

JAN PRACHAŘ A KOLEKTIV

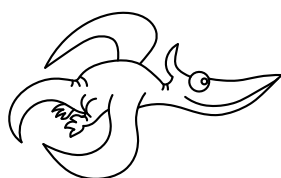
Fyzikální korespondenční seminář

XX. ročník – 2006/07



matfyzpress

VYDAVATELSTVÍ MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTY
UNIVERZITY KARLOVY V PRAZE



Obsah

Předmluva	4
Zadání teoretických úloh	6
Řešení teoretických úloh	14
Zadání experimentálních úloh	69
Řešení experimentálních úloh	70
Seriál o kvantové fyzice	88
1. Historický úvod	88
2. Matematický aparát kvantové mechaniky	90
3. Základy kvantové mechaniky	100
4. Schrödingerova rovnice a její řešení	107
5. Skládání impulsmomentů	115
6. Pokročilé partie kvantové mechaniky	123
7. Za hranicemi kvantové mechaniky	130
Řešení úloh ze seriálu	134
Akce FYKOSu	148
Podzimní soustředění	148
Jarní soustředění	151
Týden s aplikovanou fyzikou	153
FYKOSí Fyziklání	155
Pořadí nejlepších řešitelů	158



Předmluva

Milý čtenáři,

v rukou držíš ročenku XX. ročníku Fyzikálního korespondenčního semináře (FYKOSu) MFF UK, který proběhl ve školním roce 2006/07.

FYKOS je nejstarší a největší fyzikální korespondenční soutěž pro střední školy u nás. Seminář organizují studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a zaměstnanci Ústavu teoretické fyziky. Snažíme se vyhledávat studenty se zájmem o přírodní vědy, techniku a hlavně o fyziku. Naším cílem je rozvíjet talent a fyzikální myšlení, protože člověk, který se umí nad (nejen fyzikálními) problémy zamyslet a cítí touhu dobrat se k nějakému řešení, se v životě dobře uplatní.

V průběhu roku řešitelé pravidelně obdrží zadání sedmi úloh, z nichž je jedna experimentální. Zadávané úlohy nejsou vůbec podobné těm, které se počítají ve škole v hodinách fyziky. Řešiteli nestačí dosadit zadané hodnoty do známého vzorce, úlohu musí vyřešit vlastním důvtipem, někdy musí hledat analogie či teorii v literatuře. Účastníci řeší úlohy dle vlastního výběru (někteří i všechny) a svá řešení posílají běžnou poštou či elektronicky organizátorům semináře. Ti úlohy opraví, okomentují, obodují a zašlou zpět účastníkům spolu s komentáři, ve kterých se řešitelé seznámí se vzorovými řešeními a dozví se o chybách svých vlastních postupů. Na základě bodování je sestavována průběžná výsledková listina a na konci každého ročníku jsou nejlepší řešitelé náležitě odměněni.

Řešitelům během roku spolu se zadáním posíláme několikastránkový text (tzv. seriál na pokračování) z vybrané partie vysokoškolské fyziky (letos to byla kvantová fyzika), kterou se jim snažíme co nejlépe přiblížit. S tímto textem se řešitelé v průběhu roku seznamují, pochopení textu si ověřují na příkladech. Každé zadání doprovází jedna úloha, která se tematicky váže k seriálu.

Kromě zasílání zadání a řešení pořádá seminář řadu dalších akcí. Zejména to jsou dvě týdenní soustředění, bez kterých si FYKOS snad nelze ani představit. Probíhají vždy na jaře a na podzim, zúčastní se jich asi 30 nejlepších řešitelů. Náplň soustředění tvoří přednášky z mnoha oborů fyziky a matematiky. Odpoledne účastníci experimentují – seznamují se s připravenými fyzikálními experimenty, měří a zpracovávají výsledky. Jako odpočinek slouží týmové fyzické hry v přírodě.

Další akcí je Den s experimentální fyzikou, na kterém ve spolupráci s jednotlivými katedrami MFF UK, Akademií věd ČR a Ústavem jaderného výzkumu umožňujeme našim řešitelům návštěvu několika pracovišť, kde se dělá opravdová fyzika.

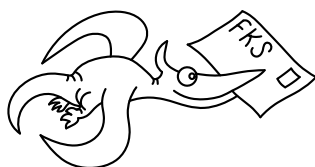
Letos se nám navíc podařilo připravit dvě nové akce. Jednak Fyziklání, což je soutěž v řešení příkladů pro pětičlenné týmy ze středních škol. O soutěž byl veliký zájem, na naši fakultu přijelo 21 týmů ze škol v Česku, ale i na Slovensku. Dále proběhl Týden s aplikovanou fyzikou, v rámci kterého jsme navštívili několik průmyslových pracovišť v Česku.

Na našich www stránkách <http://fykos.mff.cuni.cz> mohou nejen řešitelé semináře sledovat aktuální dění. Kromě zadání a řešení úloh ze současného i minulých ročníků zde naleznete průběžně aktualizovanou výsledkovou listinu, fotky a repor-

táže ze soustředění i jiných akcí, diskusní fórum, podrobné informace a pravidla pro připojení se k semináři a ještě mnohem více, ostatně posuďte sami.

Tato ročenka obsahuje kompletní zadání a řešení teoretických i experimentálních úloh. Zadání jsou záměrně oddělena od řešení, chceme tím ponouknout každého čtenáře, aby před nalistováním stránky s řešením strávil alespoň chvíli nad zadáním a rozmyslel si, jak by danou úlohu řešil on. Další částí je Seriál o kvantové fyzice, který je doplněn úlohami. Na konci se nachází krátké povídání o soustředěních a dalších akcích a seznam nejlepších řešitelů tohoto ročníku.

Pokud tě FYKOS zaujme natolik, že by ses chtěl stát účastníkem nebo se pouze na něco zeptat, ať už se to týká fyziky či studia na MFF, neváhej a napiš nám. Jsme nepřetržitě k dispozici na e-mailu fykos@mff.cuni.cz, případně také na poštovní adrese a telefonu.



FYKOS

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta

Ústav teoretické fyziky

V Holešovičkách 2

180 00 Praha 8

tel: +420 221 912 504 (Doc. Pavel Krtouš, Ph.D.)

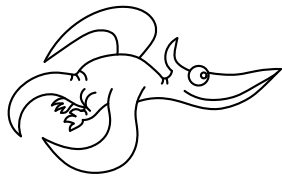
www: <http://fykos.mff.cuni.cz>

e-mail: fykos@mff.cuni.cz

A jak vypadal XX. ročník očima statistiky? FYKOSu se zúčastnilo 69 řešitelů z 45 středních a základních škol. Přehled nejúspěšnějších škol uvádíme dále. Organizátoři opravili celkem 901 jednotlivých úloh.

Pořadí škol

Název školy	Počet řešitelů	Průměr	Celkem
G Ludovíta Štúra, Trenčín	9	41,9	377
G Ch. Dopplera, Praha	5	59,8	299
G Jana Keplera, Praha	2	80	160
G Jana Nerudy, Praha	1	143	143
G Konstantinova Praha	1	112	112
G Terezy Novákové, Brno	2	50,5	101
G Český Krumlov	1	100	100
G Nad Alejí, Praha	1	94	94
G Jihlava	1	89	89
G Lesní čtvrť, Zlín	1	87	87
PČG Karlovy Vary	1	86	86
G Frenštát pod Radhoštěm	1	71	71
G P. Bezruče, Frýdek-Místek	2	32,5	65
SPŠ Hronov	5	12,6	63



Zadání teoretických úloh

Hluboký vesmír, 2225

Federace dostala zprávu, že v sektoru 0056 dochází ke shlukování tajemné hmoty s podivuhodnými vlastnostmi. Hmota je temná, neboť vůbec neinteraguje s elektromagnetickým zářením, její částice interagují pouze gravitačně. Federace tudíž vyslala malou dvoučlennou vědeckou loď na průzkum. Během cesty se však porouchal počítač a loď narazila do asteroidu, což ji vychýlilo z kurzu.

Posádce se povedlo nouzově přistát na neznámé planetě třídy M. Během samovolného pádu se zahříval trup lodi vlivem kontaktu s atmosférou. Z rychlosti pádu určila posádka gravitační zrychlení na planetě $0,5g$.

Planetu pokrývaly hlavně lesy s neuvěřitelně vysokými stromy. Trikorderový scan určil, že se velmi podobají listnatým stromům na Zemi a dosahují největší možné výšky. Ačkoli se chlubily listím, měly stejné šišky jako pozemské jehličnany, včetně struktury a funkce.

Při dalším průzkumu planety členové posádky narazili na humanoidy, kteří obývali stromy a mohli by je transportovat do horních pater lesa, odkud by šel poslat nouzový signál. Tamější humanoidi používali k vysílání signálů barevné kamínky, které propouští světla různých barev, a když se světla jednotlivých kamínků zkombinují, dávají další barvy.

Po vyslání signálu z výšky stromu brzy dorazila vesmírná loď USS Odyssey a vyzvedla trosečníky. Ti pak do 16. října 2006 poslali závěry z mise velitelství hvězdné flotily na Zemi.

Úloha I.1 ... tajemná hmota

Tajemná hmota je homogenní a izotropní oblak plynu na počátku v naprostém klidu. Tento oblak o celkové hmotnosti M má přesně tvar koule. Zjistěte, jak se (lokálně) v objemu oblaku bude měnit hustota při gravitačním kolapsu. Okomentujte rychlost hroucení v okamžiku, kdy bude všechna hmota těsně před zhroucením do jednoho bodu. (řešení str. 14)

Úloha I.2 ... srážka s asteroidem

Určete, jaký úhel po srážce svírala trajektorie asteroidu a vědecké lodi. Před srážkou byl kulový asteroid v klidu a měl stejnou hmotnost jako loď. Uvažte, že loď chrání štíty, které mají kulový tvar. (řešení str. 18)

Úloha I.3 ... míchání barev kamínků

Vysvětlete, proč zkombinováním světél ze dvou barevných kamínků dostanou vědci jinou barvu, než když přímo smíchají dvě barvy, které kamínky mají. (řešení str. 19)

Úloha I.4 ... kapitánův deník

Prispějte něčím zajímavým do deníku vědecké výpravy (obrázkem či jiným uměleckým výtvozem, dobrodružnou příhodou v délce denního hlášení, fyzikálním pozorováním, ...). (řešení str. 19)

Úloha I.P ... výška stromů

Odhadněte výšku stromů na planetě. Uvažte všechna možná hlediska, která mohou výšku stromů ovlivnit. (řešení str. 21)

Úloha II.1 ... Čeňkova pila

Čeňkova pila se nachází na soutoku řek Vydry a Křemelné na Šumavě. Pojmenovaná je podle obchodníka s dřevem Čeňka Bubeníčka, který zde pilu v 19. století postavil. Na jejím místě nyní stojí vodní elektrárna, která je stále v provozu a patří mezi technické památky.

Vodní elektrárna využívá výškový rozdíl hladin nad a pod turbínou 10 m, výkon elektrárny je 96 kW. Voda je na turbínu přiváděna vantroky¹, které jsou široké 1 m, a voda v nich sahá do výšky 1,5 m. Při pozorování proudící vody jsme odhadli, že uprostřed vantroky má proud vody rychlost $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Odhadněte, jaká je účinnost elektrárny. (řešení str. 24)

Úloha II.2 ... drtivý dopad

Pokuste se najít libovolný vztah mezi rychlostí meteoroidu dané hmotnosti těsně před dopadem na povrch Země a poloměrem vzniknuvšího kráteru.

(řešení str. 25)

Úloha II.3 ... osvětlení stolu

Navrhněte rozmístění zářivek na stropě pracovny, který je ve výšce 3 m nad deskou stolu tak, aby intenzita osvětlení na ploše stolu nekolísala víc než o 0,1 %.

(řešení str. 27)

Úloha II.4 ... jak je daleko Slunce?

Vraťte se zpátky do 18. století do doby, kdy ještě nebyla známa konstanta v Newtonově gravitačním zákoně ani vzdálenost Země od Slunce či jiných planet. V té době Edmond Halley (astronom, který poznal, že kometa pozorovaná v roce 1682 je stejná jako ta v letech 1456, 1531 a 1607) navrhl určit vzdálenost Slunce od Země proměřením přechodu planety Venuše přes sluneční kotouč. Přechody Venuše se bohužel odehrávají nepravidelně. Přicházejí v párech po osmi letech, ale potom k nim nedochází sto let i déle a za Halleyho života nedošlo k žádnému.

Myšlenka nezapadla, doutnala, a když se blížil další přechod v roce 1761, vědecký svět byl připraven. Vědci se vydali do sta míst na světě (mj. na Sibiř, do Číny, Jižní Afriky, Indonésie). Byl to první vědecký podnik v historii založený na mezinárodní spolupráci.

Po návratu měřičů se dospělo k závěru, že měření přechodu bylo v podstatě nezdařem. Ironií je, že jedním z problémů byl příliš velký počet pozorování, která se

¹) Vantroky jsou dřevěná stavba – koryto obdélníkového průřezu, kterým je přiváděna voda na mlýnské kolo.

často ukázala jako protikladná. Úspěšné měření Venušina přechodu naopak uskutečnil kapitán James Cook v roce 1769 z jednoho slunného vrchu na Tahiti. Po jeho návratu měli astronomové dostatek informací, aby vypočítali, že průměrná vzdálenost ze Země ke Slunci činí zhruba 150 miliónů kilometrů.

Na vás je, abyste tak jako Edmond Halley vymysleli, jak lze z měření přechodu Venuše určit vzdálenost Země od Slunce. Samozřejmě neznáte jiná než tehdejší data: poloměr Země a dobu oběhu Země a Venuše kolem Slunce z astronomických pozorování. (řešení str. 29)

Úloha II. P ... třepání čajem

Vysvětlete, proč když zatřepeme sypaným čajem v plechovce, zůstanou větší kousky lístků spíše nahoře než dole. Řešení můžete obohatit vlastním pozorováním. (řešení str. 31)

Úloha III. 1 ... obložený létající talíř

Na zámořském parníku připravuje pro posádku jídlo kuchař Thomas. Na podávání talířů má šikovní zařízení. Pružinový držák udržuje vrchní talíř pořád ve stejné výšce. Vzdálenost mezi talíři je 1 cm. A protože je moře bouřlivé, sloupec 25 talířů pěkně kmitá. Jaká je frekvence těch kmitů? (řešení str. 32)

Úloha III. 2 ... přistání na Titanu

V pátek 14. ledna 2005 na povrchu Titanu hladce přistála sonda Huygens, pojmenovaná po objeviteli Titanu. Mateřská sonda Cassini ji nesla k Saturnu 7 let. Jedná se dosud o nejvzdálenější přistání umělé sondy v dějinách.

Přistávací modul o čisté hmotnosti (bez paliva) m , vybavený reaktivním motorem, se vznášel v klidu nad povrchem měsíce (gravitační zrychlení je zde g). Měl k dispozici palivo o hmotnosti M a zásobu energie o velikosti E_0 , kterou využíval k urychlování paliva (rychlost a množství paliva vypuzovaného z motoru lze libovolně měnit). Jaká je maximální doba, po kterou se sonda mohla vznášet v konstantní výšce? Poradte řídicímu středisku, jakým způsobem by mělo naprogramovat rychlost a množství vypuzovaného paliva, aby této maximální doby dosáhli. (řešení str. 33)

Úloha III. 3 ... vzdálenost vizuální dvojhvězdy

Z redukovaných hvězdných spekter složek dvojhvězdy (podle přítomných spektrálních čar, z nichž žádná v tomto případě nemění svou polohu v čase) jsme určili spektrální třídy obou hvězd a následně odhadli jejich hmotnosti na 2 a 3 hmotnosti Slunce. Z pozorování dalekohledem s ohniskovou vzdáleností 3 m víme, že složky skutečně obíhají v neměnné vzdálenosti 5 úhlových vteřin od sebe jednou za 50 let.

Dokážete z těchto informací určit vzdálenost dvojhvězdy od Slunce? Pokud ano, uveďte, jak jste jednotlivé informace použili, anebo nepoužili, a výsledek vhodně zaokrouhlete. Také okomentujte, jaký vliv na něj má nepřesná znalost údajů, zejména hmotností. (řešení str. 37)

Úloha III.4 ... topení Alberta Einsteina

Albert Einstein se v důchodovém věku (narozdíl od svých vrstevníků šťourajících se v zahrádce) zamýšlel nad různými paradoxními jevy. V zimě si všiml, že když ohřívá vodu v topení přímo ohněm, účinnost je velmi malá.

Napadlo ho vyzkoušet jiný postup. Vzít ideální tepelný stroj a použít kotel a venkovní vzduch jako teplou a studenou lázeň. Práci, kterou z tohoto stroje získá, pak vložit do jiného ideálního tepelného stroje, který bude odebírat teplo vzduchu a předávat jej vodě. Jestliže jsou teploty kotle, vody a vzduchu T_1 , T_2 a T_3 , jaká je účinnost ohřevu vody? Nedochozí náhodou k porušení druhého termodynamického zákona? (řešení str. 38)

Úloha III.P ... akrobat na lyžích

Jistě znáte lyžařskou disciplínu akrobatické skoky. Lyžař po rozjezdu z kopce najíždí na můstek a skáče do vzduchu. Před dopadem zvládne skokan provést několik vrutů a salt. Vysvětlete, jak to lyžař dělá – co musí udělat, aby se začal otáčet tak, jak chce. Jak vyvrátíte tvrzení, že podle zákona zachování momentu hybnosti se musí skokan po celou dobu skoku otáčet kolem stejné osy a stejnou rychlostí?

(řešení str. 40)

Úloha IV.1 ... nakupujeme minerálky

Určitě jste si v super(hyper)marketu všimli, že plastová láhev oblíbeného nápoje se při rozjetí pohyblivého pásu pokladny začne otáčet a k pokladní ji často musíte postrčit až rukou. Proč to tak je?

Zkuste analyzovat následující modelový případ. Láhev je položena na pás osou kolmo na směr pohybu pásu a láhev i pás jsou v klidu. Náhle se pás rozjede konstantní rychlostí $v = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Jakou výslednou rychlostí se bude pohybovat láhev? Nejdříve analyzujte, jak se budou chovat různé idealizace – jako třeba tuhý válec. Pak si uvědomte, že láhev je plná nápoje, který se nerad otáčí. Pro jednoduchost uvažujte viskozitu nápoje za nulovou, pak se zamyslete nad tím, jak do hry vstoupí viskozita. (řešení str. 42)



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Úloha IV. 2 ... švestkové víno v číně

V oblíbené čínské restauraci na Vinohradech dávají každému hostu k účtu jako pozornost švestkové víno. Nápoj nalévají do malých keramických mističek s dvojitým dnem (viz obr. 1). Horní dno je skleněné a je pod ním vidět obrázek sedící Číňanky (viz obr. 2). Po vypití vína obrázek Číňanky zmizí (viz obr. 3). Podrobně vysvětlete, proč se tak stane. Prázdná mistička s vypouklým skleněným dnem je vyfocena na obrázku 4.

Barevné a kvalitnější obrázky najdete na našich webových stránkách.

(řešení str. 44)

Úloha IV. 3 ... dostavba Temelína

Odhadněte tloušťku vody potřebnou k odstínění záření z jaderného reaktoru s výkonem 980 MW v plánovaném novém bloku JE Temelín. Z celkové energie uvolněné při štěpení jádra uranu připadne zhruba 82 % na kinetickou energii fragmentů, 6 % odnesou neutrina, po 6 % mají neutrony a gama fotony.

Nápověda. Pravděpodobnost, že částice projde materiálem do hloubky d , je přibližně rovna $e^{-\sigma nd}$, kde $n = N/V$ je hustota molekul materiálu (v našem případě počet molekul vody v 1 m^3) a σ je účinný průřez (cross section) pro absorpci částice na molekule. Účinný průřez má rozměr plochy (často se užívá jednotka barn = 100 fm^2) a závisí na energii částic. Hodnoty účinných průřezů se pokuste najít na internetu nebo v příslušných tabulkách.

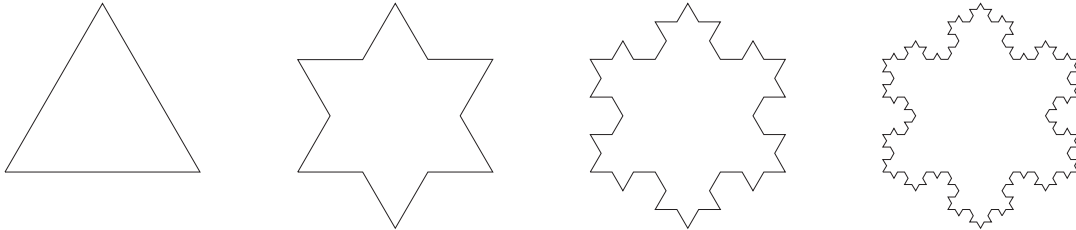
(řešení str. 44)

Úloha IV . 4 ... Kochova vločka

Určete moment setrvačnosti Kochovy vločky zhotovené z homogenního plechu vzhledem k ose kolmé na její rovinu a procházející jejím středem. Uvažujte, že vločka má hmotnost m a průměr a .

Kochova vločka je útvar vzniklý iterativním lepením vždy třikrát menších rovnostranných trojúhelníků na strany předchozího útvaru (viz obr. 5). Průměrem Kochovy vločky rozumíme vzdálenost vrcholů jejích protějšších cípů.

(řešení str. 47)



Obr. 5. První čtyři iterace při vytváření Kochovy vločky

Úloha IV . P ... mastný papír

Jistě jste se již setkali s tím, když kapka oleje ukápla na papír. Z bílého papíru se rázem stal papír průsvitný. Vysvětlete, čím to je. Najděte ve svém životě případy, kdy se uplatňuje stejný jev, avšak třeba v úplně jiné situaci. (řešení str. 50)

Úloha V . 1 ... smrt klavíristy

Z okna výškové budovy vypadl klavír i s klavíristou, který po celou dobu pádu hrál zděšené A. O k pater pod tímto oknem odpočíval nebohý umývač oken. Jak velké je k , jestliže poslední, co umývač slyšel, bylo Ais, tedy tón o půltón vyšší? Rychlost zvuku v daném vzduchu je $347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, výška jednoho patra je 3,1 m.

(řešení str. 52)

Úloha V . 2 ... kapitán Kork opět zasahuje

Deník kapitána Korka: „Hvězdný čas 51824,2. Budoucnost hvězdné flotily je znovu ohrožena. Romulani se nás pokoušejí zničit. Zaútočila na nás jejich nová bitevní loď typu Karusel s laserovým otáčivým dělem. Doktor Spok rozhodl, že není možno se s nimi utkat a musíme zaujmout výhodnější postavení co nejdále od nepřítele. Náš palubní vědecký pracovník bohužel ale zrovna spí a my ho nechceme budit. Jsme zřejmě odsouzeni k záhubě...“

Poradte kapitánovi, jaký manévr má provést, aby unikl jisté zkáze. Hvězdná loď Enterprise má tvar koule o poloměru R , na začátku je ve vzdálenosti r_0 . Dělo Karuselu se otáčí úhlovou rychlostí ω a střílí vždy do míst, kde jeho laserový senzor zjistí přítomnost Enterprise. Jakou nejmenší rychlostí se může Enterprise pohybovat, aby Karuselu ještě unikla? (řešení str. 53)

Úloha V . 3 ... odporová řada

Vžijte se do role ředitele firmy, která chce jako první na světě začít vyrábět rezistory pro všeobecné použití. Na základě průzkumu trhu bylo zjištěno, že poptávka po rezistorech je rovnoměrně rozdělena v rozmezí 1Ω – $10 \text{ M}\Omega$. Z technických důvodů však můžete vyrábět pouze konečné množství, řekněme 169, různých rezistorů.

Pokud zákazník požaduje rezistor s hodnotou R_p a vy mu nabídnete rezistor s hodnotou R_n , bude „míra jeho nespokojenosti“ dána vztahem $(1 - R_p/R_n)^2$. Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla střední nespokojenost všech zákazníků minimální. Pro jednoduchost řekněme, že první a poslední rezistor z vaší nabídky musí mít hodnoty $1\ \Omega$ a $10\ \text{M}\Omega$.

(řešení str. 54)

Úloha V.4 ... exhumace dárečku od Buffala

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit,“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v $9/10$ výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte.

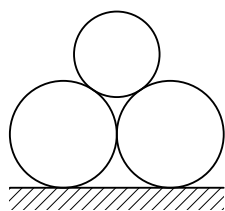
Do jaké výšky by se musel Buffalo trefit, aby petrolej stříkal nejdále?

(řešení str. 57)

Úloha V.P ... co je to za okna?

Nedávno si nechal jeden z organizátorů doma vyměnit okna. Místo starých dřevěných přišla nová plastová s dvojitými skly. Okna se dodávají v několika variantách podle toho, jestli je prostor mezi skly evakuován anebo naplněn některým ze vzácných plynů. Navrhněte způsob, jak zjistit, kterou variantu organizátorovi dodali, ovšem bez trvalých následků na oknech.

(řešení str. 58)



Obr. 6

Úloha VI.1 ... tři válce děda vševěda

Zjistěte, za jakých podmínek bude soustava tří válců na obrázku 6 v klidu a nerozkutálí se. Hustota materiálu válců je ρ , spodní válce mají poloměr R , horní válec má poloměr r , délka válců je l . Součinitel tření je mezi všemi povrchy stejný.

(řešení str. 61)

Úloha VI.2 ... podivná atmosféra

Okolo planety o poloměru R se nachází atmosféra, jejíž index lomu se mění s výškou podle vztahu $n = n_0 - \alpha h$. Zjistěte, v jaké výšce h nad povrchem planety se světelný paprsek vyslaný tečně k povrchu bude pohybovat po kružnici okolo planety.

(řešení str. 63)

Úloha VI.3 ... čtverák čtverec

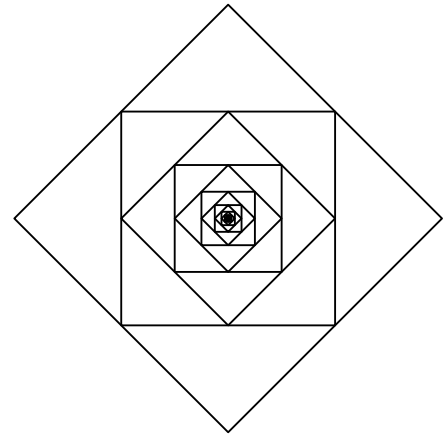
Obvod na obrázku 7 vznikne spojením nekonečně mnoha drátěných čtverců, přičemž každý následující je $\sqrt{2}$ -krát menší. Drát, ze kterého je obvod vyroben, o délce rovné straně největšího čtverce má odpor R . Určete odpor obvodu mezi krajními body vlevo a vpravo.

(řešení str. 64)

Úloha VI.4 ... zákrytová dvojhvězda

Magnituda jisté zákrytové dvojhvězdy se mění se čtyřdenní periodou v této posloupnosti:

vedlejší minimum	$m = 3,5$,
maximum	$m = 3,3$,
hlavní minimum	$m = 4,2$,
maximum	$m = 3,3$.



Obr. 7. Drátěná síť
neznámého odporu

Větší složka této dvojhvězdy má také vyšší teplotu než její průvodce. Za předpokladu, že Země leží v oběžné rovině dvojhvězdy, vypočítejte magnitudy jednotlivých složek a poměr jejich délkových rozměrů. Převodní vztah mezi magnitudou m hvězdy a osvětlením E , které způsobuje, je

$$m = -2,5 \log (E/E_0),$$

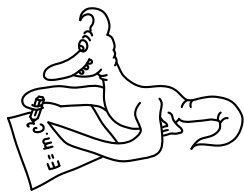
kde E_0 je pevně definovaná hodnota.

(řešení str. 66)

Úloha VI.P ... jak vypadají ufoňi?

Zamyslete se nad tím, jestli by nějaké zvíře mohlo teoreticky komunikovat pomocí elektromagnetických vln rádiových frekvencí (10 Hz–100 MHz). Zkuste navrhnout, jak by vypadaly biologické ekvivalenty potřebných elektrických součástek.

(řešení str. 68)



Řešení teoretických úloh

Úloha I.1 ... tajemná hmota

Tajemná hmota je homogenní a izotropní oblak plynu na počátku v naprostém klidu. Tento oblak o celkové hmotnosti M má přesně tvar koule. Zjistěte, jak se (lokálně) v objemu oblaku bude měnit hustota při gravitačním kolapsu. Okomentujte rychlost hroucení v okamžiku, kdy bude všechna hmota těsně před zhroucením do jednoho bodu.

Pro začátek si všimněme, že rozložení hmoty na počátku kolapsu je sféricky symetrické. Protože neuvažujeme žádné vnější působení na oblak, který je navíc zpočátku v klidu, snadno nahlédneme, že kulová symetrie se v průběhu kolapsu zachová a že rychlost hmoty v každém bodě oblaku bude mít pouze radiální složku.

Body, které na počátku kolapsu ležely na téže kulové ploše (rozumí se se středem v centru oblaku), tedy budou mít i nadále všechny stejnou vzdálenost od centra. Proto vzdálenost bodů, které ležely na počátku ve vzdálenosti r_0 , je v čase t dána hodnotou nějaké funkce $R(r_0, t)$, kterou se snažíme najít. Funkce R pak plně popisuje průběh kolapsu oblaku.

Tato hledaná funkce R musí splňovat pohybovou rovnici, kterou nyní odvodíme (a posléze vyřešíme).

Zrychlení bodů, které na počátku ležely ve vzdálenosti r_0 od středu, je dáno druhou parciální derivací R podle času (přitom kladné hodnoty odpovídají zrychlení směřujícímu od středu oblaku). Jak ale víme, je zrychlení udělované hmotnému bodu gravitační silou rovno intenzitě gravitačního pole v daném bodě.

Tok intenzity pole hranicí uzavřené oblasti je roven $4\pi GM$, kde M je celková hmotnost obsažená v této oblasti (obdoba Gaussova zákona známého z elektromagnetismu, která však platí pro každé pole, jehož potenciál závisí na vzdálenosti od bodového zdroje jako $1/r$). Máme-li tedy kulově symetrický zdroj, bude i intenzita jím buzeného gravitačního pole kulově symetrická (tj. závislá pouze na vzdálenosti od středu a mající jen radiální složku) – označme její velikost ve vzdálenosti r od středu jako $K(r)$. Uvažovaný tok je pak roven $4\pi r^2 K(r)$, což má být, jak jsme řekli, rovno $4\pi GM$, odtud $K(r) = GM/r^2$.²

Tak konečně dospíváme ke kýžené pohybové rovnici, která zní

$$\ddot{R}(r_0, t) = -\frac{G}{R^2(r_0, t)} M(r_0, t).$$

Zde $M(r_0, t)$ označuje hmotnost obsaženou v kouli o poloměru $R(r_0, t)$ (pozor, ne r_0) v čase t . Tento poměrně nevinný člen v naší rovnici nám ovšem způsobí značné

²) Toto je známý výsledek, který říká, že gravitační pole buzené sféricky symetrickým zdrojem je v určitém bodě ve vzdálenosti r od středu závislé pouze na celkové hmotnosti uzavřené v kouli o poloměru r a je stejné, jako kdyby byla celá tato hmotnost soustředěna ve středu. „Vnější“ hmota gravitační pole v daném bodě neovlivňuje.

problémy. Závísí totiž na průběhu $R(r_0, t)$ pro všechna r_0 (jinak řečeno, jednotlivé „slupky“, na které si můžeme oblak rozložit, se teoreticky mohou v průběhu kolapsu navzájem „předbíhat“; ve skutečnosti to sice nedělají, ale to zatím nevíme). V důsledku toho se z naší pohybové rovnice stane nepěkný hybrid mezi diferenciální a integrální rovnicí.³

Máme tedy řešit něco, na co nemáme žádný rozumný aparát. V takovém případě většinou zbývá jen jediná použitelná možnost – doufat, že řešení bude v nějakém pěkném tvaru, a pokusit se jej uhodnout (samozřejmě nebudeme hádat jen tak nazdařbůh, ale pokusíme se své odhady podepřít nějakými rozumnými argumenty).

Uvidíme, že oblak se bude hroutit rovnoměrně (v tom smyslu, že vzdálenosti jednotlivých bodů od středu jsou v každém okamžiku přímo úměrné jejich původním vzdálenostem v čase $t = 0$). K nalezení správného řešení stačí také slabší předpoklad, že je-li bod A na počátku dále od středu než bod B , pak tomu tak bude i po celou dobu kolapsu. Ukážeme jednu z úvah, které nás mohly přivést k určité hypotéze o bližší podobě průběhu hroucení.

Na počátku zřejmě platí, že hmotnost obsažená v kouli o poloměru r_0 je úměrná r_0^3 , intenzita gravitačního pole tedy roste úměrně r_0 , stejně tak velikost zrychlení hmoty ve vzdálenosti r_0 od středu. Selský rozum říká, že velikost rychlosti, kterou hmota nabere za nějaký malý čas Δt , bude také úměrná r_0 a vzdálenost, o kterou spadne hmotný bod, jenž byl původně ve vzdálenosti r_0 , jakbysmet. Co jsme tím ale dostali? Že nová vzdálenost každého bodu oblaku od středu je přímo úměrná jeho původní vzdálenosti. Celý oblak se tedy pouze „stejněměrně“ zmenšil a zůstal homogenní. Máme stejnou situaci jako na počátku⁴ (až na to, že nyní není oblak v klidu – rychlost hmoty v něm je však stále úměrná vzdálenosti od středu a to nám umožní úvahu aplikovat znovu). Zdá se, že homogenita oblaku by se mohla během kolapsu zachovávat. Potom by tedy funkce R měla být tvaru

$$R(r_0, t) = r_0 f(t),$$

kde $f(t)$ je nějaká funkce času (která v podstatě charakterizuje míru smrštění oblaku; hodnota $f(t) = 1$ je počáteční stav, $f(t) = 1/2$ znamená, že oblak se smrští na poloviční poloměr, atd.), a $M(r_0, t)$ by bylo rovno $4\pi \rho_0 r_0^3 / 3$ (nezávisle na čase – každý bod má „pod sebou“ stále stejnou hmotnost jako na začátku). Zkusíme dosadit do pohybové rovnice a uvidíme, jestli najdeme nějaké řešení v námi očekávaném tvaru. Po dosazení a pár elementárních úpravách dostaneme

$$\ddot{f} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3f^2}.$$

³⁾ Zvědavcům, kteří chtějí vědět, kde že tam je ten integrál, řekněme, že je schovaný ve výrazu $M(r_0, t)$. Můžete si ověřit, že platí $M(r_0, t) = \int_A 4\pi r^2 \rho_0 dr$, kde ρ_0 je počáteční hustota oblaku a integrujeme přes množinu A , která je dána jako $A = \{r \in \mathbb{R}^+ : R(r, t) < R(r_0, t)\}$. Tato množina může vypadat velmi divoce, pokud funkce $R(r, t)$ nebude prostá v r .

⁴⁾ Tato úvaha *vypadá* trochu jako matematická indukce, ale *není!* Indukci rozhodně nemůžeme použít v oboru reálných čísel. Zde jde spíše o takovou „berličku“, která nám ukáže další směr našich úvah.

Vida! Dobré znamení, z rovnic nám úplně vypadlo r_0 . Pokud si tedy poradíme s touto obyčejnou diferenciální rovnicí, máme vyhráno.

Podobné rovnice, ve kterých je druhá derivace hledané funkce závislá pouze na hodnotě této funkce, se řeší následujícím trikem. Vynásobme celou rovnici $2\dot{f}$. Na levé straně tak dostaneme derivaci \dot{f}^2 podle času, na pravé pak výraz $-\alpha\dot{f}/f^2$ (α je označení pro konstantu $8\pi G\rho_0/3$). Integrováním takto upravené rovnice podle času na levé straně dostaneme

$$\dot{f}^2 + C_1 = \int -\frac{\alpha\dot{f}}{f^2} dt = \int -\frac{\alpha}{f^2} df = \frac{\alpha}{f} + C_2.$$

Obě aditivní konstanty si můžeme shrnout do jedné a \dot{f} si vyjádříme jako $\dot{f} = -\sqrt{\alpha/f + C}$ (znaménko minus volíme, protože nás zajímá kolaps, tedy proces, při němž se f zmenšuje s časem).

Neznámá konstanta C řešení komplikuje, tak se jí hned zbavíme. Z toho, jak jsme si zavedli funkci f , plyne, že v čase $t = 0$ je $f(0) = 1$ a $\dot{f}(0) = 0$. Aby tedy platila výše uvedená rovnost, musí zřejmě být $C = -\alpha$, máme tedy

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt} = -\sqrt{\alpha\left(\frac{1}{f} - 1\right)}.$$

Tuto rovnici můžeme vyřešit takzvanou separací proměnných. Než to ale uděláme, pozastavme se u ní na chvíli, protože nám dá odpověď na to, jak se chová rychlost kolapsu, když se poloměr oblaku blíží nule. Jestliže uvažujeme stále menší velikost oblaku, jinými slovy stále menší f , jde pravá strana rovnice do minus nekonečna, tedy rychlost hroucení roste nade všechny meze (asymptoticky jako $1/\sqrt{r}$). Musíme si ale uvědomit, že toto platí pouze v klasické fyzice. Ve skutečnosti by se na malých vzdálenostech začaly uplatňovat jednak efekty speciální teorie relativity, které by nedovolily, aby rychlost kolapsu překročila rychlost světla, a pak také efekty obecné relativity – horizont událostí, dilatace času, změny délek v radiálním směru.

Vraťme se teď k naší rovnici. Upravíme si ji na tvar

$$dt = -\frac{df}{\sqrt{\alpha(1/f - 1)}}.$$

Nyní můžeme na obě strany vložit znak integrálu a integrovat od času $t = 0$ do t

$$t = -\int_{f(0)=1}^{f(t)} \frac{1}{\sqrt{\alpha(1/f - 1)}} df.$$

Substitucí $u \equiv \sqrt{1/f - 1}$, $df = -2u/(u^2 + 1)^2 du$ si upravíme integrál na pravé straně a dostaneme

$$t = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{u(t)} \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du.$$

Integrál vypočítáme trikem. Pokusme se vypočítat metodou per partes integrál $\int 1/(u^2 + 1) du$. Derivovat budeme funkci $1/(u^2 + 1)$ a integrovat funkci 1. Pak dostaneme

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{u}{u^2 + 1} - \int \frac{-2u}{(u^2 + 1)^2} u du = \frac{u}{u^2 + 1} + 2 \int \frac{(u^2 + 1) - 1}{(u^2 + 1)^2} du.$$

Upravíme-li si ještě trochu pravou stranu, máme

$$\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \frac{u}{u^2 + 1} + 2 \int \frac{1}{u^2 + 1} du - 2 \int \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du,$$

odtud si už snadno vyjádříme hledaný integrál jako

$$\begin{aligned} \int_0^{u(t)} \frac{1}{(u^2 + 1)^2} du &= \frac{u(t)}{2(u^2(t) + 1)} + \frac{1}{2} \int_0^{u(t)} \frac{1}{u^2 + 1} du = \\ &= \frac{u(t)}{2(u^2(t) + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} u(t). \end{aligned}$$

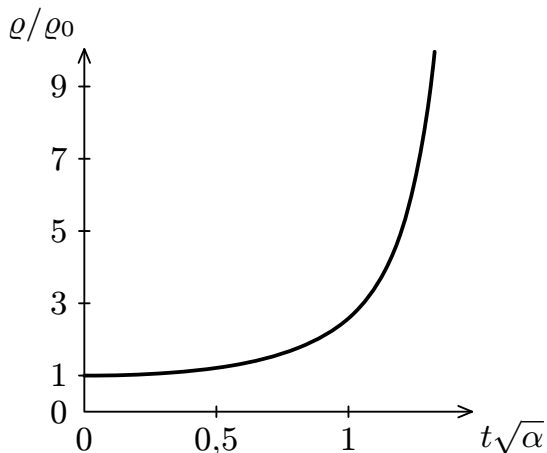
Dosadíme-li za u výraz $\sqrt{1/f - 1}$, získáváme

$$t = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{f(1-f)} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{f} - 1} \right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left(\sqrt{f(1-f)} + \arccos \sqrt{f} \right).$$

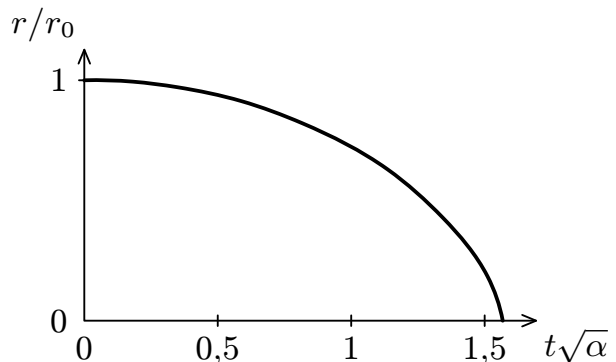
Můžete ověřit, že funkce $t(f)$ je pro $0 < f \leq 1$ prostá, existuje k ní tedy inverzní funkce $f(t)$, která by po vynásobení r_0 dala hledanou funkci $R(r_0, t)$. Ať se ale budeme snažit sebevíc, ze získané závislosti t na f se nikdy nepodaří vyjádřit f v závislosti na t pomocí „jednoduchých“ funkcí.

To ovšem nebrání tomu, abychom si například vykreslili graf t v závislosti na f a z něj překlopením podle diagonály dostali graf $f(t)$.

Můžeme také využít toho, že objem oblaku je v čase t roven $V_0 f^3(t)$ a hustota tajemné hmoty (v každém bodě oblaku stejná, jak jsme zjistili) je $\rho_0/f^3(t)$, tedy $f(t) = (\rho_0/\rho(t))^{1/3}$, a stejným způsobem vykreslit graf $\rho(t)$ – viz obr. 8.



Obr. 8. Závislost hustoty oblaku na čase



Obr. 9. Závislost poloměru oblaku na čase

Z nalezeného vztahu můžeme také docela snadno zjistit, jak dlouho bude celý kolaps trvat. Stačí najít limitu t pro $f \rightarrow 0$. Tak dostaneme pro dobu trvání kolapsu

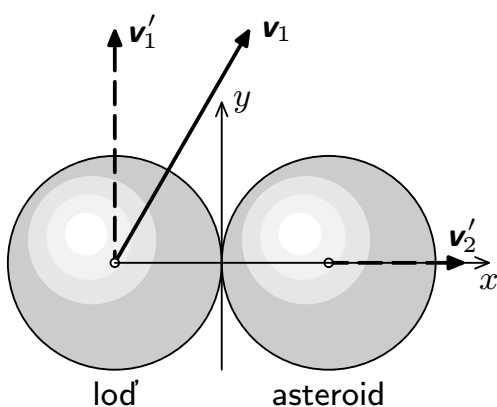
$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}.$$

K tomuto údaji lze dospět také elegantní úvahou využívající třetí Keplerův zákon o době oběhu tělesa. Ta totiž závisí pouze na hmotnosti centrálního tělesa a délce

poloosy oběžné dráhy. Na radiální pád hmoty se přitom můžeme dívat jako na polovinu oběhu po „nekonečně excentrické“ eliptické dráze. Nevýhodou tohoto přístupu je, že nám nic neřekne o průběhu kolapsu.

Úloha I.2 ... srážka s asteroidem

Určete, jaký úhel po srážce svírala trajektorie asteroidu a vědecké lodi. Před srážkou byl kulový asteroid v klidu a měl stejnou hmotnost jako loď. Uvažte, že loď chrání štíty, které mají kulový tvar.



Obr. 10. Srážka lodě s asteroidem

Veličiny příslušející lodi budeme indexovat číslem 1 a veličiny příslušející asteroidu budeme indexovat číslem 2. Veličiny po střetnutí označujeme čárkou. Volme pravoúhlou soustavu souřadnic s počátkem v místě styku těles při srážce. Osa x nechť je určena spojnicí středů těles. Osu y volme tak, aby vektor rychlosti rakety ležel v rovině xy . Složky vektoru rychlosti označme $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, přičemž $v_z = 0$ po celou dobu pohybu (neboť ve směru osy z nepůsobí žádné síly).

Protože loď je chráněna velmi pevnými štíty kulových tvarů, můžeme při malých rychlostech uvažovat dokonale pružnou srážku bez tření. První jednoduchý případ uvedeme bez důkazu; po čelní srážce zůstane loď v klidu a asteroid se bude pohybovat rychlostí \mathbf{v}_1 (loď mu předá veškerou svou energii a hybnost). Nyní vyřešíme obecnou srážku.

Podle zákona zachování hybnosti platí $v_{1x} = v'_{1x} + v'_{2x}$ a také $v_{1y} = v'_{1y} + v'_{2y}$. Navíc ze zákona zachování energie po násobení faktorem $2/m$ plyne

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2.$$

Dosadíme-li vztahy zákona zachování hybnosti do rovnice pro zákon zachování energie, získáme

$$(v'_{1x} + v'_{2x})^2 + (v'_{1y} + v'_{2y})^2 = v_{1x}'^2 + v_{1y}'^2 + v_{2x}'^2 + v_{2y}'^2 \Rightarrow v'_{1x}v'_{2x} + v'_{1y}v'_{2y} = 0,$$

neboli $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{v}'_2 = 0$. Vektory rychlosti po srážce jsou tedy na sebe kolmé stejně tak jako trajektorie lodi a asteroidu.

Úloha I.3 ... *míchání barev kamínek*

Vysvětlete, proč zkombinováním světél ze dvou barevných kamínek dostanou vědci jinou barvu, než když přímo smíchají dvě barvy, které kamínky mají.

Nejprve se podívejme na případ, kdy chceme zkombinovat světla ze dvou barevných kamínek. Na začátku mějme bílé světlo, které rozložíme, a jednotlivé bílé svazky necháme projít barevnými kamínky a poté dopadnout na stejné místo. Jednotlivými kamínky projdou světla v barvách kamínek. Složky prošlých světél se sčítají a dohromady vytváří světlo s větší intenzitou. Intenzita výsledné barvy se rovná součtu intenzit jednotlivých složek. Hovoříme o *aditivním míchání*. Např. pokud kamínky mají barvu žlutou a azurovou, je výsledná barva světle zelená.

Příkladem aditivního způsobu míchání barev je barevný model RGB, který se používá např. v monitorech. Za základní barvy považujeme červenou, zelenou a modrou, pokud je smícháme všechny, dostaneme bílou (můžete si zkusit posvítit na jedno místo červenou, modrou a zelenou baterkou). Pokud smícháme dvě barvy, dostaneme z červené a modré purpurovou, z červené a zelené žlutou a z modré a zelené azurovou.

Pokud chceme smíchat barvy kamínek, můžeme buď kamínky rozdrtit a vzniklý prášek smíchat nebo nechat bílé světlo projít jedním kamínkem a světlo, které z něj vyjde, druhým. Světlo, resp. odpovídající část spektra je při průchodech jednotlivými barevnými vrstvami stále více pohlcováno. Výsledná barva se skládá z vlnových délek, které zbydou po průchodu oběma kamínky. V tomto případě hovoříme o *subtraktivním míchání*. Pokud máme (jako v prvním případě) žlutý a azurový kamínek, je výsledná barva tmavě zelená.

Na subtraktivním míchání barev je založen barevný model CMYK, který se využívá např. při tisku. Jeho základní barvy jsou žlutá, azurová a purpurová. Smícháním všech tří dostaneme černou barvu; při smíchání žluté a azurové vznikne zelená, žluté a purpurové červená, azurové a purpurové modrá.

Úloha I.4 ... *kapitánův deník*

Přispějte něčím zajímavým do deníku vědecké výpravy (obrázkem či jiným uměleckým výtvozem, dobrodružnou příhodou v délce denního hlášení, fyzikálním pozorováním, ...).

Kapitánův deník, 26. listopadu 2225⁵

Nedávná pozorování hranic Romulanské neutrální zóny odhalila podezřelé shlukování neznámé hmoty v sektoru 0056. Protože federační síť dálkových senzorů ještě není zdaleka hotova, velení se rozhodlo vyslat nás na průzkum.

„Blížíme se do dosahu senzorů, pane,“ ozval se vědecký důstojník.

„Přejděte na impuls a zaleťte třeba ... do nejbližší hvězdné soustavy. Jo, a ty senzory zapněte, ať se nenudíme.“

⁵⁾ Hvězdné datum se začalo používat až 1. 1. 2323.

Osobní deník, kapitán S. Pilný, 27. listopadu 2225

Začali jsme senzorový průzkum soustavy. Světe, div se, stále nic. Skoro mám pocit, že si z nás dělá Hvězdná flotila srandu. Předtím to bylo hlídání transportu dilithia, práce jak za trest, a teď zas tohle. Já to vidím tak, že se zase nějaký romulanský kapitán ožral a odstřelil naším směrem pár asteroidů.

Zahvízdal interkom a z praskajícího reproduktoru se ozvala kulometná palba slov prvního důstojníka. Kapitán sice nerozuměl ani ň, ale aspoň ho to vzbudilo a vzpomněl si, že mu už dávno začala služba.

„No, konečně něco,“ pomyslel si, když se drápal z postele.

„Co tu máme?“ zeptal se po příchodu na můstek a hned ho udivilo, že na hlavní obrazovce nejsou žádné hvězdy. „Spíš, co tu nemáme, pane,“ neotálel s odpovědí vědecký důstojník, „při průzkumu soustavy jsme běžnými metodami nic nezjistili, ale pak jsme si všimli, že z jednoho místa nezachytáváme žádné signály. Podle všeho by tam měla být planeta, ale je tam tohle.“

„Co?“ rozespálý velitel nechápavě zíral na obrazovku.

„Tohle. Temná hmota. Visí nad planetou a vypadá to, jako by ji celou obklopovala. Jenom nad póly je ještě místo.“

„No jo, vidím,“ vzpamatoval se kapitán, „vemte nás tam a zahajte průzkum, já se jdu ještě prospat,“ zívá a odešel.

To ale neměl dělat. Jenom co vylezl z turbovýtahu na chodbu, protější stěna si řekla, že už má dost své normální polohy, a vzala ho po hlavě. Když ho probudil jakýsi vousatý pán s klíčem od opodál stojící brány, zjistil, že je cosi špatně.

Ano, loď se při nezvládnutém přiblížení k planetě srazila s kusem temné hmoty a namířila si to po nejkratší možné trajektorii k zemi, po cestě zapálila půlku lesa na kontinentu a svezla se po nejbližším kopci až na jeho úpatí. Vrcholky hor se rozblíkalý různými světly jako vánoční stromeček.

