správným rozměrem je

$$v_\sigma = B\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho\lambda}}\,. \tag{5}$$

To, co jsme právě dočetli, nebylo nic jiného než návod, jak provádět rozměrovou analýzu. Podstatné je uvědomit si, jaké veličiny jsou podstatné. Je také zřejmé, jaká úskalí tahle metoda přináší. Stále nevíme nic o parametrech A a B. Nevíme nic o tom, kdy naše vzorečky mohou platit, a hlavně netušíme, zda jsou vůbec správné. Tohle může tedy rozřešit jenom experiment.

Experiment

Máme pořádně hlubokou a rozlehlou vodní nádrž. Vytvoříme v ní pořádně silnou sérii pravidelných vln, které budeme sledovat. Zjistíme, kolik vln vznikne v jisté délce, a tím určíme jejich vlnovou délku. Rychlost vln zjistíme změřením času potřebného k tomu, aby čelo vlny projelo jistou dráhu. Experiment nezapomeneme zopakovat pro různé vlnové délky, protože jenom tak můžeme zkoumat jakoukoliv závislost na vlnové délce.

Jenomže náhle procitneme ze sna a zjistíme, že jedinou vodní plochou v našem dohledu je vana. A máme problém, protože všechno, co jsme odvodili, bylo však platné jenom pro velikou hloubku. Nezbude nic jiného, než napustit vanu.

Po prvních pokusech vytvořit pravidelné vlnění si ale vzpomeneme na to, co vidí experimentální fyzik, a zjišťujeme, že i v tomhle bodě jsme se pořádně přepočítali. Co tedy s tím?

Vlnění jednoduše nezakážeme interferovat, a tak nezbývá, než opět přivřít obě oči a pokusit se změřit, co se dá. Při měření a vyhodnocení těchto měření však již naše oči budou opět otevřené a my nezapomeneme na chybu měření!

K těmto hodnotám se dopracovali někteří z řešitelů a opravovatelů:

Tabulka uvádí experimentální hodnoty konstant ze vztahů (3) a (5).

Experimentátor	Konstanta ze vztahu (3)	Konstanta ze vztahu (5)
Jan Jelínek	$A = 0{,}40 \pm 0{,}06$	$B = 4 \pm 3$
Lukáš Malina	$A = 0{,}40 \pm 0{,}03$	$B = 2{,}5 \pm 0{,}5$
Jakub Benda	$A = 0{,}31 \pm 0{,}01$	
Petr Vanya	$A = 0{,}33 \pm 0{,}01$	
Jano Lalinský	$A = 0{,}31 \pm 0{,}02$	$B = 12{,}1 \pm 5{,}9$

Střední hodnota a směrodatná odchylka našich měření vycházejí

$$A = 0{,}31 \pm 0{,}02\,, \qquad B = 12{,}1 \pm 5{,}9\,.$$

Tyto hodnoty ještě poopravíme o odhadnuté chyby

$$A = 0{,}31 \pm 0{,}05\,, \qquad B = 12 \pm 8\,.$$

Následně je porovnáme s teoretickými hodnotami

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \doteq 0{,}40\,, \qquad B = \sqrt{2\pi} \doteq 2{,}5\,.$$

A konstatujeme, že jsme v podstatě uspěli. Protože hodnoty uvedené v [1] se poměrně dobře blíží k našim naměřeným hodnotám. Druhou záležitostí je také přesnost měření. V případě gravitačních vln to ještě ujde, ale protože povrchové vlny jsou kratší, je přesnost mnohem menší a měření má spíše orientační charakter.

Mimochodem, naši situaci nejlépe vystihuje vzorec (4), jak se dozvíte z [2].

Závěr

A na závěr již jenom čistě řečnická otázka: „Řešitelé, kteří znali teoretické hodnoty konstant A a B, se jim přiblížili měřením více než ti, kteří jejich hodnoty neznali. Proč?“

Literatura

[1] Feynman, R., P., Leighton, R., B., Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky I.* Fragment 2000, strana 695.
[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Ocean_surface_wave`
[3] `http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/waves/wavemotion.html`

Peter Zalom
`peter@fykos.mff.cuni.cz`
Ján Lalinský
`jano@fykos.mff.cuni.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.