„Já jsem vám říkal, že máte opravit ty inerciální tlumiče na chodbách,“ obořil se první důstojník na vrchního inženýra, „teď máme z kapitána tapetu.“

„Co kapitán, ale jmelí,“ blekotal z cesty napůl omráčený inženýr.

„Co kdybyste se někdo obtěžovali s hlášením škod?“ řekl první důstojník s nadějí, že mu odpoví někdo, komu výlet z oběžné dráhy nevyklepl mozek z hlavy. Měl štěstí, zachránil ho vědecký důstojník: „Vypadá to sakra bledě, pane, sekundární trup jsme ztratili někde ve vzduchu, s ním i hlavní motory a půl posádky. Naštěstí nám zůstal fúzní reaktor a inerciální tlumiče. A interní senzory taky jakž takž fungují – zachytávám asi 42 známek života, včetně nás.“

„Co to je, strejdo?“ zeptal se neidentifikovatelný humanoid jedince vedle sebe.

„To určitě bude posel z nebes. Nebo taky primární trup lodi Hvězdné flotily třídy Daedalus. Ale spíš ten posel. Zítra vezmem sousedy a půjdeme se na to podívat.“

„Čťř tñk psŤ,“ ozvalo se zpoza kusu upadené termoizolace.

„Sakra, už zas ten krám nefunguje!“ zachřestil šéfinženýr univerzálním překladčem a zavolal na prvního důstojníka: „Šéfe, máme návštěvu.“

K nouzovému táboru se teď blížila skupina postav.

„Ahoj, jak se vám líbí na naší planetě?“ ozvalo se.

„Ale, stromy jsou příliš vysoké na můj vkus,“ odpověděl kdosi z posádky. Asi nějaké červené tričko.

I když byli domorodci poněkud nakrknutí způsobem příchodu prvních lidí na jejich planetu – kdo by nebyl, kdyby mu návštěva zapálila živý plot a podupala záhonek – nakonec se nějak domluvili a výměnou za zrcátka a čočky se ztroskotancům podařilo získat lístek na lanovku do vyšších stromových pater. A tak vymontovali subprostorové rádio, nabili baterky a vydali se na výlet.

„Za jak dlouho temná hmota obklopí celou planetu?“ napadlo prvního důstojníka.

„Podle posledních měření tak za měsíc,“ dostalo se mu odpovědi.

„Myslíte, že bychom to měli domorodcům říct?“ začlo jej trochu hryzat svědomí.

„Ale proč, za dva týdny tady bude záchranná výprava, aspoň bude sranda.“

Kapitánův deník, hvězdné datum 47853.35

Při hlídkování poblíž neutrální zóny jsme zachytili nouzový signál plavidla flotily. Z analýzy vyplývá, že patřil USS Odyssey, která se zde před 147 lety ztratila...

Úloha I. P ... výška stromů

Odhadněte výšku stromů na planetě. Uvažte všechna možná hlediska, která mohou výšku stromů ovlivnit.

Maximální výšku stromů limituje několik hlavních faktorů. Vyšetřeme nejprve trochu podrobněji, jak může být strom vysoký, aby byl schopen čerpat vodu až k svému vrcholu.

Předpokládejme nejprve, že strom transportuje vodu živou tkání. Céva by tak byla realizována sloupečkem nad sebou postavených buněk vzájemně oddělených porézní buněčnou stěnou a polopropustnou membránou (propouští pouze vodu, nikoli rozpuštěné látky). Transport vody směrem vzhůru je zprostředkován osmózou. Osmotický tlak je přímo úměrný rozdílu koncentrací roztoků mezi sousedními buňkami a každá vrchnější buňka musí tedy obsahovat koncentrovanější roztok. Pokud osmotický tlak mezi každými dvěma sousedními buňkami bude roven rozdílu tlaku způsobeného tíhou vody v buňkách, céva bude schopna udržet sloupec vody. Můžeme si rozmyslet, že tato rovnováha nastane tehdy, když osmotický tlak způsobený rozdílem koncentrací mezi nejvrchnější a nejspodnější buňkou cévy je roven hydrostatickému tlaku vodního sloupce

$$p_{\text{osm}} = RT\Delta C = h\rho g,$$

kde ΔC je rozdíl molárních koncentrací roztoků, h výška vodního sloupce, ρ hustota vody. Předpokládejme na chvíli, že nejvrchnější buňka cévy „snese“ koncentraci nasyceného roztoku⁶ NaCl a nejspodnější buňka obsahuje čistou vodu. V tom případě

⁶) Nasycený roztok NaCl má koncentraci 0,6 M, disociuje na dva ionty, celková koncentrace solutů je tedy 1,2 M.

$p_{\text{osm}} = 3 \text{ MPa}$. To je samozřejmě velmi nadnesené číslo. Osmotický tlak v rostlinách dosahuje maximálně 1,5 MPa. Dosazením této hodnoty do rovnosti a vyjádřením výšky h dostaneme maximální výšku v podmínkách na Zemi

$$h_{\text{max}} = \frac{p_{\text{osm}}}{\rho g} = 150 \text{ m}.$$

Výška je podle tohoto vztahu nepřímo úměrná gravitačnímu zrychlení, na planetě s polovičním zrychlením by limitující výška byla tedy zhruba 300 m.

Ve skutečnosti však transport vody probíhá kombinovaně živou tkání a specializovanými pletivy, která jsou tvořena odumřelými buňkami, ze kterých se zachovaly pouze části buněčných stěn. Céva je tedy v podstatě dutá trubička, ve které voda nemusí překonávat žádné membrány. Rychlost přenosu vody dutými cévami je o mnoho řádů vyšší než rychlost přenosu živou tkání. Céva se dá přirovnat ke kapiláře. V kapiláře voda v důsledku kapilární elevace vystoupá do výšky

$$h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{r \rho g},$$

kde σ je povrchové napětí vody, α úhel smáčení stěny kapiláry (tyto hodnoty lze najít v tabulkách) a r poloměr kapiláry. Při běžné tloušťce cévy 40 μm stoupne voda do výšky zhruba 37 cm. To není mnoho, řeknete si možná. Hlavní čerpací silou je totiž zmíněná osmóza a kořenový vztlak. Ovšem při tloušťce kapiláry 5 nm, což je šířka pórů v buněčné stěně, dostaneme výšku sloupce téměř 3000 m. Takto tenké cévy by však bylo velmi obtížné realizovat a navíc přenos vody by byl velmi pomalý. Koloběh vody stromem zajišťuje kontinuální odpařování z listů, což vynucuje nasávání vody kořeny. Rychlost odpařování, a tedy i rychlost cirkulace vody je ovlivněna tlakem atmosféry na planetě. Ten lze těžko odhadnout, např. na Marsu je gravitace přibližně třetinová, ale tlak atmosféry při povrchu stokrát menší. Pokud by celková hmotnost svislého sloupce atmosféry na planetě byla stejná jako hmotnost sloupce atmosféry Země, tlak při povrchu by byl poloviční. Tlak při povrchu je totiž přibližně dán tíhou sloupce vzduchu. Z tohoto hlediska by odpařování bylo rychlejší a pro přenos vody by mohly sloužit užší kapiláry, což by nepatrně zvýšilo limitující výšku stromu. Je však otázkou diskuse, jak nižší tlak celkově ovlivní vzrůst stromů.

Druhým hlediskem je otázka lámání stromů. To si probereme trochu obecněji. Vítr působí momentem síly M_1 vůči patě stromu a vychýlí strom ze svislé polohy. Ohnutý strom v důsledku vlastní tíhy působí momentem síly M_2 vůči patě stromu a tento moment je tedy funkcí velikosti prohnutí – čím je strom prohnutější, tím větší je rameno síly. Pro každé prohnutí je pro strom charakteristická síla pružnosti, která se snaží strom vrátit do svislé polohy a působí proti silám větru a tíhy. Síle pružnosti můžeme tedy také přisoudit moment síly M_3 vůči patě stromu. Pokud při daném prohnutí jsou vychylující momenty větší než moment síly pružnosti, bude docházet k dalšímu prohýbání. Existuje kritické prohnutí ε_{max} , při kterém se strom láme. Velikost prohnutí ε můžeme definovat jako relativní prodloužení dřevního vlákna na vnějším oblouku prohnutí. Jakožto velké zjednodušení přijmeme předpoklad, že velikost M_2 je přímo úměrná ε . Velikost M_2 je dále úměrná tíze stromu a ramenu síly

$$M_2 = Ah \rho g S \cdot h \varepsilon = Ah^2 g S \varepsilon,$$

kde S je obsah průřezu stromu, ρ hustota dřeva, A nějaká konstanta shodná pro Zemi i zkoumanou planetu. Velikost M_3 je úměrná prohnutí a průřezu stromu

$$M_3 = BS\varepsilon,$$

kde B je opět nějaká konstanta shodná pro Zemi i zkoumanou planetu.

Jednoduchým přibližným výpočtem zjistíme, že při prohnutí blízkém ε_{\max} je M_2 mnohem větší než M_1 . Zároveň se však při silnějším větru stromy často lámají, z čehož lze usoudit, že např. smrky by při stejné tloušťce už o mnoho vyšší být nemohly, protože by se lámaly i bez přispění větru.

Strom se nezlomí, pokud při prohnutí ε_{\max} je $M_2 < M_3$, a tedy

$$Ah^2gS\varepsilon_{\max} < BS\varepsilon_{\max} \quad \Rightarrow \quad h < \sqrt{\frac{B}{A} \cdot \frac{1}{g}}.$$

Při polovičním g bude výška stromů na planetě $\sqrt{2}$ -krát větší než na Zemi. Při slabším vlivu větru bude výška stromů přirozeně o něco větší, při silnějším větru o něco menší. Můžeme si všimnout, že velmi tlustý strom by se ani při velkých výškách nezlomil. V tom případě by výška byla limitována „vodním kritériem“ a hlavně – uživit a vybudovat tlustý kmen stojí mnoho energie.

To už se ale dostáváme k evolučnímu hledisku. Růst stromu do výšky je hlavně výsledkem konkurenčního boje a tzv. „závodů ve zbrojení“. Evoluční pohled nám říká, že planetu obývají ty druhy, které jsou schopné se úspěšně rozmnožovat, a to mimo jiné znamená úspěšně soupeřit o živiny. Vysoký strom má dostatek světla, avšak jeho výška s sebou nese mnoho nevýhod a strom na růst spotřebuje mnoho energie, kterou jiné druhy věnují například tvorbě semen. Zemi obývá mnoho druhů rostlin, které se řídí různými strategiemi, a strategie růstu do výšky se ukázala jako jedna z mnoha úspěšných. Debata na toto téma by byla jistě velmi zajímavá a zároveň dlouhá, necháme si ji tedy na jindy.

Konečně, někdo by mohl namítnout, že Bůh stvořil život pouze na Zemi a nikde jinde.

Úloha II.1 ... Čeňkova pila

Čeňkova pila se nachází na soutoku řek Vydry a Křemelné na Šumavě. Pojmenovaná je podle obchodníka s dřevem Čeňka Bubeníčka, který zde pilu v 19. století postavil. Na jejím místě nyní stojí vodní elektrárna, která je stále v provozu a patří mezi technické památky.

Vodní elektrárna využívá výškový rozdíl hladin nad a pod turbínou 10 m, výkon elektrárny je 96 kW. Voda je na turbínu přiváděna vantroky⁷, které jsou široké 1 m, a voda v nich sahá do výšky 1,5 m. Při pozorování proudící vody jsme odhadli, že uprostřed vantroků má proud vody rychlost $1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Odhadněte, jaká je účinnost elektrárny.

Označme rozdíl hladin $h = 10 \text{ m}$, rozměry vantroků: šířku $a = 1 \text{ m}$, hloubku $b = 1,5 \text{ m}$, rychlost toku uprostřed koryta $v = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

K určení účinnosti elektrárny je třeba znát celkovou energetickou bilanci, proto musíme stanovit maximální využitelnou mechanickou energii vody, která turbínou projde za jednotku času. Celková energie je samozřejmě rovna součtu kinetické energie vody proudící vantroky a rozdílu potenciální energie vody nad a pod turbínou. Proto platí

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{2} + g \left(h - \frac{b}{2} \right) \right).$$

Jelikož $\langle v^2 \rangle/2 \ll g(h - b/2)$, můžeme člen odpovídající kinetické energii zanedbat. Zbývá určit hmotnostní průtok $Q = \Delta m/\Delta t = \rho ab \langle v \rangle$.

Pokud budeme vodu považovat za ideální tekutinu⁸ (což ve skutečnosti není vůbec pravda!), dostaneme pro průtok $Q = \rho abv$. Tomuto odpovídá příkon přibližně 150 kW a účinnost (podíl výkonu a příkonu) elektrárny pak je 65 %.

Pro proud vody je ve skutečnosti nutné použít model reálné tekutiny, u které dochází vlivem vazkosti k nehomogennímu rozložení pole rychlostí. Takové proudění může být dále laminární, nebo (při vyšších rychlostech) turbulentní. Pro střední rychlost proudění při přechodu mezi těmito druhy proudění platí $u = \nu Re/d$, kde Re je kritická hodnota Reynoldsova čísla (pohybuje se v rozmezí 1000 až 20 000, pro náš případ předpokládejme jeho hodnotu 2000), d je rozměr potrubí (v našem případě hodnota v rozmezí a a b), a ν je tzv. kinematická viskozita, pro vodu je to hodnota přibližně $10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$. Snadno se tak můžeme přesvědčit, že proud vody ve vantrocích je turbulentní, neb $v > u$.

Střední hodnotu rychlosti toku $\langle v \rangle$ pro turbulentní proudění je velmi obtížné určit, proto se používá numerické modelování. Pokud budeme předpokládat laminární proudění, dojdeme k účinnosti nad 100 %, což je nesmysl.

Pokusíme se spolehnout na údaj z technických tabulek, dle kterých přibližně platí $v = 1,2 \langle v \rangle$. Po dosazení za $\langle v \rangle$ vychází účinnost kolem 80 %, což odpovídá účinnosti dnešních vodních elektráren.

⁷⁾ Vantroky jsou dřevěná stavba – koryto obdélníkového průřezu, kterým je přiváděna voda na mlýnské kolo.

⁸⁾ Ideální tekutina je nestlačitelná a bez vnitřního tření – viskozity.

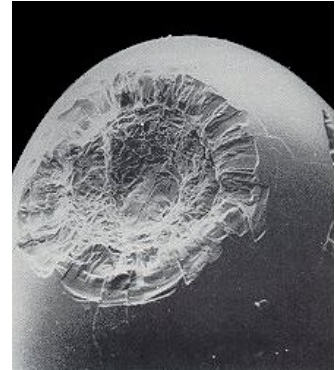
Úloha II.2 ... drtivý dopad

Pokuste se najít libovolný vztah mezi rychlostí meteoroidu dané hmotnosti těsně před dopadem na povrch Země a poloměrem vzniknuvšího kráteru.

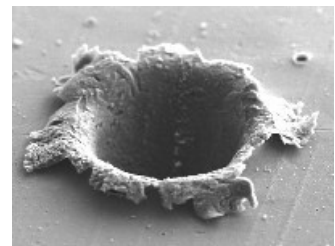
Běžný meteoroid dopadá na zemi minimálně první kosmickou rychlostí $8 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, takže často rychlostí mnohem větší. Velikost meteoroidu má vliv na tvar kráteru. Tento možná lehce překvapivý závěr lze vysvětlit, když se zamyslíme nad poměrem kinetické energie meteoroidu a množstvím deformační energie, kterou je povrch schopen „absorbovat“. Když je velikost dopadajícího meteoroidu v mikrometrech až milimetrech, kráter vypadá jako na obr. 11 a 12.

Na obrázku 11 byla dopadová rychlost částice kolem $1 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, na obrázku 12 byla dopadová rychlost částice desítky kilometrů za sekundu. V obou případech se jedná o kov. V prvním případě při nižší rychlosti došlo jenom k rozlámání materiálu v místě dopadu. V druhém případě byl materiál v místě dopadu úplně roztaven, jako voda vyšpláchnul z místa dopadu a okamžitě v meziplanetárním prostoru ztuhnul.

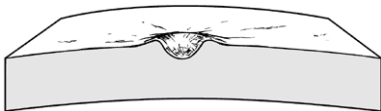
Předpokládejme, že rychlost meteoroidu při dopadu je kolem 40 kilometrů za sekundu, čili je zhruba stokrát vyšší než vystřelená kulka. Při takto vysoké rychlosti se povrch Země v okolí dopadu okamžitě roztaví a částečně vypaří – chová se jako kapalina. Rychlost přenosu energie je vyšší, než je rychlost zvuku v prostředí. Samotný dopad se pak podobá více výbuchu než deformačnímu působení (viz bod 3 dále). Proto se při popisu chování dopadu používá hydrodynamika, i když se na první pohled jedná o pevná tělesa. Na uvedených obrázcích je ukázáno, jak vypadá kráter v závislosti na velikosti dopadajícího meteoroidu.



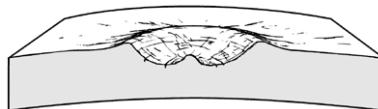
Obr. 11. Laboratorní experiment



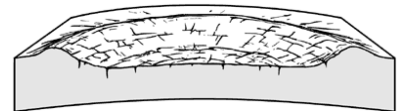
Obr. 12. Povrch sondy



Obr. 13. Malá dopadová rychlost, pevný materiál, malý rozměr meteoroidu



Obr. 14. Velká dopadová rychlost, větší rozměr meteoroidu



Obr. 15. Rychlost malá kolem $10 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$, velký meteoroid, spíše asteroid

Ve všech případech je přenos energie do okolí velice rychlý. Plocha, přes kterou se přenáší energie (například zvukové vlny, ochlazování atd.), je malá vzhledem k energii a hmotnosti. Plocha totiž roste s r^2 , ale kinetická energie podle (1) roste s $m \sim r^3$, tedy podstatně rychleji. Po vzniku malého kráteru dojde ke ztuhnutí prakticky okamžitě. U větších kráterů trvá tuhnutí déle, a proto se v jejich středu objevuje malý vrcholek. Jeho původ je stejný, jako když pustíte kámen do vody – po vodě se začnou šířit vlny. Jestliže roztavíte zem, vlny se po ní šíří a vytvářejí centrální vrcholek. Neroztavený materiál je rozdrčen, chová se jako písek – je to také „kapalina“.

Kinetická energie dopadajícího meteoroidu je

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 \right) \rho v^2. \quad (1)$$

Podívejme se, co se děje s touto energií. Přejde na tři jiné formy:

1. energii tepelnou,
2. kinetickou energii okolní země,
3. elastickou energii (např. deformace či pnutí materiálu).

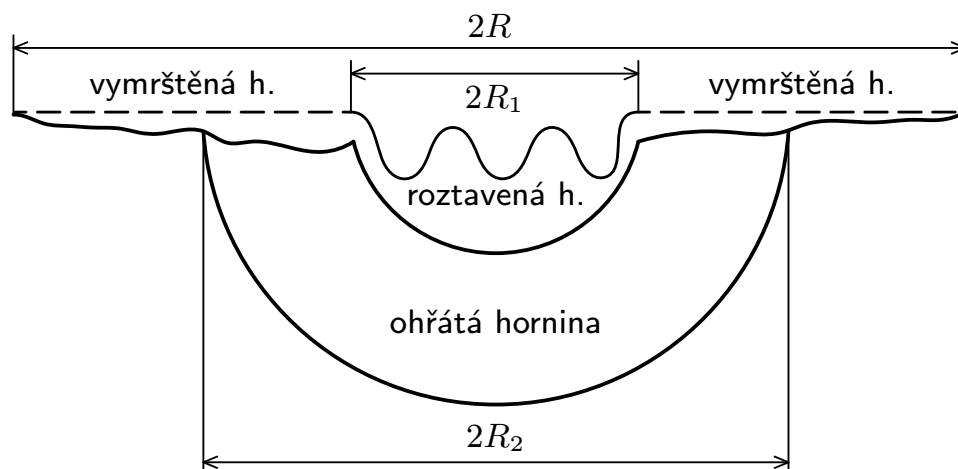
Již jsme si řekli, že pro velká tělesa můžeme bod 3 zanedbat. Energie se tedy mění v energii tepelnou a v pohybovou energii okolní zeminy. Tedy

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{tep}} + E_{\text{hyb}}. \quad (2)$$

Tepelná energie je energie potřebná na roztavení a zvýšení teploty

$$E_{\text{tep}} = mC_P\Delta T_P + m_K l_{P \rightarrow K} + C_K \Delta T_K \quad (+ m_G l_{K \rightarrow G} + C_G \Delta T_G),$$

kde index P označuje pevnou fázi, K fázi kapalnou a G fázi plynou, $l_{P \rightarrow K}$ je měrné skupenské teplo při přechodu pevná fáze–kapalina. Dopad může část horniny doslova vypařit. Hmotnost každé složky je jiná – jiné množství se roztaví a jiné (větší) množství se jenom ohřeje na vyšší teplotu. Stejný problém nás čeká i s pohybovou energií – část materiálu je vymrštěna ven do volného prostoru, část je vmrštěna zpětně do materiálu a dále ho může ohřát. Poloměr vzniknuvšího kráteru nechť je R . Dle pozorování nebude mít tento kráter tvar polokoule, ale spíše mělkého dolíku. Spodek kráteru bude zalitý roztavenou horninou.



Obr. 16. Situace po dopadu meteoroidu na zem

Jak velké množství m horniny je tedy vymrštěno a jaké ohřáto? Vymrštěna bude hmota, která je blízko povrchu. Její objem bude tedy v prvním přiblížení roven $\pi R^2 \cdot h \sim R^3$, kde $h = C \cdot R$ je výška povrchu, který je vymrštěn (C je bezrozměrná konstanta). Většina vymrštěného materiálu je z těsného okolí dopadu. Například kdybychom tento útvar aproximovali kuželem, dostaneme $C = 1/3$.

Roztavenou a rozdrcenou horninu aproximujme polokoulí. Její objem je $\frac{2}{3}\pi R_1^3$. Po vychladnutí hornina ztuhne uvnitř kráteru, pevné dno se tak zvýší. Hornina, která byla jenom ohřáta, může být aproximována kulovým mezivrstvím, jehož objem je $\frac{2}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3) \sim R^3$.

Vidíme, že jak E_{tep} , tak E_{hyb} závisí na R^3 . Pak (dle (2) a (1))

$$\frac{1}{2}mv^2 \sim R^3 \quad \Rightarrow \quad R \sim v^{2/3} \doteq v^{0,667}.$$

Praktické experimenty s menšími krátery (ve smyslu do rozměrů kilometrů) ukazují závislost $R \sim v^{0,6 \div 0,7}$.

Úloha II.3 ... osvětlení stolu

Navrhnete rozmístění zářivek na stropě pracovny, který je ve výšce 3 m nad deskou stolu tak, aby intenzita osvětlení na ploše stolu nekolísala víc než o 0,1 %.

Nejprve je třeba uvést, jak zadaná situace vypadá. Zadání úlohy si zjednodušíme tak, že budeme předpokládat strop jako nekonečně velkou rovinu rovnoměrně posetou nekonečně dlouhými zářivými trubicemi zanedbatelného průměru, navzájem rovnoběžnými, přičemž každé dvě sousední jsou ve vzdálenosti b od sebe. Úlohu budeme řešit v rovině kolmé na zářivky, v ní jsou zářivky bodové zdroje světla.

Budeme-li značit I svítivost jednotlivého (bodového) zdroje, pak pro osvětlení plochy můžeme psát

$$E_n = \frac{I}{r^2} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}),$$

kde \mathbf{e}_r je jednotkový vektor směřující od zdroje a \mathbf{n} je normálový vektor orientované plochy. Jejich skalární součin nám tedy zajistí faktor $\cos \vartheta$, kde ϑ je úhel dopadu.

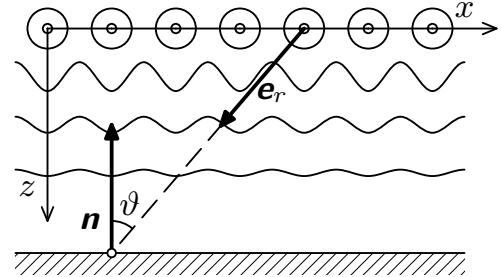
Nyní přijde na řadu hlavní *trik* celého řešení. Osvětlení E_n odpovídá normálové složce intenzity elektrického pole vytvořeného bodovým nábojem velikosti $4\pi\epsilon_0 I$. Toho využijeme a převedeme náš problém na elektrostatickou úlohu. Místo zářivek si představíme nekonečně mnoho přímých nabitých vodičů a budeme počítat intenzitu elektrického pole této sítě.

Budeme-li zkoumat vzniklé elektrické pole v dostatečné vzdálenosti, poznáme, že je velmi dobře homogenní. S přibližováním se k mřížce se však bude tato vlastnost postupně vytrácet. Ekvipotenciální plochy budou již poněkud zvlněné a to je věc, která nás pro tuto chvíli bude zajímat. Budeme zkoumat amplitudu těchto sinusových vln, které mají periodu b .

Zavedeme souřadnicový systém, a to tak, že osa y bude rovnoběžná s vodiči ležícími v rovině xy a osa z bude na tuto rovinu kolmá. Využijeme znalosti obecného tvaru rovnice pro kmitání a zkusíme ji upravit do následující formule pro elektrostatický potenciál

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) \cos \frac{2\pi nx}{b}, \quad (3)$$

kde n je řád harmonické funkce a $F_n(z)$ je amplituda n -té harmonické složky potenciálu ve vzdálenosti z . Díky tomu, že jsme předpokládali nekonečně dlouhé dráty, neměla by se závislost na y projevit vůbec. Nultý člen sumy ($n = 0$) z našich úvah



Obr. 17. Ekvipotenciály elektrického pole nabitých přímých vodičů

dále vypustíme, neboť se jedná o konstantní hodnotu (ta vlastně určuje intenzitu osvětlení), kdežto nás zajímají oscilace.

Má-li jít o platný potenciál, musí v oblasti pod dráty (kde nejsou žádné náboje) vyhovovat Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Když do této rovnice dosadíme výraz (3), dostaneme pro každý sčítanec

$$-\frac{4\pi^2 n^2}{b^2} F_n(z) \cos \frac{2\pi n x}{b} + \frac{d^2 F_n}{dz^2} \cos \frac{2\pi n x}{b} = 0,$$

tedy $F_n(z)$ musí splňovat rovnici

$$\frac{d^2 F_n}{dz^2} = \frac{4\pi^2 n^2}{b^2} F_n.$$

Řešení této diferenciální rovnice je

$$F_n = A_n e^{-z/z_0}, \quad (4)$$

kde $z_0 = b/2\pi n$.

Nyní již víme, že n -tá harmonická složka potenciálu se s rostoucí vzdáleností od stropu zmenšuje exponenciálně. V naší aproximaci bude nadále postačovat pracovat pouze s první harmonickou ($n = 1$), neboť pro $n = 1$ je ten pokles jistě nejmenší. Případné zpřesnění výpočtu můžeme přenechat čtenáři jako cvičení; vždyť se jedná o pouhý součet příslušných členů. Hodnotu A_1 můžeme odhadnout jako přibližně rovnou průměrné intenzitě osvětlení A_0

Vztah (4) je klíčový pro řešení naší úlohy. Jestliže intenzita osvětlení nesmí kolísat o více než 0,1 %, znamená to, že hledáme takové b mezní, že výraz

$$e^{-2\pi n z/b} \leq 1/1000$$

ještě platí.

Prostým zlogaritmováním získáme výsledek

$$b \leq \frac{2\pi n z}{\log 1000}.$$

Číselně vycházejí pro $z = 3$ m maximální rozestupy mezi zářivkami 2,7 m.⁹

Zvolíme-li například tuto vzdálenost rovnou třem čtvrtinám výšky nad stolem, bude exponenciální součinitel 1/4000. A tedy pro přesnost osvětlení na tisícinu dostáváme koeficient bezpečnosti 4. Je až překvapující, jak velké rozestupy stačí k tak rovnoměrnému osvětlení.

⁹) Přesný výpočet ukazuje, že A_1 je ve skutečnosti dvakrát menší než A_0 , takže přesná odpověď zní 2,4 m.

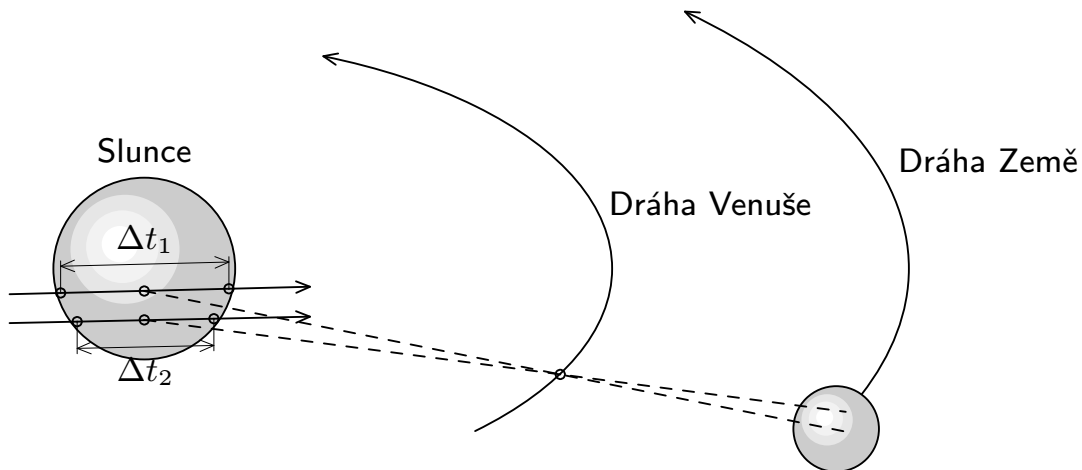
Úloha II.4 ... jak je daleko Slunce?

[...]

Na vás je, abyste tak jako Edmond Halley vymysleli, jak lze z měření přechodu Venuše určit vzdálenost Země od Slunce. Samozřejmě neznáte jiná než tehdejší data: poloměr Země a dobu oběhu Země a Venuše kolem Slunce z astronomických pozorování.

Měřením vzdálenosti Země od Slunce se lidé zabývali již ve starověku, nicméně ne s velkým úspěchem. Venuše si lidé všimli dávno, některé národy z ní udělaly božstvo, ale později prohlédly, až nakonec Edmond Halley zveřejnil svůj slavný článek *Nová metoda určení sluneční paralaxy aneb vzdálenosti Země od Slunce*. Před jeho vydáním se o změření astronomické jednotky pokoušeli např. Jan Kepler nebo Tycho Brahe, ale nepřesně. Jak Halley píše, k využití přechodu Venuše jej inspiroval podobný úkaz – přechod Merkuru – který pozoroval na observatoři na ostrově sv. Heleny. Ověření své teorie se ale nedočkal, protože kvůli mírně nakloněné rovině oběhu Venuše okolo Slunce nastávají přechody vždy v párech po asi 120 letech. My jsme přechod mohli vidět v červnu roku 2004, nejbližší další bude za 6 let a ten následující až v roce 2117.

Vzhledem k tomu, že všechny úhly jsou velmi malé a vzdálenosti očekáváme velmi velké, využijeme aproximace $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ pro malé φ a také, že poměr naměřených úhlových veličin je shodný s poměrem skutečných délkových veličin.



Obr. 18. Pozorování přechodu Venuše přes Slunce ze Země

Pokud jsou oba pozorovatelé na stejném poledníku vzdáleni o h (h by mělo být kolmé na spojnici Země–Slunce), tvoří pak s Venuší trojúhelník podobný s trojúhelníkem vzniklým spojením dvou průmětů Venuše na Slunce a Venuší samotnou (viz obrázek 18). Zanedbáme-li to, že Venuše nemusí ležet přímo na spojnici středů Slunce a Země, můžeme určit koeficient podobnosti k z třetího Keplerova zákona

$$\frac{R_Z^3}{R_V^3} = \frac{T_Z^2}{T_V^2} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{T_Z^2}{T_V^2} \right)^{1/3} - 1.$$

Pokud tedy známe vzdálenost h , dokážeme vypočítat i vzdálenost dvou průmětů Venuše na Slunce, kterou označíme d . Z naměřeného poměru ε mezi úhlovou velikostí Slunce φ_S a úhlovou vzdáleností stop Venuše φ_d potom spočítáme skutečnou velikost

Slunce.

$$2r_S = d \cdot \varepsilon = \frac{h}{k} \cdot \varepsilon.$$

Pokud měříme vzdálenost Slunce od Země pomocí paralaxy, použijeme vztahu

$$R_Z = \frac{r_S}{\operatorname{tg}(\varphi_S/2)} \approx \frac{2r_S}{\varphi_S},$$

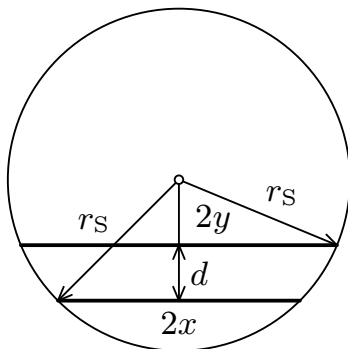
dosadíme za poloměr Slunce a máme výsledný vztah

$$R_Z = \frac{h\varepsilon}{k\varphi_S}.$$

Zbývá už jen z měření přechodu Venuše vyhodnotit poměr ε .

Jednodušší metoda využívá porovnání dvou zakreslených drah. Oba pozorovatelé se dohodnou na tom, že si zvolí referenční sluneční disk o poloměru r_{ref} . Během pozorování na něj zaznamenají postupně celou trajektorii přecházející Venuše. Potom se sejdou a zjistí, že jsou jejich výsledky posunuté o d_{ref} . Hledaný poměr tedy bude $\varepsilon = 2r_{\text{ref}}/d_{\text{ref}}$.

Druhou metodou je měření doby přechodu Venuše přes sluneční disk, což navrhoval i Edmond Halley. Využijeme toho, že pro malé paralaxy blízko spojnice Slunce a Země, konkrétně pro paralaxy φ_S a φ_d platí



$$\frac{\varphi_S}{\varphi_d} = \frac{2r_S}{d}.$$

Velikost d dokážeme určit při bližším pohledu na situaci. Obě trajektorie vytínají na slunečním disku úsečky, které jsou rovnoběžné a posunuté o d (viz obr. 19). Z Pythagorovy věty určíme d

Obr. 19. K výpočtu vzdálenosti d

$$d = \sqrt{r_S^2 - x^2} - \sqrt{r_S^2 - y^2},$$

kde $2x$ je délka kratší a $2y$ délka delší úsečky. Jaký je poměr mezi d a r_S ?

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{d}{2r_S} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r_S}\right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_S}\right)^2}.$$

Zaměříme se nyní na poměry x/r_S , resp. y/r_S . Můžeme je nahradit za φ_x/φ_S , resp. φ_y/φ_S . Uvažme, že oba pozorovatelé vidí Venuši obíhat kolem Země vůči slunečnímu disku úhlovou rychlostí ω . Její okamžitou hodnotu vypočítáme jako součet úhlové rychlosti zdánlivého oběhu Slunce (ω_S) a úhlové rychlosti oběhu Venuše (ω_V).

$$\omega = \omega_S + \omega_V = \frac{v_Z}{R_Z} + \frac{v_V - v_Z}{R_Z - R_V}.$$

Upravením dostaneme

$$\omega = \frac{2\pi}{k} \cdot \left(\frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_Z} \right).$$

Pak tedy dosazením všech vztahů vyjde hledané ε

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t_1}{\varphi_S}\right)^2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega \Delta t_2}{\varphi_S}\right)^2}.$$

Časy Δt_1 , Δt_2 jsou naměřené údaje navržené Edmondem Halleyem (viz obr. 18).

Měření vzdálenosti mezi pozorovateli na jednom poledníku je docela jednoduché, pokud neuvažujeme sklopení zemské osy. Potom musíme přejít ke korekcím, které umožní získat přesnou hodnotu.

Popsaným způsobem však nelze naměřit hodnotu astronomické jednotky přesně. Pokud odstraníme všechny problémy spojené s měřením vzdálenosti pozorovatelů, zůstává ještě jeden – tzv. *black drop effect*. Přibližuje-li se Venuše okraji slunečního disku, ve chvíli těsně před dotykem se její okraj a okraj Slunce slijí to útvaru, který připomíná černou kapku. Původně to bylo bráno jako důsledek chování Venušiny atmosféry (a také jako důkaz její přítomnosti), nicméně dnes víme, že za tento jev můžou turbulence v atmosféře Země. Proto také z měření v roce 1761 vyplynula hodnota $153 \cdot 10^6$ km.

Úloha II . P ... třepání čajem

Vysvětlete, proč když zatřepeme sypaným čajem v plechovce, zůstanou větší kousky lístků spíše nahoře než dole. Řešení můžete obohatit vlastním pozorováním.

Jev popisovaný v zadání této úlohy není v zásadě nic jiného než tzv. „Brazil Nut Problem“. Trochu nepříjemné je, že dodneška se vědecká obec neshodne na popisu procesů, které tento jev způsobují. V závislosti na vlastnostech jednotlivých částic, tvaru nádoby, amplitudě, směru a frekvenci třesení se podstatně mění pozorovaný jev, lze dokonce docílit reverzního jevu, tedy že velké částice se shromažďují na dně.

Nicméně v prvním přiblížení lze uvažovat tři různé procesy, které mohou způsobit tento jev. Prvním kandidátem je pouhé vyplňování mezer pod většími částicemi těmi menšími. Tento jev se uplatňuje především při malých frekvencích, kdy se veškerá kinetická energie částic stačí mezi jednotlivými otřesy disipovat. „Když drkneme do krabičky, částice čaje nadskočí. Když se vracejí vlivem gravitace dolů, je pravděpodobnější, že ty menší projdou mezerami mezi ostatními částicemi, a tudíž ve výsledku se shromažďují dole.“

Pokud zvyšujeme frekvenci a amplitudu třesení, začne se časem směs chovat podobně jako tekutina, a začne tedy platit jakási obdoba Archimédova zákona, díky které se mohou větší částice dostávat nahoru, nebo dolů.

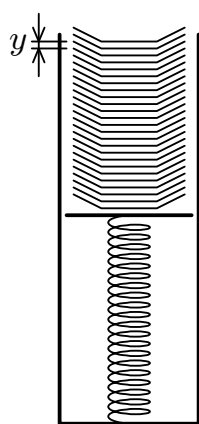
Také se mohou při vhodných podmínkách v naší směsi objevit konvekční proudy, které se v zásadě mohou utvořit ve dvou směrech. Buďto se uprostřed nádoby pohybují částice směrem dolů a u stěn nádoby směrem nahoru, anebo naopak uprostřed nádoby nahoru a u stěn dolů. Vzhledem k tomu, že uprostřed „teče jeden velký proud“, zatímco při okrajích „teče spousta malých“, mají větší částice menší šanci procestovat podél okrajů nádoby, zatímco středem nádoby projdou vcelku jednoduše. Tak se stane, že pokud uprostřed nádoby směřuje konvekční proud nahoru (resp. dolů), větší částice se budou shromažďovat nahoře (resp. dole). Určit, jakým

směrem budou konvekční proudy téct, je velmi obtížné, v praxi se k rozhodnutí používají numerické simulace či experimenty.

Úloha III.1 ... obložený létající talíř

Na zámořském parníku připravuje pro posádku jídlo kuchař Thomas. Na podávání talířů má šikovní zařízení. Pružinový držák udržuje vrchní talíř pořád ve stejné výšce. Vzdálenost mezi talíři je 1 cm. A protože je moře bouřlivé, sloupec 25 talířů pěkně kmitá. Jaká je frekvence těch kmitů?

Úvodem popišme, jak celé složité zařízení vypadá. Jde o pružinový oscilátor, na jehož horním konci jsou umístěny talíře. Jestliže je loď v klidu a nehoupá se, celý tento mechanismus má za úkol udržovat nejsvrchnější talíř stále ve stejné výši bez ohledu na celkový počet talířů. Je zřejmé, že pružina musí být dostatečně dlouhá, aby byla schopna i poslední (nejspodnější) talíř vyzvednout do patřičné výšky.



Obr. 20.
Zařízení na
podávání
talířů

Z předchozího odstavce snadno usoudíme, že odebráním jednoho talíře se pružina roztáhne právě o jeho výšku y . Přitom síla, která pružinu stlačovala, se zmenší o tíhovou sílu působící na talíř, tedy mg . Dále označme tuhost pružiny písmenem k . Potom rovnice rovnováhy této dílčí tíhové síly a síly pružnosti má tvar $mg = ky$, odkud snadno vyjádříme tuhost pružiny $k = mg/y$.

Úhlová frekvence vlastních kmitů pružinového oscilátoru je dána vztahem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{Nm}},$$

kde N je počet talířů a součin Nm jejich celková hmotnost. Po dosazení a drobné úpravě již snadno zjistíme, že

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Ny}},$$

odkud je patrné, že výsledek není na hmotnosti talířů vůbec závislý. Frekvence kmitů následně vychází

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{Ny}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9,81}{25 \cdot 0,01}} \text{ Hz} \doteq 1,0 \text{ Hz}.$$

Pokud si navíc povšimneme, že $\sqrt{g/(m \cdot s^{-2})} \approx \pi$, můžeme celý výsledek pro zadané hodnoty určit z hlavy.

Jestliže nyní vypluje loď i s kuchařem Thomasem na širé moře, bude sloupec pětadvaceti talířů kmitat s vlastní frekvencí 1 Hz. V úloze totiž nešlo o to, aby zmíněné zařízení vyrovnávalo houpání lodi, které jsme proto mohli z našich úvah vypustit.

Úloha III.2 ... přistání na Titanu

V pátek 14. ledna 2005 na povrchu Titanu hladce přistála sonda Huygens, pojmenovaná po objeviteli Titanu. Materská sonda Cassini ji nesla k Saturnu 7 let. Jedná se dosud o nejvzdálenější přistání umělé sondy v dějinách.

Přistávací modul o čisté hmotnosti (bez paliva) m , vybavený reaktivním motorem, se vznášel v klidu nad povrchem měsíce (gravitační zrychlení je zde g). Měl k dispozici palivo o hmotnosti $M_0 - m$ a zásobu energie o velikosti E_0 , kterou využíval k urychlování paliva (rychlost a množství paliva vypuzovaného z motoru lze libovolně měnit). Jaká je maximální doba, po kterou se sonda mohla vznášet v konstantní výšce? Poradte řídicímu středisku, jakým způsobem by mělo naprogramovat rychlost a množství vypuzovaného paliva, aby této maximální doby dosáhli.

Označme okamžitou hmotnost paliva vypuzovaného z modulu za jednotku času jako μ , velikost jeho okamžité rychlosti pak v . Je-li v čase t hmotnost modulu i s palivem rovna M a modul se nehybně vznáší, je jeho hybnost nulová. V čase $t + dt$ bude hybnost soustavy modul–palivo rovna $\mu v dt$, protože během doby dt bylo vypuzeno palivo o hmotnosti μdt rychlostí v a modul je (podle předpokladů) stále nehybný. Změna hybnosti soustavy je tedy rovna $\mu v dt$, to se však má podle Newtonova druhého pohybového zákona rovnat impulsu působící síly, tj. $Mg dt$. Srovnáním pak dostaneme

$$\mu v = Mg.$$

Protože nás zajímá, jak se spotřebovává palivo a energie, bylo by vhodnější mít místo okamžité rychlosti paliva ve vzorci okamžitý výkon, tedy energii spotřebovávanou na jeho urychlování za jednotku času. Tu označme obvyklým způsobem jako P . Snadno nahlédneme, že platí $P = \frac{1}{2}\mu v^2$. Vyjádříme-li odtud v , pak dosazením do předchozí rovnice dostáváme

$$\sqrt{2P\mu} = Mg.$$

Pro dosažení maximální možné doby vznášení je nejvýhodnější, když modul spotřebuje veškerou zásobu paliva i energie. Pokud by totiž na konci procesu zbylo nějaké palivo a nezbyla žádná energie, mohli bychom vybrat nějaký časový interval v průběhu vznášení, v němž bychom poněkud zvýšili množství paliva vypouštěného za sekundu (avšak tak, aby stále ještě nějaké na konci zbylo). Potom bychom ovšem pro zachování konstantního tahu motoru museli během tohoto okamžiku o trochu snížit výkon P , a tak bychom uspořili energii, která by spolu se zbytkem paliva umožnila prodloužit dobu vznášení.

Jednou z možností, jak popsat průběh procesu, by tedy mohlo být udání závislosti množství zbylé energie na hmotnosti modulu (nebo naopak, to však v dalším postupu příliš nehraje roli), tedy určité funkce $E(M)$, pro kterou platí $E(M_0) = E_0$ a $E(m) = 0$ a která musí být zřejmě rostoucí. Dá se ze znalosti průběhu této funkce určit celková doba vznášení T ? Vskutku ano, a to následujícím způsobem. Provedeme-li derivaci $E(M)$ podle času (časové derivace budeme značit tečkami), dostaneme pomocí pravidla o derivaci složené funkce $E'(M)\dot{M}$. Derivace zbylé energie podle času je však zřejmě rovna záporně vzatému P , stejně tak jako časová derivace hmotnosti modulu podle času je až na záporné znaménko rovna μ . Dostaneme tak rovnost $P = E'(M)\mu$. Dosazením do výše odvozené podmínky vznášení s ohledem

na rovnost $\mu = -\dot{M}$ pak získáme

$$-\sqrt{2E'(M)} \frac{dM}{dt} = Mg. \quad (5)$$

Metodou separace proměnných dostaneme pro dobu vznášení (v podstatě jen mechanicky osamostatníme dt a vložíme integrační znaménka na obě strany rovnosti)

$$-\int_{M_0}^m \frac{\sqrt{2E'(M)}}{Mg} dM = \int_0^T dt \quad \Rightarrow \quad T = \int_m^{M_0} \frac{\sqrt{2E'(M)}}{Mg} dM.$$

Snažíme se tedy maximalizovat určitý integrál volbou vhodné funkce $E(M)$, splňující navíc jisté podmínky, které jsme již uvedli. Zřejmě můžeme při hledání extrému směle zahodit multiplikační konstanty a hledat tak pouze maximum integrálu

$$\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M)}}{M} dM. \quad (6)$$

Úloha, kdy hledáme funkci, pro kterou nějaký integrální výraz nabývá extrémní hodnoty, je asi pro většinu z vás nanejvýš podezřelá. Na střední škole nic takového nepotkáte, ačkoliv jde o velmi užitečný typ úloh.¹⁰ Vzhledem k nesmírné užitečnosti tohoto postupu mi snad ti, kdo jej znají třeba z Feynmanových přednášek, odpustí drobné opakování.

Takovéto úlohy se řeší v principu podobně jako hledání extrému funkce. To, že jsme našli extrém, zjistíme tak, že pokud se o kousek pohneme libovolným směrem, hodnota funkce se „více méně“ nezmění. My budeme s naší funkcí také malinko hýbat (variovat ji) přičítáním nějaké poměrně libovolně zvolené malé funkce a budeme sledovat, jak se mění hodnota integrálu.

Dosadíme tedy do našeho integrálu místo $E(M)$ součet $E(M) + \eta(M)$, kde $\eta(M)$ bude ona malá funkce. Dostaneme tak

$$\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M) + \eta'(M)}}{M} dM.$$

Protože funkci $f(x)$ můžeme v okolí zvoleného bodu x_0 poměrně dobře aproximovat výrazem $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (je to jako nahradit graf funkce jeho tečnou v bodě x_0), dostaneme odtud

$$\begin{aligned} \sqrt{E'(M) + \eta'(M)} &= \sqrt{E'(M)} \cdot \sqrt{1 + \frac{\eta'(M)}{E'(M)}} \approx \\ &\approx \sqrt{E'(M)} \left(1 + \frac{\eta'(M)}{2E'(M)} \right) = \sqrt{E'(M)} + \frac{\eta'(M)}{2\sqrt{E'(M)}}. \end{aligned}$$

Změna hodnoty integrálu způsobená přičtením naší malé funkce je tedy přibližně rovna

$$\int_m^{M_0} \frac{\eta'(M)}{2M\sqrt{E'(M)}} dM.$$

¹⁰⁾ Kdo někdy nechtěl vědět, proč ze všech křivek dané délky ohraničuje největší plochu právě kružnice?

Integrace per partes dává

$$\left[\frac{\eta(M)}{2M\sqrt{E'(M)}} \right]_m^{M_0} - \int_m^{M_0} \eta(M) \frac{d}{dM} \left(\frac{1}{2M\sqrt{E'(M)}} \right) dM.$$

Všimněme si, že hodnoty $E(M)$ jsou v bodech m a M_0 pevně dané a funkce $\eta(M)$ v nich tedy musí být nulová. To ovšem vynuluje první člen v tomto výrazu.

Hledáme-li extrém původně uvažovaného integrálu (6), musí být jeho změna jistým způsobem malá bez ohledu na volbu funkce $\eta(M)$. Není nic přímočařejšího, než zkusit, zda někdy tato změna (v přiblíženích, která jsme provedli) nebude dokonce nulová. Všimavější jistě zaregistrují, že se tak skutečně stane, pokud bude výraz pod integrálem v odvozeném vyjádření změny identicky nulový. Protože jsme však funkci $\eta(M)$ mohli zvolit tak, že sama není nulová nikde (samozřejmě kromě obou krajních bodů), musí být

$$\frac{d}{dM} \left(\frac{1}{2M\sqrt{E'(M)}} \right) = 0.$$

To už je obyčejná diferenciální rovnice, jejímž integrováním a úpravou dostaneme nejprve

$$\frac{1}{M^2 C^2} = E'(M)$$

a následně pak

$$E(M) = A - \frac{1}{MC^2}.$$

Integrační konstanty A a C zvolíme tak, aby bylo $E(M_0) = E_0$ a $E(m) = 0$. Dostaneme pak hledanou funkci

$$E(M) = \frac{E_0 M_0}{M_0 - m} \left(1 - \frac{m}{M} \right), \quad (7)$$

$$E'(M) = \frac{E_0 M_0 m}{(M_0 - m) M^2}. \quad (8)$$

Nakonec vypočítáme závislost všech podstatných veličin na čase. Dosazením (8) do (5) a úpravou získáme

$$\dot{M} = -M^2 g \sqrt{\frac{M_0 - m}{2E_0 M_0 m}}.$$

Tuto rovnici dořešíme separací proměnných

$$\frac{1}{M(t)} = \frac{1}{M_0} + tg \sqrt{\frac{M_0 - m}{2E_0 M_0 m}}. \quad (9)$$

Odtud také můžeme dostat dobu T položením $M = m$.

$$T = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2E_0(M_0 - m)}{M_0 m}}. \quad (10)$$

Dosazením (9) do (7) získáme

$$E(t) = E_0 - tg \sqrt{\frac{mM_0E_0}{2(M_0 - m)}}. \quad (11)$$

Zderivováním podle času najdeme vztah pro veličiny P a μ .

$$P(t) = \frac{E_0}{T}, \quad \mu(t) = \frac{Tg^2M_0^2}{2E_0} \frac{1}{(1 + tTg^2M_0/2E_0)^2}. \quad (12)$$

Využitím vztahu $P = \frac{1}{2}\mu v^2$ dostaneme

$$v(t) = \frac{2E_0}{TgM_0} + gt. \quad (13)$$

Vztahy (9) až (13) dávají všechny podstatné informace o ideálním průběhu vznášení modulu, které jsme hledali.

Jistě jste si všimli, že jsme nedokazovali, že pro nalezenou funkci uvažovaný integrál (tedy doba vznášení) nabývá skutečně maximální hodnoty. Intuitivně můžeme tento názor podepřít faktem, že hodnota integrálu (6) je shora omezená¹¹, a tedy by měl být jediný nalezený extrém maximem. Matematicky zcela správný důkaz by byl pravděpodobně docela zdlouhavý.

¹¹⁾ Užijeme Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti, podle níž platí

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx,$$

tedy v našem případě

$$\left(\int_m^{M_0} \frac{\sqrt{E'(M)}}{M} dM \right)^2 \leq \int_m^{M_0} E'(M) dM \cdot \int_m^{M_0} \frac{1}{M^2} dM = E_0 \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M_0} \right).$$

Úloha III.3 ... vzdálenost vizuální dvojhvězdy

Z redukovaných hvězdných spekter složek dvojhvězdy (podle přítomných spektrálních čar, z nichž žádná v tomto případě nemění svou polohu v čase) jsme určili spektrální třídy obou hvězd a následně odhadli jejich hmotnosti na 2 a 3 hmotnosti Slunce. Z pozorování dalekohledem s ohniskovou vzdáleností 3 m víme, že složky skutečně obíhají v neměnné vzdálenosti 5 úhlových vteřin od sebe jednou za 50 let.

Dokážete z těchto informací určit vzdálenost dvojhvězdy od Slunce? Pokud ano, uveďte, jak jste jednotlivé informace použili, anebo nepoužili, a výsledek vhodně zaokrouhlete. Také okomentujte, jaký vliv na něj má nepřesná znalost údajů, zejména hmotností.

Hvězdy o hmotnostech M_1 a M_2 na sebe gravitačně působí. Víme, že spektrální čáry v čase nemění svoji polohu. Z toho můžeme odhalit, že se hvězdy pohybují v rovině kolmé na spojnici Země a těžiště soustavy dvojhvězdy. Je vhodné zdůraznit, že tato situace je velmi vzácná. Úhel, pod kterým je pozorujeme, se nemění, hvězdy se tedy budou pohybovat po kružnicích se středem v těžišti. Pro poloměry těchto kružnic platí $M_1 r_1 = M_2 r_2$. Z třetího Keplerova zákona v přesném znění vypočteme vzdálenost R mezi hvězdami. Vzdálenost dvojhvězdy od Slunce potom určíme pomocí goniometrických funkcí v trojúhelníku.

Postupujme podrobně a odvodíme třetí Keplerův zákon. Na každou hvězdu působí gravitační síla a odstředivá síla. Obě síly musí být v rovnováze

$$\frac{\varkappa M_1 M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_1 \omega^2 r_1, \quad \frac{\varkappa M_1 M_2}{(r_1 + r_2)^2} = M_2 \omega^2 r_2,$$

kde $\omega = 2\pi/T$ a $T = 50$ let. Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$r_1^3 = \frac{\varkappa M_2}{\omega^2 (1 + M_1/M_2)^2}, \quad r_2^3 = \frac{\varkappa M_1}{\omega^2 (1 + M_2/M_1)^2}.$$

Dostáváme vzdálenost hvězd od sebe

$$R = r_1 + r_2 = \left(\frac{\varkappa (M_1 + M_2) T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3},$$

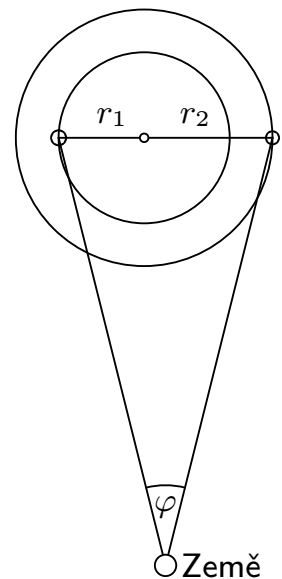
což je třetí Keplerův zákon v přesném znění.

Označíme-li φ úhel, který svírají složky dvojhvězdy při pozorování, platí pro vzdálenost x dvojhvězdy od Slunce

$$x = \frac{R/2}{\operatorname{tg}(\varphi/2)} \approx \frac{R}{\operatorname{tg} \varphi} \approx \frac{R}{\varphi},$$

kde malý úhel φ je v radiánech. Po číselném dosazení vychází $x = 1,4 \cdot 10^{14}$ km = 15 ly.

V řešení jsme nepotřebovali údaj o ohniskové vzdálenosti dalekohledu. Z informace o spektrálních čarách jsme zjistili postavení dvojhvězdy vzhledem k Zemi. Z hmotností složek a periody oběhu jsme určili vzdálenost složek dvojhvězdy od



Obr. 21.
Pozorování dvojhvězdy ze Země

sebe. Konečně vzdálenost dvojhvězdy od Slunce jsme stanovili ze znalosti o úhlové vzdálenosti jejích složek.

Hmotnost systému vystupuje ve vztahu pod třetí odmocninou. Tedy relativní chyba určení hmotnosti se na celkový výsledek přenáší z jedné třetiny. Ostatní veličiny (úhel a čas) jsme schopni měřit velmi přesně, takže se v celkové chybě také výrazně neprojeví.

Úloha III.4 ... topení Alberta Einsteina

Albert Einstein se v důchodovém věku (narozdíl od svých vrstevníků šťourajících se v zahrádce) zamýšlel nad různými paradoxními jevy. V zimě si všiml, že když ohřívá vodu v topení přímo ohněm, účinnost je velmi malá.

Napadlo ho vyzkoušet jiný postup. Vzít ideální tepelný stroj a použít kotel a venkovní vzduch jako teplou a studenou lázeň. Práci, kterou z tohoto stroje získá, pak vložit do jiného ideálního tepelného stroje, který bude odebírat teplo vzduchu a předávat jej vodě. Jestliže jsou teploty kotle, vody a vzduchu T_1 , T_2 a T_3 , jaká je účinnost ohřevu vody? Nedochozí náhodou k porušení druhého termodynamického zákona?

Hned na začátku upozorním, že se v řešení nebudeme držet korektní znaménkové konvence, protože by se text pravděpodobně trochu znepřehlednil. Teplu i práci přisoudíme vždy kladné znaménko bez ohledu na to, zda je stroj získává či uvolňuje. Význam každé veličiny bude zřejmý z kontextu.

Popišme stručně situaci a zavedme značení. Oheň předává kotli teplo Q_0 . Stejně velké teplo $Q_{in,1}$ z kotle odebírá první tepelný stroj a teplota vody v kotli zůstává tudíž stálá. Část tohoto tepla $Q_{out,1}$ přejde do studené lázně (vzduchu) a zbytek přijatého tepla se přemění v práci $W_{out,1}$. Můžeme tedy psát

$$Q_{in,1} - Q_{out,1} = W_{out,1} .$$

Druhý stroj odebírá teplo $Q_{in,2}$ studené lázni (vzduchu) a přijímá práci $W_{in,2}$. Získané teplo a práce se přemění v teplo $Q_{out,2}$, které stroj odevzdá teplé lázni (vodě). Platí tedy

$$Q_{in,2} + W_{in,2} = Q_{out,2} .$$

Zajímá nás, zda je $Q_{out,2}$ větší než $Q_{in,1}$ potažmo Q_0 .

Účinnost prvního stroje je definována jako poměr vykonané práce $W_{out,1}$ a přijatého tepla $Q_{in,1}$. Účinnost ideálního tepelného stroje (Carnotova cyklu) je dána pouze teplotami lázni a platí

$$\eta_1 = \frac{W_{out,1}}{Q_{in,1}} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} . \quad (14)$$

Druhý stroj je úplně stejný jako první, jen s tím rozdílem, že všechny děje probíhají v opačném smyslu a stroj pracuje jako tepelné čerpadlo. Opět můžeme definovat

účinnost¹² stejným způsobem jako u prvního stroje. Nyní to bude poměr práce přijaté a tepla odevzdaného teplé lázni

$$\eta_2 = \frac{W_{\text{in},2}}{Q_{\text{out},2}} = \frac{T_2 - T_3}{T_2}. \quad (15)$$

Dále víme, že veškerou práci, kterou první stroj vykoná, předá druhému stroji,

$$W_{\text{in},2} = W_{\text{out},1}. \quad (16)$$

Z rovnic (14), (15) a (16) již snadno vyjádříme požadované teplo $Q_{\text{out},2}$, které druhý stroj předá vodě v topení

$$Q_{\text{out},2} = \frac{\eta_1}{\eta_2} Q_{\text{in},1}. \quad (17)$$

Celková účinnost našeho systému je tedy $\eta = \eta_1/\eta_2$. Podle (14) a (15) zřejmě platí $\eta_1 > \eta_2$, a můžeme tedy říct, že se složitější způsob ohřívání vyplatil.

Ověřme ještě, zda nedochází k porušení druhého termodynamického zákona. Jedna z jeho formulací říká, že není možné, aby teplo přecházelo z chladnějšího tělesa na teplejší bez vykonání dodatečné práce. V našem případě však první stroj pracuje zcela regulérně a „vyrábí“ práci, kterou odebírá druhý stroj pracující jako tepelné čerpadlo, a jistě tedy nedochází k samovolnému přechodu tepla z chladnějšího vzduchu do teplejší vody. Tepelného čerpadla se v současnosti čím dál hojněji využívá k vytápění domů. Nepoužívá se ovšem klasický tepelný stroj – využívá se podobného principu jako u běžné chladničky. Čerpadlem se prohání pracovní kapalina mezi studenou a teplou lázní, přičemž ve studené lázni je docíleno vypaření pracovní kapaliny a v teplé lázni její následné kondenzace, čímž se přenáší teplo a teplá lázeň se ohřívá na úkor studené.

¹²⁾ Máme na mysli účinnost Carnotova stroje. Skutečná účinnost tepelného čerpadla je převrácená hodnota $1/\eta_2$.

Úloha III . P ... akrobat na lyžích

Jistě znáte lyžařskou disciplínu akrobatické skoky. Lyžař po rozjezdu z kopce najíždí na můstek a skáče do vzduchu. Před dopadem zvládne skokan provést několik vrutů a salt. Vysvětlíte, jak to lyžař dělá – co musí udělat, aby se začal otáčet tak, jak chce. Jak vyvrátíte tvrzení, že podle zákona zachování momentu hybnosti se musí skokan po celou dobu skoku otáčet kolem stejné osy a stejnou rychlostí?

Vskutku jde o problémovou úlohu, takže toho moc nevypočítáme a budeme spíše kvalitativně uvažovat. Uděláme malou analýzu toho, jak se věci (i lidé) pohybují a proč.

Představme si následující situaci. Hledíme na mírný zasněžený kopeček, nad hlavou máme modrou oblohu. Najednou se od kopečku odráží lyžař a vylétá do vzduchu. Už při odrazu se nakloní dopředu, takže odrazem získává moment hybnosti vzhledem k těžišti (otáčí se ve směru pohybu). Ruce má rozpažené a v okamžiku skoku je pro lepší odraz vzpaží. Aby za kopcem dopadl opět na lyže, musí se nějak otočit, ale běda! Lyžař má jen malou úhlovou rychlost, takže pravděpodobně neuspěje a nejspíš spadne na nos. Lyžař proto musí udělat něco, aby svou úhlovou rychlost zvětšil a dostal se do správné polohy při dopadu. Lyžař v nejvyšším bodě přitáhne ruce k tělu a taky nohy k zadku. Skutečně to pomáhá, začne se rychleji otáčet, a když už je blízko správné vertikální orientace, opět ruce a nohy roztáhne, otáčení se zpomalí. Při dopadu může lyžař pružit nohama a také rukama (dopad zmírní při prudkém švihu rukama dolů). Podstata je tedy jednoduchá – ve správný čas se stáhnout, zrychlit rotaci a ve druhý správný okamžik se zase roztáhnout. Proč se lyžař začne otáčet rychleji, když přitáhne ruce a nohy k tělu, a naopak pomaleji, když je roztáhne?

Mějme těleso, které se otáčí úhlovou rychlostí ω kolem osy stálého směru procházející hmotným středem vůči níž má moment setrvačnosti J . Ze školy znáte druhou impulzovou větu ve tvaru $M = J\Delta\omega/\Delta t$; ten platí, pokud J je konstantní a mění se jen úhlová rychlost. Pokud se mění také J , správný vztah zní

$$M = \frac{\Delta(J\omega)}{\Delta t}.$$

Platí tedy, že moment hybnosti $J\omega$ tělesa, na něž nepůsobí žádné momenty sil vzhledem k ose otáčení, je konstantní.

Lyžař je rovněž těleso, ale nikoliv tuhé. Otáčí se pořád ve stejné rovině a jediná síla, která na něj působí, je tíhová síla, která má působíště v těžišti, a má tedy nulový moment vzhledem k ose rotace. Pokud chce lyžař zvýšit svoji rychlost otáčení, zmenší svůj moment setrvačnosti J ; úhlová rychlost se pak musí ve stejném poměru zvýšit, aby byl moment hybnosti $L = J\omega$ konstantní.

V diskutovaném skoku lyžař rotoval pořád kolem stejné osy, kolmé na rovinu pohybu. V takovém případě je vektor úhlové rychlosti rovnoběžný s vektorem momentu hybnosti $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$.

Zajímavější je případ, kdy se lyžař odráží tak, že získá rotaci kolem obecné osy procházející jeho tělem. Existují totiž skoky, při kterých zůstává téměř rozum stát, kdy akrobat rotuje kolem proměnné osy, proměnnou rychlostí a v proměnném tvaru (např. trojitě salto s pěti vruty Aleše Valenty). Jak je to možné? Neodporuje to

náhodou zákonu zachování momentu hybnosti? Jak však může být L konstantní, když ω mění jak velikost, tak směr? Jsou proto dva základní důvody.

1. Už pro volné tuhé těleso se zjistilo, že moment hybnosti vždy nemíří stejným směrem jako úhlová rychlost. Úhlová rychlost se mění jak v prostoru, tak vůči tělesu.¹³ Akrobat toho může využít a počkat, až bude ve správné poloze, a pak udělat nějaký pohyb (např. nohama nebo rukama).
2. Člověk není tuhé těleso. Pokud chce, může změnit svoji konfiguraci, a díky tomu je dokonce možné, aby člověk změnil svou orientaci v prostoru bez toho, aby nějaký moment hybnosti měl! Představte si, že jste právě v nejvyšším bodě výskoku ve vzduchu, bez jakéhokoliv momentu hybnosti čili bez otáčení, a chcete se otočit o 180° . Jak to uděláte? Že to nejde? A co kdybyste zkusili otáčet oběma upaženými rukama ve stejném směru? Otočíte se v opačném směru!

Každý akrobat se může otáčet, jak chce, pokud je moment hybnosti stále stejný. Představme si vzpřímeného akrobata ve vzduchu, jak rotuje kolem své podélné osy z . Vektor momentu hybnosti míří stejným směrem. Pokud však udělá správnou sérii pohybů, může dostat své tělo do roviny xy kolmé na vektor momentu hybnosti. Osa rotace je na konci stejná (při změně nebyla); moment setrvačnosti a úhlová rychlost se změnila ve stejném poměru. Problémem pak už je se jen naučit tu „správnou sérii pohybů“, což určitě není triviální a vyžaduje trénink.

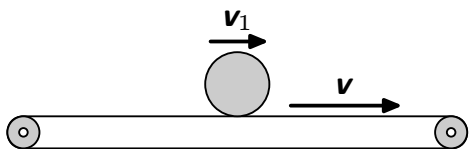
Akrobati na lyžích skáčou kombinaci salt (rotace kolem vodorovné osy) a vrutů (rotace kolem podélné osy těla). Tu první získává lyžař správným odrazem a koriguje ji natáhnutím anebo stažením rukou a nohou. Tu druhou získává lyžař taky při odrazu, pomáhá si ale rukama – švihne s nima při odrazu a dál tuto rotaci ovlivňuje pohybem rukou. Celou souhru pohybů je těžké pochopit, natož pak popsat.

¹³⁾ Koho zajímají tyto a jiné vlastnosti tuhého tělesa, doporučuji Feynmanovy přednášky z fyziky I.

Úloha IV.1 ... nakupujeme minerálky

Určitě jste si v super(hyper)marketu všimli, že plastová láhev oblíbeného nápoje se při rozjetí pohyblivého pásu pokladny začne otáčet a k pokladní ji často musíte postrčit až rukou. Proč to tak je?

Zkuste analyzovat následující modelový případ. Láhev je položena na pás osou kolmo na směr pohybu pásu a láhev i pás jsou v klidu. Náhle se pás rozjede konstantní rychlostí $v = 10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$. Jakou výslednou rychlostí se bude pohybovat



Obr. 22. Láhev na pásu

láhev? Nejdříve analyzujte, jak se budou chovat různé idealizace – jako třeba tuhý válec. Pak si uvědomte, že láhev je plná nápoje, který se nerad otáčí. Pro jednoduchost uvažujte viskozitu nápoje za nulovou, pak se zamyslete nad tím, jak do hry vstoupí viskozita.

Představme si, že na pásu, který je v klidu, leží válec; dejme tomu, že má poloměr R , hmotnost m a moment setrvačnosti I . Teď se najednou pás rozjede rychlostí o velikosti v . Jakou rychlostí v_1 se bude pohybovat válec? (Protože válec se bude otáčet, za v_1 bereme souřadnici rychlosti jeho hmotného středu.) Rozjetí pásu trvá krátkou dobu Δt , během ní pás působí na válec proměnnou silou a dodá mu impuls Δp ve směru pohybu pásu. Spolu s impulzem ovšem válec získá i moment hybnosti $\Delta L = R\Delta p$. Dále předpokládáme, že válec se bude otáčet bez prokluzu. Z tohoto důvodu dolní bod válce, který se dotýká pásu, bude mít stejnou rychlost v jako pás. Z první impulzové věty vyplývá, že dodaný impuls se rovná změně hybnosti válce

$$\Delta p = mv_1. \quad (18)$$

Podle druhé impulzové věty platí

$$R\Delta p = I\omega. \quad (19)$$

Jaká je úhlová rychlost ω válce, jehož dolní bod se pohybuje rychlostí v a střed rychlostí v_1 ? Pokud se budeme pohybovat spolu s válcem rychlostí v_1 , uvidíme, že jeho dolní bod se pohybuje rychlostí $v - v_1$, a tedy úhlová rychlost válce je $\omega = (v - v_1)/R$.¹⁴ Po dosazení úhlové rychlosti do poslední rovnice obdržíme

$$R\Delta p = I \frac{v - v_1}{R}.$$

Z první rovnice dosadíme Δp do poslední, vyjádříme v_1 a dostáváme

$$v_1 = \frac{I}{I + mR^2} v. \quad (20)$$

Jak se budou podle tohoto vzorečku chovat různá tělesa? Tenký válec (např. prázdná PET láhev) má moment setrvačnosti mR^2 , tudíž jeho výsledná rychlost bude $\frac{1}{2}v = 5,0 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$, tj. polovina rychlosti pásu; v případě plného válce je moment

¹⁴⁾ Úhlová rychlost je stejná v každé inerciální soustavě, protože když těleso otočíme o úhel φ v jedné, v druhé je toto otočení stejné.

setrvačnosti $mR^2/2$ a výsledná rychlost bude $1/3$ rychlosti pásu, tedy vždy méně než rychlost pásu. Krátké zamyšlení potvrdilo naše zkušenosti z nákupů.

Jak to ale dopadne se skutečnou lahví s minerálkou? Pro jednoduchost předpokládejme, že láhev je zcela vyplněna nápojem, takže nebudou nastávat problémy se šplícháním vody uvnitř. Těsně po rozjezdu se láhev pohybuje rychlostí v_1 a plastový obal se ještě k tomu otáčí, ale nápoj uvnitř ne! (Část kapaliny se přece jen trochu otáčí, protože kapalina blízko stěny láhve sleduje pohyb stěny; pokud je však láhev dostatečně široká, většina kapaliny je daleko od stěn a tento efekt můžeme zanedbat.) Označme hmotnost plastového obalu m_o a hmotnost nápoje m_n ; platí $m = m_o + m_n$. Protože se po rozjetí pásu otáčí jen obal, celkový moment hybnosti je dán jen momentem hybnosti plastového obalu. To můžeme do rovnic zahrnout tak, že celý moment setrvačnosti láhve je moment setrvačnosti obalu $I = m_o R^2$. Ten dosadíme do posledního vztahu (20) a pro rychlost láhve dostaneme

$$v_1 = \frac{m_o}{2m_o + m_n} v \approx \frac{m_o}{m_n} v,$$

poněvadž poměr m_o/m_n je řádu 10^{-2} . Při rychlosti $v_1 \approx 0,1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ by prodavačka na láhev čekala několik desítek minut.

Protože kapalina je viskózní, části kapaliny v láhvi se třou o sebe a uvádějí se do otáčivého pohybu. Tření v kapalině vzniká pouze, pokud se jednotlivé válcové vrstvy kapaliny pohybují různými rychlostmi. Po nějaké době by se měl vzájemný pohyb vrstev zastavit, a tudíž by se měla láhev pohybovat, jako by byla tuhým tělesem.

Předpokládejme na chvíli, že při valení nepůsobí na láhev žádný valivý odpor. Rychlost láhve a úhlová rychlost obalu se samozřejmě v průběhu roztáčení vody uvnitř láhve mění. Po celou dobu roztáčení a ustalování kapaliny uvnitř láhve působí pás na láhev nenulovou silou. Teď byly impulz a moment hybnosti dodány láhvi během dlouhé doby, po ustálení však opět platí rovnice (18) a (19). Moment setrvačnosti celé láhve je po ustálení kapaliny $I = m_o R^2 + m_n R^2/2$ a pro výslednou rychlost dostáváme

$$v_2 = \frac{2m_o + m_n}{4m_o + 3m_n} v \approx \frac{1}{3} v.$$

Pokud tedy počkáme, až se pohyb tekutiny v láhvi ustálí, láhev se bude pohybovat jako tuhý válec a její výsledná rychlost bude přibližně $1/3$ rychlosti pásu, což je stejný výsledek, jaký jsme dostali pro tuhý válec.

Ale pozor! Jsou tu i jiné vlivy, jako třeba valivý odpor. Ten způsobí, že po dost dlouhé době se všechna tělesa vzhledem k pásu zastaví, přestanou se otáčet a budou unášena rychlostí pásu dál. Můžeme si teď položit zajímavou otázku. Který vliv bude podstatnější pro pohyb – viskozita nebo valivý odpor? Pokud bude významnější valivý odpor, fáze pohybu s rychlostí $\frac{1}{3}v$ popsaná výše vůbec nenastane; válec to po chvíli roztáčení vody vzdá a začne se pohybovat bez otáčení stejnou rychlostí jako pás. Přesně odpovědět na tuto otázku je obtížné. Můžeme však alespoň orientačně říct, který vliv je dominantní podle toho, jak dlouho mu trvá, než se projeví.

O valivém odporu víme, že normálně se na nepohyblivé podložce láhev zastaví v průběhu několika sekund. Valivý odpor je tedy převládajícím vlivem nad viskozitou a přechodný stav třetinové rychlosti nenastane. Láhev by se měla po chvíli přestat otáčet, to však, zdá se, neodpovídá skutečnosti. Častěji je možno vidět láhev stabilně se otáčet na místě. Proč, těžko říct. Svou roli zde může hrát zřejmě

nerovnost podložky pásu (mírná prohlubeň vzniklá v místě kontaktu láhve a pásu) a možná i nerovnoměrnost chodu pásu (proměnná rychlost, vibrace, ...).

Úloha IV.2 ... švestkové víno v číně

V oblíbené čínské restauraci na Vinohradech dávají každému hostu k účtu jako pozornost švestkové víno. Nápoj nalévají do malých keramických mističek s dvojitým dnem (viz obr. 1). Horní dno je skleněné a je pod ním vidět obrázek sedící Číňanky (viz obr. 2). Po vypití vína obrázek Číňanky zmizí (viz obr. 3). Podrobně vysvětlete, proč se tak stane. Prázdňá mistička s vypouklým skleněným dnem je vyfocena na obrázku 4.

Když je mistička prázdňá, tvoří kulové dno silnou spojku s malou ohniskovou vzdáleností a obrázek není vidět, protože světlo z něj se rozptýlí, nebo ani neprojde rozhraním mezi sklem a vzduchem kvůli totálnímu odrazu. Přilité víno má velmi podobný index lomu jako sklo a paprsky procházející rozhraním (teď už) mezi sklem a vínem se téměř nelámou a dochází pouze ke zdánlivému přiblížení obrázku ke hladině (hůl do vody vnořená, ...).

Tento jev se objevuje hlavně v podvodním světě – když se potopíme pod vodní hladinu, vidíme velmi špatně právě z tohoto důvodu. Aby vodní živočichové vůbec viděli, musí k tomu být uzpůsobeno jejich oko.

Úloha IV.3 ... dostavba Temelína

Odhadněte tloušťku vody potřebnou k odstínění záření z jaderného reaktoru s výkonem 980 MW v plánovaném novém bloku JE Temelín. Z celkové energie uvolněné při štěpení jádra uranu připadne zhruba 82 % na kinetickou energii fragmentů, 6 % odnesou neutrina, po 6 % mají neutrony a gama fotony.

Nápověda. Pravděpodobnost, že částice projde materiálem do hloubky d , je přibližně rovna $e^{-\sigma nd}$, kde $n = N/V$ je hustota molekul materiálu (v našem případě počet molekul vody v 1 m^3) a σ je účinný průřez (cross section) pro absorpci částice na molekule. Účinný průřez má rozměr plochy (často se užívá jednotka barn = 100 fm^2) a závisí na energii částic. Hodnoty účinných průřezů se pokuste najít na internetu nebo v příslušných tabulkách.

Interakce záření s látkou je obecně dost složitý proces. Pokud si záření představíme jako skupinu letících kulek, situace se značně zjednoduší. Prolétá-li záření látkou, čas od času se některé z částic připlete do cesty molekula prostředí, kterým záření proniká. Podle typu záření pak následuje příslušný karambol. V našem případě předpokládáme, že účastník srážky nepokračuje v dalším letu.

Nyní k samotnému reaktoru. Fragmety jádra uranu se v látce okamžitě zastaví, jejich kinetická energie se na velice krátké vzdálenosti přemění na teplo, které udává výkon reaktoru. Neutrina jsou schopna bez jediné interakce proletět celý vesmír, takže s těmi si taktéž není nutné lámat hlavu. Zbývají gama fotony a neutrony.

Nejdříve k neutronům. Intenzita neutronového záření I_n , kterou je potřeba odstínit, je přímo úměrná výkonu $P = 980 \text{ MW}$ reaktoru a nepřímo úměrná ploše S

stěny reaktoru. Konstantu úměrnosti určují zlomky energie odpovídající štěpným produktům (82 %) a neutronům (6 %, viz zadání).

$$I_n = \frac{6}{82} \cdot \frac{P}{S}. \quad (21)$$

Absorbovaná dávka záření¹⁵ D je definována jako energie záření, která se absorbovala v jednotce hmotnosti, $D = E/m$. Dle normy maximální neškodná absorbovaná dávka záření za rok je $D_r = 0,05$ Gy.

Pro dostatečnou bezpečnost předpokládejme, že průměrný chlap vážící $m = 80$ kg vysedává u stěny reaktoru 24 hodin denně. Dávka, kterou dostane za $T = 1$ rok, je s ohledem na (21) a nápovědu v zadání rovna

$$D = \frac{TS_{\text{ch}}I_n e^{-\sigma n d}}{m},$$

přičemž S_{ch} je plocha chlapa. Pro nejhorší případ položíme $S_{\text{ch}} \approx S$, pak pro potřebnou tloušťku stěny máme

$$d \approx \frac{1}{\sigma n} \ln \frac{TP}{10D_r m}.$$

Hustota molekul vody je $n = N_A \rho / M_m$, kde N_A je Avogadrova konstanta, ρ je hustota vody a M_m je molární hmotnost vody. Po nalezení celkového účinného průřezu neutronů na jádrech vodíku a kyslíku¹⁶ $\sigma_n = 20 \cdot 10^{-24}$ cm² dostaneme přibližně $d \approx 0,5$ m.

Situace s gama zářením je mnohem komplikovanější. Při průchodu látkou stále platí exponenciální úbytek fotonů. Obvykle se píše ve tvaru $I = I_0 e^{-\mu_1 x}$, kde μ_1 značí lineární zeslabovací koeficient. Koeficient μ_1 nelze ani zdaleka považovat za konstantní. Závisí poměrně dramaticky na energii fotonů. Na jednoduchosti věci nepřidá zvláště fakt, že gama fotony mohou interagovat s látkou třemi způsoby:

1. Fotoelektrická absorpce

Gama foton interaguje s valenčními elektrony v atomech prostředí obdobně jako při fotoelektrickém jevu. Část energie se použije k překonání vazebné energie elektronu. Zbytek se použije na kinetickou energii elektronu, který po interakci odlétá pryč ze svého původního stanoviště.

2. Comptonův rozptyl

Comptonův rozptyl je proces, při kterém gama záření interaguje s volným nebo slabě vázaným elektronem. Elektron získá část energie fotonu. V souladu se zákonem zachování energie a hybnosti není možný úplný zánik fotonu. Tím pádem z místa interakce odlétá foton se zmenšenou energií a elektron.

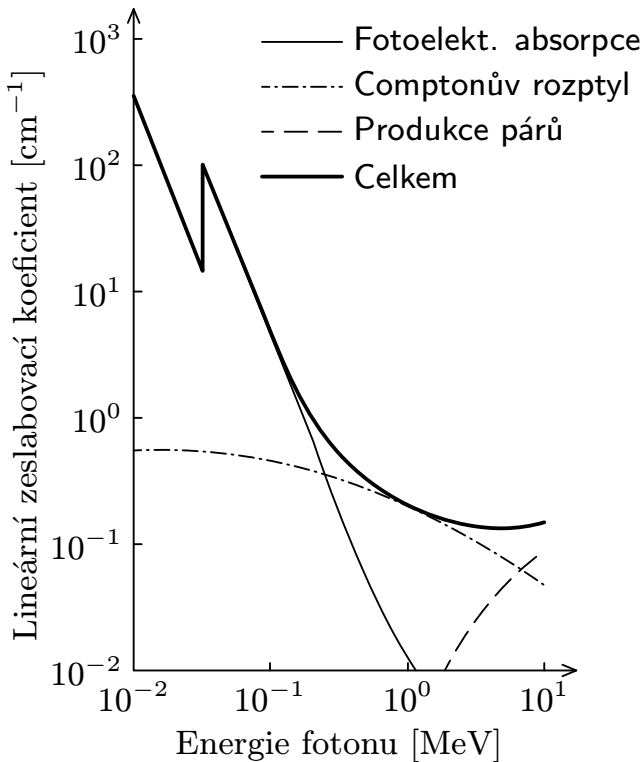
3. Produkce elektron-pozitronových párů

Pokud má foton energii větší než 1,022 MeV (to odpovídá dvojnásobku klidové energie elektronu $2m_e c^2$), může samovolně vygenerovat elektron-pozitronový pár. Pokud se tak stane v blízkosti jádra, elektron a pozitron se rozletí od sebe

¹⁵⁾ Jednotka absorbované dávky je Gy, vyslovuje se gray. Jednotka byla takto pojmenována na počest Louise Harolda Graye.

¹⁶⁾ Hodnota převzata z W. B. Jones: *The Slow Neutron Cross Section of H*. Physical Review 74, 364-369 (1948).

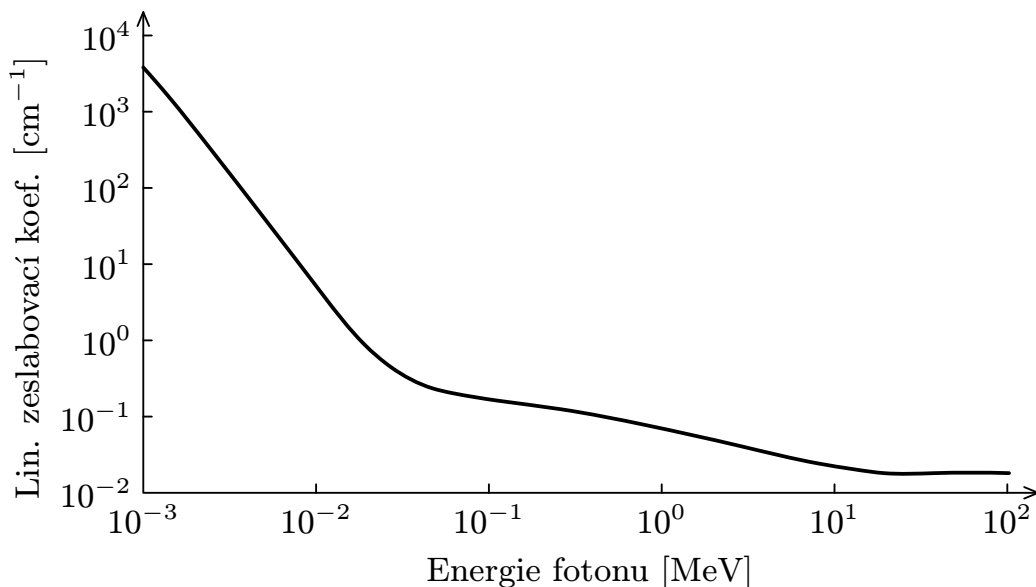
a přebytečná energie nad 1,022 MeV se rozdělí mezi elektron a pozitron v podobě kinetické energie. Pozitron je zpomalován prostředím, až nakonec anihiluje, což vyprodukuje dva fotony s celkovou energií 0,511 MeV. Tyto gama fotony s nižší energií mohou dále interagovat. Nemůžou však už vygenerovat elektron-pozitronový pár.



Obr. 23. Lineární zeslabovací koeficient gama záření v NaI

Každý ze způsobů interakce s látkou se uplatňuje v jiné části energetického spektra. Energetické spektrum lineárního zeslabovacího koeficientu pro jodid sodný NaI (krystal NaI se používá v detektorech gama záření) je znázorněno na obrázku 23. Z něj je patrné, jak významnou roli hrají při dané energii jednotlivé typy interakcí.

Pokusme se konečně odhadnout, jaká tloušťka vody je potřeba k odstínění gama záření z reaktoru. Energie uvolněná při rozpadu jednoho atomu uranu je asi 180 MeV. Takže fotony získají asi 11 MeV, na každý foton tak případně energie kolem 2 MeV. Lineární zeslabovací koeficient pro tuto energii se dá odečíst z grafu 24 a je roven zhruba $0,05 \text{ cm}^{-1}$. Pokud použijeme stejné parametry reaktoru a pracovníka JE jako v případě neutronů, dostaneme pro tloušťku vody $d \approx 7 \text{ m}$.



Obr. 24. Lineární zeslabovací koeficient gama záření ve vodě

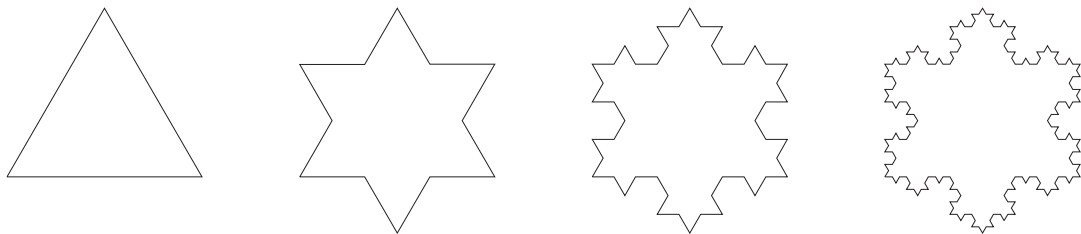
Výsledky, které jsme obdrželi, naznačují, že odstínit vodou neutrony se ukazuje jako dobrý nápad, jelikož neutrony se rády zachytávají na jádrech vodíku. Ovšem s gama zářením je situace trochu horší. K jeho odstínění se nejlépe hodí těžké prvky.

Atomy s větším počtem protonů propouštějí gama fotony mnohem méně a byly by k tomuto účelu vhodnější. V praxi se k tomuto používá olovo nebo wolfram, kterým je obaleno jádro reaktoru.

Úloha IV.4 ... Kochova vložka

Určete moment setrvačnosti Kochovy vložky zhotovené z homogenního plechu vzhledem k ose kolmé na její rovinu a procházející jejím středem. Uvažujte, že vložka má hmotnost m a průměr a .

Kochova vložka je útvar vzniklý iterativním lepením vždy třikrát menších rovnostranných trojúhelníků na strany předchozího útvaru (viz obr. 25). Průměrem Kochovy vložky rozumíme vzdálenost vrcholů jejích protějších cípů.



Obr. 25. První čtyři iterace při vytváření Kochovy vložky

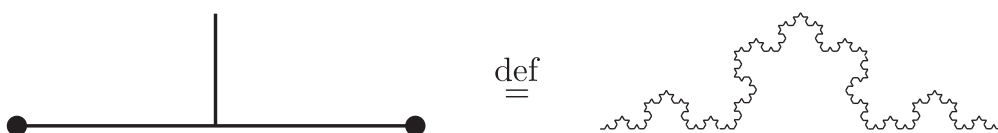
Prvním možným přístupem k problému určení momentu setrvačnosti je přímé využití jeho definice pomocí integrálu. V případě Kochovy vložky K by však výpočet příslušného integrálu

$$I = \int_K r^2 \rho dV$$

byl zřejmě velmi obtížný. K něčemu však toto vyjádření momentu setrvačnosti přece jen pomůže. Lze z něj totiž jednoduše odvodit, že změníme-li všechny rozměry plošného objektu k -krát (při zachování polohy osy a hodnoty plošné hustoty), změní se hmotnost každého elementu dV k^2 -krát a příslušná vzdálenost r od osy k -krát. Moment setrvačnosti se tedy změní k^4 -krát. Tuto skutečnost později využijeme.

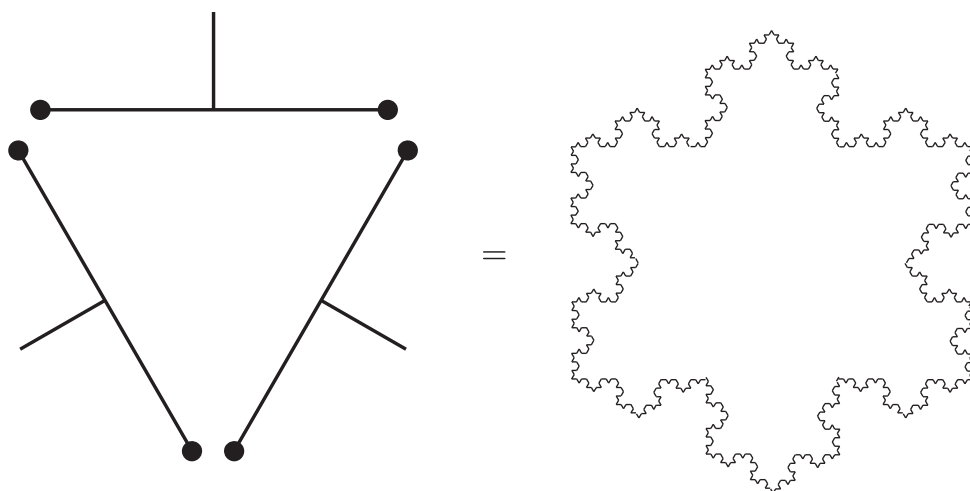
Nevede-li k cíli přímé použití definice, je užitečné prostudovat případné symetrie či jiné pravidelnosti. Nejcharakterističtější vlastností Kochovy vložky (a obecně všech fraktálů) je její soběpodobnost. Co to konkrétně znamená? Podíváme-li se na jednu ze „stran“ Kochovy vložky (kterou budeme dále pro jednoduchost nazývat Kochovou křivkou), snadno nahlédneme, že se skládá ze čtyř na sebe napojených třikrát menších Kochových křivek.

Zavedme si pro Kochovu křivku zjednodušenou grafickou značku¹⁷

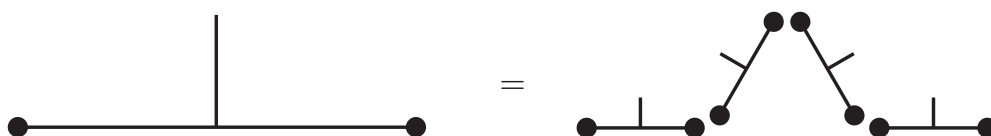


¹⁷⁾ Schémata použitá v tomto textu v zájmu názornosti neobsahují popisky délek a úhlů. Zjednodušeně řečeno však platí, že to, co vypadá jako úhel 30° , 60° , resp. 120° , jím také skutečně je.

Potom můžeme například celou Kochovu vložku znázornit takto

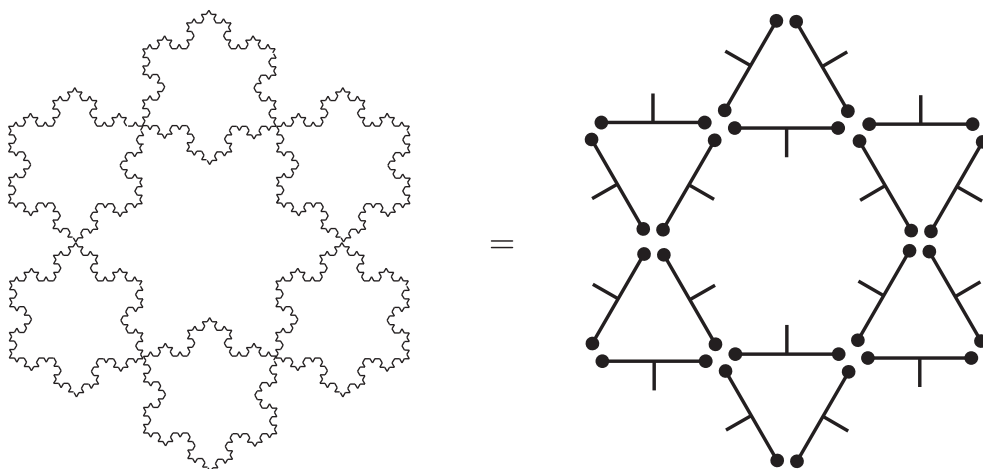


Zmíněnou soběpodobnost Kochovy křivky vyjadřuje následující „rovnost“

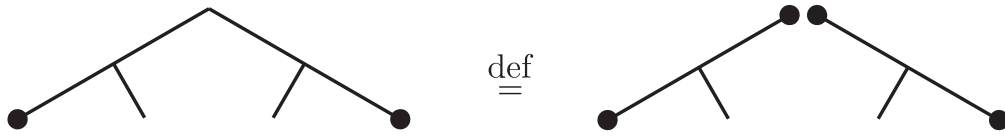


Důležité je, že Kochova křivka je jedinou omezenou křivkou, která vykazuje právě popsanou soběpodobnost. Tento fakt ponecháme bez důkazu. Zájemcům můžeme prozradit, že k němu lze použít tzv. Banachovu větu o kontrakci (někdy též zvanou Banachova věta o pevném bodě).

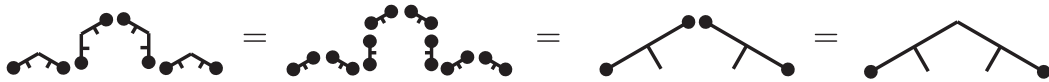
To však ještě stále není to, co bychom chtěli, protože jde o soběpodobnost křivky ohraničující Kochovu vložku. My se však zajímáme o samotnou plochu. Hodilo by se tedy nalézt soběpodobnost Kochovy vložky s některými jejími částmi. Zřejmě je rozumné soustředit se na šest cípů vložky. Každý z nich je totiž ze dvou stran ohraničen Kochovou křivkou. Pokud si podobně dokreslíme i třetí strany, dostaneme



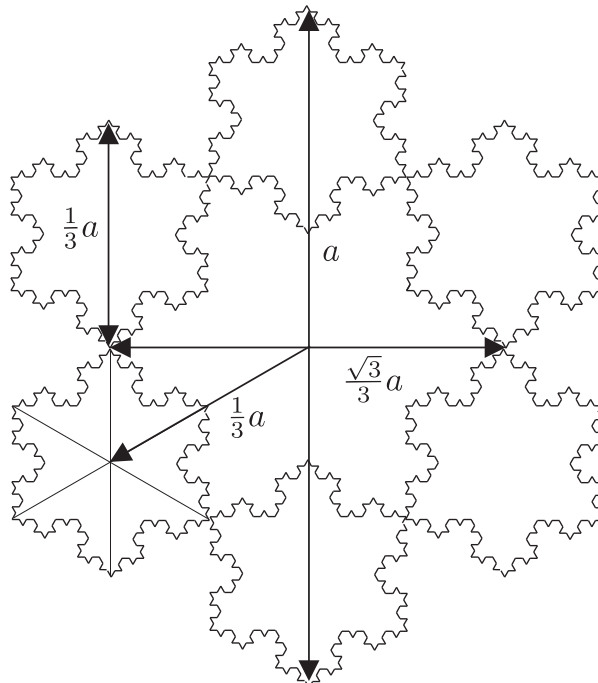
Situace začíná vypadat slibně. Kochova vločka se skládá z šesti třikrát menších vloček a jistého „zbytku“, který taktéž velmi silně připomíná vločku. Jak ale dokážeme, že zbylá vnitřní oblast je skutečně také Kochovou vločkou? K tomu by zřejmě stačilo ukázat, že každá dvojice sousedních stran oblasti tvoří dohromady Kochovu křivku. Zavedme si pro tyto dvojice schématické označení



Jednoduše lze ukázat, že takto napojená dvojice Kochových křivek vykazuje přesně stejnou soběpodobnost jako samotná Kochova křivka. Postup důkazu znázorňuje následující série rovností



První z nich je jednoduše rozepsáním každé značky pro dvojici křivek na dvě značky pro jednotlivé křivky. Druhá plyne ze soběpodobnosti Kochovy křivky (viz obrázek výše) a třetí opět vyjadřuje pouze přechod k symbolu pro dvojici křivek. Jelikož však, jak bylo uvedeno výše, je jedinou omezenou křivkou s touto soběpodobností právě Kochova křivka, musí s ní být skutečně každá dvojice stran uvažované oblasti totožná.



Obr. 26. Geometrie Kochovy vločky

Tím jsme korektně¹⁸ dokázali něco, co je každému člověku „jasné z obrázku“, totiž že zbytek po odříznutí Kochových vloček představujících cípy původní vločky je také Kochovou vločkou.

Od vyřešení úlohy nás už dělí jen trocha elementární geometrie (viz obr. 26) a několik jednoduchých úvah. Využijeme skutečnost, že moment setrvačnosti dvojrozměrného objektu o dané plošné hustotě roste se čtvrtou mocninou jeho charakteristického rozměru (v našem případě průměru vločky). Je-li moment setrvačnosti Kochovy vločky o průměru a (vzhledem k ose o procházející středem) roven I , pak je moment setrvačnosti vnitřní oblasti vzhledem k téže ose roven $I/9$. Moment setrvačnosti každého z cípů vůči ose procházející jeho vlastním středem je $I/81$ a vzhledem k ose o pak podle Steinerovy věty $I/81 + ma^2/81$ (hmotnost cípu je $m/9$). Celkový moment setrvačnosti I ale musí být roven součtu jednotlivých dílčích momentů, tj.

$$I = \frac{1}{9}I + 6 \left(\frac{1}{81}I + \frac{1}{81}ma^2 \right).$$

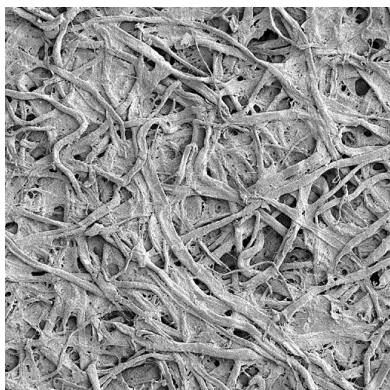
Odtud pak již snadno vyjádříme výsledek $I = \frac{1}{11}ma^2$.

Úloha IV . P ... *mastný papír*

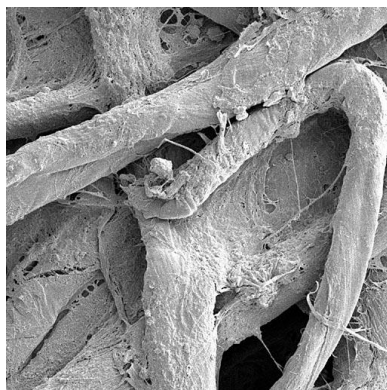
Jistě jste se již setkali s tím, když kapka oleje ukápla na papír. Z bílého papíru se rázem stal papír průsvitný. Vysvětlete, čím to je. Najděte ve svém životě případy, kdy se uplatňuje stejný jev, avšak třeba v úplně jiné situaci.

Právě teď se díváte na pokus o vyřešení záhady mastného papíru, a pokud zrovna nebrouzdáte po stránce FYKOSu, díváte se na bílý papír s černými písmeny. Jednoduše řečeno s papírem přicházíme tak často do styku, že si toho ani nevšimáme. Jenomže tentokrát bude právě papír v centru dění.

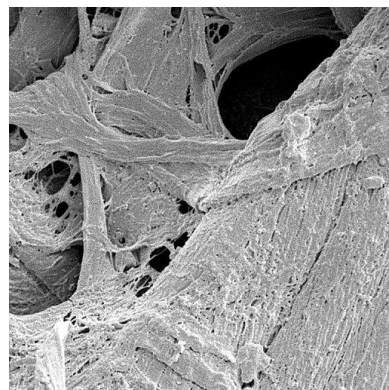
Podívejme se, jak vypadá papír zblízka na následujících obrázcích:



Obr. 27. Zvětšeno 100×



Obr. 28. Zvětšeno 1000×



Obr. 29. Zvětšeno 2500×

Papír rozhodně není homogenní, spíše se skládá z nespočetného množství do sebe spletených vláken celulózy. Mezi nimi je však poměrně veliký prostor a ten bude hrát v našem zdůvodnění záhady mastného papíru podstatnou roli.

¹⁸⁾ I když šlo pouze o hraní s obrázky, daly by se popsané úvahy snadno zformulovat do „skutečného“ matematického důkazu. Jediným slabým místem je právě již zmíněná otázka jednoznačnosti křivky s uvedenou soběpodobností, jejíž důkaz jsme vynechali.

Předem si však shrneme pár velmi důležitých postřehů. Mastný papír je průsvitný. Papír vodu moc dobře nesaje. Navzdory tomu, když ho dostatečně navlhčíme, je také průsvitný. Když je papír mokrá, tak se velice snadno trhá. Mastnotu z papíru již tak lehce nedostaneme. Voda se z mokrého papíru rychle odpaří, čímž je papír opět neprůsvitný a obvykle se výrazně zkroutí. To dokazuje, že v přítomnosti vody mají vlákna tendenci zkroutit se. Nic podobného však nepozorujeme na mastném papíru. Také je evidentní, že v mastném ani vlhkém papíru nedochází k žádné chemické reakci (minimálně se nejedná o tutéž reakci). Nanejvýš dochází k oslabení vazeb mezi vlákny (důsledkem toho se může papír rozložit na samotná vlákna).

Co se tedy stane, když posvítíme na obyčejný papír? Mezery mezi vlákny papíru jsou velmi malé. Když na sebe uložíme více takových vrstev, pak světlo nemůže projít skrz papír jenom tak. V cestě mu bude téměř vždy stát nějaké to vlákno, které ho rozptýlí do všech směrů. Jenom zlomek světla projde, dojde k difúzi světla (proto je rozptýlené světlo bílé, resp. papír je bílý, ač toto závisí také na přidaných barvivech). Papír, jenž je sám o sobě poměrně tenký, tedy není úplně neprůsvitný.

Jiná situace nastane, když jsou mezery vyplněné olejem nebo vodou. Vlákna celulózy jsou nesmáčivá jak vodou, tak i olejem, proto se rozhraní mezi olejem nebo vodou v papíře a vlákny vyhladí. Je to něco velice podobného, jako když namočíme tabuli. Ta je pak tmavší, ale pod jistým úhlem odráží více světla a je světlejší. V případě světla tedy vyhlazení povrchu uvnitř papíru vede k tomu, že světlo, které se šíří olejem, bude častěji odráženo takovým způsobem, že projde skrz papír. Toto poslední tvrzení by se dalo formulovat také tak, že dojde ke vzniku jakýchsi vlnovodů v papíře. Rozptyl světla na nepravidelnostech vláken se díky odrazu světla na rozhraní mezi olejem a vlákny více (ale ne zcela) potlačí.

Kdy se uplatňuje stejný jev, avšak třeba v úplně jiné situaci? Ze stejného důvodu, proč není papír průhledný, je neprůhledný sníh (ale led ano), mají mraky bílou barvu a v mlze dohlédneme jen na několik metrů. S odrazem světla od povrchu vody se setkáváme doslova na každém kroku, třeba již na zmíněné tabuli.

A na závěr bychom jenom dodali, že k rozlouštění záhady mastného papíru nedošlo rozhodně vůbec přesvědčivě a nevyvratitelně. Použili jsme spíše vědomost jistých analogických procesů. Jenomže některé analogie jsou problematické.

Úloha V.1 ... smrt klavíristy

Z okna výškové budovy vypadl klavír i s klavíristou, který po celou dobu pádu hrál zděšené A. O k pater pod tímto oknem odpočíval nebohý umývač oken. Jak velké je k , jestliže poslední, co umývač slyšel, bylo Ais, tedy tón o půltón vyšší? Rychlost zvuku v daném vzduchu je $347 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, výška jednoho patra je $3,1 \text{ m}$.

Tato příhoda jest klasickým příkladem Dopplerova jevu.

Jelikož to poslední, co nebohý umývač oken slyšel, byl zvuk o frekvenci vyšší, než vysílal klavírista svým nástrojem, je zřejmé, že se v ten okamžik klavírista k umývači přibližoval. Fyzikální interpretace této situace je vcelku jednoduchá. Klavírista s klavírem prostě a jednoduše trefí umývače a tím ho zabije.

Ačkoliv existuje spousta různých ladění, budeme uvažovat temperované ladění. V temperovaném ladění zvýšení tónu o půltón odpovídá zvýšení frekvence $\sqrt[12]{2}$ -krát.

Ze vztahu pro Dopplerův jev a znalosti temperovaného ladění víme, že těsně před nárazem klavíru do hlavy umývače platilo pro rychlost klavíru v

$$\sqrt[12]{2} = \frac{f'}{f} = \frac{c}{c - v}.$$

Dále také víme, že padal-li klavírista s klavírem z výšky h nad umývačem volným pádem, dopadal na umývače rychlostí $v = \sqrt{2hg}$. Výšku h vyjádříme pomocí počtu pater $h = kp$, kde p je výška patra. Docházíme tak k finální rovnici

$$k = \frac{c^2}{2gp} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[12]{2}} \right)^2.$$

Po dosazení zadaných hodnot a $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ vychází

$$k \doteq 6,24,$$

ta čtvrtina patra navíc odpovídá tomu, že klavír vypadl z okna a okna mívájí spodní okraj o něco výš, než je podlaha.

Úloha V.2 ... kapitán Kork opět zasahuje

Deník kapitána Korka: „Hvězdný čas 51824,2. Budoucnost hvězdné flotily je znovu ohrožena. Romulani se nás pokoušejí zničit. Zaútočila na nás jejich nová bitevní loď typu Karusel s laserovým otáčivým dělem. Doktor Spok rozhodl, že není možno se s nimi utkat a musíme zaujmout výhodnější postavení co nejdále od nepřítele. Náš palubní vědecký pracovník bohužel ale zrovna spí a my ho nechceme budit. Jsme zřejmě odsouzeni k záhubě...“

Poradte kapitánovi, jaký manévr má provést, aby unikl jisté zkáze. Hvězdná loď Enterprise má tvar koule o poloměru R , na začátku je ve vzdálenosti r_0 . Dělo Karuselu se otáčí úhlovou rychlostí ω a střílí vždy do míst, kde jeho laserový senzor zjistí přítomnost Enterprise. Jakou nejmenší rychlostí se může Enterprise pohybovat, aby Karuselu ještě unikla?

Kapitán zrovna dokončil záznam v deníku, když vtom vešel doktor Spok.

„Kapitáne, naše situace je kritická.“

„Spoku! Přemýšlel jsem nad tím. Nemůžeme jen tak čekat, až nás Romulani odstřelí. Musíme něco vymyslet! Nějaký mazaný manévr.“

„To je logické. Jenže jaký? To nám počítač nepoví.“

„Hm... Vzpomínáš si na léta v akademii? To jsme těch akrobatických manévrů propočítali. Ještě teď mám hrůzu z těch integrálů. Pojď, zkusíme to vypočítat.“

„Fascinující nápad.“

Jak to vyřešili Spok s Korkem? Že se jim to podařilo, není pochyb, ale zkusme se na to podívat také sami, abychom se pocvičili v nelehké kinematice, i když si o matematických a fyzikálních dovednostech absolventů Hvězdné akademie můžeme samozřejmě nechat jen zdát.

Senzory Enterprise naštěstí zachytily Karusel v nemalé vzdálenosti, takže r_0 je mnohem větší než velikost lodi R . Senzory také zjistily, že dělo Karuselu se rychle otáčí a má zároveň laserový senzor otáčející se s dělem. Kdykoliv laserový paprsek dopadne na plochu k němu kolmou, odrazí se a šíří se zpět k detektoru Karuselu. Detektor se neotáčí, ale sbírá signály ze všech směrů a pak poví dělu, kam má střílet. Signál se zpět na Karusel dostane za dobu

$$t_1 = \frac{r_0}{c}.$$

Rozebereme nejdříve poněkud defenzivní taktiku, kdy se Enterprise bude pohybovat po kružnici ve vzdálenosti r_0 od Karuselu. Jakmile Karusel dostane signál, počká, až se dělo natočí do směru, ze kterého signál přišel, a vypálí. Toto natočení trvá dobu

$$t_2 = \frac{2\pi - \{\omega \cdot 2t_1\}}{\omega},$$

kde složené závorky znamenají podstatnou část z úhlu natočení, tedy úhel z intervalu $[0, 2\pi)$. V dalším okamžiku Karusel střílí laserovým dělem a míří na místo, kde byla Enterprise zpozorována. Laserové torpédo dosáhne onoho místa za dobu

$$t_3 = \frac{r_0}{c}.$$

Jak se nejjednodušeji vyhnout zásahu? Stačí, když se Enterprise posune o vzdálenost R . Bude to těžký manévr, ale nic jiného jí nezbývá, má k tomu k dispozici čas $t_1 + t_2 + t_3$. Pokud se má Enterprise vyhnout této strašlivé zbrani, musí se pohybovat po kružnici kolem Karuselu nejmenší rychlostí

$$v_{\min} = \frac{R}{t_1 + t_2 + t_3} = c \cdot \left[\frac{2r_0}{R} + \frac{c}{\omega R} \cdot \left(2\pi - \left\{ \frac{2\omega r_0}{c} \right\} \right) \right]^{-1}.$$

Enterprise se tedy dostane o malý kousek dál a za chvíli se celá akce opakuje. Pokud ale Enterprise zabere i ve směru od Karuselu (libovolně malou rychlostí), začne se po spirále vzdalovat, čímž se bude zmenšovat i rychlost v_{\min} , jak jistě vidíte. Postupně se tak dostane do bezpečné vzdálenosti od Karuselu.

„Připravte se na manévr! Všichni na svá bojová stanoviště! Spoku, zadal jste manévr do počítače?“
 „Manévr zadán a propočten.“
 „Tak tedy vpřed!“

A tak byla hvězdná loď Enterprise i s posádkou zase jednou zachráněna. Aby se opět odvážně a neohroženě mohla vydat tam, kam se dosud nikdo nevydal...

Úloha V.3 ... odporová řada

Vžijte se do role ředitele firmy, která chce jako první na světě začít vyrábět rezistory pro všeobecné použití. Na základě průzkumu trhu bylo zjištěno, že poptávka po rezistorech je rovnoměrně rozdělena v rozmezí 1Ω – $10 \text{ M}\Omega$. Z technických důvodů však můžete vyrábět pouze konečné množství, řekněme 169, různých rezistorů.

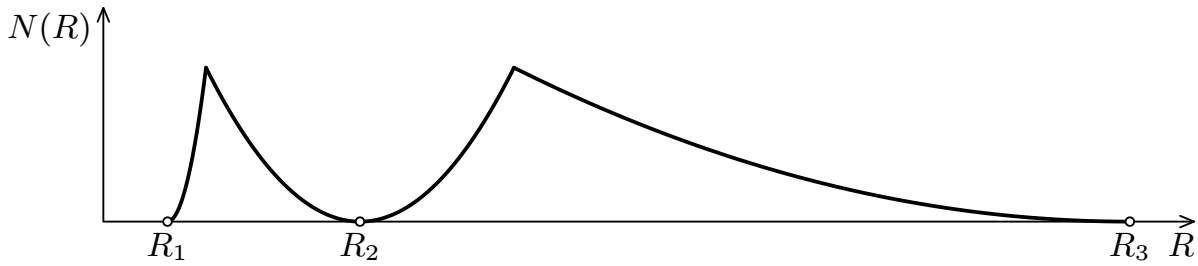
Pokud zákazník požaduje rezistor s hodnotou R_p a vy mu nabídnete rezistor s hodnotou R_n , bude „míra jeho nespokojenosti“ dána vztahem $(1 - R_p/R_n)^2$. Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla střední nespokojenost všech zákazníků minimální. Pro jednoduchost řekněme, že první a poslední rezistor z vaší nabídky musí mít hodnoty 1Ω a $10 \text{ M}\Omega$.

Pro zajímavost vyřešme zároveň následující úlohu: „Otázkou je, jaké hodnoty odporu musí mít vámi vyráběných 169 rezistorů, aby byla největší možná nespokojenost zákazníka minimální.“

Začneme sestrojením funkce nespokojenosti $N(R)$ zákazníka, který požaduje odpor R . Její hodnota pro odpor R bude (v zájmu ředitele firmy) minimum z čísel $\{(1 - R/R_n)^2\}_{n=1}^{169}$, kde R_n jsou hodnoty 169 vyráběných rezistorů. V bodech R_n bude její hodnota nulová. Načrtněme graf této funkce v intervalu (R_1, R_3) do obrázku 30. Graf sestává z kusů parabol majících minimum v bodech R_n . Dvě sousední paraboly na sebe navazují v bodě, kde mají stejnou hodnotu. Mezi body R_1 a R_2 to bude v bodě \mathfrak{R}_1

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{R_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_1}{R_2}\right)^2 \Rightarrow \mathfrak{R}_1 = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}},$$

jinými slovy se jedná o harmonický průměr obou hodnot.



Obr. 30. Graf funkce nespokojenosti zákazníka

Úspěšně jsme vyhodnotili, jaký rezistor z naší sady nabídnout zákazníkovi požadujícímu rezistor R a jaká bude jeho nespokojenost. To všechno udává funkce $N(R)$. Minimalizace střední nespokojenosti zákazníků odpovídá minimalizaci plochy pod grafem funkce $N(R)$; minimalizace největší nespokojenosti odpovídá minimalizaci maxima funkce $N(R)$. Nechť odpory R_1 a R_3 jsou pevně dané. Pojďme hledat hodnotu odporu R_2 , abychom splnili vyřčené požadavky.

Plocha pod grafem na intervalu (R_1, R_3) je

$$S = \frac{1}{3} \frac{(R_2 - R_1)^3}{(R_2 + R_1)^2} + \frac{1}{3} \frac{(R_3 - R_2)^3}{(R_3 + R_2)^2}.$$

Při změně prostředního odporu o malé dR_2 se plocha změní o (ověřte)

$$dS = \left\{ \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2 - \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right)^2 - \frac{2}{3} \left[\left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^3 + \left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right)^3 \right] \right\} dR_2.$$

Plocha bude minimální, pokud při malé změně dR_2 se plocha téměř nezmění. Výraz ve složené závorce se musí rovnat nule. Rovnici vyřešíme a vyjádříme R_3 pomocí R_1 a R_2 . Výsledný výraz zde nebudeme uvádět, neb je moc dlouhý. Dále budeme raději postupovat numericky. Jde o to najít hodnotu R_2 tak, aby pro $R_1 = 1 \Omega$ bylo $R_{169} = 10 \text{ M}\Omega$. Máme vlastně rekurentní relaci $R_n(R_{n-1}, R_{n-2})$; s její pomocí pro vybrané R_2 kontrolujeme správnost R_{169} . Budeme-li zkoušet dostatečně dlouho, dojdeme k číslu $R_2 \doteq 32,64 \Omega$ (odpory dalších rezistorů jsou uvedeny v tabulce). Zajímavé může být podívat se na závislost R_n na n . Numerickým fitem i analyticky lze ukázat, že závislost je kubická

$$R_n \approx 2,04 \cdot (n - 0,84)^3 \Omega.$$

Funkce nespokojenosti má lokální maxima v bodech \mathfrak{R}_n ; zde nabývá hodnot

$$N(\mathfrak{R}_n) = \left(1 - \frac{\mathfrak{R}_n}{R_n} \right)^2 = \left(\frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+1} + R_n} \right)^2.$$

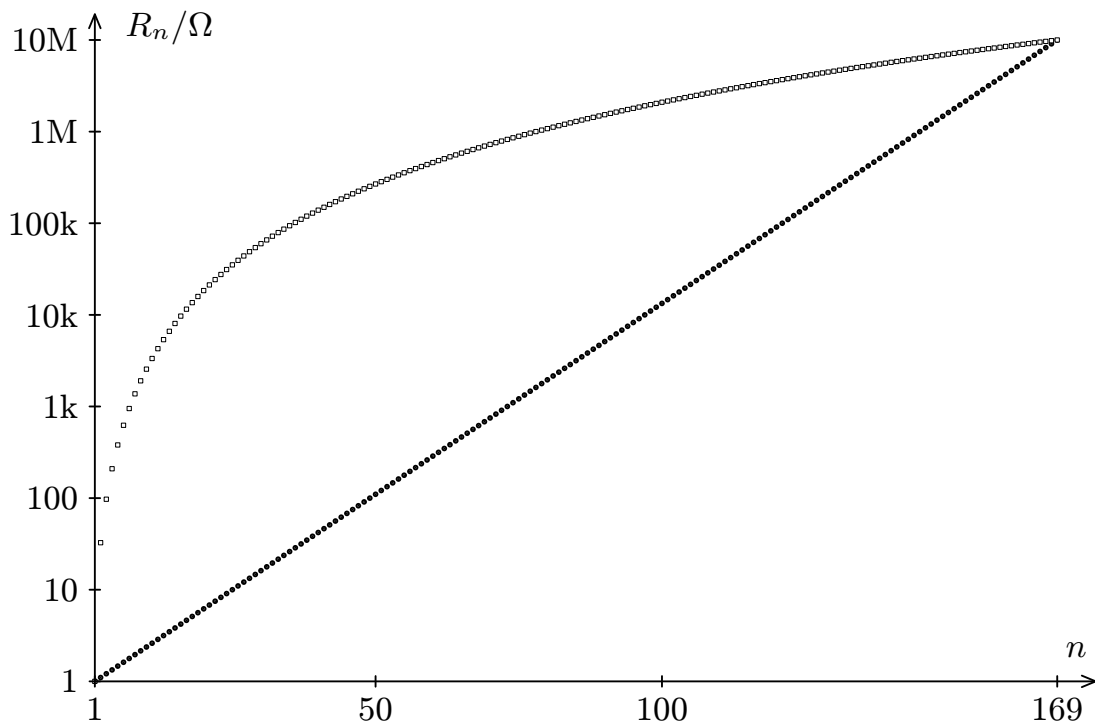
Hodnotu nejvyššího maxima můžeme snižovat do té doby, než mají všechna maxima stejnou hodnotu. Tato úvaha nás dovádí k rovnici

$$\left(\frac{R_3 - R_2}{R_3 + R_2} \right)^2 = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} \right)^2 \Rightarrow R_3 = \frac{R_2}{R_1} \cdot R_2.$$

Odpory rezistorů tedy tvoří geometrickou posloupnost $R_n = kR_{n-1} = k^{n-1}R_1$. Hodnota odporu roste exponenciálně s n . Zbývá vypočítat k , aby pro $R_1 = 1 \Omega$ bylo $R_{169} = 10 \text{ M}\Omega$. Tento úkon zvládne každý s pomocí kalkulačky $k = \sqrt[168]{10 \cdot 10^6} \doteq 1,10$. Hodnoty odporů všech rezistorů uvádíme v tabulce.

Vypočtené hodnoty odporu prvních 47 rezistorů. V prvním řádku jsou vždy odpory pro minimální střední nespokojenost, v druhém pro minimální největší nespokojenost.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R [\Omega]$	1,0	33	97	210	380	620	950	1,4k	1,9k	2,6k	3,3k	4,3k
$R [\Omega]$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,5	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,9
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$R [\Omega]$	5,4k	6,6k	8,1k	9,7k	12k	14k	16k	18k	21k	24k	28k	31k
$R [\Omega]$	3,2	3,5	3,8	4,2	4,6	5,1	5,6	6,2	6,8	7,5	8,3	9,1
n	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$R [\Omega]$	35k	39k	44k	49k	54k	60k	66k	72k	79k	86k	94k	102k
$R [\Omega]$	10	11	12	13	15	16	18	20	22	24	26	29
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	...
$R [\Omega]$	111k	120k	129k	139k	149k	160k	172k	184k	197k	210k	220k	...
$R [\Omega]$	32	35	38	42	46	51	56	62	68	75	83	...



Obr. 31. Grafické znázornění vypočtených hodnot odporů (puntíky – pro minimalizaci největší nespokojenosti, čtverečky – pro minimalizaci střední nespokojenosti)

Na závěr poznámka k druhému řešení. Elektrotechničtí nadšenci jistě nenechali bez povšimnutí, že námi vypočtené hodnoty odporů přesně odpovídají jmenovitým hodnotám (tj. průmyslově vyráběných) odporů. Není to náhoda. Technologie

výroby rezistorů samozřejmě nemůže zaručit neomezeně přesné hodnoty odporů. Odporů vyráběných rezistorů mají toleranci (např. 20 %, 10 %, 5 % atd.), tzn. když si koupíte rezistor s odporem $10\ \Omega$ a tolerancí 5 %, je jeho odpor nejpravděpodobněji v intervalu $(9,5\ \Omega; 10,5\ \Omega)$. Pro vyráběné rezistory byly zvoleny hodnoty odporů tak, aby relativní rozdíl hodnoty libovolného požadovaného odporu a hodnoty odporu vyráběného rezistoru byl menší než uváděná tolerance. Tak totiž budeme mít jistotu, že v hromádce vyrobených rezistorů najdeme ten, který má požadovaný odpor. Kýženou vlastnost má právě geometrická řada, neb relativní rozdíl po sobě následujících odporů $(R_{n+1} - R_n)/R_n = k - 1$ je konstanta (pro libovolné n). Řady odporů se značí podle toho, kolik odporů připadá na dekádu, E6, E12, E24 atd. (jejich tolerance jsou po řadě 20 %, 10 %, 5 % atd.). Podivné číslo 169 bylo zvoleno, aby na dekádu připadlo 24 odporů, což odpovídá řadě E24.

Úloha V.4 ... exhumace dárečku od Buffala

Buffalo Bill se už roky snaží polapit Jessieho Jamese, známého banditu. V městečku Clay County mu konečně přišel na stopu. Strhla se přestřelka. Buffalo si všiml sudu plného petroleje na vozíku mezi sebou a Jessiem. „Jak dostat sud k Jessiemu, abych ho mohl zapálit,“ rozmýšlí Bill.

Jessie prostřelil sud v 9/10 výšky a ze sudu začal stříkat petrolej. Buffalo se trefil přesně do poloviny sudu a střílí znovu. Vyřešte, s jakým počátečním zrychlením se bude pohybovat vozíček v závislosti na tom, kam se Bill trefí podruhé. Předpokládejte, že hybnost kulky je nulová, a tření zanedbejte.

Do jaké výšky by se musel Buffalo trefit, aby petrolej stříkal nejdále?

Nejdříve se zamyslíme nad tím, co se děje, když sud zasáhne jedna střela. Ze sudu o hmotnosti M začne vytékat petrolej o hustotě ρ díky působení hydrostatické síly $F = Sh\rho g$, kde h je výška petroleje nad otvorem a S je plocha otvoru, který vytvoří střela v sudu. Hydrostatická síla petroleje působí také na stěny sudu, výslednice sil působících na opačných stranách sudu je nulová (mají stejnou velikost a opačný směr). Celková hydrostatická síla působící na sud však nulová není, protože síla působící na stěnu naproti otvoru po střele se nevykompenzuje s opačnou silou; ta urychluje vystřikující petrolej. Docházíme k závěru, že na sud působí síla o velikosti F . Snadno tedy určíme zrychlení a sudu způsobené jednou střelou

$$a = \frac{Sh\rho g}{M}.$$

V naší situaci sečteme zrychlení zapříčiněné vystřikujícím petrolejem z děr po všech třech kulkách (za kladný směr uvažujeme směr k Jessiemu)

$$a = \frac{S\rho g}{M} \left(-\frac{H}{10} + \frac{H}{2} + x \right) = \frac{S\rho g (2H/5 + x)}{M},$$

kde H je výška sudu a x je vzdálenost místa, kam se trefí Buffalo podruhé, od horní stěny sudu. Je zřejmé, že se sud bude vždy pohybovat směrem k Jessiemu, neboť $a > 0$.

Ještě zbývá vyřešit druhou otázku, do jaké výšky se má Bill trefit, aby petrolej stříkal nejdále. Celý problém je pouze určení maximální délky vodorovného vrhu. Počáteční rychlost v_0 získáme z Bernoulliho rovnice $v_0 = \sqrt{2gx}$. Pro délku vodorovného vrhu platí

$$L = v_0 t = \sqrt{2gx} \cdot \sqrt{\frac{2(H-x)}{g}} = \sqrt{4x(H-x)}.$$

Vzdálenost L bude nabývat maxima pro $x = H/2$. Má-li petrolej stříkat nejdále, musí se Buffalo trefit do poloviny výšky sudu.

Pozorný čtenář si jistě všiml, že stejná úloha byla zadána již v 18. ročníku (odtud ta exhumace). Úlohu jsme zadali znovu, protože jsme tehdy udělali chybu v jejím řešení. Částice petroleje sice ze sudu vylétávají rychlostí $v_0 = \sqrt{2gx}$, ale ne všechny se pohybují ve směru kolmém na stěnu sudu. Z tohoto důvodu je hybnost vyteklého petroleje menší (poloviční), než jsme tehdy uvedli. Ze stejného důvodu se průřez proudu vystřikujícího petroleje zmenší na polovinu.

Úloha V. P ... co je to za okna?

Nedávno si nechal jeden z organizátorů doma vyměnit okna. Místo starých dřevěných přišla nová plastová s dvojitými skly. Okna se dodávají v několika variantách podle toho, jestli je prostor mezi skly evakuován anebo naplněn některým ze vzácných plynů. Navrhněte způsob, jak zjistit, kterou variantu organizátorovi dodali, ovšem bez trvalých následků na oknech.

Hned na začátku bychom rádi uvedli, že vakuová okna se pravděpodobně průmyslově vůbec nevyrábějí, protože samotné sklo rozumné tloušťky by nemohlo odolat atmosférickému tlaku (101 kPa odpovídá zatížení 10 t na 1 m² skla). Evakuovaná okna by musela mít zesílené sklo a nějaké vyztužení mezi skly. Místo toho se prostor mezi skly vyplňuje vzácným plynem (příp. trochu zředěným, nejčastěji argonem) pro jeho dobré tepelně-izolační vlastnosti.

Povězme ještě, že myšlenka plyn mezi skly nejdříve zkapalnit (ba dokonce nechat ztuhnout) není rozhodně dobrá. Vzácné plyny mají velice nízké teploty varu. Navíc plyn mezi skly může být zředěný, což působí další pokles teploty varu. Tím pádem nápad plyn zkapalňovat hodnotíme jako technicky neproveditelný (nemluvě o tom, že okno by pravděpodobně utrpělo trvalé následky).

Vymysleli jsme celkem šest metod, jak identifikovat plyn mezi skly v oknech. Postupy uvádíme v pořadí podle jednoduchosti a reprodukovatelnosti získaných výsledků.

Vysokofrekvenční elektrický výboj

Nadějný nápad se zdá být umístit okno do vysokofrekvenčního elektrického pole – napětí aspoň kilovolt, frekvence řádově 10 MHz. Pokud je mezi okny zředěný plyn, mohl by za příznivých podmínek zažehnout doutnavý výboj. Je potřeba vyzkoušet různé polohy elektrod a ladit napětí, dokud nedojde k průrazu. Výhoda vysokofrekvenčního výboje je ta, že na rozdíl od stejnosměrného výboje nevyžaduje vodivé elektrody, může tedy vzniknout v plynu uvnitř uzavřené nádoby s elektrodami vně.

Zapálí-li se doutnavý výboj, můžeme jásat. Po změření emisního spektra výboje identifikace prvku není problém.

Identifikace radioizotopu

Další z možností je zjistit přítomnost nějakého radioizotopu. Nejvíce výhodná by byla existence izotopu, který by při rozpadu emitoval gama kvantum. Alfa a beta částice se absorbují ve skle, jejich emisi v plynu mezi skly tedy není možné evidovat. Energii gama kvanta lze změřit dost přesně (scintilační detektor a fotonásobič) a následná identifikace izotopu je snadná. Situace mezi přírodními izotopy však není růžová. Helium a neon mají pouze stabilní izotopy. Trojice argon, krypton, xenon sice radioaktivní izotopy má, avšak jediný ^{81}Kr podléhá gama rozpadu (0,281 MeV) s poločasem rozpadu 229 tisíc let. Tento izotop se navíc vyskytuje ve stopových množstvích, neboť není přírodní, nýbrž vzniká v atmosférických sprškách.

Musíme si proto pomoci sami. Patřičné okno s sebou vezmeme na návštěvu reaktoru či synchrotronu a necháme ho vystavit neutronovému či synchrotronovému záření. Nestabilních izotopů si takto vyrobíme podle libosti. Pak již stačí zaznamenat gama foton vzniklý přechodem některého jádra vzácného plynu z excitovaného stavu.

Měření rychlosti zvuku

Spíše diskutabilní metodou je měření rychlosti zvuku v plynu v závislosti na teplotě. Nejdříve zodpovíme otázku, jak měřit rychlost zvuku. Okno položíme a skleněnou desku posypeme nějakým práškem (pilinami). Reproductorem budeme vydávat zvuk o známé frekvenci f , kterou budeme měnit, dokud nezačnou skleněné desky rezonovat. Z uspořádání pilin na skle odečteme vlnovou délku λ a ze vztahu $v = f\lambda$ určíme rychlost zvuku. Rozlišit, kdy rezonuje pouze sklo a kdy vzduch mezi skly, by neměl být velký problém, neb rychlost zvuku ve skle je o řád vyšší, než bychom čekali v plynu. Zásadní je ovšem otázka, zda je možné, aby zvuk v řídkém plynu rezonoval tak silně, aby rozkmital i skla.

Snad lepší postup by byl digitálně zaznamenat zvuk vzniknuvší klepnutím na okenní tabuli a následně ve Fourierově transformaci identifikovat pík odpovídající stojatému zvukovému vlnění v plynu. Příčný rozměr okna udává vlnovou délku a poloha píku frekvenci.

Předpokládejme, že se nám podaří naměřit závislost rychlosti zvuku na teplotě $v(T)$. Pro ideální plyn platí, že rychlost zvuku je úměrná odmocnině poměru tlaku a hustoty, přesněji $v = \sqrt{\gamma p/\rho}$, kde γ je Poissonova konstanta. Stejný poměr vystupuje ve stavové rovnici ideálního plynu $p/\rho = RT/M_m$, kde M_m je molární hmotnost plynu. Závislost v^2 na T je tedy lineární a směrnice této přímky je rovna $\gamma R/M_m$. Určíme-li tuto hodnotu, budeme již schopni vydedukovat, jaký plyn máme v okně.

Nukleární magnetická rezonance

Pokud by součástí dodávky oken bylo i okénko menších rozměrů (třeba na záchod), mohli bychom jej vzít do nemocnice na nukleární magnetickou rezonanci.

Okno umístíme do statického magnetického pole a frekvenci budícího radiofrekvenčního pole naladíme tak, aby rezonoval precesní pohyb jader některého ze vzácných prvků. Potíž spočívá v tom, že jádra, na kterých chceme měřit, musí mít nenulový magnetický moment (jinak by na ně magnetické pole nemělo žádný vliv).

Ze vzácných plynů nemá pouze argon žádný přírodní izotop s nenulovým jaderným magnetickým momentem. Ostatní jsou uvedeny v následující tabulce, kde pro srovnání najdete i izotopy využívané pro NMR v medicíně (H, C, N).

Magnetické momenty jader izotopů vzácných plynů, jejich zastoupení v přírodě a citlivost při měření NMR. Srovnání s izotopy používanými v medicíně.

Izotop	Spin	Mag. moment [μ_N]	Rel. zastoupení v přírodě [%]	Rel. citlivost
^1H	1/2	2,79	99,98	1
^{13}C	1/2	0,70	1,11	$0,18 \cdot 10^{-3}$
^{14}N	1	0,40	99,63	$2,94 \cdot 10^{-3}$
^3He	1/2	2,13	0,00014	$0,0006 \cdot 10^{-3}$
^{21}Ne	3/2	-0,66	0,27	$0,036 \cdot 10^{-3}$
^{83}Kr	9/2	-0,97	11,5	$4,8 \cdot 10^{-3}$
^{129}Xe	1/2	0,78	26,4	$5,8 \cdot 10^{-3}$
^{131}Xe	3/2	0,69	21,2	$3,2 \cdot 10^{-3}$

V posledním sloupci tabulky je citlivost NMR při měření na daném izotopu. Suverénně nejcitlivější je měření na vodíku (má velký magnetický moment), měřitelná spektra bude mít i krypton, xenon a snad i neon. Silně pochybujeme, že NMR půjde naměřit na jádrech hélia, zastoupení izotopu ^3He je příliš nepatrné. Vyhodnocením spekter NMR pro všechny rezonanční frekvence jader vzácných plynů tedy identifikujeme všechny vzácné plyny krom hélia a argonu.

Optické (UV) absorpční spektrum

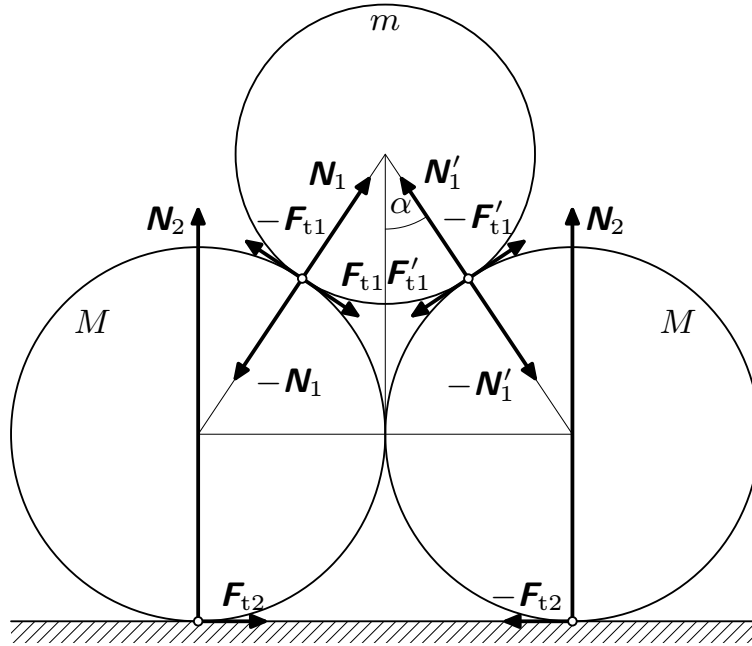
Fotony s frekvencí optického a UV záření jsou atomy absorbovány při přechodech elektronů v atomových obalech. Na první pohled snadné by mělo být změření optického (a případně UV) absorpčního spektra plynu. Otázkou ovšem zůstává, zda by absorpce na zředěném plynu byla měřitelná.

Infračervené absorpční spektrum

Jako slibná metoda se nabízí infračervená spektroskopie. Rotační a vibrační pohyb molekul je kvantován a energetická škála takových pohybů odpovídá infračervené části spektra. V případě vzácných plynů však narazíme na podstatný zádrhel. Atomy vzácných plynů jak známo netvoří molekuly, plyn je tvořen jen samotnými atomy. Atom sám o sobě nemůže kmitat ani rotovat, a tak nenaměříme ani žádné spektrum.

Úloha VI.1 ... tři válce děda vševěda

Zjistěte, za jakých podmínek bude soustava tří válců na obrázku 32 v klidu a nerozkutá se. Hustota materiálu válců je ρ , spodní válce mají poloměr R , horní válec má poloměr r . Součinitel tření je mezi všemi povrchy stejný.



Obr. 32. Geometrie úlohy a síly působící na válce (kromě síly tíhové)

Jaké síly na válce působí? Na každý válec působí tíhová síla, dále na sebe navzájem válce působí normálovými a třecími silami a konečně na válce působí podložka (viz obr. 32, pro lepší přehlednost nejsou tíhové síly zakresleny). Těsně před rozkutálením na sebe spodní válce vůbec působit nebudou. Ze symetrie úlohy plyne $|\mathbf{N}_1| = |\mathbf{N}'_1| \equiv N_1$ a $|\mathbf{F}_{t1}| = |\mathbf{F}'_{t1}| \equiv F_{t1}$. Momentové věty vzhledem k osám válců dávají

$$F_{t1} = F_{t2} \equiv F_t .$$

Postupujme přímočaře a pro každý válec napíšeme rovnováhu sil

$$mg = 2N_1 \cos \alpha + 2F_t \sin \alpha , \quad (22)$$

$$Mg + N_1 \cos \alpha + F_t \sin \alpha = N_2 , \quad (23)$$

$$F_t + F_t \cos \alpha = N_1 \sin \alpha , \quad (24)$$

kde m je hmotnost horního válce a M značí hmotnost spodních válců.

Nemají-li válce po sobě sklouznouti, zároveň musí platit

$$F_t \leq fN_1 = \frac{fmg}{2 \cos \alpha} - fF_t \operatorname{tg} \alpha ,$$

$$F_t \leq fN_2 = f(Mg + \frac{1}{2}mg) ,$$

kde jsme využili rovnic (22) a (23). Dosadivše za F_t z poslední nevyužité rovnice (24), podle které

$$F_t(1 + \cos \alpha) = N_1 \sin \alpha = \frac{1}{2}mg \operatorname{tg} \alpha - F_t \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad F_t = \frac{mg \sin \alpha}{2(1 + \cos \alpha)} ,$$

podmínky pro součinitel tření získají tvar (zde je potřeba provést několik úprav, ty necháváme na vás)

$$f \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right),$$

$$f \geq \frac{m}{2M + m} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{m}{2M + m} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right).$$

Koukajíce na tyto podmínky, hned pochopíme, že při splnění první nerovnosti je automaticky splněna i druhá. Pročež se zabývejme jen tou první.

Geometrie úlohy říká $\sin \alpha = R/(R + r)$, proto obdržíme

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\frac{R}{R + r}}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{R}{R + r} \right)^2}} = \frac{R}{R + r + \sqrt{2Rr + r^2}} = 1 + \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{2r}{R} + \left(\frac{r}{R} \right)^2}.$$

Hledaná podmínka tudíž zní

$$f \geq 1 + \frac{r}{R} - \sqrt{\frac{2r}{R} + \left(\frac{r}{R} \right)^2}.$$

Na závěr si dovolíme krátkou diskusi. Pravou stranu předchozí nerovnosti označíme f_0 .

a) Je-li $r \ll R$, můžeme zanedbat r/R vzhledem k 1 a dostaneme

$$f_0 \approx 1 - \sqrt{\frac{2r}{R}}.$$

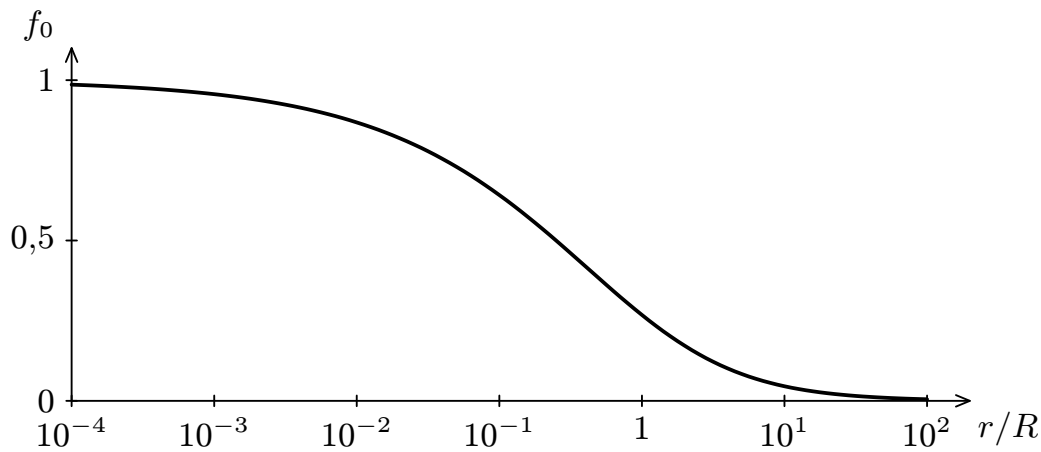
b) Je-li $r = R$, vychází

$$f_0 = 2 - \sqrt{3} \doteq 0,268.$$

c) Je-li $r \gg R$, rozvineme odmocninu do druhého řádu

$$f_0 = 1 + \frac{r}{R} - \frac{r}{R} \sqrt{1 + \frac{2R}{r}} \approx 1 + \frac{r}{R} - \frac{r}{R} \left(1 + \frac{R}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right) = \frac{R}{2r}.$$

Zjišťujeme, že mezní hodnota f_0 součinitele tření s rostoucím poměrem r/R klesá. To zní logicky – horní válec má malinký poloměr, zapadne hluboko do škvíry mezi spodními válci a bude je od sebe odtlačovat, naopak horní válec s velikým poloměrem bude na spodní válce tlačit spíše jen z vrchu. Graf závislosti $f_0(r/R)$ jsme pro vaše potěšení vynesli v obrázku 33.



Obr. 33. Závislost mezní hodnoty f_0 součinitele tření na poměru r/R

Úloha VI.2 ... podivná atmosféra

Okolo planety o poloměru R se nachází atmosféra, jejíž index lomu se mění s výškou podle vztahu $n = n_0 - \alpha h$. Zjistěte, v jaké výšce h nad povrchem planety se světelný paprsek vyslaný tečně k povrchu bude pohybovat po kružnici okolo planety.

Úlohu vyřešíme použitím zákona lomu. Atmosféru planety rozdělíme na tenoučké kulové vrstvy vzduchu o tloušťce dh s indexem lomu $n(h) = n_0 - \alpha h$, sousední vrstva má index lomu $n(h + dh) = n_0 - \alpha(h + dh)$. Má-li se paprsek šířit po kružnici, musí dopadat na rozhraní dvou vrstev pod mezním úhlem φ_m . Zákon lomu říká

$$\sin \varphi_m = \frac{n_0 - \alpha(h + dh)}{n_0 - \alpha h}.$$

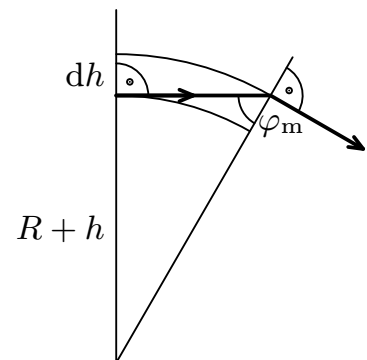
Z geometrie problému (viz obr. 34) plyne

$$\sin \varphi_m = \frac{R + h}{R + h + dh} = \left(1 + \frac{dh}{R + h}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{dh}{R + h},$$

kde jsme využili přibližného vztahu $(1 + dh)^{-1} \approx 1 - dh$, který platí pro malé dh . Porovnáním odvozených vztahů dostaneme

$$h = \frac{n_0}{2\alpha} - \frac{R}{2}.$$

Zbývá dodat, že kruhová orbita existuje pro $n_0/\alpha > R$.



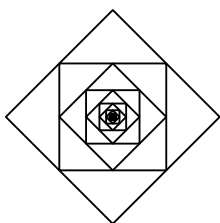
Obr. 34. Lom paprsku

Úloha VI.3 ... čtverák čtverec

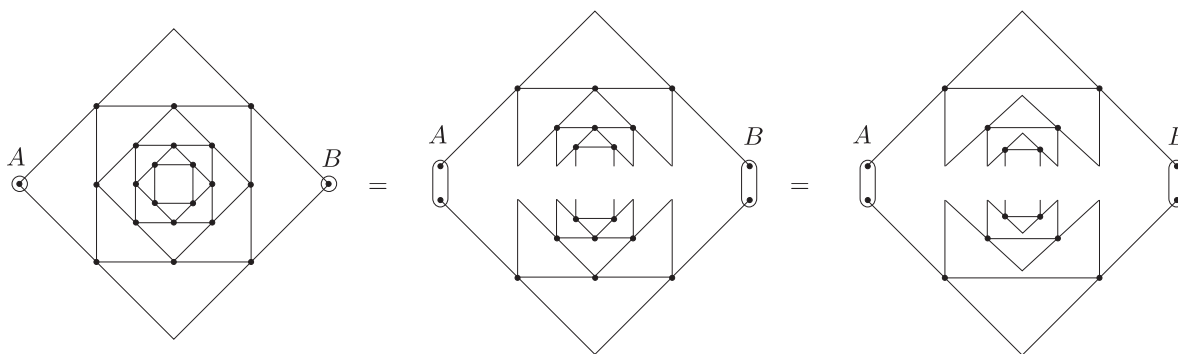
Obvod na obrázku 35 vznikne spojením nekonečně mnoha drátěných čtverců, přičemž každý následující je $\sqrt{2}$ -krát menší. Drát, ze kterého je obvod vyroben, o délce rovné straně největšího čtverce má odpor R . Určete odpor obvodu mezi krajními body vlevo a vpravo.

V první řadě si uvědomíme několik skutečností plynoucích ze symetrie úlohy. Vedeme-li totiž osu symetrie vstupním a výstupním vrcholem čtverce (označme si je dále A a B), pak kvůli symetrii neteče mezi takto vzniklými půlkami obvodu žádný proud. Nic se tedy nestane, pokud obvod podélně rozdělíme na dva stejné paralelně spojené obvody (jak ukazuje první „rovnost“ ve schématickém obrázku 36).

Dále si všimneme uzlů ležících na ose úsečky AB . Na těch je zřejmě potenciál rovný aritmetickému průměru potenciálů ve vrcholech A a B . Ze symetrie vzhledem k řečené ose také plyne, že napětí na vzájemně si odpovídajících úsecích obvodu jsou stejná, a tedy jsou si rovny i proudy protékající odpovídajícími si větvemi. Proto v uvažovaných uzlech neprochází proud mezi čtverci, které se zde stýkají (jinými slovy – proud, který přiteče po straně většího čtverce, po ní také odteče; stejně tak pro menší čtverec). Oba čtverce můžeme tedy od sebe v těchto uzlech oddělit, aniž by se změnil celkový odpor obvodu. Tuto skutečnost vyjadřuje druhá z „rovností“ v obrázku 36.

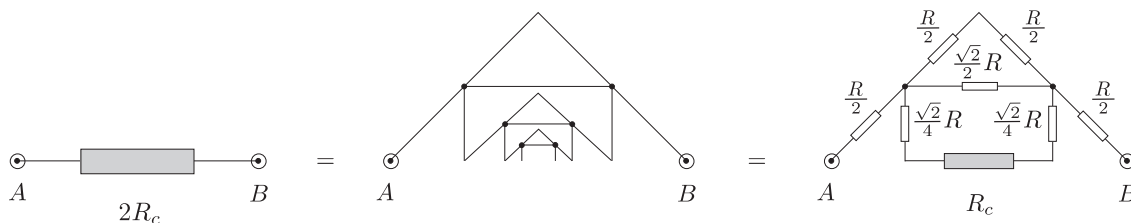


Obr. 35



Obr. 36. Rozdělení obvodu

Nyní využijeme toho, že takto upravená půlka původního obvodu, která má odpor $2R_c$ (označuje-li R_c hledaný odpor celého čtverce), obsahuje jako svou část dvakrát menší kopii sebe sama samozřejmě o dvakrát menším odporu R_c . Pak mají ovšem obvody znázorněné na obrázku 37 stejný odpor, a to právě $2R_c$.



Obr. 37. Výpočet odporu obvodu

Takto dostaneme následující rovnici

$$2R_c = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}R} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}R + R_c}}.$$

Zavedením označení x pro poměr R_c/R pak získáme

$$\frac{1}{2x - 1} = 1 + \sqrt{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + x}$$

a následnými úpravami předchozí rovnice přejde v kvadratickou

$$2(\sqrt{2} + 1)x^2 + 2x - (\sqrt{2} + 2) = 0.$$

Jejími řešeními jsou čísla (použité úpravy vyžadují trochu hraní s rozšiřováním zlomků a odmocninami)

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 8(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 2)}}{4(\sqrt{2} + 1)} = \frac{1 - \sqrt{2} \pm \sqrt{3}}{2},$$

z nichž samozřejmě význam řešení zadané úlohy má pouze to se znaménkem plus (jinak by výsledný odpor byl záporný). Dostáváme tak výsledek

$$R_c = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} R.$$

Úloha VI.4 ... zákrytová dvojhvězda

Magnituda jisté zákrytové dvojhvězdy se mění se čtyřdenní periodou v této posloupnosti:

vedlejší minimum	$m = 3,5$,
maximum	$m = 3,3$,
hlavní minimum	$m = 4,2$,
maximum	$m = 3,3$.

Větší složka této dvojhvězdy má také vyšší teplotu než její průvodce. Za předpokladu, že Země leží v oběžné rovině dvojhvězdy, vypočítejte magnitudy jednotlivých složek a poměr jejich délkových rozměrů. Převodní vztah mezi magnitudou m hvězdy a osvětlením E , které způsobuje, je

$$m = -2,5 \log (E/E_0),$$

kde E_0 je pevně definovaná hodnota.

Podívejme se nejprve, jak probíhá dění v soustavě námi zkoumané dvojhvězdy. Tento systém obíhá kolem společného těžiště. Během jednoho oběhu nastanou pro vzdáleného pozorovatele čtyři zajímavé fáze:

- Menší hvězda se nachází před velkou, ale protože je chladnější, vnímáme to jako pokles osvětlení. V tomto okamžiku k nám přichází nejméně světla vůbec. Nastává hlavní minimum.
- Větší z obou hvězd zcela zakryje tu menší. Vidíme tedy pouze světlo z jedné hvězdy, proto lze říci, že magnituda odpovídající vedlejšímu minimu je zároveň magnitudou $m_1 = 3,5$ velké hvězdy.
- Menší hvězda je vedle velké tak, že se z našeho pohledu navzájem nepřekrývají. Tato situace tedy nastává dvakrát během jednoho oběhu. V těchto okamžicích pozorujeme světlo od obou hvězd na největší ploše, proto dochází k minimální magnitudě (tj. maximum jasnosti).

Po této analýze se můžeme směle pustit do dalších výpočtů. Domluvme se, že dále budeme indexovat velkou hvězdu jako 1 a malou pak 2. Pokračujme studiem třetí situace v pořadí. Během ní se osvětlení od obou hvězd prostě sčítá, tedy

$$3,3 = -2,5 \log \left(\frac{E_1 + E_2}{E_0} \right).$$

Kromě toho můžeme určit i osvětlení E_1 velké hvězdy ze vztahu

$$3,5 = -2,5 \log \left(\frac{E_1}{E_0} \right),$$

neboť známe její magnitudu. Z výše uvedených rovnic lze po úpravách vyjádřit osvětlení E_2 menší hvězdy

$$E_1 = 10^{-3,5/2,5} E_0, \quad E_2 = 10^{-3,3/2,5} E_0 - E_1 = E_0 \left(10^{-3,3/2,5} - 10^{-3,5/2,5} \right),$$

pomocí něhož již snadno zjistíme její magnitudu

$$m_2 = -2,5 \log \left(\frac{E_2}{E_0} \right) = -2,5 \log \left(10^{-3,3/2,5} - 10^{-3,5/2,5} \right) \doteq 5,2.$$

Přišla chvíle, abychom do našeho řešení také zapojili poloměry r_1, r_2 obou hvězd. Využijeme k tomu situaci, kdy se menší ze složek nachází z našeho pohledu před větší hvězdou. Víme, že osvětlení je úměrné velikosti plošného průmětu hvězdy, tedy obsahu kruhu πr^2 . Osvětlení z dvojhvězdy v dané pozici jest

$$E' = E_2 + E_1 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right),$$

protože z velké hvězdy vidíme pouze její část. Pro zjednodušení označme $\varrho \equiv r_2/r_1$ hledaný poměr velikostí. Jako vždy platí vzorec ze zadání, tedy

$$4,2 = -2,5 \log \left(\frac{E'}{E_0} \right) = -2,5 \log \left(\frac{E_2 + E_1(1 - \varrho^2)}{E_0} \right).$$

Rovnost stačí odlogaritmovat, dosadit za E_1 a E_2 a dostaneme

$$10^{-4,2/2,5} = \left(10^{-3,3/2,5} - 10^{-3,5/2,5} \right) + 10^{-3,5/2,5}(1 - \varrho^2),$$

odkud již vede přímá cesta k výsledku

$$\varrho = \frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{10^{-3,3/2,5} - 10^{-4,2/2,5}}{10^{-3,5/2,5}}} \doteq 0,82.$$

Výsledky ještě shrňme do následujícího závěru. Za daných zjednodušujících podmínek je magnituda větší hvězdy 3,5, menší potom 5,2 a poměr jejich poloměrů menší ku větší vychází přibližně 0,82.

Úloha VI. P ... jak vypadají ufoní?

Zamyslete se nad tím, jestli by nějaké zvíře mohlo teoreticky komunikovat pomocí elektromagnetických vln rádiových frekvencí (10 Hz–100 MHz). Zkuste navrhnout, jak by vypadaly biologické ekvivalenty potřebných elektrických součástek.

Poslední dobou se stále častěji setkáváme s bytostmi schopnými komunikovat na telepatické úrovni. Tato jejich schopnost nás při každém setkání s nimi staví do nevýhodné pozice. Naším cílem bylo objasnit fyzikální podstatu jejich schopností.

Výsledky projektu

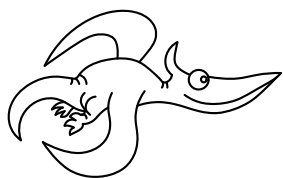
Při výkonu vysílače 0,5 W lze dosáhnout vzdálenosti přibližně 3 km. Lidské tělo má jen na ztrátovém teple výkon cca 100 W. Tedy energie pro vysílač máme dost. Už zbývá jenom dokázat potřebný výkon vyzářit ve formě radiofrekvenčního vlnění. O existenci podobného zařízení se vedou i seriózní diskuse. Žralok má orgán zvaný Lorenziniho ampule, který je schopen rozpoznat elektromagnetickou aktivitu okolí (citlivost 5 nV/cm). Orgán citlivý na elektrické pole má například také ptakopysk, který je s jeho pomocí schopen registrovat pohyb drobných vodních živočichů.

Co je vlastně nerv? Nerv je tukem obalená bílkovina zakončená synapsí, kterou se šíří elektrický vzruch. Na synapsi dojde k uvolnění chemikálie (miozinu), který vzruch předá další synapsi. Právě miozin nahrazují některé drogy. Na vyzáření potřebně silné vlny by bylo potřeba nervová vlákna uspořádat do vhodného tvaru a zesílit jimi procházející proud. Uvažujeme-li dipólovou anténu, pak odpovídající velikost antény pro frekvenci 10 Hz je $7,5 \cdot 10^3$ km, ale pro 100 MHz by se jednalo jen o 75 cm. Dosazovali jsme do vztahu

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f},$$

kde l je délka dipólu, λ vlnová délka, c rychlost světla a f je frekvence. Tělo živočicha však vysoké frekvence neumí generovat, frekvence živočišných procesů dosahují nejvýše 10 kHz (doba, než elektrický impuls projde jednou nervovou buňkou).

Detekce signálu by byla eventuálně možná už na buněčné úrovni.



Zadání experimentálních úloh

Úloha I. E ... sbírání šišek

Počet spirál tvořených šupinami šišek vycházejících od špičky není libovolný, nýbrž nabývá hodnot 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... To jsou členy tzv. Fibonacciho posloupnosti, v níž další člen získáme sečtením předchozích dvou, přičemž první dva členy posloupnosti jsou 1 a 1. Jako každé pravidlo má však i toto své výjimky. Někdy se totiž stane, že počet spirál je roven 1, 3, 4, 7, 11, ..., tedy prvku Lucasovy posloupnosti. Získáme ji stejným postupem jako Fibonacciho, začínáme ale s 1 a 3.

Vaším úkolem je zjistit, jak často a za jakých podmínek se tato anomálie vyskytuje na Zemi. Prozkoumejte závislost na co nejvíce různých parametrech (např. roste-li strom v lese či volně). (řešení str. 70)

Úloha II. E ... vlny na vodě

Na základě rozměrové analýzy najdete vztah pro rychlost vln na vodě. Teoretický vztah ověřte a najdete neznámé konstanty z měření rychlosti vln v závislosti na jejich vlnové délce. Uvědomte si, že existují dva typy vln – jedny jsou způsobené gravitací Země a druhé povrchovým napětím. (řešení str. 72)

Úloha III. E ... Planckova konstanta

Navrhněte a dostatečně teoreticky zdůvodněte metody k experimentálnímu určení Planckovy konstanty, které se dají realizovat doma, příp. s vybavením ve školní laboratoři, a alespoň jednu z nich proveďte. Všechny veličiny, které je možné experimentálně určit (zvažte užití statistiky), co nejpřesněji změřte a správně vyhodnoťte velikost této fundamentální konstanty s příslušnou experimentální chybou.

Nápověda: LED dioda s ochranným rezistorem stojí cca 5 Kč. (řešení str. 75)

Úloha IV. E ... vytřete nám zrak

Změřte, jak závisí součinitel smykového tření mezi dvěma vámi vybranými materiály na velikosti stykové plochy a na hmotnosti smýkajícího se tělesa. Nezapomeňte nám napsat, s čím a jak jste měřili. (řešení str. 80)

Úloha V. E ... levotočivý svět

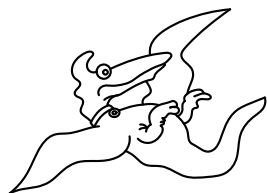
Změřte optickou aktivitu roztoku glukózy v závislosti na jeho koncentraci. Optická aktivita je stáčení roviny lineárně polarizovaného světla při průchodu danou látkou. Úhel otočení je přímo úměrný délce dráhy, kterou paprsek v látce urazil, a závisí také na vlnové délce světla. Pokuste se zjistit/vymyslet/vzpomenout, čím je optická aktivita na molekulární úrovni způsobena.

Měření optické aktivity se používá k zjištění koncentrace cukru v roztocích. Je tato metoda spolehlivá? Má každý cukr stejnou optickou aktivitu?

(řešení str. 82)

Úloha VI. E ... slintací úložka

Změřte, jaký maximální podtlak (i přetlak) je člověk schopen vyvinout sáním (nafukováním) ústy. (řešení str. 87)



Řešení experimentálních úloh

Úloha I. E ... sbírání šišek

Počet spirál tvořených šupinami šišek vycházejících od špičky není libovolný, nýbrž nabývá hodnot 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... To jsou členy tzv. Fibonacciho posloupnosti, v níž další člen získáme sečtením předchozích dvou, přičemž první dva členy posloupnosti jsou 1 a 1. Jako každé pravidlo má však i toto své výjimky. Někdy se totiž stane, že počet spirál je roven 1, 3, 4, 7, 11, ..., tedy prvku Lucasovy posloupnosti. Získáme ji stejným postupem jako Fibonacciho, začínáme ale s 1 a 3.

Vaším úkolem je zjistit, jak často a za jakých podmínek se tato anomálie vyskytuje na Zemi. Prozkoumejte závislost na co nejvíce různých parametrech (např. roste-li strom v lese či volně).

Úvodem řešení uznejme, že se tentokrát nejednalo o klasickou experimentální úlohu, neboť vyžadovala jiné metody řešení, než jsme obvykle byli zvyklí. V tomto textu se nejprve pokusíme vysvětlit cosi o tajemství jevu zvaného *phyllotaxe*, povíme si, jak vše souvisí s Fibonacciho, resp. Lucasovými čísly, a závěrem provedeme zpracování „naměřených“ hodnot.

Teorie

V zadání úlohy jsme vám prozradili, že se šupinky šišek skládají do spirál, jejichž počet v obou směrech otáčení je vždy roven dvěma po sobě jdoucím číslům z Fibonacciho posloupnosti $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro $n \rightarrow \infty$.

Avšak tak tomu není pokaždé. Oním důvodem je fakt, že zmíněné uspořádání souvisí se *zlatým řezem*¹⁹ (připomeňme jeho hodnotu $\Theta = (1 + \sqrt{5})/2$), ke kterému konverguje poměr F_{n+1}/F_n . Jenže Fibonacciho posloupnost není jediná, jež má tuto vlastnost. Chovají se tak všechny posloupnosti přirozených čísel dané rekurentním vzorcem $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ bez ohledu na hodnoty prvních dvou členů. Důkaz je prostý.

Předpokládejme, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L,$$

a dokažme nyní, že $L = \Theta$. Nejprve si rekurentní zadání posloupnosti upravme do tvaru $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ a vydělme jej členem a_n . Tím dostaneme rovnici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

¹⁹⁾ Některé zdroje uvádějí též souvislost ze *zlatým úhlem* $\varphi = 360^\circ \cdot (2 - \Theta) \approx 137,5^\circ$, k němuž v nekonečnu konverguje poměr $360^\circ \cdot F_n/F_{n+2}$. Pod tímto úhlem se nacházejí osy dvou po sobě vyrostlých šupinek či lístků. Ale v tomto textu se zlatým úhlem zabývat nadále nebudeme, pouze jej uvádíme jako zajímavost.

kde za oba zlomky můžeme v limitě $n \rightarrow \infty$ podle předpokladu dosadit L , resp. $1/L$. Rovnice se tak zjednoduší do krásného tvaru

$$L = 1 + \frac{1}{L}.$$

Řešením jsou čísla $L_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ a $L_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, jenže druhý kořen nemá smysl, vždyť všechna čísla v posloupnosti jsou kladná a $L_2 < 0$. Vidíme tedy, že výše uvedený rekurentní vztah vede vždy ke zlatému řezu.²⁰

Naskýtá se tedy otázka, proč šišky, ale i jiné přírodní výtvořky (květenství, listy na stonku, ...), preferují právě Fibonacciho posloupnost. Odpověď na tuto otázku není známa. Jako by počáteční prvky posloupnosti měly být co nejnižší (v případě Fibonacciho 1, 1; pokud jde o Lucasovu posloupnost 1, 3) a vyšší čísla nebyla pro rostlinky dostatečně přitažlivá, přestože některé takové řady konvergují ke zlatému řezu rychleji. O vysvětlení nejasnosti se máme pokusit počítáním spirál tvořených šupinami šišek. Celosvětová statistika uvádí výskyt v průměru 2–5 % případů čísel z Lucasovy posloupnosti. Abychom i my mohli zpracovávat data nějak rozumně, zkompletujeme veškerá dostupná doručená měření. Tím dostaneme poměrně rozsáhlý statistický soubor dat, ve kterém (možná) objevíme nějakou závislost.

Postup a výsledky měření

Nyní ve stručnosti ještě rozeberme metodu měření. Každá šiška má dva typy spirál – pravotočivé a levotočivé. Jejich počty jsou vždy dva po sobě jdoucí členy výše zmíněných posloupností. Díky tomu jsme schopni rozhodnout i sporný počet 3. Nejvhodnější je počítat spirály po obvodu ve zvolené úrovni tak, že si vždy jednu spirálu zvolíme za výchozí a nějak ji označíme.

Budeme zkoumat dva parametry – druh a osamělost (sám či v lese) stromu. Tímto omezením se pokusíme získat ještě větší množství dat, než kdybychom zkoumali každou lokalitu zvlášť.

Tabulka uvádí počty šišek, jejichž počty spirál odpovídají Fibonacciho, resp. Lucasově posloupnosti, v závislosti na druhu a umístění stromu.

Druh	Umístění	Lucas	Fibonacci	Relativní počet šišek Lucas [%]
Smrk	v lese	27	619	4,2
Smrk	osamocen	5	179	2,8
Borovice	v lese	61	766	7,4
Borovice	osamocena	24	136	15,0
Modřín	v lese	39	170	18,7
Modřín	osamocen	32	109	22,3
Celkem		188	1979	8,8

Přestože jsme měli k dispozici data z různých koutů světa (Česko, Slovensko, Francie, Švýcarsko, USA), výskyt anomálních šišek byl všude přibližně stejný. S naším výsledkem 8,8 % jsme se sice dostali lehce nad obecně uznávaný světový průměr, ale vzhledem k malému množství šišek jde spíše o náhodu.

²⁰⁾ Obdobného triku využívá i důkaz konvergence $360^\circ \cdot F_n / F_{n+2} \rightarrow \varphi$.

Zdá se tedy, že výskyt anomálních šišek je veskrze náhodný jev, nedá se přesně určit nějaká závislost např. na zeměpisné poloze, nadmořské výšce či druhu stromu. Patrně našimi závěry revoluci v biologii nespácháme, i když je třeba zmínit i určité speciální poznatky:

- Výskyt lucasovských šišek se zdá vyšší u modřínu a borovice než u smrku. Otázkou je, zda-li nedošlo k chybnému zjištění počtu spirál vzhledem k tomu, že modřínové a borovicové šišky jsou častěji deformované a nepravidelné.
- Na jednom stromě mohou vyrůst šišky obou typů, neboť nebyl pozorován strom plný výhradně anomálních šišek.
- Z předchozího pozorování vyplývá, že typ spirál nezávisí na genetické výbavě daného stromu nebo jeho umístění v krajině.
- *Radimu Pechalovi* (Rožnov p. R.) a *Jakubu Michálkovi* (t. č. v USA) se podařilo najít smrkovou šišku s počtem spirál 6. Snadno zjistíme, že číslo šest patří do řady 1, 5, 6, 11, ... nebo 2, 2, 4, 6, ..., ale takových možností je více. Rozhodnout bychom mohli, pokud bychom znali počet spirál v opačném směru. Ale každopádně je to více než anomálie.

Námět pro další práci/projekt

Pokud by se někdo chtěl tomuto problému věnovat hlouběji, je to dobrý nápad, vzhledem k tomu, že většina informací o phyllotaxi jsou domněnky. Doporučený postup by byl zvolit si nějaký lesík (cca 2 ha) a po několik let tam rok co rok sesbírat veškeré šišky a data takto průběžně zpracovávat.

Úloha II . E ... vlny na vodě

Na základě rozměrové analýzy najděte vztah pro rychlost vln na vodě. Teoretický vztah ověřte a najděte neznámé konstanty z měření rychlosti vln v závislosti na jejich vlnové délce. Uvědomte si, že existují dva typy vln – jedny jsou způsobené gravitací Země a druhé povrchovým napětím.

Jednoho krásného večera si nejmenovaný řešitel FYKOSu vzpomněl, že se blíží termín odevzdání druhé série a on musí najít vztah pro rychlost vln v na vodě. Zajel si tedy k rybníčku o celkové hmotnosti M . Měsíček o hmotnosti m svítil, vlnky na rybníčku o ploše S se proháněly a voda o hustotě ρ si v něm šplouchala. A protože zlatá rybka v tuhle pozdní noční hodinu již chrápala na dně v hloubce l , musel si řešitel FYKOSák pomoci se svým problémem úplně sám.

Po chvíli přemýšlení došel k těmto vztahům:

$$v_g = A\sqrt{\frac{g}{\lambda}}, \quad (25)$$

$$v_g = A\sqrt{g(\lambda + \text{konst})}, \quad (26)$$

$$v_g = A\sqrt{g\lambda}, \quad (27)$$

$$v_g = A\sqrt{g\lambda \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}. \quad (28)$$

Tušíte, které mohou vystihovat reálnou situaci? Víte, co mají společného?

A jak to vypadá s přesným řešením?

Teorie

Vlnění na vodě je úžasně komplikovaný proces, kterého se zúčastňuje odhadem 10^{44} molekul. Myslíte, že bude jednoduché dospět k přesnému řešení? Nikoliv.

Voda je nestlačitelná, a proto rozhodně není možný pohyb molekul vody v rámci jakéhosi sloupce vody na jednom místě nahoru a dolů. Kam by se v takovém případě ztrácela voda? Právě naopak, částičky vody se při ideálním harmonickém vlnění pohybují po trajektoriích tvaru kružnice. Tento pohyb je však nerovnoměrný, a to znamená působící sílu. Tou je tíhové zrychlení g , které by mělo v hledaném vztahu vystupovat.

Jaké další veličiny mohou být podstatné? Poloha Měsíce nebo jeho hmotnost jsou evidentně šílenosti (a jsou zahrnuté v gravitačním zrychlení). Ale co takhle hustota vody? Čím hustší je kapalina, tím větší je na ni působící tíha. Jenomže pozor, setrvačná síla je také tolikrát větší! Z toho intuitivně vychází, že rychlost vln nebude záviset na hustotě vody. Je to obdobné, jako když rychlost padajícího tělesa nezávisí na jeho hustotě.

Závisí rychlost vln na výšce vln? Nebo na hloubce vody? Představte si, že by náš řešitel viděl na rybníčku vlny o výšce dvou metrů, jenomže ten rybníček by byl skutečně malinký o hloubce deseti centimetrů. Nebylo by to divné? Jistá závislost, která tomuhle zabrání, tedy musí existovat. Jenže my budeme předpokládat, že náš rybníček je skutečně velmi hluboký a tyto vlivy zanedbáme. Z rozumných veličin zůstává tedy jenom vlnová délka a gravitační zrychlení. Správným vztahem tak může být (27).

Na povrchu vody však existuje ještě jedna síla. Pokud někde nadzvedneme povrch kapaliny, zvětšíme tím její povrch, a tedy povrchovou energii kapaliny. Ta se bude snažit povrch zmenšit, tedy na místě, kde byla voda zdvižená, se snaží ustanovit rovnou hladinu. Voda má však nějakou pohybovou energii získanou při navrácení do rovnovážné polohy, kterou odevzdá sousední vodě, aby mohla stoupnout a zvýšit svou povrchovou energii, a tak dál. Takhle může na vodě existovat ještě druhý typ vlnění, způsobený povrchovým napětím. Není těžké uhádnout, že rychlost vlny bude v tomto případě záviset na povrchovém napětí σ . Teď použijeme obdobné argumenty jako výše u gravitačních vln. Předpokládáme, že rychlost závisí také na vlnové délce a speciálně tady také na hustotě, protože hustší kapalina se hýbe pomaleji (tentokrát už síla není úměrná hustotě). Po chvíli zkoušení zjistíme, že rozumnou kombinací se správným rozměrem je

$$v_{\sigma} = B \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \lambda}}. \quad (29)$$

To, co jsme právě dočetli, nebylo nic jiného než návod, jak provádět rozměrovou analýzu. Podstatné je uvědomit si, jaké veličiny hrají roli. Je také zřejmé, jaká úskalí tahle metoda přináší. Stále nevíme nic o parametrech A a B . Nevíme nic o tom, kdy naše vzorečky mohou platit, a hlavně netušíme, zda jsou vůbec správné. Tohle může rozřešit jenom experiment.

Experiment

Máme hlubokou a rozlehlou vodní nádrž. Vytvoříme v ní pořádně silnou sérii pravidelných vln, které budeme sledovat. Zjistíme, kolik vln vznikne v jisté délce, a tím určíme jejich vlnovou délku. Rychlost vln zjistíme změřením času potřebného k tomu, aby čelo vlny projelo jistou dráhu. Experiment nezapomeneme zopakovat pro různé vlnové délky, protože jenom tak můžeme zkoumat jakoukoliv závislost na vlnové délce.

Jenomže náhle procitneme ze sna a zjistíme, že jedinou vodní plochou v našem dohledu je vana. A máme problém, protože všechno, co jsme odvodili, bylo však platné jenom pro velkou hloubku. Nezbude nic jiného, než napustit vanu. Po prvních pokusech vytvořit pravidelné vlnění zjišťujeme, že i v tomhle bodě jsme se pořádně přepočítali. Co tedy s tím?

Vlnění jednoduše nezakážeme interferovat, a tak nezbývá, než opět přivřít obě oči a pokusit se změřit, co se dá. Při měření a vyhodnocení těchto měření však již naše oči budou opět otevřené a my nezapomeneme na chybu měření!

K těmto hodnotám se dopracovali někteří z řešitelů a opravovatelů:

Tabulka uvádí experimentální hodnoty konstant ze vztahů (27) a (29).

Experimentátor	Konstanta ze vztahu (27)	Konstanta ze vztahu (29)
<i>Jan Jelínek</i>	$A = 0,40 \pm 0,06$	$B = 4 \pm 3$
<i>Lukáš Malina</i>	$A = 0,40 \pm 0,03$	$B = 2,5 \pm 0,5$
<i>Jakub Benda</i>	$A = 0,31 \pm 0,01$	
<i>Petr Vanya</i>	$A = 0,33 \pm 0,01$	
<i>Jano Lalinský</i>	$A = 0,31 \pm 0,02$	$B = 12,1 \pm 5,9$

Střední hodnota a směrodatná odchylka našich měření vycházejí

$$A = 0,31 \pm 0,02, \quad B = 12,1 \pm 5,9.$$

Tyto hodnoty ještě poopravíme o odhadnuté chyby měření

$$A = 0,31 \pm 0,05, \quad B = 12 \pm 8.$$

Následně je porovnáme s teoretickými hodnotami²¹

$$A = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \doteq 0,40, \quad B = \sqrt{2\pi} \doteq 2,5.$$

A konstatujeme, že jsme v podstatě uspěli, protože hodnoty teoretické se poměrně dobře blíží k naměřeným hodnotám. Druhou záležitostí je také přesnost měření. V případě gravitačních vln to ještě ujde, ale protože povrchové vlny jsou kratší, je přesnost mnohem menší a měření má spíše orientační charakter.

Mimochodem, naši situaci nejlépe vystihuje vzorec (28).

²¹⁾ Feynman, R., P., Leighton, R., B., Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky I*. Fragment 2000, strana 695.

Úloha III . E ... Planckova konstanta

Navrhněte a dostatečně teoreticky zdůvodněte metody k experimentálnímu určení Planckovy konstanty, které se dají realizovat doma, příp. s vybavením ve školní laboratoři, a alespoň jednu z nich proveďte. Všechny veličiny, které je možné experimentálně určit (zvažte užití statistiky), co nejpřesněji změřte a správně vyhodnoťte velikost této fundamentální konstanty s příslušnou experimentální chybou.

Nápověda: LED dioda s ochranným rezistorem stojí cca 5 Kč.

Experimentální určení fundamentální konstanty, jakou je Planckova konstanta, je obecně obtížné a v řešení se nevyhneme složité diskusi výsledků měření. Hlavní motivací k zařazení úlohy bylo téma seriálu, které nám na odlehčené úrovni dovolí vysvětlit potřebnou teorii. Uplatníme metodu doporučenou v zadání (užití LED diody), a proto se nejprve věnujme teorii polovodičů²².

Teorie

Elektrony v atomech vyhovují Pauliho vylučovacímu principu – žádné dva elektrony se stejným spinem nemohou mít stejnou energii (přesněji stejná kvantová čísla). A tak elektrony obsazují energetické hladiny postupně od té nejnižší. Při nulové teplotě jsou všechny hladiny zaplněné až po určitou energetickou mez, nad ní jsou hladiny neobsazené.

V pevných látkách se setkáváme s pozoruhodným jevem. Energetické hladiny elektronů jsou u sebe neuvěřitelně blízko (v měřítku vzdáleností energetických hladin izolovaného atomu i v měřítku teplotních fluktuací kT), elektrony mohou prakticky nabývat spojitě každé energie (to je důsledek toho, že v pevné látce je elektronů neuvěřitelně mnoho). Existují však intervaly energií, které jsou zakázané. Žádné elektrony nemohou mít energii z těchto intervalů. Závislost energie elektronu na vlnovém vektoru nazýváme pásové schéma (pásová struktura), neboť povolené a zakázané energie tvoří „pásky“.

U polovodičů je konfigurace elektronů právě taková, že mezi poslední obsazenou hladinou (jí odpovídá energie E_v) a první neobsazenou hladinou (energie E_c) je zakázaný pás – tzv. gap, jeho šířka je $E_g = E_c - E_v$. Nejvyššímu obsazenému pásu při nulové teplotě říkáme valenční pás a nejvyššímu neobsazenému pásu říkáme vodivostní pás (conducting band). V reálných polovodičích za běžných podmínek (např. nenulová teplota, vliv příměsí) dochází k difúzi elektronů – některé obsazené hladiny se vlivem tepelného pohybu uvolní a některé neobsazené se zaplní.

Pásovou strukturu nějakého polovodiče nelze vypočítat analyticky, ale pouze numerickými metodami na počítači. Příklad takto vypočítané pásové struktury polovodiče typu III-V galium-arsenid vidíte na obr. 38.

Ve vodivostním pásu $E \geq E_c$ může elektron libovolně zvyšovat svou energii (např. v elektrickém poli), protože v jeho sousedství je dostatek neobsazených hladin. Naopak ve valenčním pásu $E \leq E_v$ je elektron vázaný, okolní energetické hladiny jsou obsazené a nemůže na ně snadno přeskočit.²³ U vodičů se valenční a vodivostní pás těsně dotýkají, tedy pouhým tepelným pohybem se elektron může uvolnit do

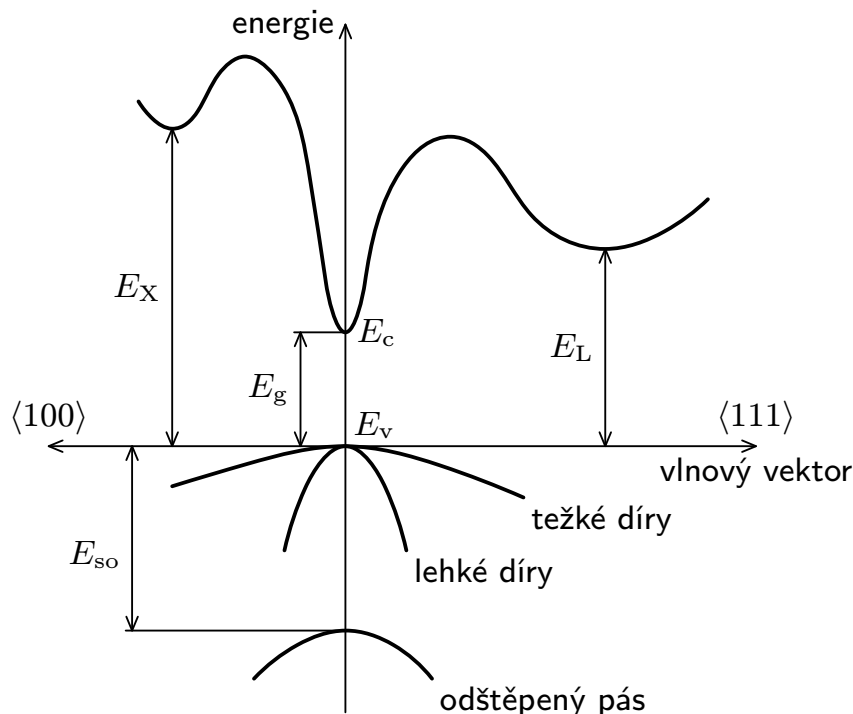
²²⁾ O polovodičích si můžete více přečíst v seriálu 13. ročníku FYKOSu.

²³⁾ Naopak neobsazené hladiny se ve valenčním pásu pohybují téměř jako bez překážek. Těmto hladinám říkáme *díry*.

vodivostního pásu a vést elektrický proud. U polovodičů se elektron může dostat z valenčního do vodivostního pásu absorpcí dostatečného množství energie, např. absorpcí fotonu o energii E ,

$$E_g \leq E = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

kde h je Planckova konstanta a dále c rychlost, ν frekvence, λ vlnová délka světla v daném prostředí (můžeme předpokládat vakuum). Polovodiče a izolanty se liší velikostí zakázaného pásu (izolanty jej mají nejširší, orientačně větší než např. 5 eV). Různé typy polovodičů se pak liší opět šířkou zakázaného pásu E_g .



Obr. 38. Pásová struktura GaAs. Při teplotě 300 K je
 $E_g = 1,42 \text{ eV}$, $E_L = 1,71 \text{ eV}$, $E_X = 1,90 \text{ eV}$,
 $E_{so} = 0,34 \text{ eV}$

Užívané LED diody jsou vyrobené právě z polovodiče Ga-As, který má přímý přechod. To znamená, že postačí absorpce/emise fotonu bez nutnosti dodat/odebrat hybnost elektronu. (V pásovém schématu na obr. 38 to znamená, že minimum E_c se nachází přímo nad maximum E_v .) LED (light-emitting diode) využívá opačného přeskoků z vodivostního do valenčního pásu (jev se nazývá spontánní emise), přičemž je vyzářen foton o energii $E \geq E_g$. Nejprve je samozřejmě nutné potřebnou energii elektronu dodat k přeskoků do vodivostního pásu; již zmíněný proces tepelných kmitů je nedostačující, proto potřebnou práci W může vykonat elektrické pole způsobené přiloženým napětím U

$$E_g \leq W = eU, \quad (30)$$

kde e je absolutní hodnota náboje elektronu. S uvážením vztahů výše dostáváme obecně nerovnost

$$\frac{hc}{\lambda} \geq eU \quad \Rightarrow \quad h \geq \frac{e}{c} \cdot U\lambda. \quad (31)$$

Emitovanou vlnovou délkou λ i napětí U můžeme v principu změřit (hůře najít v katalogu součástek). Jak víme, aby LED začala svítit, je na ni nutné přivést určité minimální napětí, jehož existenci již umíme vysvětlit nerovností (30). V idealizovaném případě můžeme předpokládat, že napětí U odečteme při jeho zvyšování právě v okamžiku, kdy LED začne svítit, a potom by měla nastat rovnost. Všechny předpoklady však nezapomeneme okomentovat v diskusi.

Postup

K experimentu budeme potřebovat LED diodu, resp. několik různých barevných diod s ochranným rezistorem na použité napětí (aby jimi podle Ohmova zákona neprotékal proud nad cca 10 mA) a jako zdroj baterii s napětím větším než minimální nutné napětí. K regulaci napětí zapojíme proměnný rezistor s vhodným odporem jako potenciometr. Z měřidel si obstaráme voltmetr. K určení vlnové délky je nejvhodnější spektrometr nebo monochromátor, díky němuž můžeme proměřit celé spektrum a poznatky o jeho průběhu využít do diskuse. Jinak se musíme spoléhat na údaj výrobce, resp. katalog. Experiment je nejvhodnější provádět v temné komoře k co nejpřesnějšímu nastavení napětí potenciometrem. K odečtu se bude hodit lampa či svítilna.

K baterii připojíme potenciometr a jezdec přesuneme k jednomu konci. Na tento konec a jezdec připojíme voltmetr a paralelně k němu ochranný odpor s LED diodou při správné polaritě v sérii. Experiment provádíme pokud možno za tmy; potenciometrem zvyšujeme napětí, dokud nezpozorujeme slabou emisi světla. Nastavené napětí U zaznamenáme, a jelikož jde o subjektivní měření, jeho nastavení a odečtení provedeme ještě několikrát pro statistické zpracování. Postup zopakujeme pro další diody s jinými barvami. Nechceme-li se spoléhat na udanou vlnovou délku, proměříme emisní spektrum použité LED diody na správně zkalibrovaném spektrometru (monochromátoru).

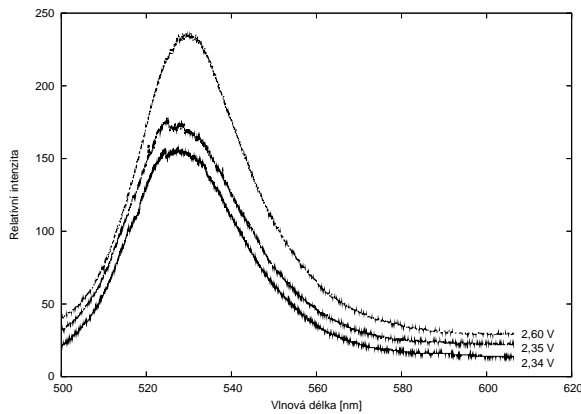
Výsledky měření

Experiment byl proveden večer za dostatečné tmy a při teplotě 22 °C. Byly měřeny červená, zelená a bílá LED dioda přesně podle uvedeného postupu. Jako voltmetr byl použit digitální multimetr s chybou měření 0,01 V. Naměřené hodnoty napětí U pro všechny diody včetně výsledků statistického zpracování shrnuje následující tabulka.

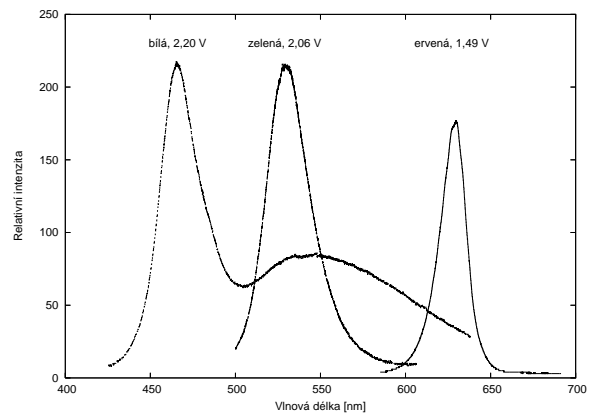
Naměřené hodnoty napětí a statistické zpracování

Dioda	U_1 [V]	U_2 [V]	U_3 [V]	U_4 [V]	U_5 [V]	U [V]	$\sigma(U)$ [V]
červená	1,51	1,49	1,46	1,49	1,48	1,486	0,018
zelená	2,07	2,06	2,06	2,05	2,05	2,058	0,008
bílá	2,21	2,19	2,19	2,21	2,18	2,196	0,013

Emisní spektrum diod bylo studováno na monochromátoru SPM 2 (Carl Zeiss Jena), jehož využití nám laskavě umožnilo optické praktikum MFF UK. Monochromátor byl kalibrován na spektru rtuťové výbojky. Pořízená spektra nalezneme v grafech na obr. 39 a 40. U červené a zelené diody byl navíc zkoumán vliv napětí na diodě (tzn. svítivost diody) na její spektrální charakteristiku. Z grafu vidíme, že nastavené napětí, resp. svítivý výkon má zanedbatelný vliv na průběh spektra. Graf na obr. 40 uvádí vybrané spektrální charakteristiky všech diod.



Obr. 39. Spektrum zelené diody při různých napětích



Obr. 40. Spektrum všech diod (bílé, zelené a červené)

Vyhodnocení měření komplikuje okolnost, že spektrum diod není zdaleka monochromatické. Jakou vlnovou délku tedy vidíme v okamžiku nastavení a odečtení napětí U ? Ze spektra určíme jednak vlnovou délku λ maxima charakteristiky, jednak krajní vlnovou délku λ_0 červeného konce spektra (kde fotony mají nejmenší energii), kterou můžeme okem spatřit. Odečtené hodnoty s odhadem chyby měření (raději nadsazené) uvádějí následující tabulky. Ze zaokrouhlené hodnoty minimál-

Experimentální hodnoty min. napětí a vlnové délky maxima spektrální charakteristiky

Dioda	U [V]	ΔU [V]	λ [nm]	$\Delta \lambda$ [nm]	h [10^{-34} J·s]	Δh [10^{-34} J·s]	rel. chyba [%]
červená	1,49	0,02	630	10	5,01	0,15	2,9
zelená	2,06	0,02	530	17	5,83	0,24	4,2
bílá	2,20	0,02	465	20	5,46	0,28	5,2

Experimentální hodnoty min. napětí a krajní vlnové délky charakteristik

Dioda	U [V]	ΔU [V]	λ_0 [nm]	$\Delta \lambda_0$ [nm]	h [10^{-34} J·s]	Δh [10^{-34} J·s]	rel. chyba [%]
červená	1,49	0,02	660	10	5,25	0,15	2,9
zelená	2,06	0,02	590	20	6,49	0,28	4,4
bílá	2,20	0,02	530	30	6,23	0,41	6,6

ního napětí mohla být vypočtena experimentální hodnota h Planckovy konstanty s příslušnou chybou (zde lze dobře využít zákon o sčítání malých relativních chyb). Viz též diskuse.

K posouzení správnosti experimentu můžeme zobrazit experimentální hodnoty λ , λ_0 v závislosti na U . Podle (31)

$$\lambda, \lambda_0 = \frac{hc}{e} \cdot \frac{1}{U} = \frac{A}{U},$$

kde koeficient A můžeme stanovit fitováním a z něho vyhodnotit Planckovu konstantu

$$h = \frac{e}{c} \cdot A. \quad (32)$$

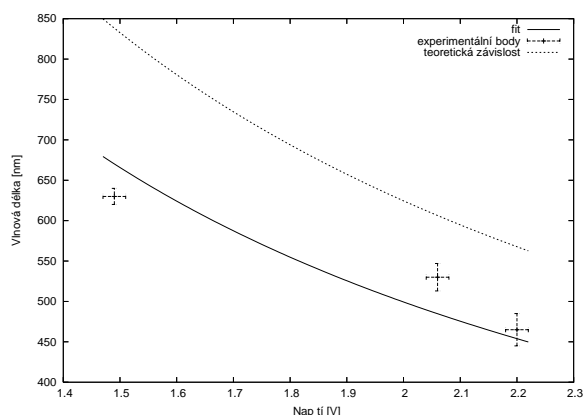
Zpracování je uvedeno v grafech na obr. 41 a 42. Pro srovnání je doplněn teoretický průběh závislosti pro dnešní tabelovanou hodnotu Planckovy konstanty.

Fitování provedené programem gnuplot 4.0 dává pro zpracování v grafu na obr. 41 výsledek $A = (1000 \pm 50) \text{ nm}\cdot\text{V}$, odkud podle (32) vychází

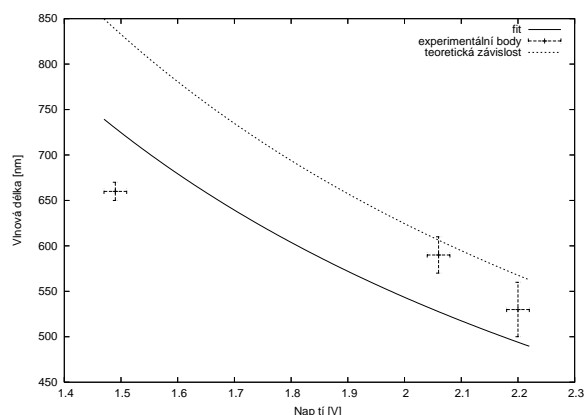
$$h = (5,333 \pm 0,246) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \quad \text{zaokrouhlo} \quad h = (5,3 \pm 0,3) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Pro hodnoty v grafu na obr. 42 výsledky jsou $A = (1090 \pm 80) \text{ nm}\cdot\text{V}$ a

$$h = (5,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$



Obr. 41. Fitování exp. bodů při odečtu v maximech spektrálních charakteristik



Obr. 42. Fitování exper. bodů při odečtu v krajích spektrálních charakteristik

Diskuse

Grafické zpracování výsledků v grafech na obr. 41 a 42 vypovídá mnoho o spolehlivosti našeho měření: *Změřené body nevykazují dobře očekávanou teoretickou závislost, proto zvolenou metodu můžeme doporučit nanejvýš pouze jako orientační měření!* Jen v jediném změřeném bodě (zelená LED dioda) jsme se v rámci chyby měření přiblížili skutečné hodnotě Planckovy konstanty. Rozumným závěrem z našeho měření může být např. aritmetický průměr $5,7 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ všech hodnot (z obou metod odečtu vlnové délky) a raději nadsazená chyba měření (kterou si nemůžeme dovolit zaokrouhlit na více než jednu platnou číslici – větší přesnost nemůžeme garantovat!). Minimální absolutní chyba má hodnotu $0,8 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, aby zahrnovala všechny změřené hodnoty, lépe však $1 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ s ohledem na chyby měření jednotlivých výsledků. Podle chyby zaokrouhlíme výsledek.

Za dostatečně přesné můžeme považovat měření minimálního napětí pro emisi světla diodou, jehož relativní chyba se pohybuje okolo 1%. Jednoznačně největším problémem je určení vlnové délky světla, kterou v okamžiku odečtu napětí pozorujeme a která je pro malou intenzitu těžko měřitelná. Její hodnotu jsme odhadli při vyšší intenzitě vyzařování a za částečně ověřeného předpokladu, že průběh spektra diody není příliš ovlivněn vyzařovacím výkonem. Přesto nelze rozhodnout o tom, zda pozorujeme vlnovou délku v maximu charakteristiky či krajní vlnovou délku u červeného konce spektra. Zejména z tohoto důvodu bylo nadsazení chyby měření důležité. Tabelovaná hodnota Planckovy konstanty je přibližně $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

Všechny výsledky vyhovují teorii, tzn. nerovnosti (31). Odchylku od teoretické hodnoty můžeme zdůvodnit jednak nepřesností v určení vlnové délky emitovaného světla, jednak složitostí teoretického popisu reálných LED diod, zejména můžeme zpochybnit rovnost v (30) a (31), kterou jsme předpokládali pro vyhodnocení. Jiné metody k měření Planckovy konstanty mohou využívat dobře známý fotoefekt či Heisenbergovy relace neurčitosti (speciální optické experimenty s difrakcí na štěrbině).

Závěr

Podařilo se experimentálně odhadnout hodnotu Planckovy konstanty (obecněji její minimální hodnotu) $h = (6 \pm 1) \cdot 10^{-34}$ J·s. Přínos této úlohy spočívá především v pochopení činnosti LED diody (např. ve spektru bílé diody si všimneme excitačního píku a potom luminiscenčního píku, který samozřejmě nesmíme uplatnit k vyhodnocení) a zejména využití grafického zpracování k ověření *spolehlivosti* měření, resp. použitého teoretického popisu!

Úloha IV . E ... vytřete nám zrak

Změřte, jak závisí součinitel smykového tření mezi dvěma vámi vybranými materiály na velikosti stykové plochy a na hmotnosti smýkajícího se tělesa. Nezapomeňte nám napsat, s čím a jak jste měřili.

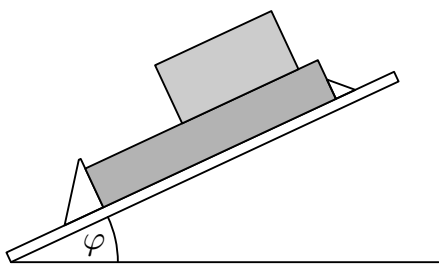
Teorie

Při měření součinitele smykového tření je důležité si uvědomit, že existují dva různé součinitele. Tedy že existuje součinitel klidového tření a součinitel smykového tření. Klidová třecí síla je definovaná jako síla působící na stojící těleso, kdežto smyková třecí síla je síla, která působí proti pohybu při smýkání jednoho tělesa po druhém. Pro klidové tření platí $F \leq f_0 N$ (rovnost nastává těsně před uvedením tělesa do smýkavého pohybu), pro smykové tření platí

$$F = f N ,$$

kde N je přítláčná síla kolmá k podložce a F je výše definovaná třecí síla. Klidové třecí síle odpovídá součinitel klidového tření f_0 a smykové třecí síle zase součinitel smykového tření f . Součinitel klidového tření bývá zpravidla o něco vyšší než součinitel smykového tření.

Pro měření těchto součinitelů se používají *tribometry*. Nejčastěji se používá



Obr. 43. Sklonný tribometr

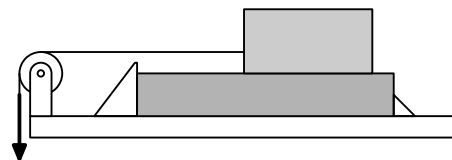
sklonný tribometr, který je na obrázku 43. Na tomto tribometru lze měřit jak součinitel klidového tření, tak součinitel smykového tření. Součinitel klidového tření se měří jednoduše tak, že položíme zkoumané těleso na smýkací plochu a zvětšujeme úhel náklonu φ , dokud se těleso nepočne pohybovat, a tento mezní úhel si zapíšeme.

Měření součinitele smykového tření je o něco komplikovanější, hledá se totiž úhel, při kterém se

zkoumané těleso bude pohybovat po počátečním postrčení rovnoměrně přímočaře, tedy ani zrychleně, ani zpomaleně. Zde je znatelnější vliv subjektivního vnímání, a proto je lepší měření pro stejné parametry několikrát zopakovat, čímž snížíme statistickou chybu.

Z nalezeného úhlu φ určíme daný součinitel f díky jednoduché geometrii a rozkladu tíhové síly jako

$$f = \frac{F}{N} = \operatorname{tg} \varphi.$$



Obr. 44. Vodorovný tribometr

Lze také použít vodorovný tribometr, vyobrazený na obrázku 44. Na tomto tribometru lze opět měřit jak součinitel klidového tření, tak součinitel smykového tření. Obdobně jako u sklonného tribometru součinitel klidového tření hledáme tak, že za konec provázku taháme stále větší silou a hledáme mezní sílu, při které se začne těleso pohybovat. Součinitel smykového tření určujeme tak, že hledáme sílu, kterou tahat za provázek tak, aby se těleso po počátečním postrčení počalo pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem. Opět je zde významný vliv subjektivního vnímání a odhadu pro rovnoměrný pohyb. Z nalezené mezní síly F_m vypočítáme součinitel f opravdu triviálně, jelikož velikost F_m je díky kladce rovna velikosti F , tedy $f = F_m/N$.

Měření

My jsme použili sklonný tribometr a měřili jsme klouzání nelakovaného tvrdého dřeva po tvrdém nelakovaném dřevu. Pro změnu hmotnosti jsme používali směs magnetů a železných kroužků připevněnou ke dřevu pomocí hřebíčků, čímž jsme dosáhli vcelku rovnoměrného rozložení přidávané hmotnosti. Pro změnu povrchu jsme vždy kousek dřeva uřízli. Nejdříve jsme zkoumali závislost součinitelů na hmotnosti tělesa, potažmo tedy na přítlačné síle. Pro každou hmotnost závaží jsme měřili pětkrát a v následující tabulce jsou uvedeny vždy průměrné hodnoty. V této tabulce uvádíme pouze statistické chyby měření, o celkové chybě měření se zmíníme v diskusi.

Měření závislosti součinitelů na hmotnosti

m [g]	φ [°]	f	φ_0 [°]	f_0
170	$28,1 \pm 0,4$	$0,533 \pm 0,005$	$32,7 \pm 0,5$	$0,641 \pm 0,006$
220	$28,3 \pm 0,4$	$0,537 \pm 0,004$	$32,7 \pm 0,5$	$0,643 \pm 0,006$
250	$27,8 \pm 0,6$	$0,527 \pm 0,007$	$32,5 \pm 0,4$	$0,638 \pm 0,005$
300	$28,7 \pm 0,6$	$0,548 \pm 0,006$	$33,1 \pm 0,6$	$0,651 \pm 0,007$
400	$30,4 \pm 0,5$	$0,588 \pm 0,006$	$33,0 \pm 0,5$	$0,650 \pm 0,006$

Měření závislosti součinitelů na velikosti styčné plochy

S [cm ²]	φ [°]	f	φ_0 [°]	f_0
150	$27,8 \pm 0,6$	$0,527 \pm 0,007$	$32,5 \pm 0,5$	$0,638 \pm 0,005$
120	$28,0 \pm 0,4$	$0,532 \pm 0,005$	$32,8 \pm 0,7$	$0,645 \pm 0,008$
100	$28,3 \pm 0,5$	$0,539 \pm 0,006$	$32,7 \pm 0,5$	$0,642 \pm 0,007$
80	$28,1 \pm 0,7$	$0,535 \pm 0,008$	$33,2 \pm 0,5$	$0,654 \pm 0,006$
50	$28,7 \pm 0,6$	$0,547 \pm 0,007$	$33,0 \pm 0,6$	$0,651 \pm 0,007$

Obdobně jsme pro každou velikost styčného povrchu také měřili pětkrát a průměrnou hodnotu včetně statistické chyby jsme zanesli do tabulky. Závislost na povrchu jsme měřili při hmotnosti tělesa 250 g.

Diskuse

V literatuře²⁴ se lze dočíst, že pomocí výše popsaných tribometrů lze dosáhnout přesnosti kolem 10 %. Když vezmeme v potaz to, že samotné určování úhlu či zavěšené hmotnosti je zatíženo v amatérských podmínkách někdy i podobně velkou chybou, je zřejmé, že celková chyba měření je podstatně vyšší než výše uvedené statistické chyby, konkrétně v našem případě odhadujeme chybu kolem 15 % danou také tím, že reálná plocha či hmotnost zkoumaného tělesa jsou také o něco jiné než námi stanovené.

Výsledek experimentu silně závisí na zvoleném povrchu zkoumaného tělesa, povrchu skluzu a zkoumaném oboru parametrů. Dopředu nelze vyloučit prakticky žádné kvalitativní chování. Jediná „jistota“ je, že součinitel klidového tření by měl být vyšší než součinitel smykového tření. Nicméně závislost obou součinitelů by měla být velmi pozvolná, takřka konstantní. Při relativně malých hmotnostech může hrát velkou roli nedokonalé dosednutí třených ploch. Při vyšších hmotnostech sice těleso dosedne lépe, ale zase hrozí prohnutí kluzné plochy. Celkově mohou také ovlivnit měření jakékoliv nehomogenity třených povrchů.

Úloha V.E ... *levotočivý svět*

Změřte optickou aktivitu roztoku glukózy v závislosti na jeho koncentraci. Optická aktivita je stáčení roviny lineárně polarizovaného světla při průchodu danou látkou. Úhel otočení je přímo úměrný délce dráhy, kterou paprsek v látce urazil, a závisí také na vlnové délce světla. Pokuste se zjistit/vymyslet/vzpomenout, čím je optická aktivita na molekulární úrovni způsobena.

Měření optické aktivity se používá k zjištění koncentrace cukru v roztocích. Je tato metoda spolehlivá? Má každý cukr stejnou optickou aktivitu?

Teorie

Izomery jsou látky, které mají stejný molekulární vzorec, ale mají různé rozmístění molekul v prostoru. Izomerů je mnoho druhů a chemici je třídí do všemožných kategorií. Nás ovšem zajímají pouze ty izomery, které stáčí roviny polarizace lineárně polarizovaného světla. Látky s touto vlastností se nazývají optické izomery nebo *enantiomery*. Vyznačují se tím, že některé z jejich konformací²⁵ jsou navzájem zrcadlovými obrazy. To znamená, že se k sobě mají jako pravá a levá ruka a bez přeuspořádání vazeb (trhání prstů) je nelze přinutit překrýt se.

Na střední škole se obvykle věc značně zjednodušuje a tvrdí se, že každá molekula obsahující tzv. chirální uhlík je optický izomer. Uhlíku se říká chirální, když má na každé z vazeb jiný atom. To není úplně pravda. Existuje řada sloučenin, které jsou

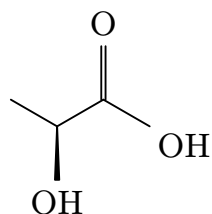
²⁴) Brož, J.: *Základy fyzikálních měření (I)*. SPN, Praha 1983.

²⁵) Konformace přeloženo z chemičtiny znamená prostorové uspořádání.

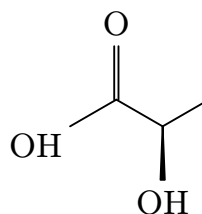
chirální a asymetrický uhlík neobsahují a na druhé straně existuje řada sloučenin, které asymetrický uhlík mají a přesto chirální nejsou.

Jak tedy poznáme chirální a achirální molekulu? Pro naše účely postačí, že chirální sloučenina nemá rovinu ani střed symetrie. Toto platí pro libovolnou konformaci zkoumané sloučeniny. Stačí tedy vyšetřit, nejlépe na modelu dané molekuly, přítomnost těchto dvou jednoduchých prvků symetrie a následně lze obvykle snadno rozhodnout o chiralitě dané sloučeniny.

Příklad chirální sloučeniny je na obrázku. Používáme dohodnutý způsob zápisu prostorové molekuly. Vazby kreslené plnou čarou jsou v rovině papíru, vazby rozšiřující se (plné klínky) vystupují před papír a vazby čárkované (šrafované klínky) směřují za papír. Neoznačené vrcholy značí uhlíky s příslušným počtem vodíků. Všimněme si, že oba optické izomery se k sobě mají skutečně jako levá a pravá ruka.



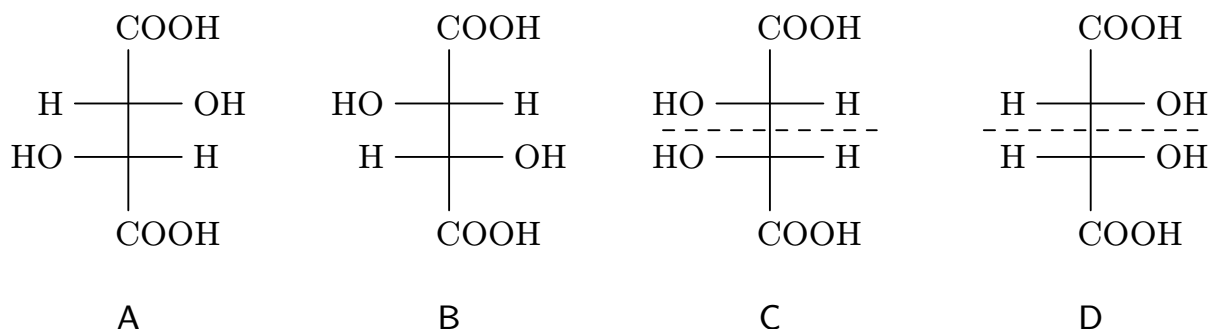
Obr. 45.
l-kyselina
mléčná



Obr. 46.
d-kyselina
mléčná

Mají stejné fyzikální vlastnosti, liší se pouze v tom, že každý otáčí rovinu polarizovaného světla o stejný úhel, ale v opačném smyslu. Jejich směs v poměru 1 : 1, která je opticky neaktivní, se nazývá racemát. Ten má často odlišné fyzikální vlastnosti od čistých enantiomerů.

Vyjadřování konfigurace pomocí prostorových vzorců je pracné a u složitějších molekul může být i nepřehledné, proto bylo nutné najít způsob, jak zapsat konfiguraci dvourozměrně. Způsob převedení trojrozměrného vzorce do roviny (a naopak) navrhl německý chemik Emil Fischer (1852–1919), zakladatel moderní chemie sacharidů. Princip zápisu tady nebudeme zbytečně popisovat. Lze ho najít v každé rozumné učebnici organické chemie.



Obr. 47. Fischerovo schéma konformací kyseliny 2,3-dihydroxybutandiové (vinné)

Se zvyšujícím se počtem asymetrických atomů uhlíku se samozřejmě zvyšuje i počet stereoizomerů. Obecně sloučenina, která má ve své molekule n center chiralit, může existovat ve 2^n konformacích. Ne všechny tyto prostorové izomery jsou opticky aktivní. Neaktivní konformace se nazývají mezofomy. Příkladem budiž konformace

kyseliny vinné znázorněné na obrázku 47 pomocí Fischerova schématu. Struktury A a B představují dvojici enantiomerů, ale struktury C a D, přestože jsou navzájem zrcadlovými obrazy, enantiomery nejsou. Ve skutečnosti jde o stejnou molekulu jinak umístěnou v prostoru (pootočením vzorce C, resp. D o 180° získáme strukturu totožnou s jejím zrcadlovým obrazem). Takovéto sloučeniny, přestože obsahují ve své molekule centra chiralidy, nejsou opticky aktivní. Uspořádání C a D je tedy mezofoma.

Míra stočení roviny polarizace se řídí Biotovými vztahy:

1. Stočení je úměrné tloušťce prošlé vrstvy.
2. Stočení ve stejné pravotočivé a levotočivé látce se liší jen znaménkem.
3. Stočení způsobené několika vrstvami se algebraicky sčítá.
4. Stáčivost klesá s rostoucí vlnovou délkou světla.

Z posledního Biotova zákona plyne, že se bílé světlo průchodem opticky aktivní látkou rozkládá na barevné spektrum. Tomuto jevu se říká rotační disperze.

Každou opticky aktivní látku charakterizuje konstanta – *specifická otáčivost*. Pro roztoky aktivní látky definujeme specifickou otáčivost jako úhel, o který se otočí rovina polarizovaného světla při jednotkové tloušťce 1 dm a jednotkové koncentraci 1 g/ml. Udává se v kruhových stupních. Znaménko specifické otáčivosti značí, na kterou stranu se bude otáčet rovina polarizace. Z pohledu proti směru šíření světla mají enantiomery, které stáčejí světlo ve směru hodinových ručiček, znaménko kladné a označují se jako +formy. Enantiomer stáčejí světlo na opačnou stranu je –forma.

Fyzikální princip je zhruba takovýto. Představte si molekulu ve tvaru spirály postavenou na výšku, ke které přichází světlo z levé strany. Tvar spirály není nutný ke vzniku optické aktivity, nicméně se na něm velmi jednoduše dá nastínit podstata věci. Světlo lineárně polarizované ve směru osy spirály procházející kolem molekuly rozkmitá elektrony ve směru své polarizace. Tím vznikne v molekule indukovaný střídavý proud. O střídavém proudu je známo, že generuje elektromagnetické vlnění. Indukovaný proud nemá směr přesně stejný jako vlnění, které jej vytvořilo. Elektrony jsou v molekule nuceny pohybovat se ve směru spirály, takže kmitají i ve směru kolmém na směr polarizace příchozí vlny. Takto vytvořená složka proudu by neměla vyvolat žádné záření, jelikož účinky se odečítají se stejně velkým proudem opačné fáze, který vznikne na protější straně spirály. To není úplně pravda, jelikož vlna vygenerovaná proudem vlevo se šíří konečnou rychlostí. Takže v době, kdy se setkává a skládá s vlnou vytvořenou vpravo, je rozdíl fází o chlup větší než π . Velikost chlupu závisí na rychlosti světla a rozměrech spirály. Tak se k původní vlně přidala ještě malilinkatá složka, která kmitá ve směru na ni kolmém, což znamená stočení roviny polarizace.

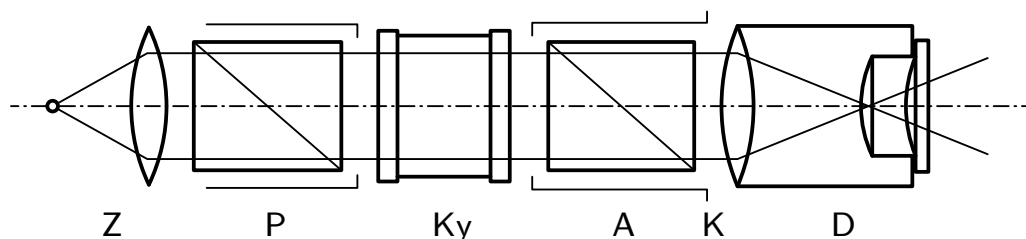
Biotovy zákony jsou zřejmým a poměrně jednoduchým důsledkem předchozího odstavce. Nejzajímavější případ je racemát. To se + a – molekuly perou o to, na kterou stranu se světlo otočí. Výsledkem je remíza a světlo zůstane tak, jak bylo, jenom má trochu zamotanou hlavu. Záření s různými energiemi indukuje různě velké proudy, a tím pádem se i různě stáčí. Přičemž záření s vyšší frekvencí vytváří větší proud. Z toho důvodu se dá pozorovat disperze. Výše popsany efekt působí i na nepolarizované světlo. Nicméně u něj to není tak jednoduše pozorovatelné. Dalším

zajímavým faktem je, že pokud pošlete světlo z opačné strany, v našem případě zprava, stočí se rovina polarizace ve stejném směru, jako když světlo přijde zleva.

Pozoruhodné jsou efekty cukrů v biochemii. Ukazuje se, že živé organismy jsou uzpůsobeny výhradně k trávení pravotočivých sacharidů. Když předhodíte bandě hladových bakterií racemát nějakého cukru, stráví z něj pouze pravotočivou polovinu. Pak se sežerou navzájem a poslední nakonec umře hlady, přestože se doslova topí v potravě. Z fyzikálního a chemického hlediska jsou + a – formy cukrů zcela ekvivalentní, avšak příroda je v tomto směru vybíravá a rostliny tvoří pouze pravotočivé formy cukrů, zatímco chemickou syntézou vzniká racemát.

Měření

Specifickou otáčivost zjišťujeme na přístrojích zvaných polarimetry. Nejjednodušší polarimetr tvoří polarizátor, který mění přirozené (nepolarizované) světlo na lineárně polarizované, a analyzátor, kterým zjišťujeme orientaci polarizace po průchodu zkoumanou látkou. Polarizátor se dá realizovat mnoha způsoby. V přístrojích se používá chytře vybroušený hranol z islandského vápence. Mezi polarizátor a analyzátor se vloží roztok nalitý v kyvetě. Analyzátor není nic jiného než polaroidová fólie se stupnicí okolo. Na stupnici se odečítají úhly, o které se stočila rovina polarizace.



Obr. 48. Schéma polarimetru, Z – zdroj světla, P – polarizátor, Ky – kyveta, A – analyzátor, K – kukátko, D – dalekohled

V domácích podmínkách je nejjednodušší metodou, jak lineárně polarizovat světlo, odraz. Pokud světlo dopadá na sklo pod určitým úhlem, je odražený paprsek úplně polarizovaný. Tento úhel se nazývá Brewsterův a vypočítá se jako $\arctg n_1/n_2$, kde n_1 a n_2 jsou indexy lomu prostředí, ze kterého paprsek přichází a od kterého se odráží.

V polních podmínkách je místo kyvety potřeba sehnat nádobu, která má dvě rovnoběžné stěny, přes něž je vidět skrz. Koncentrace roztoků se nejsnáze mění ředěním. Na začátku si připravíme známý objem roztoku o známé koncentraci. Potom zředěním vodou o stejném objemu získáme roztok s poloviční koncentrací.

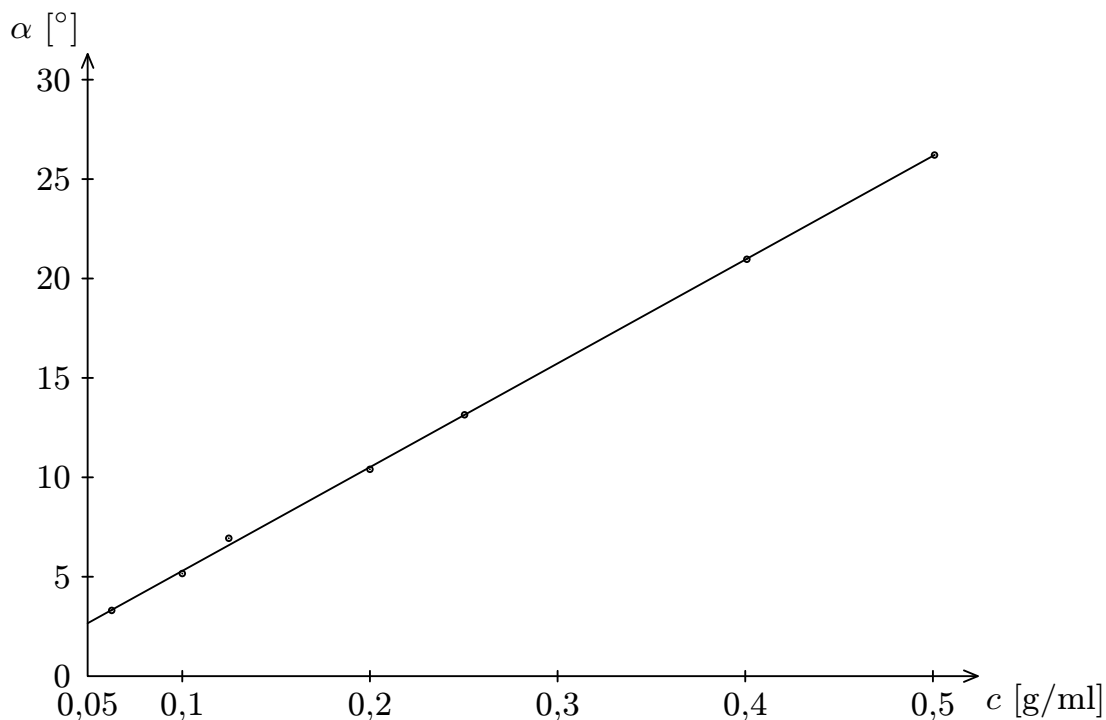
Jako analyzátor se dá použít polarizační filtr do fotoaparátu nebo obyčejný kousek polaroidu. Polaroid má tu užitečnou vlastnost, že propouští světlo polarizované podél osy polaroidu, zatímco světlo polarizované ve směru kolmém silně absorbuje. Posvítíme-li na polaroid normálním nepolarizovaným světlem, projde jím pouze ta část nepolarizovaného svazku, která kmitá ve směru osy polaroidu. Takže propuštěné světlo je lineárně polarizované. Tato vlastnost se hodí k zjišťování, zda je nějaký svazek paprsků polarizovaný. V případě, že ano, je možné určit směr polarizace. To je přesně to, co potřebujeme v analyzátoru. Prostým měřením úhlu otočení polaroidu můžeme zjistit míru stočení světla po průchodu roztokem.

Výsledky

Na závěr uvádíme hodnoty stočení roviny lineárně polarizovaného světla při průchodu roztokem glukózy za teploty 20,5 °C v závislosti na koncentraci. K měření byla použita sodíková výbojka a maminčin polarimetr. Konstrukce polarimetru je trochu odlišná od té popsané výše, jako analyzátor se používá otočný hranol. Délka kyvety je standardní 1 dm.

Změřené hodnoty stočení v závislosti na koncentraci

α [°]	2,55	3,35	5,20	6,95	10,45	13,20	21,00	26,25
c [g/ml]	0,05	0,0625	0,1	0,125	0,2	0,25	0,4	0,5



Obr. 49. Změřené hodnoty stočení v závislosti na koncentraci, lineární regrese

Naše měření potvrdila teoretický předpoklad, že otáčivost glukózy závisí přímo úměrně na koncentraci (viz graf na obr. 49). Lineární regresí tedy vyjde specifická otáčivost glukózy

$$\alpha = (52,4 \pm 0,4)^\circ \text{ ml} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{dm}^{-1}.$$

Úloha VI. E ... slintací úložka

Změřte, jaký maximální podtlak (i přetlak) je člověk schopen vyvinout sáním (nafukováním) ústy.

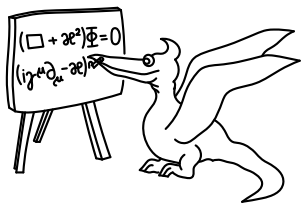
Rozepisovat, co je to podtlak nebo přetlak, by asi bylo zbytečné, a proto se u této experimentální úlohy neobjeví teoretická část řešení. Existuje mnoho způsobů, jak lze měřit rozdíl tlaků, tedy přetlak či podtlak. Asi nejméně nápaditou, ale nejpřesnější metodou je použít nějaký laboratorní nebo komerčně vyráběný barometr.

V improvizovaném barometru použijeme hadici a vodu. Asi nejlepším řešením je z hadice udělat jakousi U trubici a do jednoho jejího konce foukat nebo z něj sát. Z největšího dosaženého rozdílu mezi vrchní a spodní hladinou dle notoricky známého vzorce pro hydrostatický tlak $h\rho g$ snadno vypočítáme rozdíl tlaků mezi oběma ústími trubice. Jenom musíme dát pozor na to, abychom odečítali opravdu rozdíl hladin a ne pouze změnu výšky jedné z hladin, kterou bychom poté museli vynásobit dvěma.

Další vcelku rozumnou metodou za použití hadice a vody je zkusit, jak vysoko jsme schopni nasát sloupec vody. Zde je třeba měřit výšku a ne délku po hadici, která nemusí být ani vertikální, ani rovná. Obdobně pro přetlak můžeme zkoumat, do jaké hloubky jsme schopni vyfouknout bublinky skrz hadici.

Objevil se i poněkud kuriózní způsob měření tlaku, a to s využitím Bernoulliho rovnice, kdy se měl změřit objem prošlý trubicí dané délky za nějaký čas. Nicméně při tomto řešení je nemalý problém změřit právě objem prošlého plynu, nemluvě o tom, že se neměří maximální dosažitelný, ale maximální udržitelný přetlak. Na podobný problém s určením objemu vzduchu narazí pokus o změření množství vzduchu, které si je člověk schopen natlačit do úst, a porovnání s objemem úst.

Co se týče naměřených hodnot, je zřejmé, že je naprosto individuální, jaký přetlak či podtlak je kdo schopen vytvořit. Záleží to na stavbě těla, zdravotním stavu a celkově minulosti daného člověka. Hodnoty naměřené řešiteli se pohybovaly od 5 kPa do 30 kPa pro přetlak a od 5 kPa do 70 kPa pro podtlak. Bohužel spousta řešitelů měřila pouze jeden z údajů, a tak nelze příliš srovnávat, ale zdá se, že většina lidí je schopna vyvinout vyšší podtlak než přetlak. To potvrzuje mé měření komerčním manometrem, kdy jsem dosáhl podtlaku 40 kPa a přetlaku 25 kPa.



Seriál o kvantové fyzice

Kapitola 1: Historický úvod

Co je to kvantová fyzika?

To je otázka spíše filozofická než fyzikální. Nicméně se dá ve zkratce říci, že kvantová fyzika popisuje svět okolo nás, a to řečí teorie pravděpodobnosti. Klasická (nekvantová) fyzika umí předpovědět, jak dopadnou různé fyzikální jevy. Například pokud vyhodíme míč do vzduchu, předpoví, že spadne na zem, a je schopna vypočítat, kdy a kde se to stane. Prakticky všechny fyzikální jevy v našem běžném životě je schopna klasická fyzika popsat. Nicméně pokud se obrátíme do nitra hmoty, zjistíme, že pravidla, která platí v našem světě, zde už platit přestávají. A to je přesně oblast, kde dominuje kvantová fyzika. Stručně řečeno, nic zde nelze předpovědět s jistotou. Lze pouze říci, s jakou pravděpodobností se to či ono stane.

Kvantová fyzika je tou správnou teorií, nicméně v běžném životě bez výtoku moderní civilizace se většinou s jejími důsledky nesetkáváme. To je zapříčiněno tím, že kvantové jevy jsou dobře pozorovatelné v mikroskopickém světě a čím víc jdeme do větších rozměrů, tím méně se projevují. Proto kvantová teorie na velkých rozměrech efektivně přechází v teorii klasickou.

Stručně si povězte, jak to všechno začalo.

Fyzika na scestí

Fyzikální představy o světě se vyvíjely od nepaměti, za počátek klasické fyziky je nicméně považována kniha Isaaca Newtona *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* z roku 1686. Pro dalších 200 let se stala newtonovská fyzika základním kamenem, na níž byly stavěny nové teorie. Druhá polovina 19. století však znamenala drastickou změnu. Zlepšování experimentálních metod a nové často nečekané výsledky měření vedly teoretiky k vyvíjení činnosti. Nové představy týkající se elektromagnetismu a termodynamiky vyvolaly jistou atmosféru nejistoty, kdy do té doby základní principy fyziky (jako třeba 2. termodynamický zákon) byly často zpochybňovány. Tento proces trvající několik desítek let, byť vycházel z důkladné znalosti zákonů klasické fyziky, nakonec vedl ke zrodu teorie nové – obecnější.

Planckova hypotéza

Za počátek kvantové teorie je považována Planckova hypotéza záření černého tělesa. V podstatě jde o to, jaká je intenzita elektromagnetického záření, které vyzařují objekty na určité frekvenci. Na konci 19. století odvodil německý fyzik Wilhelm Wien výraz²⁶⁾, který sice souhlasil s experimentem, ale neměl žádné teoretické opodstatnění. Max Planck v roce 1899 Wienův vztah na základě termodynamických zákonů

²⁶⁾ Vztah mezi vlnovou délkou s maximální intenzitou vyzařování a teplotou $\lambda_{\max} = b/T$.

dokázal a pokračoval ve svém snažení dále, neboť na základě měření byly přece jenom nalezeny jisté odchylky. V roce 1900 publikovali Strutt a Rayleigh práci, v níž na základě klasické teorie odvodili jiný vztah pro vyzařování, který neodpovídal experimentu na vysokých frekvencích²⁷, na nízkých nicméně slavil úspěch. Planck však tuto krátkou práci ignoroval. Generoval si obecné vztahy, které vyhovovaly podmínkám termodynamiky a elektrodynamiky, až se mu jeden z nich zalíbil. Tento vztah nejlépe souhlasil s pozorováním, nicméně žádné teoretické odůvodnění neměl. Planck se totiž po dlouhých bezvýsledných výpočtech uchýlil k zoufalému ničím nepodstatnému kroku. Přidal do teorie předpoklad, že energie celého vyzařovacího systému je kvantována, tj. nemůže nabývat libovolné hodnoty, ale pouze určitých dovolených. Pak už mu kýžená formulka skutečně vyšla. Sám Planck píše:

*„Byl to akt zoufalství . . . čistě formální předpoklad, je-
muž jsem nevěnoval příliš úvah kromě toho, že jsem za
každou cenu musel dostat kladný výsledek.“*

Tím kladným výsledkem samozřejmě myslel svůj vzoreček. Planck si vážnost svého předpokladu zjevně neuvědomoval. Až Albert Einstein pochopil dalekosáhlé důsledky Planckovy hypotézy. Právě on ji jako první aplikoval na kvantování energie jedné částice, a to ve své práci o fotoelektrickém jevu z roku 1905. Einstein vysvětlil jev, který byl prvně pozorován již o 6 let dříve. Pokud necháme dopadat elektromagnetické záření na povrch kovu, začnou se z něj emitovat elektrony. Podstatné je, že záření s nižší frekvencí, než je hodnota mezní frekvence, jev nevyvolá ani při libovolně velké intenzitě. Einstein přišel na to, že elektron je z atomu vyražen, pokud přijme kvantum energie dostatečně velké k vyproštění elektronu ze spár atomu. Kvantum energie má hodnotu $\hbar\omega$, kde ω je úhlová frekvence záření a \hbar redukovaná Planckova konstanta $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J·s. Zvyšováním této energie se bude zvětšovat rychlost vylétávajících elektronů, nikoliv však jejich počet. Ten je totiž určen počtem dopadajících kvant (jeden elektron přijme jedno kvantum). Tato kvanta energie $\hbar\omega$ dostala později název *fotony*.

Bohr a atomy

Již koncem 19. století byla pozorována spektra jednotlivých atomů (tj. závislost intenzity záření, které tyto atomy vyzařují, na frekvenci). Spolu s pokusy o vysvětlení tohoto jevu přicházely i nové představy o tom, jak vlastně atom vypadá. V roce 1911 do toho vstoupil svým slavným pokusem Ernest Rutherford, který experimentálně dokázal existenci jádra atomů. Zdálo se tedy, že správná představa odpovídá solárnímu systému, tj. okolo kladně nabitého jádra obíhají záporně nabitě elektrony, a to přibližně po kružnicích. Nicméně tato představa nevyhovovala nejen experimentálním pozorováním, ale narážela i na tehdy známé fyzikální zákony. Šlo o to, že v tomto modelu může elektron vyzářit libovolné množství energie (tedy foton o libovolné frekvenci), snížit tím svou energii a přejít na libovolnou jinou orbitu (přiblížit se tak blíží jádru). To by však znamenalo, že bychom měli pozorovat záření všech atomů na všech frekvencích. To se ale nedělo, pozorovány byly u jednotlivých atomů jen jednotlivé spektrální čáry, což znamenalo, že atomy vyzařují jen fotony

²⁷⁾ Průsvih klasické teorie, na který tento vztah ukázal, byl ten, že celková energie vyzařování vycházela nekonečná – tzv. *ultrafialová katastrofa*.

diskrétních hodnot frekvencí. Druhá nepříjemnost souvisela se zrychleným pohybem nabitých částic v elektromagnetickém poli (to přesně elektrony v atomu byly). Takové elektrony by totiž měly vyzařovat energii a za krátký čas²⁸ ji vyzářit tolik, že by „spadly“ do jádra. Ani tento atomový kolaps nebyl samozřejmě pozorován. V roce 1912 publikoval Niels Bohr svou představu, že elektrony mohou v atomech obíhat jen po přesně určených drahách. Tyto stavy jsou stacionární, elektrony v nich samy od sebe fotony neemitují.

Co bylo dále

Popsané události stály sice u zrodu kvantové fyziky, nicméně se jednalo pouze o střípky (byť podstatné). Jako konzistentní teorie kvantová fyzika neexistovala, nebylo jasné, podle jakých rovnic se řídí atd. Formální matematické podoby se kvantová mechanika dočkala až ve 20. letech minulého století. A to hned ve dvou podobách, které se v zápětí ukázaly být ekvivalentními. První byla představa Heisenbergova opírající se o maticový popis, druhá byla představa Schrödingerova, jež užívala popis pomocí vlnových funkcí. Ale to už se dozvíte v dalších kapitolách seriálu.

Úloha I. S ... Bohrova hypotéza

V této úloze se budeme zabývat atomem vodíku, který je tvořen velice hmotným jádrem s nábojem e a lehkým elektronem o hmotnosti m s nábojem $-e$, který kolem jádra obíhá pro kruhové trajektorii.

- Určete, jak na základě klasické fyziky závisí vzdálenost elektronu od jádra atomu na jeho celkové (kinetické a potenciální) energii E .
- Přijměme Bohrovu hypotézu, že moment hybnosti elektronu je kvantován, tzn. může nabývat jen velikosti $L = n\hbar$, kde n je přirozené číslo. V jaké vzdálenosti potom může elektron kolem jádra atomu obíhat?
- Určete frekvenci fotonu, který elektron vyzáří, pokud přejde z n -té do m -té povolené vzdálenosti od jádra.

(řešení str. 134)

Kapitola 2: Matematický aparát kvantové mechaniky

Dříve než se pustíme do tajů kvantového světa, povíme si něco o matematických nástrojích, jimiž kvantová mechanika disponuje.

Vektory

Vektor si naivně můžeme představit jako orientovanou šipku. Pokud ji umístíme do počátku souřadnic, lze ji popsat pomocí tří čísel V_1 , V_2 a V_3 , které zapisujeme do sloupce. Ty tento vektor potom plně určují. Např.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

²⁸⁾ Jedná se řádově o pikosekundy.

Jistě můžeme sestavit speciální vektory, které mají vždy jen jedno z těchto tří čísel nenulové (konkrétně jednotku), a označit je

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Není pak problém rozložit náš původní vektor \mathbf{V} na součet jednotkových vektorů, tj.

$$\mathbf{V} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

Trojice vektorů \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 a \mathbf{e}_3 se nazývá *báze* a do této báze lze rozložit libovolný vektor, tedy pro libovolné \mathbf{V}

$$\mathbf{V} = V_1\mathbf{e}_1 + V_2\mathbf{e}_2 + V_3\mathbf{e}_3,$$

kde V_1 , V_2 a V_3 jsou *komponenty* tohoto vektoru v bázi tvořené \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 .

Dalším důležitým pojmem je *skalární součin*. Naivně řečeno určuje, jak jsou si dva vektory blízké. Pro dva vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y} máme

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = (X_1^* \ X_2^* \ X_3^*) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = X_1^*Y_1 + X_2^*Y_2 + X_3^*Y_3.$$

Co jsme tedy vlastně provedli za operaci? No, nejdříve jsme vektor \mathbf{X} otočili ze sloupce do řádku, komplexně ho sdružili a poté jsme vynásobili první komponentu \mathbf{X} s první komponentou vektoru \mathbf{Y} atd. A nakonec jsme to celé sečetli. Výsledek skalárního součinu je tedy komplexní číslo.

Kromě skalárního součinu definujeme také *dyadický* součin, který ze dvou vektorů \mathbf{X} a \mathbf{Y} udělá matici²⁹ podle vztahu

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} (X_1^* \ X_2^* \ X_3^*) = \begin{pmatrix} Y_1X_1^* & Y_1X_2^* & Y_1X_3^* \\ Y_2X_1^* & Y_2X_2^* & Y_2X_3^* \\ Y_3X_1^* & Y_3X_2^* & Y_3X_3^* \end{pmatrix}.$$

Skalární součin dvou vektorů má některé zajímavé vlastnosti. Pokud je skalární součin dvou vektorů 0, potom jsou na sebe tyto vektory kolmé. Lze snadno ukázat, že toto platí právě pro trojici vektorů \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , tvoří tedy tzv. *ortogonální* bázi.

Pomocí skalárního součinu lze definovat pojem *norma* vektoru, což je jen jiný výraz pro jeho velikost.

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}.$$

Pokud platí $\|\mathbf{V}\| = 1$, mluvíme o normalizovaném vektoru (resp. normalizovaném na jednotku). To se bude často hodit, proto není od věci si na příkladu ukázat, jak

²⁹⁾ Co je matice, se dozvíte v zápětí.

z obecného vektoru udělat normalizovaný. Opět použijeme vektor \mathbf{V} z úvodu. Jeho norma potom je

$$\|\mathbf{V}\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{21}.$$

Normalizovaný vektor dostaneme tak, že komponenty toho původního vydělíme jeho normou, tj.

$$\mathbf{V}' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro tento vektor už platí $\|\mathbf{V}'\| = 1$. Musíme si uvědomit, že jsme sice změnili jeho velikost (a to z $\sqrt{21}$ na 1), nicméně jeho směr zůstal nezměněný. Není těžké ukázat, že pro dva normalizované vektory platí $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \cos \varphi$, kde φ je úhel, který spolu svírají. Odtud také vidíme, že pro kolmé vektory ($\varphi = \pi/2$) máme skalární součin nulový, pro rovnoběžné ($\varphi = 0$) naopak roven jedné.

Zatím jsme diskutovali jen 3-komponentové vektory (určené třemi čísly), nicméně vše, co jsme řekli, platí pro vektory s libovolným počtem komponent. Pokud bychom se pohybovali pouze na ploše, popsali bychom vektor pomocí dvou čísel atd. Obecně pro n -komponentový vektor potřebujeme pro určení vektoru zadat n čísel, což jsou komponenty v bázi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}.$$

Vektory báze potom mají tvar

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Všechny vlastnosti ukázané pro případ $n = 3$ platí obecně i tady.

Matice

Tak jako vektor byl pro nás sloupec obecně n čísel, tak matice bude pro nás čtvercová tabulka $n \times n$ komplexních čísel. Například

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky obecné matice označujeme symboly a_{ij} , kde i a j označují číslo řádku a sloupce daného prvku. Pro první z matic je např. $a_{11} = 3$, $a_{23} = 4$. Obecnou matici 3×3 zapisujeme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a obdobně pro jiné rozměry. *Stopou* matice nazýváme součet diagonálních elementů a označujeme ji symbolem Tr (z angl. trace), tj.

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} .$$

Konkrétně u našich dvou matic vyjde 12, resp. 1. Maticí $n \times n$ vždy můžeme zapůsobit na n -rozměrný vektor, a to tak, že skalárně vynásobíme první řádek matice s daným vektorem, dostaneme číslo, poté druhý řádek s daným vektorem, atd. Výsledkem této operace je opět vektor. Např.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ 17 \end{pmatrix} .$$

Pro obecnou matici je

$$Y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j ,$$

kde X_j, Y_i jsou složky vektoru před, resp. po zapůsobení matice a_{ij} . To samé můžeme zapsat symbolicky

$$\mathbf{Y} = A \cdot \mathbf{X} .$$

Tak jako lze skalárně vynásobit dva vektory či násobit matici s vektorem, můžeme definovat i součin dvou matic. Postup je zcela analogický jako u součinu matice s vektorem, jen druhou matici si představíme jako sadu sloupcových vektorů vedle sebe. Poté zapůsobíme maticí na každý vektor zvlášť a výsledek zapíšeme opět do vektorů „stojících“ vedle sebe. Výsledek násobení dvou matic je tedy opět matice. Ukážeme si to na příkladu

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sim \\ & \sim \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

To je pouze pro názornou představu. Obecně vzato, pokud násobíme dvě matice A a B s prvky a_{ij} a b_{ij} , předpis pro prvky c_{ij} výsledné matice C zní

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} .$$

Pro danou matici³⁰ $n \times n$ existuje n speciálních vektorů, které nazýváme *vlastní vektory* matice A , pro které platí

$$A \cdot \mathbf{X}_i = \lambda_i \mathbf{X}_i ,$$

³⁰⁾ Uvažujeme pouze regulární matice, což jsou matice s nenulovým determinanem.

kde λ_i jsou tzv. *vlastní čísla* příslušející dané matici A a vlastním vektorům \mathbf{X}_i (pro každý vektor jsou vlastní čísla obecně různá), $i = 1, \dots, n$. Postup řešení si ukážeme na jednoduchém případě matice 2×2 . Hledáme řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic pro tři neznámé

$$-X_1 + 2X_2 = \lambda X_1 \quad X_1 - X_2 = \lambda X_2.$$

To je sice na první pohled divné, nicméně z rovnice je jasné, že pokud rovnici řeší určitý vektor \mathbf{X} , bude ji řešit i jeho libovolný násobek. Nicméně se jedná stále o tentýž vektor, jen má jinou velikost. Tudíž komponenty samy o sobě tak důležité nejsou, zásadní je, jaký je mezi nimi vztah. Můžeme tedy klidně zvolit $X_1 = 1$, dopočítat X_2 a λ a poté normalizovat výsledný vektor, jak je potřeba (většinou na číslo 1). Dostaneme tedy dvě řešení:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = \sqrt{2} - 1; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2} + 1.$$

Normalizované vlastní vektory mají potom tvar³¹

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Pro danou matici A můžeme najít tzv. *transponovanou* matici A^T , pro jejíž komponenty platí $a_{ij}^T = a_{ji}$ (prostě matici zrcadlově zobrazíme podle diagonály). Obdobně lze definovat komplexně sdruženou matici A^* , jejíž všechny komponenty jsou komplexně sdružené k původním. Uvedeme krátký příklad. Vyjdeme z matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & 2 & -2i \\ 1+i & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a vypočítáme k ní matici transponovanou a komplexně sdruženou.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+i \\ i & 2 & 0 \\ 0 & -2i & 3 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & 2 & 2i \\ 1-i & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kromě toho se zavádí také tzv. *hermitovskey sdružená* matice A^\dagger , která je jak transponovaná, tak komplexně sdružená (a je samozřejmě jedno, v jakém pořadí to uděláme). V našem případě dostaneme

$$A^\dagger = (A^T)^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-i \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix}.$$

³¹⁾ Je jasné, že stejně dobré normalizované řešení jsou vektory vynásobené -1 nebo obecně jakýmkoliv fázovým faktorem $e^{i\varphi}$.

Pokud je matice A shodná s nějakou svojí mutací, říkáme o ní, že je

- ortogonální, pokud $A = A^T$,
- reálná, pokud $A = A^*$,
- hermitovská, pokud $A = A^\dagger$.

Dále se k dané matici A dá vypočítat tzv. *inverzní*³² matice A^{-1} , pro kterou platí $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{I}$. Postup výpočtu je poněkud zdlouhavější, proto ho tu dělat nebudeme, nicméně lze najít v každé učebnici lineární algebry. Pokud je inverzní matice A^{-1} shodná s maticí hermitovsky sdruženou $A^{-1} = A^\dagger$, nazýváme matici A *unitární*.

Hilbertův prostor stavů

Pro další výklad zavedeme abstraktní označení³³ pro vektory. Sloupcový vektor \mathbf{X} budeme označovat jako $|X\rangle$, řádkový vektor (ten u skalárního součinu) jako $\langle X|$. Toto označení bude mít velké výhody, které se záhy ukážou.

Hřiště, na kterém budeme kvantovou mechaniku budovat, se nazývá Hilbertův prostor. Je to prostor všech vektorů $|X\rangle$ s tím, že můžeme zavést skalární součin mezi dvěma vektory $|X\rangle$ a $|Y\rangle$. Řekneme, že prostor je n -dimenzionální, pokud jeho báze má n nezávislých vektorů. Označme je $|k\rangle$, kde k probíhá od 1 do n a vektory jsou na sebe kolmé. Kolmost vektorů báze $|k\rangle$ lze v této notaci jednoduše vyjádřit jako $\langle k|m\rangle = \delta_{km}$.³⁴ Bázové vektory jsou přímým analogem vektorů \mathbf{e}_k , obecný vektor $|\psi\rangle$ můžeme tedy do této báze rozložit jako

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |k\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + \dots + c_n |n\rangle,$$

kde c_k jsou nějaká (obecně komplexní) čísla. Tyto vektory se označují jako *kety* (či ket-vektory). Obdobně lze zavést prostor vektorů $\langle\psi|$ s bází $\langle k|$, kde rozklad do báze má tvar

$$\langle\psi| = \sum_{k=1}^n c_k^* \langle k| = c_1^* \langle 1| + c_2^* \langle 2| + \dots + c_n^* \langle n|.$$

Tyto vektory se nazývají *bra* (či bra-vektory). Většinou se pracuje pouze s kety, protože prostory obou typů vektorů jsou stejné, každému ketu $|\psi\rangle$ odpovídá nějaký bra $\langle\psi|$. Koeficienty rozkladu do báze lze reprezentovat pomocí vektoru v klasickém smyslu, tj.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \langle\psi| = (c_1^* \ c_2^* \ \dots \ c_n^*).$$

Skalární součin vektorů $|X\rangle$ a $|Y\rangle$ potom zapisujeme ve tvaru $\langle X|Y\rangle$. Po rozepsání vektorů $|X\rangle$ a $|Y\rangle$ do báze a využití kolmosti vektorů vyjde

$$|X\rangle = \sum_{k=1}^n X_k |k\rangle, \quad |Y\rangle = \sum_{k=1}^n Y_k |k\rangle,$$

³²⁾ Přesněji jde to jen pro tzv. regulární matice.

³³⁾ Toto značení se nazývá Diracova notace.

³⁴⁾ Kroneckerův symbol δ_{jk} je 1 pro $j = k$ a 0 pro $j \neq k$.

$$\langle X|Y\rangle = X_1^*Y_1 + X_2^*Y_2 + \dots + X_n^*Y_n.$$

Fakticky tedy děláme to, že danému ketu $|A\rangle$ přiřadíme bra $\langle A|$ a „přibouchneme“ ho zprava na ket $|B\rangle$. Je to přesný analog skalárního součinu dvou sloupcových vektorů (ketů), kdy jeden z vektorů otočíme na řádku (bra), aby je bylo možno vynásobit. Je zřejmé, že platí důležitý vztah

$$\langle A|B\rangle = \langle B|A\rangle^*,$$

tudíž obecně není jedno, v jakém jsou pořadí.

Teď by nás zajímalo, jak vypočítat koeficienty c_k v rozkladu $|\psi\rangle$ do báze $|k\rangle$. Pokud vztah pro rozklad $|\psi\rangle$ skalárně vynásobíme s bázovým vektorem $\langle j|$, dostaneme

$$\langle j|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle j|k\rangle = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{jk} = c_j.$$

Jediný nenulový člen v sumě je pro $j = k$, tedy skalární součin s $\langle j|$ vybírá z rozkladu pro $|\psi\rangle$ koeficient c_j , např. tedy $c_2 = \langle 2|\psi\rangle$. Pro normalizovaný vektor platí $\langle \psi|\psi\rangle = 1$, tj.

$$\sum_{j=1}^n |c_j|^2 = |c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 = 1,$$

což je signál pro to, že $|c_j|^2$ souvisí s pravděpodobností výskytu $|j\rangle$ ve vektoru $|\psi\rangle$.

Samozřejmě neexistuje pouze jedna báze. Pro popis si můžeme zvolit pro nás nejvýhodnější bázi. Označme první bázi jako $|k\rangle$ a druhou bázi $|k'\rangle$, kde $k, k' = 1, \dots, n$. Obě báze volíme tak, aby byly ortogonální, což znamená, že bázové vektory jsou navzájem kolmé, tj. $\langle k|m\rangle = \delta_{km}$, $\langle k'|m'\rangle = \delta_{k'm'}$. Vektor $|\psi\rangle$ lze potom rozložit i do nové báze $|k'\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c'_k |k'\rangle = c'_1 |1'\rangle + c'_2 |2'\rangle + \dots + c'_n |n'\rangle.$$

Koeficienty c'_k jsou obecně různé od koeficientů c_k , ačkoliv rozkládáme stejný vektor $|\psi\rangle$. Jak tyto koeficienty spolu souvisejí, si povíme za chvíli.

Operátory na Hilbertově prostoru

Důležitým pojmem hojně užívaným v kvantové mechanice je *operátor*. Standardně jej značíme \hat{A} , \hat{H} , atd. a působí na Hilbertově prostoru tak, že zkrátka mění jeden vektor ve druhý. Např.

$$\hat{A}|X\rangle = h|Y\rangle,$$

kde $|X\rangle$ a $|Y\rangle$ jsou normalizované vektory a h je číslo.

Pro daný operátor jsou však podstatné pouze vlastní vektory a vlastní čísla, která se podobně jako u matic definují jako

$$\hat{A}|X_i\rangle = \lambda_i |X_i\rangle,$$

kde λ_i je vlastní číslo příslušející vlastnímu vektoru $|X_i\rangle$, $i = 1, \dots, m$, počet vlastních vektorů je m . Často mají vlastní vektory a vlastní čísla stejné označení jako operátor

$$\hat{A}|A_i\rangle = A_i |A_i\rangle.$$

Vlastní vektory jsou kolmé, tudíž platí $\langle A_i | A_j \rangle = \delta_{ij}$. Pokud počet vlastních vektorů m je stejný jako počet vektorů báze n (čili dimenze prostoru)³⁵, můžeme za bázi tohoto prostoru zvolit právě vlastní vektory $|A_i\rangle$, což bohatě využijeme později.

Obecný operátor vždy nakonec vyjadřujeme v nějaké konkrétní bázi. Ortogonální bázi v Hilbertově prostoru označme $|k\rangle$. Operátor pak můžeme vyjádřit jako matici, která má komponenty³⁶

$$A_{km} = \langle k | \hat{A} | m \rangle,$$

kde k čísluje kromě prvků báze i číslo řádku a m číslo sloupce. Téměř každý operátor jde takto vyjádřit pomocí matice, mluvíme v tomto případě o tzv. *maticové reprezentaci*. Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů operátorů se tak většinou převede na výpočty s maticemi. Stejně jako u matic je součin dvou operátorů opět operátor.

Zajímavá je skutečnost, že pokud uděláme dyadický součin dvou libovolných vektorů $|X\rangle$ a $|Y\rangle$, chová se výsledný objekt jako operátor, tedy mění jeden vektor ve druhý, např. zapůsobením na nějaký jiný vektor $|\psi\rangle$ dostaneme

$$\hat{A} = |X\rangle\langle Y| \quad \Rightarrow \quad \hat{A}|\psi\rangle = |X\rangle\langle Y|\psi\rangle = a|X\rangle,$$

kde $a = \langle Y|\psi\rangle$ je nějaké číslo. Vidíme tedy, že působením operátoru \hat{A} se vektor $|\psi\rangle$ přeměnil na vektor $|X\rangle$ vynásobený číslem. Speciálním případem takového operátoru je tzv. *projekční operátor*, který libovolný vektor $|\psi\rangle$ zobrazí do předem daného směru vektoru $|X\rangle$

$$\hat{P} = |X\rangle\langle X| \quad \Rightarrow \quad \hat{P}|\psi\rangle = |X\rangle\langle X|\psi\rangle = a|X\rangle,$$

kde skalární součin $a = \langle X|\psi\rangle$ udává, jak moc jsou si vektory $|\psi\rangle$ a $|X\rangle$ blízké. Pro $a = 0$ jsou oba vektory kolmé, pro $a = 1$ jsou identické.³⁷ Takovéto projekční operátory lze samozřejmě sestavit i pro báze vektory, $\hat{P}_k = |k\rangle\langle k|$. Pak zapůsobením na libovolný vektor $|\psi\rangle$ dostaneme

$$\hat{P}_k|\psi\rangle = |k\rangle\langle k|\psi\rangle = c_k|k\rangle,$$

kde $c_k = \langle k|\psi\rangle$ je známý koeficient z rozkladu $|\psi\rangle$ do báze $|k\rangle$. Vidíme tedy, že projekční operátor nám z toho rozkladu vybral přesně člen příslušející svému báze vektoru $|k\rangle$. Zajímavý případ nastane, pokud vezmeme projekční operátory od všech báze vektorů a sečteme je. Zapůsobením na libovolný vektor potom dostaneme

$$\sum_{k=1}^n P_k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n |k\rangle\langle k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k|k\rangle = |\psi\rangle.$$

Dostali jsme tedy opět ten samý vektor. Proto takovýto speciální operátor nazýváme operátorem *identity* a zapisujeme ho ve tvaru

$$\mathbb{I} = \sum_{k=1}^n P_k = \sum_{k=1}^n |k\rangle\langle k|. \quad (33)$$

³⁵⁾ V příští kapitole uvidíme, že může být $m < n$.

³⁶⁾ Výsledek „obložení“ operátoru vektory dostaneme skutečně číslo, pokud zapůsobí operátor na vektor $|m\rangle$ dostaneme obecně nějaký jiný vektor a pak ho skalárně vynásobíme s $\langle k|$ a dostaneme číslo.

³⁷⁾ Za předpokladu, že oba vektory jsou normalizované na jednotku.

Uvedený vztah se nazývá *relace úplnosti*.

Pomocí relace úplnosti můžeme snadno ukázat slibovaný vztah, jak spolu souvisejí báze vektory $|k\rangle$ a $|k'\rangle$ a koeficienty c_k a c'_k rozkladu obecného vektoru $|\psi\rangle$ do těchto bází. Zapůsobíme identitou na vektor $|k'\rangle$

$$|k'\rangle = \mathbb{I}|k'\rangle = \sum_{k=1}^n |k\rangle\langle k|k'\rangle = \sum_{k=1}^n h_{kk'}|k\rangle = h_{1k'}|1\rangle + h_{2k'}|2\rangle + \dots + h_{nk'}|n\rangle,$$

kde $h_{kk'} = \langle k|k'\rangle$. Pro koeficienty c'_k rozkladu vektoru $|\psi\rangle$ do báze $|k'\rangle$ můžeme psát

$$c'_k = \langle k'|\psi\rangle = \langle k'|\mathbb{I}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n \langle k'|k\rangle\langle k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n h_{k'k}c_k,$$

kde jsme trikově vložili identitu a rozepsali pomocí projektorů na báze vektory $|k\rangle$. Obdobně pokud máme zadaný operátor \hat{A} v bázi $|k\rangle$, lze ho vyjádřit v čárkované bázi vektorů $|k'\rangle$

$$\begin{aligned} A'_{km} &= \langle k'|\hat{A}|m'\rangle = \langle k'|\mathbb{I}\hat{A}\mathbb{I}|m'\rangle = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \langle k'|k\rangle\langle k|\hat{A}|m\rangle\langle m|m'\rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n h_{k'k}A_{km}h_{mm'}, \end{aligned}$$

kde $h_{k'k} = \langle k'|k\rangle$, $h_{mm'} = \langle m|m'\rangle = \langle m'|m\rangle^* = h_{m'm}^*$.

Takže pokud máme operátory a vektory určené v bázi $|k\rangle$ (tj. známe koeficienty rozkladu c_k u vektorů a maticové elementy A_{km} u operátorů) a známe koeficienty přechodu $h_{k'k}$ mezi bázemi $|k\rangle$ a $|k'\rangle$, lze tyto vektory a operátory vyjádřit v této nové čárkované bázi.

Zvolme teď za bázi vlastní vektory $|A_i\rangle$ nějakého operátoru \hat{A} (počítáme s tím, že jich je stejně jako je dimenze Hilbertova prostoru). Potom platí kouzelná formulka, která říká, že tento operátor lze vyjádřit ve tvaru *spektrálního rozkladu*

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^n A_i \hat{P}_i = \sum_{i=1}^n A_i |A_i\rangle\langle A_i| = A_1 |A_1\rangle\langle A_1| + \dots + A_n |A_n\rangle\langle A_n|, \quad (34)$$

kde A_i jsou vlastní čísla operátoru \hat{A} příslušné vlastním vektorům $|A_i\rangle$. Lehko ukážeme, že zapůsobením na vlastní vektor tohoto operátoru $|A_k\rangle$ skutečně dostaneme opět tento vlastní vektor vynásobený vlastní hodnotou A_k .

$$\hat{A}|A_k\rangle = \sum_{i=1}^n A_i |A_i\rangle\langle A_i|A_k\rangle = \sum_{i=1}^n A_i |A_i\rangle\delta_{ik} = A_k |A_k\rangle.$$

Speciálním typem operátorů, který nás bude v příštím díle eminentně zajímat, jsou tzv. *hermitovské* operátory. Mají totiž velmi důležité vlastnosti:

1. Jejich vlastní čísla jsou reálná.
2. Je jim jedno, jestli působí vlevo či vpravo, tj. jestli působí na bra či ket vektor. Přesněji to znamená platnost vztahu

$$\langle X|\hat{A}|Y\rangle = \langle Y|\hat{A}|X\rangle^*.$$

3. V konkrétní bázi mají tvar hermitovských matic, tudíž pro ně platí $A = A^\dagger$.

Podobně jako u matic lze zavést *inverzní* operátor \hat{A}^{-1} , pro který platí $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \mathbb{I}$. Velký význam mají také tzv. *unitární* operátory, pro které platí $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$, tedy $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A} = \mathbb{I}$.

Jednoduchý příklad – částice se spinem 1/2

Částice se spinem $\frac{1}{2}$ (např. elektron) se může nacházet ve dvou stavech projekce spinu na osu z . Buď spin míří nahoru, pak se nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$, či dolů, to je ve stavu $|\downarrow\rangle$ ³⁸. Tyto dva stavy jsou na sebe kolmé, tj. $\langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0$, přitom jsou normalizované $\langle\uparrow|\uparrow\rangle = \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1$. Tvoří tedy bázi dvoudimenzionálního Hilbertova prostoru popisující částici se spinem $\frac{1}{2}$. Ve své vlastní bázi mají tyto vektory tvar

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Libovolný vektor z tohoto prostoru lze rozložit do báze jako

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Aby byl normalizovaný, musí navíc platit $\langle\psi|\psi\rangle = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

Na tomto prostoru lze definovat operátory spinu³⁹ \widehat{S}_1 , \widehat{S}_2 a \widehat{S}_3 . V bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ je můžeme vyjádřit pomocí matic 2×2 , kde bude platit

$$S_i = \begin{pmatrix} \langle\uparrow|\widehat{S}_i|\uparrow\rangle & \langle\uparrow|\widehat{S}_i|\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow|\widehat{S}_i|\uparrow\rangle & \langle\downarrow|\widehat{S}_i|\downarrow\rangle \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

V této bázi mají operátory spinu až na násobek tvar Pauliho matic σ_i , přesněji $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Úloha II.S ... částice se spinem 1/2

Uvažujte dvoudimenzionální Hilbertův prostor popisující částici se spinem $\frac{1}{2}$.

- Napište, jak vypadá operátor identity na tomto prostoru v řeči vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$.
- Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic S_1 , S_2 a S_3 .
- Máte zadány operátory \widehat{S}_+ a \widehat{S}_- ve tvaru $\widehat{S}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\widehat{S}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Najděte jejich vyjádření v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ a určete, jak působí na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Jak vypadají vlastní vektory těchto operátorů a jaká jsou vlastní čísla?
- Definujme vektory

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle).$$

Ukažte, že tyto vektory tvoří bázi na zadaném Hilbertově prostoru, a najděte vztah mezi koeficienty a , b v rozkladu $|\psi\rangle$ do původní báze a koeficienty c , d v rozkladu $|\psi\rangle = c|\otimes\rangle + d|\odot\rangle$ do nové báze.

³⁸⁾ Šipky nahoru a dolů zde používáme jen proto, že je to hezčí a názornější označení. Samozřejmě můžeme tyto dva vektory označit $|1\rangle$ a $|2\rangle$ v souladu s předcházejícím výkladem, ale je to jedno, jde o pouhé označení.

³⁹⁾ Indexy 1, 2, 3 odpovídají osám x , y , z .

- e) Napište tvar operátorů spinu \widehat{S}_1 , \widehat{S}_2 a \widehat{S}_3 v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Určete jejich vlastní čísla a vektory.

(řešení str. 136)

Kapitola 3: Základy kvantové mechaniky

Ve třetí kapitole seriálu probereme základní aspekty kvantové mechaniky. Dozvíme se, co vůbec znamená, že je něco *kvantového*, jak kvantové systémy popisovat atd.

Popis klasického a kvantového systému

Objekty, se kterými v kvantové mechanice pracujeme, nazýváme *kvantové systémy*. Můžeme si pod tím představit elementární částici, atom, molekulu, ale třeba i svůdnou prodavačku zeleniny nebo kyblík slizu. Prostě je to cokoliv, co popisujeme jako celek (ovšem samozřejmě může mít nějakou vnitřní strukturu). Klíčovým pojmem kvantové mechaniky je potom *stav* systému⁴⁰, který popisujeme pomocí vektoru v Hilbertově prostoru. V něm lze zvolit určitou bázi a potom každý stav $|\psi\rangle$ lze napsat jako lineární kombinaci vektorů této báze

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n c_j |j\rangle.$$

Říkáme, že stav $|\psi\rangle$ je *superpozicí* stavů $|j\rangle$. Na konci minulé kapitoly jsme se zabývali částicí se spinem $\frac{1}{2}$. Báze tohoto prostoru měla jen dva prvky $|1\rangle = |\uparrow\rangle$, $|2\rangle = |\downarrow\rangle$. Stejnou proceduru lze učinit při popisu složitějšího systému, jen báze bude mnohem početnější (obecně bude mít nekonečně mnoho prvků, jak uvidíme později).

Rozklad vektoru popisujícího systém do báze není specialitou kvantové mechaniky, to samé de facto děláme na klasické úrovni. Představte si, že máme systém mnoha stejných kuliček. Jak v daném okamžiku popíšeme jednu z kuliček? No potřebujeme vědět, kde se nachází – to určuje polohový vektor \mathbf{x} , no a samozřejmě taky, jak rychle se pohybuje – tuto informaci v sobě skrývá vektor hybnosti⁴¹ \mathbf{p} . Tedy pokud známe polohový vektor \mathbf{x} a hybnost \mathbf{p} , máme danou kuličku plně charakterizovanou.⁴² K určení polohového vektoru potřebujeme tři parametry (jeho složky ve směru os x , y a z), stejně tak určení hybnosti vyžaduje tři parametry (opět složky ve směru souřadnicových os). Celkově je tedy k popisu kuličky zapotřebí šest parametrů, daný prostor stavů je šestidimenzionální.⁴³

⁴⁰⁾ Nebudu filozoficky plkat o tom, co to vlastně je. Sám název to určuje.

⁴¹⁾ Přesněji o rychlosti něco říká vektor rychlosti \mathbf{v} , ale ten s hybností jednoduše souvisí $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Hybnost je ovšem z jistých důvodů k popisu vhodnější.

⁴²⁾ Samozřejmě jsou zde ještě veličiny jako hmotnost, velikost atd., ale řekli jsme, že všechny kuličky jsou stejné, tudíž nás nemusejí zajímat.

⁴³⁾ V klasické mechanice mluvíme v této souvislosti o fázovém prostoru.

Měření v kvantové mechanice

Veškeré informace o kvantovém systému se dozvídáme prostřednictvím měření. To však hraje daleko důležitější roli než v klasické mechanice, kde si můžeme měřit, co chceme, jak chceme, kolikrát chceme a systém to neovlivní. Asi nejlepší představu o měření v kvantové mechanice získáme, když si daný měřicí přístroj představíme jako jakýsi filtr, který propouští pouze stavy s danou vlastností. Opět využijme systém částice se spinem $\frac{1}{2}$ a představme si, že ho připravíme ve stavu

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle$$

a měříme, zda se částice nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$ nebo $|\downarrow\rangle$. Co můžeme říci o výsledku měření? Klasickou úvahou bychom dostali jednoznačnou odpověď, zkrátka spin částice míří buď nahoru, nebo dolů. V kvantové mechanice nikoliv. O tom svědčí i to, že daný stav je superpozice. To, co jsme schopni říci, je pouze *pravděpodobnost*, že naměříme $|\uparrow\rangle$ či $|\downarrow\rangle$. Nejedná se pouze o tento příklad, celá kvantová mechanika dává pouze pravděpodobnostní předpovědi, tj. neříká přesně, co se stane, ale pouze s jakou pravděpodobností se to či ono realizuje.

Pokud máme připravený systém ve stavu $|\psi\rangle$ a měříme, zda se nachází v nějakém stavu $|j\rangle$, pak kladnou odpověď dostaneme s pravděpodobností

$$w_j = |\langle j|\psi\rangle|^2.$$

Jedná se tedy o kvadrát skalárního součinu původního stavu $|\psi\rangle$ a stavu $|j\rangle$, který na tomto stavu „hledáme“.

Pro náš příklad

$$w_\uparrow = |\langle \uparrow|\psi\rangle|^2 = c_1^2, \quad w_\downarrow = |\langle \downarrow|\psi\rangle|^2 = c_2^2.$$

Z normalizace vektoru $|\psi\rangle$ dostaneme, že platí $w_\uparrow + w_\downarrow = c_1^2 + c_2^2 = 1$, tedy celková pravděpodobnost, že něco naměříme, je 1. To zní logicky.

Během měření dochází k tzv. *redukci stavu*. To znamená, že po měření se systém již nebude nacházet v žádné superpozici, ale v *čistém stavu* (tj. ve stavu, který lze popsat vektorem báze), tedy v $|\psi'\rangle = |\uparrow\rangle$ či $|\psi'\rangle = |\downarrow\rangle$. Celkově dostaneme:

1. S pravděpodobností $w_\uparrow = c_1^2$ se bude systém po měření nacházet ve stavu $|\uparrow\rangle$.
2. S pravděpodobností $w_\downarrow = c_2^2$ se bude systém po měření nacházet ve stavu $|\downarrow\rangle$.

Obecně mějme n -dimenzionální prostor s bází $|j\rangle$, kde $j = 1, \dots, n$. Na tomto prostoru máme obecný vektor $|\psi\rangle$ popisující stav systému. Tento stav podrobíme měření na našem měřicím přístroji, který zjišťuje, zda se náš systém nachází ve stavu popsaném vektorem $|j\rangle$. Potom s pravděpodobností $w_j = |\langle j|\psi\rangle|^2 = c_j^2$ se bude systém nacházet po měření ve stavu $|\psi'\rangle = |j\rangle$.

Pokud už před měřením máme systém připravený ve stavu $|\psi\rangle = |j\rangle$, bude podle výše uvedeného po měření s pravděpodobností $c_j = 1$ ve stavu $|\psi'\rangle = |j\rangle$ a s pravděpodobností $c_{j'} = 0$ ($j' \neq j$) ve všech ostatních stavech $|j'\rangle$. Tedy pokud už na začátku máme čistý stav, tak měřením se s ním nic nezmění.

Pozorovatelné jako operátory

Na Hilbertově prostoru stavů lze zavést operátory, které přísluší tzv. *pozorovatelným*. Ty symbolizují veličiny, které můžeme na daném stavu měřit. Z klasické fyziky známe např. energii, hybnost, polohu, impulsmoment (moment hybnosti), ty všechny do kvantového světa přeneseme. Navíc nově máme třeba spin, který nemá klasický analog.

Libovolnou pozorovatelnou lze tedy reprezentovat pomocí operátoru \hat{A} . Pro něj můžeme najít příslušné vlastní stavy $|A_i\rangle$ a vlastní čísla A_i , jak již víme z minulé kapitoly.

$$\hat{A}|A_i\rangle = A_i|A_i\rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Vlastní stavy odpovídají čistým stavům, v nichž se bude systém nacházet po měření veličiny A . Vlastní čísla udávají, jaké hodnoty naměříme – jestli změříme hodnotu A_i , bude se systém po měření nacházet ve stavu $|A_i\rangle$. Jasně danou hodnotu veličiny A mají tedy jen stavy $|A_i\rangle$. U ostatních stavů $|\psi\rangle$ můžeme jen říci, s jakou pravděpodobností $|\langle A_i|\psi\rangle|^2$ tu kterou hodnotu naměříme.

V případě, který jsme diskutovali dříve, tj. částice se spinem $\frac{1}{2}$ (kde nás zajímal pouze spin), je tímto operátorem $\hat{A} = \hat{S}_3$ (o tom, proč ho označujeme takto, se dozvíme později), s vlastními stavy $|A_1\rangle = |\uparrow\rangle$, $|A_2\rangle = |\downarrow\rangle$ a vlastními čísly $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$.

$$\hat{S}_3|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \quad \hat{S}_3|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle.$$

O nejdůležitějších operátorech si povíme něco více.

Energie

Operátor energie se nazývá *hamiltonián* a označujeme ho jako \hat{H} . Vlastní stavy mají ostrou hodnotu energie. To znamená, že můžeme přesně říct, jakou energii stavu $|E_i\rangle$ naměříme. V případě superpozice vlastních stavů tak učinit nemůžeme. Analogicky to platí i pro jiné pozorovatelné. To, jakých hodnot může energie nabývat, říká

$$\hat{H}|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle. \quad (36)$$

Může se stát, že energie bude nabývat spojitých hodnot (pak nebude možno hodnoty energie očíslovat), stejně jako poloha a hybnost, o čemž si povíme v následujícím odstavci.

Poloha a hybnost

Operátory polohy a hybnosti značíme \hat{X} , resp. \hat{P} . Popisují, v jaké poloze se daný systém nachází, resp. jakou má hybnost. To samozřejmě lze říci pouze o vlastních stavech daného operátoru. Stavy popsané lineární kombinací nemají přesně definovanou polohu (resp. hybnost) a výsledek měření má opět pouze pravděpodobnostní charakter.

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \hat{P}|p\rangle = p|p\rangle. \quad (37)$$

Tentokrát vlastní stavy ani vlastní hodnoty nečíslujeme, protože tyto dvě veličiny jsou spojité, neexistují diskrétní hodnoty pro polohu a hybnost. Proto x , resp. p tady značí libovolnou hodnotu⁴⁴. Samozřejmě můžeme mít nějaké okrajové omezení, ale

⁴⁴) Přesněji x může nabývat libovolného reálného čísla. Předtím jsme číslovali energii E_i přirozenými čísly i . Zde to nejde, protože reálných čísel je více než přirozených (mají větší mohutnost).

jinak se obecně systém může nacházet např. jak v poloze $x = 1,02 \text{ nm}$, tak v $x = 1,03 \text{ nm}$.

Toto platí v jednorozměrném případě. Pokud budeme uvažovat trojrozměrný případ, stane se z operátoru \hat{X} vektorový operátor $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3)$, obdobně pro hybnost. Rovnice pro vlastní stavy a vlastní hodnoty potom budou mít tvar

$$\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle, \quad \hat{\mathbf{P}}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle.$$

Impulsmoment

Speciálním typem operátoru je *impulsmoment*. Jedná se o vektorový operátor (trojrozměrný), jež lze zapsat ve tvaru $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$, tedy operátor, který má tři komponenty – ve směru os x , y a z stejně jako operátor polohy či hybnosti. Z jistých důvodů (které uvidíme za chvíli) se měření impulsmomentu charakterizuje pomocí dvou operátorů – kvadrátu velikosti $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$ a projekce na třetí osu J_3 . Pro vlastní hodnoty těchto operátorů lze odvodit

$$\hat{J}^2|j\rangle = j(j+1)|j\rangle, \quad \hat{J}_3|m\rangle = m|m\rangle, \quad (38)$$

kde j je nezáporné celé nebo polocelé číslo, které nazýváme velikost impulsmomentu, a m může nabývat hodnot $m \in \{-j, -j+1, \dots, j\}$. Výsledek pro projekci na osu z je intuitivní – můžeme naměřit projekci od plus celé hodnoty spinu (míří ve směru osy z) až po minus celou hodnotu (míří proti směru osy z). Mezitím je vektor spinu různě sklopený.

Nejdůležitějšími příklady těchto operátorů jsou operátory spinu \hat{S}^2, \hat{S}_3 . Velikost impulsmomentu je v tomto případě spin částice $j = s$ a udává něco jako „vnitřní moment hybnosti“. Dále orbitální impulsmoment \hat{L}^2, \hat{L}_3 charakterizovaný orbitálním momentem hybnosti $j = l$ (to nabývá pouze nezáporných celých čísel) je přímým analogem klasického momentu hybnosti.

Jednoduchým příkladem, který už byl několikrát zmiňován, je operátor spinu a částice se spinem $\frac{1}{2}$. Pro tu si jako cvičení můžete odvodit následující (vše, co k tomu potřebujete, najdete na konci minulé kapitoly)

$$\begin{aligned} \hat{S}^2|\uparrow\rangle &= \frac{3}{4}|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)|\uparrow\rangle, & \hat{S}_3|\uparrow\rangle &= \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \\ \hat{S}^2|\downarrow\rangle &= \frac{3}{4}|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)|\downarrow\rangle, & \hat{S}_3|\downarrow\rangle &= -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Proto vlastní vektory $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ lze značit ve tvaru vlastních vektorů operátorů \hat{S}^2 a \hat{S}_3 .

$$|\uparrow\rangle = |s = \frac{1}{2}, s_z = \frac{1}{2}\rangle, \quad |\downarrow\rangle = |s = \frac{1}{2}, s_z = -\frac{1}{2}\rangle.$$

Zde jsme viděli zajímavou věc – vektory $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ byly vlastními pro oba operátory \hat{S}^2 a \hat{S}_3 . Tento závěr má obecnou platnost (jak si ukážeme za chvíli), vlastní stavy operátoru impulsmomentu \hat{J}^2 jsou zároveň vlastními stavy operátoru projekce impulsmomentu na třetí osu \hat{J}_3 .

Narozdíl od spinu, který nemá v klasické fyzice žádnou analogii, orbitální impulsmoment (čili moment hybnosti) je známý už v klasickém případě. Proto v korespondenci s klasickou fyzikou zavádíme

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{X}} \times \hat{\mathbf{P}}. \quad (39)$$

Ve složkách potom dostaneme⁴⁵

$$\hat{L}_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \hat{X}_j \hat{P}_k, \quad \text{kde } i = 1, 2, 3.$$

Kvantování fyzikálních veličin

Konečně se dostáváme k základnímu rozdílu klasické a kvantové mechaniky. Celý aparát popisu stavů pomocí vektorů v Hilbertově prostoru, zavedení pozorovatelných jako operátorů se sice v klasické fyzice nepoužívá, ale v principu by mohl. Zásadní rozdíl je ovšem skryt v měření veličin. Pokud na klasické úrovni měříme dvě fyzikální veličiny, vůbec nezáleží na tom, v jakém pořadí je budeme měřit. Typicky pokud změříme polohu a potom hybnost tělesa, vyjde nám to samé, jako kdybychom to měření provedli obráceně. To však v kvantovém světě neplatí! Mezi jednotlivými pozorovatelnými se zavádějí tzv. *komutační relace*, které tuto disproporci určují. Komutační relaci operátorů \hat{A} a \hat{B} můžeme zapsat ve tvaru

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C},$$

kde \hat{C} je nějaký operátor. Pokud $\hat{C} = 0$, pak říkáme, že operátory \hat{A} a \hat{B} komutují a o pozorovatelných, které těmto operátorům přísluší, říkáme, že jsou *kompatibilní*. To znamená, že je jedno, v jakém pořadí měříme, vždy vyjde to samé. Podle definice komutátoru totiž

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

a pokud $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, pak platí $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$. Obě veličiny tedy lze měřit současně a nestarat se o to, která z nich byla prakticky změřena jako první, protože je to jedno. V klasické fyzice jsou kompatibilní všechny veličiny, v kvantové fyzice ne. Zcela základní je komutační relace mezi operátory \hat{X} a \hat{P}

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\mathbb{I}, \quad (40)$$

kde \mathbb{I} je identický operátor. Důležité je, že to není nula! Na základě této komutační relace se dá také ukázat, jak působí operátor \hat{P} na vlastní stav operátoru \hat{X} , čehož v následujícím využijeme.⁴⁶

$$\hat{P}|x\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}|x\rangle. \quad (41)$$

⁴⁵⁾ ε_{ijk} se nazývá Levi-Civitův symbol a platí: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = -1$ a 0 ve všech ostatních případech. Tedy každá číslice se mezi indexy smí očitnout pouze jednou a v tom případě je výsledek 1 či -1 podle toho, jestli se jedná o sudou či lichou permutaci.

⁴⁶⁾ Odvození je jednoduché. Komutátor $[\hat{X}, \hat{P}]$ necháme zapůsobit na vektor $|x\rangle$

$$\hat{X}(\hat{P}|x\rangle) - \hat{P}(\hat{X}|x\rangle).$$

Po dosazení za operátor \hat{P} dostaneme

$$-i\hbar\hat{X} \frac{d}{dx}|x\rangle + i\hbar \frac{d}{dx}(\hat{X}|x\rangle) = -i\hbar\hat{X} \frac{d}{dx}|x\rangle + i\hbar\hat{X} \frac{d}{dx}|x\rangle + i\hbar|x\rangle = i\hbar|x\rangle = i\hbar\mathbb{I}|x\rangle,$$

kde jsme využili vztahu $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$.

Další zásadní komutační relace souvisí s operátory impulsmomentu. Možná se vám zdála trochu podivná konstrukce, kterou jsme v minulém paragrafu dělali, ale má své hluboké opodstatnění. Projekce impulsmomentu (např. spinu) na různé osy totiž spolu nekomutují

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] \neq 0$$

atd. Komutační relace, kterou se de facto definuje impulsmoment (tj. pokud složky nějakého vektorového operátoru $\hat{\mathbf{J}}$ tuto relaci splňují, pak je $\hat{\mathbf{J}}$ impulsmomentem), mají tvar

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k, \quad (42)$$

kde indexy i, j a k probíhají hodnoty 1, 2, 3 (ty odpovídají jednotlivým osám x, y a z jako už předtím).

Konkrétně tedy například platí $[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3$. Proto nelze současně měřit projekce spinu (či orbitálního impulsmomentu) na osu x a y . Co však vždy platí, je kompatibilita jedné z projekcí \hat{J}_i s operátorem kvadrátu impulsmomentu \hat{J}^2

$$[\hat{J}_i, \hat{J}^2] = 0, \quad \text{konkrétně} \quad [\hat{J}_1, \hat{J}^2] = [\hat{J}_2, \hat{J}^2] = [\hat{J}_3, \hat{J}^2] = 0. \quad (43)$$

Vzájemně komutující veličiny jsou velmi důležité pro volbu báze na Hilbertově prostoru a i jinak, jak uvidíme v zápětí.

Úplná množina pozorovatelných

Klíčovým úkolem je volba báze na Hilbertově prostoru. Zatím jsme se zabývali pouze jednoduchým případem částice se spinem $\frac{1}{2}$, kde nás nezajímalo nic jiného než její spin, žádná poloha či hybnost, zkrátka nic. Proto bylo zřejmé, že bázi lze utvořit ze dvou stavů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$. Nicméně ve složitějších případech to tak být nemusí. Například pokud budeme chtít popsat elektron v atomu vodíku, tak by bylo přirozené zvolit jako bázi vlastní stavy hamiltoniánu, tj. stavy s ostrou hodnotou energie $|E_i\rangle$. To však ani zdaleka nestačí, existuje totiž více různých stavů se stejnou energií, které se liší např. hodnotou orbitálního impulsmomentu. Proto kdybychom se dívali pouze na energii, pak by stavy $|E = E_2, l = 0\rangle$ a $|E = E_2, l = 1\rangle$ byly z našeho pohledu stejné, což nejsou.

Abychom byli schopni zvolit „kompletní“ bázi, je potřeba najít tzv. *úplnou množinu pozorovatelných*, zkráceně ÚMP. Je to maximální možná množina navzájem kompatibilních operátorů. To znamená, že jim odpovídající pozorovatelné můžeme současně měřit a navíc mají všechny stejné vlastní stavy!⁴⁷ Nalezení této množiny je často nelehký úkol, nicméně pokud se povede, tak poté každý vektor báze je jednoznačně určen vlastními hodnotami operátorů z ÚMP. Vlastním hodnotám těchto operátorů říkáme *kvantová čísla*. Například pokud operátory \hat{A} a \hat{B} tvoří ÚMP, pak každý vektor je charakterizován dvěma čísly a a b , jež jsou vlastními hodnotami výše zmíněných operátorů. Lze tedy psát

$$\hat{A}|a, b\rangle = a|a, b\rangle, \quad \hat{B}|a, b\rangle = b|a, b\rangle.$$

⁴⁷⁾ Pokud platí $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ a označíme $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$, potom $0 = [\hat{A}, \hat{B}]|a\rangle = \hat{A}\hat{B}|a\rangle - a\hat{B}|a\rangle$, tudíž $\hat{A}(\hat{B}|a\rangle) = a(\hat{B}|a\rangle)$, což znamená, že $\hat{B}|a\rangle$ je vlastním vektorem operátoru \hat{A} či jeho násobkem $\hat{B}|a\rangle = b|a\rangle$.

Vektory $|a, b\rangle$ poté tvoří bázi našeho prostoru a libovolný vektor lze napsat jako jejich lineární kombinaci. Kvantová čísla a a b mohou nabývat buď diskrétních hodnot (např. spin), nebo libovolných hodnot ze spojitě číselné množiny (např. poloha). To záleží na konkrétních operátorech a konkrétní situaci.

Jako jednoduchý příklad si vezměme systém částic s různým spinem (nic jiného kromě spinu nás teď nebude zajímat). Úplnou množinu pozorovatelných teď tvoří operátory \hat{S}^2 a \hat{S}_3 (jež komutují, jak jsme si již řekli). Žádné jiné operátory s těmito dvěma nekomutují, tudíž nelze tuto ÚMP již rozšířit. Operátory \hat{S}_1 a \hat{S}_2 sice komutují s \hat{S}^2 , nicméně nekomutují s \hat{S}_3 .⁴⁸ Na tomto Hilbertově prostoru tedy máme bázi $|s, m\rangle$ charakterizovanou dvěma kvantovými čísly – s je velikost spinu částice a m projekce spinu na osu z .

$$\hat{S}^2|s, m\rangle = s(s+1)|s, m\rangle, \quad \hat{S}_3|s, m\rangle = m|s, m\rangle.$$

Pro představu uvedeme prvních pár vektorů báze

$$\begin{aligned} s = 0 : & \quad |s = 0, m = 0\rangle \\ s = \frac{1}{2} : & \quad |s = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\rangle, \quad |s = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\rangle \\ s = 1 : & \quad |s = 1, m = -1\rangle, \quad |s = 1, m = 0\rangle, \quad |s = 1, m = 1\rangle \\ & \dots \end{aligned}$$

Vidíme, že tato báze bude mít konečně mnoho prvků, pokud se omezíme jen na částice se spinem $s < n$, kde n je nějaké číslo. Nicméně pokud povolíme libovolné spiny, bude tato báze nekonečněrozměrná.⁴⁹

Z předchozího je zřejmé, že nelze zvolit za ÚMP operátory \hat{X} a \hat{P} vzhledem k jejich komutační relaci. Jinak konkrétní volba ÚMP samozřejmě závisí na konkrétním fyzikálním problému. Už proto, že hamiltonián (operátor energie) je pro každou situaci jiný. Pak se může například stát, že jednou bude s operátorem \hat{P} komutovat, podruhé ne apod.

Úloha III. S ... *impulsmoment*

- Dokažte, že z komutační relace $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ plyne kompatibilitnost operátoru \hat{J}_3 s operátorem \hat{J}^2 .
- Definujme posunovací operátory

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2. \quad (44)$$

Vypočítejte komutační relace $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$, $[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm]$, $[\hat{J}_\pm, \hat{J}^2]$.

- Na základě těchto vztahů dokažte, že vektory $\hat{J}_\pm|j, m\rangle$ jsou vlastními stavy operátorů \hat{J}^2 a \hat{J}_3 a platí pro ně

$$\hat{J}^2(\hat{J}_\pm|j, m\rangle) = j(j+1)(\hat{J}_\pm|j, m\rangle), \quad \hat{J}_3(\hat{J}_\pm|j, m\rangle) = (m \pm 1)(\hat{J}_\pm|j, m\rangle).$$

⁴⁸⁾ Pravdou je, že za ÚMP lze zvolit i dvojice $\{\hat{S}^2, \hat{S}_1\}$, $\{\hat{S}^2, \hat{S}_2\}$, ale to nic nového nepřinese, jedná se pouze o přeznačení os.

⁴⁹⁾ Konkrétně u operátoru spinu se s tímto nesetkáme, protože nejvyšší spin částice, kterou známe je 1, resp. 2, pokud uvažujeme i gravitony. Ale třeba u orbitálního impulsmomentu žádné takové omezení není a báze by byla v tomto případě skutečně nekonečněrozměrná.

d) (Bonus) Z předchozího vyplývá, že

$$\hat{J}_+|j, m\rangle = \alpha^{(+)}(j, m)|j, m + 1\rangle, \quad \hat{J}_-|j, m\rangle = \alpha^{(-)}(j, m)|j, m - 1\rangle, \quad (45)$$

kde $\alpha^{(\pm)}(j, m)$ jsou koeficienty závislé na j a m . Určete je.

Rada: Užijte relace $(\hat{J}_\pm)^\dagger = \hat{J}_\mp$ a toho, že pokud operátor působí napravo jako \hat{A} , tak nalevo působí jako hermitovsky sdružený \hat{A}^\dagger , tj.

$$\langle a|\hat{A}|b\rangle = \langle a|\hat{A}^\dagger|b\rangle^*.$$

(řešení str. 139)

Kapitola 4: Schrödingerova rovnice a její řešení

V předchozích kapitolách jsme vybudovali základní aparát kvantové mechaniky, tj. zavedli jsme Hilbertův prostor stavů a operátory představující pozorovatelné. V tomto napíšeme bezčasovou i časovou Schrödingerovu rovnici a ukážeme si na jednoduchém příkladu způsob, jak se řeší.

Hamiltonián a stacionární stavy

Zvláštní roli mezi všemi operátory hraje právě hamiltonián čili operátor energie. Jak se později dozvíme, tak právě on bude zodpovědný za časový vývoj daného stavu. Důsledkem toho platí, že pokud je systém v čase t_0 ve stavu, jenž je vlastním stavem hamiltoniánu příslušejícím nějaké energii E_i , pak v libovolném čase $t > t_0$ popíšeme systém stejným vektorem.⁵⁰ To je důvod, proč vlastní stavy hamiltoniánu nazýváme *stacionárními stavy*. Systém v rovnováze se právě v těchto stavech nachází. Rovnici

$$\hat{H}|E_i\rangle = E_i|E_i\rangle \quad (46)$$

říkáme *bezčasová Schrödingerova rovnice*.

Hamiltonián se dá zavést už na klasické úrovni jako $H = T + V$, kde T je kinetická energie a V potenciální. Pro kinetickou energii platí $T = p^2/2m$, potenciální energie je ve většině případů funkcí pouze polohy $V = V(x)$. Toto schéma převezmeme i na kvantové úrovni, jen veličiny x, p nahradíme operátory \hat{X}, \hat{P} .

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}). \quad (47)$$

Takový hamiltonián popisuje částici se dvěma stupni volnosti – polohou a hybností (resp. rychlostí) v jednorozměrném případě. (Ve třech rozměrech bychom měli tři souřadnice a tři složky hybnosti.) Bezčasová Schrödingerova rovnice nabývá tvaru

$$\left[\frac{\hat{P}^2}{2m} + V(\hat{X}) \right] |E_i\rangle = E_i|E_i\rangle. \quad (48)$$

⁵⁰⁾ Trochu předběhnu, když prozradím, že bude pouze vynásoben jakýmsi fázovým faktorem. Podstatné však je, že bude stále zůstatvat ve stavu s tou samou energií E_i (bude i nadále vlastním vektorem hamiltoniánu, který přísluší energii E_i).

Stav $|E_i\rangle$ symbolizuje vlastní stav hamiltoniánu. Úkol, který před námi stojí je najít stavy $|E_i\rangle$ a jim příslušné energie E_i . Obraťme se teď ke konkrétnímu tvaru hamiltoniánu. Jeho kinetická část je vždy stejná, jednotlivé případy se tedy liší potenciální částí. Na ukázkou uvádíme několik konkrétních případů systému:

$$\begin{array}{ll} \text{volná částice} & \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m}, \\ \text{harmonický oscilátor} & \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2, \\ \text{homogenní pole} & \hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + F\hat{X}. \end{array}$$

Nalezení stacionárních stavů a vlastních energií není vůbec jednoduché, obecně vede na diferenciální rovnice, jak si ukážeme v následujícím paragrafu.

Vlnová funkce v x -reprezentaci

Podívejme se teď blíže na vlastní stavy operátoru \hat{X} (resp. \hat{P} , tam je to analogické). Jednotkový operátor jsme psali ve tvaru

$$\mathbb{I} = \sum_{j=1}^n |j\rangle\langle j|,$$

což platí v případě, že vektory $|j\rangle$ tvoří bázi na Hilbertově prostoru.

Pokud operátor \hat{X} tvoří sám úplnou množinu pozorovatelných (ÚMP), tj. s žádným jiným operátorem nekomutuje (což platí v prakticky všech relevantních případech), potom jeho vlastní stavy skutečně bázi tvoří. Nicméně již víme, že těchto vektorů je nespočetně mnoho, tudíž nelze psát $\mathbb{I} = \sum_j |x_j\rangle\langle x_j|$. Logickým řešením je nahradit sumu integrálem

$$\mathbb{I} = \int dx |x\rangle\langle x|.$$

Ve spektrální reprezentaci potom bude mít operátor \hat{X} tvar

$$\hat{X} = \int dx x|x\rangle\langle x|.$$

Již jsme si ukazovali, jak vypočítat koeficienty rozkladu obecného vektoru $|\psi\rangle$ do báze $|k\rangle$

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n |k\rangle\langle k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n c_k |k\rangle, \quad \text{kde } c_k = \langle k|\psi\rangle.$$

Pokud známe všechny koeficienty c_k , máme informaci o celém vektoru. Pokud za bázi zvolíme vlastní stavy operátoru \hat{X} , bude mít tento rozklad tvar

$$|\psi\rangle = \mathbb{I}|\psi\rangle = \int dx |x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int dx \psi(x)|x\rangle, \quad \text{kde } \psi(x) = \langle x|\psi\rangle.$$

Koeficienty $\psi(x)$ tentokrát nejsou číslovány diskretním indexem k , ale spojitým indexem x , tj. každému reálnému číslu x přiřadíme jisté číslo $\psi(x)$. Ale to je přesně definice funkce, to znamená, že místo sady koeficientů c_k zde máme jednu funkci

$\psi(x)$ – vlnovou funkci v x -reprezentaci,⁵¹ jež popisuje kompletně celý vektor $|\psi\rangle$. Vlnová funkce $\psi(x)$ má zcela analogickou interpretaci jako koeficient c_k v předchozím. Kvadrát její absolutní hodnoty $\varrho(x) = |\psi(x)|^2$ určuje *hustotu pravděpodobnosti*, že částice popsaná vektorem $|\psi\rangle$ se nachází v bodě x . Nejedná se zde o pravděpodobnost, protože ta je v každém bodě nulová.⁵² Pravděpodobnost, že se částice nachází v intervalu (x_1, x_2) , je

$$\varrho(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} dx \varrho(x).$$

Celková pravděpodobnost toho, že se částice „někde“ nachází, musí být 1, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

To je přímá analogie podmínky $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 1$.

Speciálního tvaru nabývá vlnová funkce $\psi(x)$ v případě, že $|\psi\rangle$ už je vlastním stavem operátoru polohy příslušnému nějaké vlastní hodnotě x' , tj. $|\psi\rangle = |x'\rangle$. Vlnová funkce odpovídající tomuto vektoru potom je $\langle x|\psi\rangle = \langle x|x'\rangle$, kde x probíhá všechny možné hodnoty jako předtím, ale x' je fixní. Tento skalární součin odpovídá Diracově δ -funkci⁵³ $\delta(x - x')$. To odráží fakt, že částice se tentokrát skutečně nachází právě v jednom bodě $x = x'$ a ne nikde jinde. Pak nelze již hovořit o hustotě pravděpodobnosti (ta je v bodě $x = x'$ nekonečná), ale přímo o makroskopické pravděpodobnosti, že se částice v tomto bodě nachází.

Bezčasová Schrödingerova rovnice

Napišme znovu bezčasovou Schrödingerovu rovnici ve tvaru

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle.$$

Vlastní vektory \hat{H} jsme označili $|\psi\rangle$, tyto vlastní vektory hledáme. Vynásobme skalárně tuto rovnici zleva $\langle x|$ a vložme k hamiltoniánu operátor identity.

$$\langle x|\hat{H}|\psi\rangle = \int dx' \langle x|\hat{H}|x'\rangle \langle x'|\psi\rangle = E\langle x|\psi\rangle, \quad (49)$$

⁵¹⁾ Obdobně bychom mohli celou proceduru opakovat i pro vlastní stavy operátoru \hat{P} , pak bychom mluvili o p -reprezentaci.

⁵²⁾ Pokud by platilo, že v intervalu (x_1, x_2) má vlnová funkce nenulovou hodnotu, byla by celková pravděpodobnost, že se částice nachází mezi body x_1 a x_2 ,

$$\varrho(x_1, x_2) = \sum \varrho(x) = \sum |\psi(x)|^2.$$

Problém je v tom, že suma probíhá nekonečně mnoho hodnot x , které se mezi body x_1 a x_2 nacházejí. Celková pravděpodobnost by tudíž byla nekonečná a to je nesmysl. Je to analogické tomu, jako když se zeptáte, kolik váží voda, která se nachází v jednom bodě. Samozřejmě že je to nula, protože je jí tam nekonečně málo. Přesto můžeme mluvit o hustotě vody v tomto bodě.

⁵³⁾ To je speciální funkce, která má všude nulovou hodnotu kromě bodu, kde je její argument nulový. Zároveň platí

$$\int dx' \delta(x - x') = 1.$$

Do integrálu přispěje pouze jeden bod $x = x'$. Pokud je integrál nenulový a funkce má nenulovou hodnotu jen v jednom bodě, musí δ -funkce v tomto bodě nabývat „nekonečna“.

kde jsme vložili operátor identity ve tvaru $\mathbb{I} = \int dx' |x'\rangle\langle x'|$. Výraz $\langle x|\widehat{H}|x'\rangle$ opět představuje číslo (přesněji funkci), neboť $\widehat{H}|x'\rangle$ je vektor a zleva skalárně vynásobený $\langle x|$ dá funkci $H(x, x')$, která obecně bude záviset jak na poloze x , tak i na poloze x' . To by ale nutně znamenalo, že fyzika v bodě x je ovlivněna situací v bodě x' . V drtivé většině případů tomu tak není (co se děje v jednom bodě závisí pouze na podmínkách právě v tomto bodě), proto se tato závislost projeví pouze jako δ -funkce, tj. $\langle x|\widehat{H}|x'\rangle = H(x')\delta(x - x')$. O takovém hamiltoniánu říkáme, že je lokální.

Ale jak zjistit tvar $H(x')$? Rozdělme si hamiltonián na dvě části, jak jsme to udělali dříve. Potenciální část je jednoduchá, závisí pouze na operátoru polohy \widehat{X} a vektor $|x'\rangle$ (stejně jako $|x\rangle$) je jeho vlastní stav příslušný hodnotě x' (resp. x). Potom tedy máme⁵⁴

$$\langle x|V(\widehat{X})|x'\rangle = \langle x|V(x')|x'\rangle = \langle x|x'\rangle V(x') = \delta(x - x')V(x').$$

Kinetická část hamiltoniánu nejde takto jednoduše upravit, protože není úplně jasné, jakou má podobu maticový element $\langle x|\widehat{P}^2|x'\rangle$. Z předchozí kapitoly však víme, že (vztah (41))

$$\widehat{P}|x\rangle = -i\hbar \frac{d}{dx}|x\rangle.$$

Potom operátor příslušející kinetické části hamiltoniánu působí na $|x'\rangle$ jako

$$\langle x|\frac{\widehat{P}^2}{2m}|x'\rangle = \langle x|\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2}\right]|x'\rangle = -\delta(x - x')\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx'^2}.$$

Vidíme, že i tento výraz je lokální stejně jako potenciální část, to potvrzuje i lokálnost celého hamiltoniánu.

Dohromady tedy z rovnice (49) dostaneme

$$\int dx' \delta(x - x') \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx'^2} + V(x') \right) \psi(x') = E\psi(x).$$

Integrovaní je přímočaré⁵⁵ a dostaneme *bezčasovou Schrödingerovu rovnici v x -reprezentaci*⁵⁶

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (50)$$

⁵⁴) Využíváme toho, že pokud $|x\rangle$ je vlastním stavem operátoru \widehat{X} příslušným vlastní hodnotě x , pak totéž platí i pro libovolnou funkci polohového operátoru, tj.

$$\widehat{X}|x\rangle = x|x\rangle \quad \Rightarrow \quad f(\widehat{X})|x\rangle = f(x)|x\rangle.$$

Tento vztah se dá dokázat Taylorovým rozvojem funkce $f(\widehat{X})$

$$f(\widehat{X})|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \widehat{X}^n|x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} x^n|x\rangle = f(x)|x\rangle.$$

⁵⁵) Platí totiž užitečná formule $\int dx' \delta(x - x')f(x') = f(x)$.

⁵⁶) Vše, co jsme v této kapitole probrali, se dá jednoduše zobecnit na trojrozměrný případ. Relace uzavřenosti bude mít v tomto případě tvar $\mathbb{I} = \int d^3\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|$. Bezčasovou Schrödin-

Matematicky se jedná o diferenciální rovnici 2. řádu pro vlnovou funkci $\psi(x)$.

Vraťme se ještě k maticovému elementu $\langle x|\hat{A}|x'\rangle$. Takový výraz označíme $A(x, x')$ a mluvíme o něm jako o *operátoru \hat{A} v x -reprezentaci*. Je to přesná analogie výrazu $A_{kk'} = \langle k|\hat{A}|k'\rangle$. Problémem je, že zde je báze nejen nekonečná (to by mohla být i pro $k = 1, 2, \dots$), ale dokonce nespočetná⁵⁷. Pokud platí $\langle x|\hat{A}|x'\rangle = \delta(x - x')A(x')$, je operátor \hat{A} v bázi $|x\rangle$ diagonální, tzn. že lokalita je ekvivalentní diagonálnosti matice operátoru v x -reprezentaci. To vše nás vede k poznatku, že je možné udělat analogii

$$\begin{aligned} |k\rangle &\rightarrow |x\rangle, \\ c_k = \langle k|\psi\rangle &\rightarrow \psi(x) = \langle x|\psi\rangle, \\ w_k = |c_k|^2 &\rightarrow \varrho(x) = |\psi(x)|^2, \\ A_{kk'} = \langle k|\hat{A}|k'\rangle &\rightarrow A(x, x') = \langle x|\hat{A}|x'\rangle. \end{aligned}$$

Řešení bezčasové Schrödingerovy rovnice

Jak jsme již řekli, bezčasová Schrödingerova rovnice je diferenciální rovnice 2. řádu. Ta má obecně dvě nezávislá řešení, která můžeme napsat ve tvaru

$$\psi(x) = A\psi_1(x) + B\psi_2(x).$$

Konstanty A a B určíme z počátečních podmínek, které je nutné zadat.

- a) Hodnota vlnové funkce v nějakém bodě x_0 . Často se volí počátek souřadnic $x_0 = 0$, ale není to nutné.
- b) Hodnota derivace vlnové funkce opět v nějakém bodě (může být i odlišný od bodu x_0 , ale často se volí shodně).

To jsou čistě matematické požadavky. Při řešení konkrétních případů se úlisně skrývají v jiných – fyzikálních požadavcích na úlohu. Vlnová funkce $\psi(x)$ má totiž i fyzikální význam – její kvadrát udává hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v daném bodě. Proto nutně:

1. Vlnová funkce $\psi(x)$ musí být kvadraticky integrabilní, což znamená platnost vztahu

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

To je důsledkem skutečnosti, že celková pravděpodobnost nalezení částice někde je 1, jak jsme již uvedli.

2. Vlnová funkce musí být spojitá; to úzce souvisí s tím, že její kvadrát pak lze interpretovat jako hustotu pravděpodobnosti.
3. Vlnová funkce musí být diferencovatelná, což je ekvivalentní požadavku, aby její první derivace byla spojitá. Tento požadavek je nutné dodržet pouze v případě, že změny potenciálu bod od bodu jsou konečné.

gerovu rovnici pak píšeme v podobě

$$-\hbar^2/2m \cdot \Delta\psi(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x})$$

atd.

⁵⁷ To znamená, že parametr, který bázi čísluje (zde x , resp. x'), je spojitý. Tudiž těžko můžeme zapsat $\langle x|\hat{A}|x'\rangle$ do matice.

Představme si částici uvězněnou v energetické jámě vymezené souřadnicemi $x \in (0, a)$, kterým odpovídá potenciální energie $V(x) = 0$. Všude jinde je potenciální energie nekonečná, $V(x) = \infty$.⁵⁸ Pustíme se do řešení.

- Bezčasová Schrödingerova rovnice má v našem případě tvar

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

kde $V(x) = 0$ pro $x \in (0, a)$ a $V(x) = \infty$ pro ostatní x . V těch je řešení jednoduché, a to identicky nulové $\psi(x) = 0$. To je vidět přímo z rovnice, neb nekonečný potenciál může být „zabit“ pouze nulovou vlnovou funkcí. Uvnitř jámy můžeme rovnici přepsat do tvaru

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0.$$

To je však známá rovnice harmonických kmitů, která má obecné řešení

$$\psi(x) = A \sin(\omega x) + B \cos(\omega x),$$

kde $\omega^2 = 2mE/\hbar^2$.

- V krajních bodech $x = 0$ a $x = a$ musí být vlnová funkce nulová, aby se dala spojitě napojit na řešení $\psi(x) = 0$ vně jámy. Musí tedy platit

$$0 = \psi(0) = B, \quad 0 = \psi(a) = A \sin(\omega a) + B \cos(\omega a).$$

Z těchto podmínek dostaneme $B = 0$ a $A \sin(\omega a) = 0$. Pokud nechceme mít identicky nulové řešení, kde $A = B = 0$, musí platit $\omega a = n\pi$, kde n je celé číslo. Ale frekvence ω úzce souvisí s energií, podmínky na ni tedy určí možné energetické hladiny.

$$E = \frac{\hbar^2\omega^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2} = E_0n^2, \quad \text{kde } E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}.$$

Vidíme tedy, že energie může nabývat jen některých hodnot. Odteď budeme její hodnoty indexovat písmenem n a psát E_n . Našli jsme tedy všechny vlastní hodnoty hamiltoniánu.

- Zatím jsme dospěli k tomu, že vlnová funkce $\psi(x)$ má tvar

$$\psi(x) = A \sin(\omega x) \quad \text{pro } x \in (0, a).$$

Tím je požadavek 2. vyčerpán. Podmínku 3. zde nelze splnit, neboť toto je zrovna případ, kde dochází k nekonečné změně potenciálu. Zbývá požadavek 1., který lze napsat ve tvaru

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^a A^2 \sin^2(\omega x) dx = 1.$$

⁵⁸⁾ Je dobré si uvědomit, že se nejedná o žádnou jámu v klasickém smyslu. Je to prostě oblast v prostoru (v našem jednorozměrném případě na ose), kde je nulový potenciál, a všude jinde je nekonečný. Jako příklad si můžeme představit elektron ve Faradayově kleci, kde vně klece je velmi silné elektrické pole.

Výpočtem dostaneme podmínku (zkuste si to, je to trénink integrování) $A = \sqrt{2/a}$. Dostáváme výsledek ve tvaru

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}.$$

Toto jsou vlnové funkce odpovídající vlastním stavům daného hamiltoniánu a příslušné vlastní hodnoty energie. Za úkol si můžete zkusit nakreslit kvadráty těchto vlnových funkcí, které určují hustoty pravděpodobnosti výskytu částice v jámě v daném bodě.

Tento příklad byl samozřejmě velmi jednoduchý. Už pokud bychom uvažovali jámu konečnou, situace by se velmi zkomplikovala – vlnová funkce by byla nenulová i vně jámy (vlnová funkce by tam měla exponenciální pokles). Postup by v tomto případě byl takový, že bychom bezčasovou Schrödingerovu rovnici vyřešili zvlášť uvnitř jámy a zvlášť vně (to jsme de facto udělali taky, jen vně bylo identicky nulové řešení), obě řešení bychom pak v krajních bodech napojili za splnění podmínek 2. a 3. Tvar vlnové funkce i výraz pro energie by pak zdaleka nebyl tak jednoduchý. Ale i tak by to byla vcelku prostá situace, neboť by se povedla přesně vyřešit, což pro spoustu jiných potenciálů tak snadné nebude či to vůbec nepůjde.

Časová Schrödingerova rovnice

V klasické mechanice řešením pohybové rovnice $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$ zjišťujeme, jakým způsobem se pohybuje daný hmotný bod. Jediné, co potřebujeme znát, jsou působící síly, počáteční poloha $\mathbf{r}(t_0)$ a rychlost $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$. Zobecněním tohoto konceptu dostaneme teoretickou mechaniku, kde síly nahrazujeme energiemi. Pohyb hmotného bodu tentokrát neurčujeme zadáním působících sil, nýbrž pomocí energie. Celkovou energii pak nazveme hamiltoniánem H , který vyjádříme pomocí polohy \mathbf{r} a impulsu \mathbf{p} hmotného bodu. Řešením Hamiltonových rovnic dostaneme stejně jako v klasické mechanice trajektorii $\mathbf{r}(t)$.

V kvantové mechanice již nadále nemůžeme mluvit o hmotných bodech a jejich trajektoriích. Informace o kvantovém systému nese vlnová funkce $\psi(x)$, jejíž kvadrát určuje hustotu pravděpodobnosti nalezení částice v daném bodě x . V tomto smyslu je částice „rozmazaná“ a netvoří hmotný bod, ale spíše jakýsi oblak, který je v některých místech hustší a v některých řidší. Proto přechodem od klasické mechaniky k mechanice kvantové měníme popis částice.

Doteď jsme se zabývali popisem kvantového systému v jednom čase, stačil nám tedy pouze vektor $|\psi\rangle$ či jeho vlnová funkce v x -reprezentaci $\psi(x)$. Většinou však chceme popsat dynamiku systému, jakým způsobem se vyvíjí s časem. Logicky se sem dostane závislost na čase, tedy $|\psi(t)\rangle$ (resp. $\psi(x, t)$ – už jsme si ukázali, že popis pomocí vektoru $|\psi\rangle$ a $\psi(x)$ je ekvivalentní). Stejně jako pohybová rovnice v klasické mechanice určuje, jak se polohový vektor $\mathbf{r}(t)$ vyvíjí s časem, potřebovali bychom najít i v kvantové mechanice nějakou rovnici, která by určovala vývoj $|\psi(t)\rangle$. Pokud hamiltonián nezávisí na čase (což budeme vždy předpokládat), lze stav $|\psi(t)\rangle$ vyjádřit pomocí počátečního stavu $|\psi(t_0)\rangle$ jako

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

kde $\widehat{U}(t, t_0)$ je tzv. *evoluční operátor*, který převádí stav v čase t_0 na stav v čase t . Zásadní informací je, že tento operátor komutuje s hamiltoniánem. To je důsledkem toho, že operátor $\widehat{U}(t, t_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\widehat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t - t_0)\right). \quad (51)$$

Potom přirozeně platí $[\widehat{H}, \widehat{U}(t, t_0)] = 0$ kvůli tomu, že hamiltonián samozřejmě komutuje sám se sebou. Derivací vektoru $|\psi(t)\rangle$ podle času dostaneme

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt}\widehat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}\widehat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\widehat{H}|\psi(t)\rangle,$$

což po úpravě dává

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \widehat{H}|\psi(t)\rangle. \quad (52)$$

To není nic jiného než slavná *Schrödingerova rovnice*.

Pokud je vektor $|\psi(t_0)\rangle$ vlastním stavem hamiltoniánu příslušným vlastní hodnotě E , bude to platit i pro vektor $|\psi(t)\rangle$. To lehce dokážeme. Užitím $\widehat{H}|\psi(t_0)\rangle = E|\psi(t_0)\rangle$ dostaneme po vynásobení obou stran rovnice operátorem $\widehat{U}(t, t_0)$

$$\widehat{U}(t, t_0)\widehat{H}|\psi(t_0)\rangle = \widehat{H}\widehat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = \widehat{H}|\psi(t)\rangle, \quad \widehat{U}(t, t_0)E|\psi(t_0)\rangle = E|\psi(t)\rangle.$$

Z toho ihned plyne $\widehat{H}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle$. Odvodili jsme tedy významnou vlastnost stacionárních stavů, kterou jsme avizovali už na začátku kapitoly. Zajímavé je, že u stacionárních stavů lze jít ještě dále a přímo určit, jakým způsobem závisí vektory $|\psi(t)\rangle$ na čase. Pokud uijeme předchozí výsledek a dosadíme ho do časové Schrödingerovy rovnice, dostaneme jednoduchou diferenciální rovnici prvního řádu

$$i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = E|\psi(t)\rangle \quad \Rightarrow \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iE(t-t_0)/\hbar}|\psi(t_0)\rangle.$$

Stacionární stavy tedy závisí na čase pouze přes fázový faktor. Pro všechny ostatní stavy (které nejsou vlastními hamiltoniánu) může být tato časová závislost daleko složitější.

Úloha IV . S ... *spinová precese*

Uvažujme částici se spinem $\frac{1}{2}$ v magnetickém poli, které míří ve směru osy z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, a zanedbejme všechny stupně volnosti kromě těch spinových. Jako jeden příklad báze, kterou zde můžeme zvolit, je dvojice vektorů s ostrou hodnotou projekce spinu na osu z : $|S_3 = \frac{1}{2}\rangle$, $|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$. Hamiltonián příslušný této částici lze napsat ve tvaru

$$\widehat{H} = \hbar\omega\widehat{S}_3,$$

kde $\omega = eB/2m$.

- a) Napište vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu \widehat{H} . Určete, jak působí hamiltonián na obecný vektor $|\psi\rangle = a|S_3 = \frac{1}{2}\rangle + b|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$. Taktéž vypočtete, jak působí operátor

$$\widehat{U}(t, 0) = \exp(-i\widehat{H}t/\hbar).$$

- b) Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou z -ové projekce spinu, tj. $|\psi(0)\rangle = |S_3 = \frac{1}{2}\rangle$. Určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$ a s jakou pravděpodobností naměříme částici ve stavu $|S_3 = \frac{1}{2}\rangle$ a s jakou v $|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$.
- c) V případě, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = \frac{1}{2}\rangle$, určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$. Určete také pravděpodobnosti, že při měření spinu ve směru y naměříme hodnoty $+\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$.

Definujme střední hodnotu operátoru vztahem

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_j w_j A_j,$$

kde w_j je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu A_j . (Rozmyslete si, že je to přirozená definice střední hodnoty.) Předpokládejte, že se v čase $t = 0$ nachází částice ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = \frac{1}{2}\rangle$.

- d) Určete střední hodnoty operátorů spinu, tj. $\langle \hat{S}_1 \rangle$, $\langle \hat{S}_2 \rangle$ a $\langle \hat{S}_3 \rangle$ v čase $t = 0$.
- e) Ty samé střední hodnoty vypočtete v čase $t = \tau$. Okomentujte, jak výsledek souvisí s názvem úlohy.

(řešení str. 142)

Kapitola 5: Skládání impulsmomentů

V této kapitole seriálu se budeme více věnovat mimořádně důležitému operátoru – *impulsmomentu*. Leccos jste už o něm slyšeli v předchozích kapitolách, ale mnohé zajímavé skutečnosti jsme vám zatajili.

Dva impulsmomenty

Již jsme se seznámili s komponentami operátoru impulsmomentu \hat{J}_i a jeho kvadrátem \hat{J}^2 . Ukázali jsme, že je možné najít vektory, jež jsou společnými vlastními stavy \hat{J}_3 a \hat{J}^2 . To bylo způsobeno tím, že $[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = 0$. Tyto vlastní vektory jsme označovali jako $|j, m\rangle$ a platilo pro ně

$$\hat{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle, \quad (53)$$

kde j je celé či polocelé číslo a m probíhá hodnoty $-j, -j+1, \dots, j$. Jako příklad jsme uváděli operátor spinu S , kde $j = s$ značilo přímo spin částice.

Zajímavý problém vzniká v případě, když máme k dispozici dva nezávislé impulsmomenty $\hat{J}^{(1)}$ a $\hat{J}^{(2)}$, které splňují obvyklé komutační relace

$$[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(1)}] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k^{(1)}, \quad [\hat{J}_i^{(2)}, \hat{J}_j^{(2)}] = i\varepsilon_{ijk} \hat{J}_k^{(2)}.$$

Protože jsou nezávislé, nesmí záležet, v jakém pořadí je měříme, tj. musí spolu komutovat

$$[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(2)}] = 0.$$

Příklad systému se dvěma nezávislými impulsmomenty je systém se dvěma částicemi. Každý z impulsmomentů pak může popisovat spin jedné z částic. Vzniká otázka, jak to vypadá s bází tohoto prostoru. Vlastní vektory impulsmomentu $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$ označme $|j_1, m_1\rangle$, naopak pro impulsmoment $\hat{\mathbf{J}}^{(2)}$ máme vlastní vektory $|j_2, m_2\rangle$. Pokud by v systému byla jen jedna částice se spinem, který by popisoval operátor $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$, báze by byla tvořena vektory $|j_1, m_1\rangle$. Nezávislost obou impulsmomentů však znamená, že celý prostor je *direktním součinem* podprostorů, které odpovídají $\hat{\mathbf{J}}^{(1)}$, resp. $\hat{\mathbf{J}}^{(2)}$. Platí tedy, že celý Hilbertův prostor se dá napsat jako $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$. Znamená to tedy, že bázi tvoří vektory

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle.$$

Pro lepší představu uvažme systém dvou částic se spinem $\frac{1}{2}$. Každá částice se může nacházet ve dvou vlastních stavech $|s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}\rangle$, $|s = \frac{1}{2}, s_3 = -\frac{1}{2}\rangle$. Potom celý systém obou částic se může nacházet ve čtyřech stavech

$$\begin{aligned} |s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = +\frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = +\frac{1}{2}\rangle, \\ |s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = +\frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\rangle, \\ |s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = +\frac{1}{2}\rangle, \\ |s^{(1)} = \frac{1}{2}, s_3^{(1)} = -\frac{1}{2}\rangle |s^{(2)} = \frac{1}{2}, s_3^{(2)} = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

První stav odpovídá tomu, že první i druhá částice má spin nahoru, atd. Jednoduše řečeno, bázové vektory direktního součinu prostorů dostaneme jako všechny možné kombinace součinů (ve správném pořadí) bázových vektorů jednotlivých prostorů.

Otázkou je, jak na tyto vektory působí operátory impulsmomentů první a druhé částice. Odpověď je jednoduchá – na „svoji“ část vektoru stejně jako v případě, kdyby tam žádný druhý impulsmoment nebyl, a na druhou část vektoru působí jako identický operátor. To zní logicky. Měřím-li na systému dvou částic spin jedné z částic, druhé částice si nevšímám. Přesněji

$$\hat{\mathbf{J}}^{(1)} \equiv \hat{\mathbf{J}}^{(1)} \otimes \mathbb{I}, \quad \hat{\mathbf{J}}^{(2)} \equiv \mathbb{I} \otimes \hat{\mathbf{J}}^{(2)},$$

tedy

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^{(1)2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= j_1(j_1 + 1) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_3^{(1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= m_1 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{\mathbf{J}}^{(2)2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= j_2(j_2 + 1) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_3^{(2)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= m_2 |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \end{aligned}$$

Je dobré také definovat operátory $\hat{J}_\pm^{(1)}$ a $\hat{J}_\pm^{(2)}$, které mají známé vlastnosti

$$\begin{aligned} \hat{J}_\pm^{(1)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= \alpha^{(\pm)}(j_1, m_1) |j_1, m_1 \pm 1\rangle |j_2, m_2\rangle, \\ \hat{J}_\pm^{(2)} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle &= \alpha^{(\pm)}(j_2, m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2 \pm 1\rangle, \end{aligned}$$

kde $\alpha^{(\pm)}(j, m)$ jsou koeficienty, jež jste hledali v úloze ke třetí kapitole seriálu

$$\alpha^{(\pm)}(j, m) = \sqrt{j(j+1) - m^2 \mp m}.$$

Jako lehké cvičení můžete dokázat, že operátory

$$\widehat{\mathcal{J}}^{(1)2}, \quad \widehat{\mathcal{J}}^{(2)2}, \quad \widehat{\mathcal{J}}_3^{(1)} \quad \text{a} \quad \widehat{\mathcal{J}}_3^{(2)} \quad (54)$$

spolu všechny navzájem komutují a tvoří úplnou množinu pozorovatelných na celém prostoru. Vektor $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ je proto plně určen zadáním čísel j_1, j_2, m_1 a m_2 . Zbývá ještě dodat, kolik vlastně vektorů $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ je, tj. jaká je dimenze Hilbertova prostoru. Víme, že vektorů $|j_1, m_1\rangle$ je $2j_1 + 1$, vektorů $|j_2, m_2\rangle$ je $2j_2 + 1$. Z toho již jasně plyne, že dimenze celého prostoru je $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Celkový impulsmoment

Na celém Hilbertově prostoru má smysl definovat operátor *celkového impulsmomentu*

$$\widehat{\mathcal{J}} = \widehat{\mathcal{J}}^{(1)} + \widehat{\mathcal{J}}^{(2)}.$$

V případě systému dvou spinových částic jsou vlastní čísla tohoto operátoru možnými hodnotami celkového spinu. Jako další jednoduché, byť trochu zdlouhavé cvičení si můžete dokázat, že operátory

$$\widehat{\mathcal{J}}^2, \quad \widehat{\mathcal{J}}_3, \quad \widehat{\mathcal{J}}^{(1)2} \quad \text{a} \quad \widehat{\mathcal{J}}^{(2)2} \quad (55)$$

spolu také komutují a tvoří také úplnou množinu pozorovatelných. To tedy znamená, že bázi celého prostoru lze vytvořit i z vektorů

$$|j, m, j_1, j_2\rangle,$$

přičemž platí

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{J}}^2|j, m, j_1, j_2\rangle &= j(j+1)|j, m, j_1, j_2\rangle, \\ \widehat{\mathcal{J}}_3|j, m, j_1, j_2\rangle &= m|j, m, j_1, j_2\rangle, \\ \widehat{\mathcal{J}}^{(1)2}|j, m, j_1, j_2\rangle &= j_1(j_1+1)|j, m, j_1, j_2\rangle, \\ \widehat{\mathcal{J}}^{(2)2}|j, m, j_1, j_2\rangle &= j_2(j_2+1)|j, m, j_1, j_2\rangle. \end{aligned}$$

Je účelné také definovat posunovací operátory $\widehat{\mathcal{J}}_{\pm}$,

$$\widehat{\mathcal{J}}_{\pm}|j, m, j_1, j_2\rangle = \alpha^{(\pm)}(j, m)|j, m \pm 1, j_1, j_2\rangle.$$

Uvědomme si, že vektor $|j, m, j_1, j_2\rangle$ již nelze nikterak rozdělit na dvě části. V tomto přístupu popisujeme systém jako celek, ne jako systém dvou nezávislých částic.

Zásadní otázkou je, jak od jednoho popisu přejít ke druhému, tj.

$$j_1, j_2, m_1, m_2, |j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle \quad \rightarrow \quad j, m, j_1, j_2, |j, m, j_1, j_2\rangle.$$

Určit vektory $|j, m, j_1, j_2\rangle$ je poněkud složitější a rozebereme to v dalším paragrafu. Co se týká vlastního čísla m operátoru \widehat{J}_3 , tak zde je situace jednoduchá. Z definice víme, že platí

$$\widehat{J}_3 = \widehat{J}_3^{(1)} + \widehat{J}_3^{(2)},$$

tedy pro vlastní čísla máme $m = m_1 + m_2$.

Pro kvantové číslo j takto jednoduché pravidlo nemáme. Zde velmi záleží na tom, do jakého směru impulsmomenty $\widehat{J}^{(1)}$ a $\widehat{J}^{(2)}$ míří. Velmi vágní tvrzení říká, že pokud mají stejný směr, kvantová čísla j_1 a j_2 se sčítají, tj. $j = j_1 + j_2$. Pokud naopak míří opačně, tak se odečítají, a protože j musí být vždy kladné, máme $j = |j_1 - j_2|$. Avšak mohou se složit i jiným způsobem. Dále víme, že $m = -j, -j + 1, \dots, j$ je celé či polocelé číslo (protože m_1, m_2 jsou celá či polocelá), takže i číslo j musí být celé či polocelé. Z toho plyne, že pokud skládáme impulsmoment, jemuž odpovídají celá vlastní čísla, s jiným impulsmomentem, kterému odpovídají polocelá, tak celkový impulsmoment musí být polocelý (neb příslušné $m = m_1 + m_2$ je polocelé). Všechny tyto indicie vedou k závěru, že celkový impulsmoment j může nabývat hodnot

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|.$$

To znamená, že vektoru $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ nelze přiřadit jeden vektor $|j, m, j_1, j_2\rangle$, ale že se bude jednat o lineární kombinaci různých vektorů, tj.

$$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} c_j |j, m, j_1, j_2\rangle.$$

Tento vztah zapisujeme ve formálnější podobě

$$|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \sum_{m=-j}^j (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) |j, m, j_1, j_2\rangle,$$

kde jsme přidáním sumy přes m zahrnuli i vektory, které nesplňují podmínku $m = m_1 + m_2$. Logicky potom koeficient u nich stojící musí být nulový.⁵⁹ Čísla $(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m)$ pak určíme standardním způsobem jako skalární součin vektoru báze s rozkládaným vektorem

$$(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) = \langle j, m, j_1, j_2 | j_1, m_1 \rangle |j_2, m_2\rangle$$

a nazýváme je *Clebschovy-Gordanovy koeficienty* (zkráceně C-G). Díky relacím ortogonalit platí i opačný vztah

$$|j, m, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} (j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle.$$

⁵⁹ Toto (na první pohled) zesložnění není samoučelné. Koeficienty $(j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m)$ mají totiž spoustu pěkných vlastností narozdíl od c_j .

Z předchozího je jasné, že C-G koeficienty jsou nenulové, pokud je splněna tzv. trojúhelníková nerovnost $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$ mezi j , j_1 a j_2 a zároveň platí $m = m_1 + m_2$.

Jako ilustrativní příklad vezmeme systém dvou částic se spinem $\frac{1}{2}$, jež jsou ve stavech popsaných vektory $|j_1 = \frac{1}{2}, m_1 = \frac{1}{2}\rangle$ a $|j_2 = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle$. Pro rozklad do báze $|j, m, j_1, j_2\rangle$ pak můžeme psát

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle &= \sum_{j=|\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}|}^{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}} \sum_{m=-j}^j (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}|j, m)\|j, m, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \\ &= (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}|0, 0)\|0, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}|1, 0)\|1, 0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle, \end{aligned}$$

kde jsme užili toho, že C-G koeficient je nula, pokud $m \neq m_1 + m_2$. Vidíme, že přechod od báze $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ k bázi $|j, m, j_1, j_2\rangle$ (či naopak) se prakticky redukuje na nalezení příslušných C-G koeficientů.

Hledání Clebschových-Gordanových koeficientů

Uvedeme nejprve obecný postup a pak ho aplikujeme na jednoduchý případ. Uvažujme Hilbertův prostor dvou částic s impulsmomenty j_1 a j_2 .

1. Pro největší hodnotu $j = j_1 + j_2$ a maximální možnou hodnotu $m = j_1 + j_2$ je v rozkladu vektoru $|j, m, j_1, j_2\rangle$ do báze $|j_1, m_1\rangle|j_2, m_2\rangle$ pouze jeden vektor, odpovídající $m_1 = j_1$, $m_2 = j_2$ (opět maximálními hodnotám m_1 a m_2).

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2, j_1, j_2\rangle = |j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle.$$

Z toho vidíme, že pro příslušný C-G koeficient platí

$$(j_1, j_2, j_1, j_2|j_1 + j_2, j_1 + j_2) = 1.$$

2. Vztah posunovacích operátorů celého systému a dvou podsystémů je

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2 = \hat{J}_1^{(1)} + \hat{J}_1^{(2)} \pm i\hat{J}_2^{(1)} \pm i\hat{J}_2^{(2)} = \hat{J}_{\pm}^{(1)} + \hat{J}_{\pm}^{(2)}.$$

Zapůsobíme teď operátorem \hat{J}_- na vektor $|j_1 + j_2, j_1 + j_2, j_1, j_2\rangle$

$$\begin{aligned} \hat{J}_-|j_1 + j_2, j_1 + j_2, j_1, j_2\rangle &= (\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)})|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2\rangle, \\ \alpha^{(-)}(j_1 + j_2, j_1 + j_2)|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle &= \\ &= \alpha^{(-)}(j_1, j_1)|j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + \alpha^{(-)}(j_2, j_2)|j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle, \end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle &= \frac{\alpha^{(-)}(j_1, j_1)}{\alpha^{(-)}(j_1 + j_2, j_1 + j_2)} |j_1, j_1 - 1\rangle|j_2, j_2\rangle + \\ &+ \frac{\alpha^{(-)}(j_2, j_2)}{\alpha^{(-)}(j_1 + j_2, j_1 + j_2)} |j_1, j_1\rangle|j_2, j_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

Pokud použijeme rozklad vektoru na levé straně pomocí C-G koeficientů, dostaneme

$$\begin{aligned} |j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle &= \\ &= (j_1, j_2, j_1 - 1, j_2 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1) |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + \\ &+ (j_1, j_2, j_1, j_2 - 1 | j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1) |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle. \end{aligned}$$

Porovnáním posledních dvou vztahů lehko určíme příslušné C-G koeficienty.

3. V dalším kroku zapůsobíme opět posunovacím operátorem \hat{J}_- na získané vektory a výsledek opět porovnáme s rozpisem pomocí C-G. Takto to budeme dělat znova a znova (v každém kroku snižujeme m o jednotku), až dospějeme do nejnižšího stavu $m = -(j_1 + j_2)$. Rozpis tohoto posledního vektoru do báze $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ má jen jeden člen ze stejného důvodu, jako je to u prvního vektoru s největším m .

$$|j_1 + j_2, -j_1 - j_2, j_1, j_2\rangle = |j_1, -j_1\rangle |j_2, -j_2\rangle.$$

Dalším zapůsobením posunovacího operátoru \hat{J}_- se příslušné vektory anulují.

4. Tím jsme určili všechny koeficienty pro $j = j_1 + j_2$. V dalším snížíme o jednotku velikost j , tedy $j = j_1 + j_2 - 1$. Maximální hodnota m je teď $m = j_1 + j_2 - 1$. Situace je zde o trochu komplikovanější než v předchozím případě, protože platí

$$|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle = A |j_1, j_1 - 1\rangle |j_2, j_2\rangle + B |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2 - 1\rangle.$$

Máme zde dva neznámé koeficienty A a B , které je nutné určit.

Jedna podmínka plyne z faktu, že vektor $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle$ musí být kolmý na všechny ostatní, jinak by $|j, m, j_1, j_2\rangle$ netvořily bázi. Testovat kolmost na všechny vektory by byl nesmysl a nic by to nedalo kromě jednoho. Onen vyvolený má stejnou hodnotu m , ale různou hodnotu j , jedná se o vektor $|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle$. Ten použijeme proto, že jeho rozvoj do $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ obsahuje stejné vektory.

Druhá podmínka plyne z normalizovatelnosti vektoru $|j, m, j_1, j_2\rangle$. Protože $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ normalizované jsou, dostaneme $A^2 + B^2 = 1$.

Tudíž skutečně máme dvě rovnice pro A a B . Jakmile známe rozklad počátečního vektoru $|j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 1, j_1, j_2\rangle$, určíme příslušné C-G koeficienty a pokračujeme dále působením \hat{J}_- jako v předchozích bodech. Opět projdeme celou procedurou až na konec. Ve chvíli, kdy dojdeme k poslednímu vektoru $|j_1 + j_2 - 1, -(j_1 + j_2 - 1), j_1, j_2\rangle$, dalším působením posunovacího operátoru opět vektory vymizí. Pro $j = j_1 + j_2 - 1$ jsme opět tedy dostali rozvoje všech vektorů, a tudíž i všechny C-G koeficienty.

5. A podobně bychom pokračovali dále. Nasadili bychom $j = j_1 + j_2 - 2$ a vektor s největším m . Rozvoj do $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ by již obsahoval tři členy. Jednu podmínku bychom dostali opět z normalizovatelnosti vektoru. Další dvě podmínky by pak vycházely z užití kolmosti na dva vektory se stejným m , tj.

$$|j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 2, j_1, j_2\rangle, \quad |j_1 + j_2 - 1, j_1 + j_2 - 2, j_1, j_2\rangle.$$

A tak dále. Tímto způsobem tedy obdržíme všechny C-G koeficienty s daným j_1 a j_2 .

Ještě je nutné uvést jednu poznámku. Občas se můžeme dostat do problémů se znaménkem u konstant $A, B (C, \dots)$, které nemusí být z našich podmínek plně určeno. Užívaná konvence pro C-G koeficient je

$$(j_1, j_2, j_1, j - j_1 | jj) > 0.$$

Vraťme se teď opět k příkladu dvou částic se spinem $\frac{1}{2}$ a dořešme ho do konce. Máme tedy $j_1 = \frac{1}{2}$ a $j_2 = \frac{1}{2}$. Postupujme přesně podle uvedené procedury.

1. Vezměme nejprve $j = j_1 + j_2 = 1$ a $m = j = 1$. Příslušný C-G koeficient potom je

$$|1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 1) = 1.$$

2. Zapůsobením \hat{J}_- dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{J}_- |1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= (\hat{J}_-^{(1)} + \hat{J}_-^{(2)}) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \\ \alpha^{(-)}(1, 1) |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \alpha^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \alpha^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \\ \sqrt{2} \cdot |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Rozpis vektoru $|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ pomocí C-G koeficientů má podobu

$$\begin{aligned} |1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sum_{m_1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{m_2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m_1, m_2 | 1, 0) |\frac{1}{2}, m_1\rangle |\frac{1}{2}, m_2\rangle = \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, 0) |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 0) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Porovnáním obou vztahů získáme sadu koeficientů

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Vezmeme teď získaný vektor

$$|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle,$$

opět na něj zapůsobíme operátorem \hat{J}_- a dostaneme

$$\begin{aligned} \alpha^{(-)}(1, 0) |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2} \cdot \alpha^{(-)}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle, \\ \sqrt{2} \cdot |1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{2} \cdot |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Z toho získáme další C-G koeficient

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 1, -1) = 1,$$

což jsme však mohli vytušit i bez výpočtu.

4. Určíme teď C-G pro $j = j_1 + j_2 - 1 = 0$. Největší možné m (zároveň jediné) je $m = 0$. Rozpis pro něj má podobu

$$|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = A |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + B |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle.$$

Kolmost na vektor $|1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ vede ke vztahu

$$0 = \langle 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle = A + B,$$

kde jsme užili toho, že vektory $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ jsou na sebe kolmé. Normalizace dává podmínku $A^2 + B^2 = 1$. Řešení těchto dvou rovnic je $A = \pm 1/\sqrt{2}$, $B = \mp 1/\sqrt{2}$. Znaménko určíme za chvíli. Rozvoj pomocí C-G dává

$$|0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0\rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 0, 0\rangle | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle).$$

Po porovnání a zohlednění znaménkové konvence dostaneme

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} | 0, 0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | 0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tímto je procedura výpočtu C-G koeficientů u konce.

Můžeme tedy již přesně určit rozvoj dvoučásticového stavu, který jsme na začátku zadali.

$$| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle.$$

Na otázku, s jakou pravděpodobností bude mít tento systém celkový spin 1, bychom tedy odpověděli

$$p = |\langle 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle|^2 = \frac{1}{2}.$$

Úloha V. S ... spin-orbitální interakce

Elektron je částice se spinem $\frac{1}{2}$ popsaným operátorem $\hat{\mathbf{S}}$. Kromě spinu však může mít i orbitální moment hybnosti popsaný operátorem $\hat{\mathbf{L}}$ a kvantovým číslem l . Celkový impulsmoment částice je pak definován jako

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}}.$$

Předpokládejte, že se elektron nachází v druhém excitovaném stavu ($l = 2$).

- Určete možné velikosti celkového impulsmomentu j a kolikrát jsou tyto hodnoty degenerovány, tj. kolik vektorů $|l, l_3\rangle |s, s_3\rangle$ odpovídá danému j .
- Projekce na třetí osu jsou $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$. Stanovte, jaký celkový spin j a jeho projekci j_3 na třetí osu můžeme naměřit, a určete příslušné pravděpodobnosti.

Zajímavým jevem je samointerakce elektronu sama se sebou, a to právě prostřednictvím jeho impulsmomentů. Přesně řečeno spin interaguje s orbitálním momentem hybnosti. Tato spin-orbitální interakce je popsána hamiltoniánem

$$\hat{H}_{\text{so}} = a(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}),$$

kde a je konstanta a tečka představuje skalární součin dvou vektorů⁶⁰. V důsledku této interakce se energetické hladiny elektronu rozštěpí v závislosti na jeho spinové konfiguraci.

⁶⁰⁾ Operátory $\hat{\mathbf{S}}$ a $\hat{\mathbf{L}}$ jsou samozřejmě i vektory.

- c) Pokud je energie elektronu bez spin-orbitální interakce E_0 a orbitální moment hybnosti $l = 2$, určete vzdálenost rozštěpených energetických hladin.
- d) S jakou pravděpodobností tyto energie naměříme pro stav s projekcemi na třetí osu $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$?

(řešení str. 144)

Kapitola 6: Pokročilé partie kvantové mechaniky

V předposlední kapitole seriálu letem světem zabrouzdáme do některých složitějších partií kvantové mechaniky.

Poruchová teorie

Jednou ze základních metod výpočtů v kvantové mechanice je tzv. *poruchová teorie* (též *perturbační teorie*). Její princip je jednoduchý. Mějme nějaký systém popsaný hamiltoniánem \hat{H}_0 a předpokládejme, že známe jeho vlastní vektory $|\psi_n\rangle$ i vlastní čísla E_n^0 . Klíčová otázka pak zní, jak se situace změní, pokud je v systému malá porucha popsaná hamiltoniánem $\hat{H}' \ll \hat{H}_0$. Obecně se tato metoda provádí iteračně, tj. v prvním kroku zjistíme první opravu k energii i k vlastním vektorům a v každém dalším kroku tuto korekci zpřesňujeme. Samozřejmě s tím, že druhá oprava je o hodně menší než ta první atd. Zájemce, kteří chtějí tento nástroj solidně ovládnout, odkazují na některé z učebnic kvantové mechaniky. Kvůli nedostatku prostoru zde jen pro ilustraci uvedu, jakým způsobem se počítá první oprava k energii systému. Jak i zde uvidíme, často se stane, že se původní energetické hladiny v důsledku poruchy rozštěpí.

Korekce k energii E_n^0 v důsledku poruchy má v prvním řádu tvar

$$\Delta E_n = \langle \psi_n | \hat{H}' | \psi_n \rangle, \quad (56)$$

kde $|\psi_n\rangle$ je vlastní stav původního hamiltoniánu \hat{H}_0 příslušející energii E_n^0 . Samozřejmě tato korekce může záviset i na dalších kvantových číslech, což je příčinou již zmíněného rozštěpení energetických hladin. Konkrétní výpočet si ukažme na příkladě.

Uvažujme částici v radiálním elektrostatickém poli (často se mu říká coulombické pole), jako příklad může sloužit elektron v atomu vodíku. Příslušný hamiltonián má tvar

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Vlastní energie jsou

$$E_n^0 = -\frac{m_e^2 e^4}{8h^2 \epsilon_0^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Operátory \hat{H}_0 , \hat{L}^2 a \hat{L}_3 tvoří úplnou množinu pozorovatelných, vlastní vektory můžeme označit jako $|n, l, m\rangle$. Přesto pro pevné n , což je tzv. radiální kvantové číslo, náleží všem vektorům $|n, l, m\rangle$ stejná energie E_n^0 (prostě energie E_n^0 nezávisí ani na l , ani na m). Toto berme jako vstupní fakta problému.

Vložme tento systém do vnějšího magnetického pole, které reaguje s orbitálním impulsmomentem a způsobí malou interakci popsanou hamiltoniánem

$$\hat{H}' = \mu \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{S}}.$$

Úkolem je určit, jak se změní energetické spektrum v důsledku této malé poruchy. Protože volba souřadnicových os je zcela na nás, zvolíme výhodně osu z ve směru vektoru \mathbf{B} . Podle definice má pak změna energie podobu

$$\Delta E_n = \langle n, l, m | \hat{H}' | n, l, m \rangle = \mu B \langle n, l, m | \hat{L}_3 | n, l, m \rangle,$$

kde $B = |\mathbf{B}|$. Vypočítat tento maticový element je však nadmíru snadné, neboť vektory $|n, l, m\rangle$ jsou vlastními vektory \hat{L}_3 , tedy

$$\Delta E_n = \mu B m.$$

To je zvláštní výsledek. Korekce energie k n -té hladině nezávisí na radiálním kvantovém čísle n , nicméně závisí na třetí komponentě orbitálního impulsmomentu m . To znamená, že každá z energií E_n^0 se $(2l + 1)$ -krát rozštěpí. Výsledná energie se započtením první poruchy má tedy podobu

$$E_{n,m} = E_n^0 + \mu B m, \quad \text{kde } m \in \{-l, -l + 1, \dots, l\}.$$

Např. pokud je elektron v prvním excitovaném stavu ($l = 1$), jeho druhá energetická hladina ($n = 2$) se třikrát rozštěpí

$$E_2^0 = -\frac{m_e^2 e^4}{32 h^2 \epsilon_0^2} \longrightarrow \begin{cases} E_{2,-1} = E_2^0 - \mu B, \\ E_{2,0} = E_2^0, \\ E_{2,1} = E_2^0 + \mu B. \end{cases}$$

Druhé kvantování

Doposud jsme kvantovou mechaniku formulovali v termínech operátorů a jejich vlastních vektorů. Tomuto přístupu se říká *první kvantování*. Jiný postup při budování kvantové mechaniky, který je s tím prvním samozřejmě ekvivalentní, je tzv. *druhé kvantování*. Důraz je zde kladen na stavové vektory a jejich částicovou interpretaci.

Základem je tzv. *vakuum*, což je stav systému, který nemá žádnou částici. Nejčastěji ho označujeme jako $|0\rangle$. Systém, v němž máme částici se spinem s a hybností p , popíšeme vektorem $|p, s\rangle$. Tento vektor dostaneme z vakua pomocí *kreačního operátoru* $\hat{a}^\dagger(p, s)$, který tuto částici vytvoří

$$|p, s\rangle = \hat{a}^\dagger(p, s)|0\rangle.$$

Opačnou práci vykoná *anihilační operátor* $\hat{a}(p, s)$, který danou částici vymaže ze světa

$$\hat{a}(p, s)|p, s\rangle = |0\rangle.$$

Samozřejmě na vektor $|p, s\rangle$ lze zapůsobit dalším kreačním operátorem $\hat{a}^\dagger(p', s')$, jenž vytváří částici s hybností p' a spinem s' . Výsledkem pak bude vektor popisující dvoučásticový systém

$$\hat{a}^\dagger(p', s')|p, s\rangle = |p, s; p', s'\rangle.$$

Naopak zapůsobením anihilačního operátoru $\hat{a}(p', s')$ na výsledný stav dostaneme

$$\hat{a}(p', s')|p, s; p', s'\rangle = |p, s\rangle.$$

Pokud zapůsobíme anihilačním operátorem částice na vektor, který tuto částici neobsahuje, nemá co anihilovat a celý vektor zruší, tj.

$$\hat{a}(p', s')|p, s\rangle = 0.$$

Kreační a anihilační operátory splňují velmi důležité relace

$$[\hat{a}(p, s), \hat{a}^\dagger(p, s)] = 1, \quad [\hat{a}^\dagger(p, s), \hat{a}^\dagger(p, s)] = 0, \quad [\hat{a}(p, s), \hat{a}(p, s)] = 0$$

a navíc pro ně platí, že jsou k sobě hermitovsky sdružené (proto ten křížek u kreačního operátoru). Často se zde logika věcí obrací, tj. dva operátory, které jsou spojeny hermitovským sdružením a splňují výše uvedené relace, nazveme kreačním a anihilačním. Částicová interpretace však není jediná možná. Jak za chvíli uvidíme, má smysl je definovat i pro systém jako celek, který je v n -tém excitovaném stavu popsán vektorem $|n\rangle$. Kreační operátor potom tento systém posune o hladinu nahoru, anihilační naopak o hladinu dolů⁶¹

$$a^\dagger|n\rangle \rightarrow |n+1\rangle, \quad a|n\rangle \rightarrow |n-1\rangle.$$

Již víme, že všechny vektory z Hilbertova prostoru jdou kreovat z vakua $|0\rangle$. Jak ale v tomto formalismu naložit s operátory? No, vtip je právě v tom, že je vyjádříme pomocí kreačních a anihilačních operátorů! A u těch už víme, jak na daný stav působí. Proto v jistých případech je tento postup velmi výhodný při hledání vlastních stavů a vlastních hodnot.

Vše si ukážeme na klasickém příkladě, jež lze najít ve všech základních učebnicích.

Lineární harmonický oscilátor

Lineární harmonický oscilátor je popsán hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{X}^2.$$

Samozřejmě úlohu nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel lze řešit standardním způsobem, nicméně příslušná bezčasová Schrödingerova rovnice je velmi ošklivou

⁶¹⁾ Rovnítko není v těchto vztazích kvůli tomu, že se zde může objevit nějaký normalizační faktor.

diferenciální rovnicí a není lehké ji řešit. Druhé kvantování vyžaduje nalezení kreačních a anihilačních operátorů tohoto systému.⁶² Rozumný nástřel by mohl být lineární kombinace operátorů \hat{X} a \hat{P} (ty vystupují v hamiltoniánu)

$$\hat{a} = \alpha \hat{X} + \beta \hat{P}, \quad \hat{a}^\dagger = \alpha^* \hat{X} + \beta^* \hat{P}.$$

Platnosti komutačních relací a rozměrové důvody ihned vedou k výsledku

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} + \frac{i}{M\omega} \hat{P} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} - \frac{i}{M\omega} \hat{P} \right).$$

Zpětně lze také vyjádřit \hat{X} a \hat{P} jako

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad \hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}).$$

Odtud již snadno dostaneme i podobu hamiltoniánu

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Všechny stavy lineárního harmonického oscilátoru dostaneme zapůsobením kreačními operátory na vakuum. Protože zde máme pouze jeden kreační operátor (žádné částice zde nejsou), každý stav lze charakterizovat pomocí čísla n , které říká, kolikrát jsme zapůsobili kreačním operátorem na vakuum⁶³

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle.$$

Na základě této definice pak snadno zjistíme, že platí

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Kombinovaným zapůsobením dostaneme⁶⁴

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle.$$

Ale to je přesně kombinace kreačního a anihilačního operátoru, která se vyskytuje ve výrazu pro hamiltonián. Jeho působení na vektor $|n\rangle$ dává

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle.$$

⁶²⁾ Zvídavější čtenáře by mohla napadnout otázka, zda takových dvojic operátorů nemůžeme najít více. Vězte, že můžeme, nicméně všechny jsou unitárně ekvivalentní, tj. jednu dvojici na druhou lze převést pomocí unitární transformace.

⁶³⁾ Číselný faktor je zde zvolen tak, aby vektory byly normalizovány na jednotku. Vektory jsou samozřejmě na sebe také kolmé, tj. platí $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$.

⁶⁴⁾ Tento operátor se často označuje jako $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ a nazývá se *operátor počtu částic*.

Vektor $|n\rangle$ je tedy vlastní vektor hamiltoniánu příslušný vlastní hodnotě $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$. Vlastní energie jsme tedy dostali poměrně snadno, vlastní stavy známe jen v termínech kreačních operátorů. Nalezení vlnových funkcí $\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$ je úloha složitější a nebudeme ji zde řešit.⁶⁵

Na tomto místě je nutné udělat drobnou poznámku. Obě formulace kvantové mechaniky – první i druhé kvantování – jsou zcela ekvivalentní a dávají identické výsledky. První kvantování je více intuitivní, protože máme pod kontrolou hodnoty fyzikálně měřených veličin. V druhém kvantování se některé operátory špatně vyjadřují pomocí kreačních a anihilačních operátorů, nicméně příklad lineárního harmonického oscilátoru ukázal, že tento postup je často výhodnější. Navíc druhé kvantování představuje jakýsi spojovací můstek mezi kvantovou mechanikou a kvantovou teorií pole.

Fermiony a bosony

V předchozích kapitolách jsme již zavedli pojem spinu částice. Přesto jsme prozatím neviděli žádný velký rozdíl mezi stavem popisujícím částici se spinem $\frac{1}{2}$ či 1. Fundamentální rozdíl zde však je a souvisí se *vztahem mezi spinem a statistikou*. Ten říká, že částice s poločíselným spinem – nazýváme je *fermiony* – se mohou nacházet pouze v antisymetrických stavech. Naopak *bosony*, což jsou částice s celočíselným spinem, mohou být pouze v symetrických stavech.⁶⁶ Hned to vysvětlíme na dvoučásticovém příkladu.

Mějme dvě částice, které samostatně popíšeme pomocí stavových vektorů $|\psi_1\rangle$, resp. $|\psi_2\rangle$. Pokud tyto částice popisujeme dohromady jako dvoučásticový systém, pak zavedeme vektor

$$|\psi_1, \psi_2\rangle \equiv |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle.$$

Analogickou situaci jsme už zažili při skládání impulsmomentů. Pokud jsou částice stejné⁶⁷ a navzájem je vyměníme, může se změnit jen fáze vlnové funkce, neboť její absolutní hodnota, která určuje hustotu pravděpodobnosti a výsledky experimentů, musí zůstat stejná.

$$|\psi_2, \psi_1\rangle = e^{i\varphi}|\psi_1, \psi_2\rangle.$$

⁶⁵⁾ Postup je následující. Vyjdeme z rovnice $\hat{a}|0\rangle = 0$, kterou přepíšeme v x -reprezentaci

$$\left(x + \frac{\hbar}{M\omega} \frac{d}{dx}\right) \psi_0(x) = 0,$$

kde $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$. Řešení této rovnice je funkce

$$\psi_0(x) = \left(\frac{M\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{M\omega}{2\hbar} x^2\right).$$

V dalších krocích budeme na tuto funkci působit kreačními operátory vyjádřenými v x -reprezentaci, což vždy povede na diferenciální rovnici, vždy však o poznání snazší, než by byla bezčasová Schrödingerova rovnice.

⁶⁶⁾ Ačkoliv tento teorém je použitelný na úrovni kvantové mechaniky, jeho odvození vyžaduje aparát kvantové teorie pole.

⁶⁷⁾ Případem různých částic se zde zabývat nebudeme, ale tento formalismus se dá rozšířit i na ně.

Při opětovné výměně částic se fáze znovu změní o φ , ale musíme dostat původní vlnovou funkci, takže platí $e^{2i\varphi} = 1$, a tedy jsou jediné dvě možnosti $e^{i\varphi} = \pm 1$. Kladné znaménko odpovídá bosonům, záporné fermionům

$$\text{fermiony } |\psi_2, \psi_1\rangle = -|\psi_1, \psi_2\rangle, \quad \text{bosony } |\psi_2, \psi_1\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle. \quad (57)$$

Obecně při prohození dvou stejných fermionů se změní znaménko vlnové funkce, u bosonů ne. Toto vede k naprosto zásadnímu tvrzení. Zvolme teď $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle = |\psi\rangle$, tj. obě částice jsou ve stejném stavu. V případě bosonů se nic zajímavého neděje, dvoučásticový stav je popsán vektorem

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_2, \psi_1\rangle = |\psi, \psi\rangle.$$

V případě fermionů je situace daleko zajímavější. Jednoduchou manipulací totiž dostaneme

$$|\psi, \psi\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle = -|\psi_2, \psi_1\rangle = -|\psi, \psi\rangle.$$

Takže jako výsledek dostaneme $|\psi, \psi\rangle = 0$. Dva fermiony se tedy nemohou nacházet ve stejném stavu, tj. nemohou mít všechna kvantová čísla stejná.

Tuto zkušenost máme již ze středoškolské chemie při kreslení chlívčeků a šipek v elektronových konfiguracích atomů. Sada chlívčeků představuje stav s konkrétní hodnotou l a každý z chlívčeků pak stav s daným m . Každá z nakreslených šipek představuje elektron, jenž je ve vlastním stavu operátorů \hat{L}^2 a \hat{L}_3 . Elektron má však ještě spin, jehož projekce na třetí osu může nabývat hodnoty $\pm \frac{1}{2}$. To znamená, že pro pevné l a m (tj. do každého chlívčku) můžeme nakreslit dva elektrony – jeden s projekcí spinu nahoru a druhý s projekcí spinu dolů. Tomu také odpovídají příslušné šipky. Proč ale nemůžeme dvě stejné šipky nakreslit do jednoho chlívčku? Odpověď jsme dostali před chvílí. Znamenalo by to totiž, že tyto elektrony mají naprosto shodná kvantová čísla a nacházely by se v úplně stejném stavu. To však nelze, neboť elektrony jsou fermiony. Kdyby byly bosony, situace by byla úplně jiná, v každém chlívčku by klidně dvě stejné šipky být mohly (tj. dva bosony ve stejném stavu). A nejen dva, i milion stejných elektronů by se tam vešlo. U bosonů totiž žádné omezení není.

Toto vše se dá formulovat i na úrovni kreačních a anihilačních operátorů. Označme $\hat{a}^\dagger(\psi)$ kreační operátor částice popsané stavem $|\psi\rangle$, analogicky anihilační operátor je $\hat{a}(\psi)$. Potom platí

$$|\psi_1, \psi_2\rangle = \hat{a}^\dagger(\psi_1)\hat{a}^\dagger(\psi_2)|0\rangle$$

a rovněž pro anihilační operátor platí stejné relace, např.

$$\hat{a}(\psi_2)|\psi_1, \psi_2\rangle = |\psi_1\rangle \quad \text{či} \quad \hat{a}(\psi_1)|\psi_2\rangle = 0 \quad \text{pro } |\psi_1\rangle \neq |\psi_2\rangle.$$

V případě bosonů opět platí intuitivní vztahy, nicméně u fermionů je situace o trochu složitější. Víme totiž, že platí

$$\hat{a}^\dagger(\psi_1)\hat{a}^\dagger(\psi_2)|0\rangle = |\psi_1, \psi_2\rangle \neq |\psi_2, \psi_1\rangle = \hat{a}^\dagger(\psi_2)\hat{a}^\dagger(\psi_1)|0\rangle.$$

Odtud vidíme, že $\hat{a}^\dagger(\psi_1)\hat{a}^\dagger(\psi_2) \neq \hat{a}^\dagger(\psi_2)\hat{a}^\dagger(\psi_1)$.

Vlastnosti fermionů i bosonů na úrovni stavových vektorů se dají přenést i na úroveň kreačních a anihilačních operátorů. Pro bosony platí

$$[\hat{a}(\psi), \hat{a}^\dagger(\psi)] = 1, \quad [\hat{a}(\psi), \hat{a}(\psi)] = [\hat{a}^\dagger(\psi), \hat{a}^\dagger(\psi)] = 0.$$

Pro operátory dvou stejných částic v různých stavech (tzn. jsou to stejné částice, jen mají např. jinou orientaci spinu či orbitální impulsmoment) platí

$$[\hat{a}(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = [\hat{a}(\psi_1), \hat{a}(\psi_2)] = [\hat{a}^\dagger(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = 0.$$

Všechny tyto vztahy se dají zkondenzovat do následujících

$$[\hat{a}(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = \delta_{\psi_1\psi_2}, \quad [\hat{a}(\psi_1), \hat{a}(\psi_2)] = [\hat{a}^\dagger(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)] = 0, \quad (58)$$

kde $\delta_{\psi_1\psi_2}$ je Kroneckerovo delta.

Relace pro fermiony jsou téměř stejné, jen se komutátory nahradí antikomutátory⁶⁸, což je zcela zásadní rozdíl, tj.

$$\{\hat{a}(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)\} = \delta_{\psi_1\psi_2}, \quad \{\hat{a}(\psi_1), \hat{a}(\psi_2)\} = \{\hat{a}^\dagger(\psi_1), \hat{a}^\dagger(\psi_2)\} = 0. \quad (59)$$

Z těchto vztahů dostaneme ihned i naše zjištění, že dvě částice se nemohou nacházet ve stejném kvantovém stavu. Z poslední antikomutační relace máme

$$\{\hat{a}^\dagger(\psi), \hat{a}^\dagger(\psi)\} = \hat{a}^\dagger(\psi)\hat{a}^\dagger(\psi) + \hat{a}^\dagger(\psi)\hat{a}^\dagger(\psi) = 0 \quad \Rightarrow \quad [\hat{a}^\dagger(\psi)]^2 = 0,$$

pak platí

$$|\psi, \psi\rangle = \hat{a}^\dagger(\psi)\hat{a}^\dagger(\psi)|0\rangle = [\hat{a}^\dagger(\psi)]^2|0\rangle = 0.$$

Úloha VI. S ... lineární harmonický oscilátor ve vnějším poli

Uvažujme lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2\hat{X}^2.$$

a) Určete maticové elementy

$$X_{mn} = \langle m|\hat{X}|n\rangle, \quad P_{mn} = \langle m|\hat{P}|n\rangle,$$

kde $|n\rangle$ (resp. $|m\rangle$) jsou vektory zkonstruované v textu seriálu.

b) Vypočítejte střední hodnotu energie ve stavu $|n\rangle$ a určete, jaká část této energie pochází od kinetického členu $\hat{P}^2/2M$ a jaká od členu potenciální energie $M\omega^2\hat{X}^2/2$.

⁶⁸⁾ Pro připomenutí – komutátor je definován jako $[a, b] = a \cdot b - b \cdot a$, zatímco antikomutátor $\{a, b\} = a \cdot b + b \cdot a$.

Vložme celý systém do slabého homogenního elektrického pole. Interakce se systémem je pak popsána hamiltoniánem

$$\hat{H}' = -F\hat{X},$$

kde F je konstanta a platí $\hat{H}' \ll \hat{H}_0$.

- c) Vypočítejte v prvním řádu poruchové teorie opravu k energii n -té hladiny.
 d) Řešte tuto úlohu přesně a srovnejte výsledek s poruchovým řešením.

Nápověda: Jak neporušený hamiltonián \hat{H}_0 , tak i celkový hamiltonián $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ jsou translačně invariantní, tj. hodnota energie se nezmění, pokud operátor souřadnic posuneme o konstantní hodnotu $\hat{X} \rightarrow \hat{X} - \xi$.

(řešení str. 146)

Kapitola 7: Za hranicemi kvantové mechaniky

V poslední kapitole uděláme rychlý průlet pokročilými partiemi teoretické fyziky, které na kvantovou mechaniku navazují. Nejedná se v žádném případě o nějaký soustředěný výklad, ale spíše o motivační povídání.

Kvantová mechanika vs. speciální teorie relativity

Již při vzniku kvantové mechaniky bylo jasné, že jeden velmi důležitý problém se zamlčuje. Kvantová mechanika totiž v jistém smyslu představuje analogii ke klasické newtonovské fyzice, tedy v jejích základech nejsou zakořeněny principy speciální teorie relativity. Stejně jako v klasické mechanice se i v kvantové mechanice může šířit signál libovolnou rychlostí, což působí známé problémy. Řešení se snažili najít dva z tehdejších teoretických fyziků – *Oskar Klein* a *Walter Gordon*.

Jejích myšlenka byla jednoduchá a přímočará: pro volnou částici známe jak klasickou podobu energie, tak její relativistickou modifikaci. Zkusme tedy tento přechod udělat i na úrovni hamiltoniánu

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad \rightarrow \quad \hat{H} = \sqrt{\hat{P}^2 c^2 + M^2 c^4}.$$

Časová Schrödingerova rovnice pak má dobře známou podobu. Nicméně odmocnina v Hamiltoniánu může být nepříjemným problémem, proto bylo nutné celou rovnici „umocnit“⁶⁹, což ve výsledku vedlo v x -reprezentaci na slavnou *Kleinovu-Gordonovu rovnici*

$$\left(\square + \frac{M^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(x) = 0. \quad (60)$$

Operátor čtverečku (d'Alembertův operátor neboli d'Alembertián) se často používá a je definován jako

$$\square = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta.$$

⁶⁹⁾ Samozřejmě odvození nebylo tak naivní a mělo svá logická opodstatnění.

Kleinova-Gordonova rovnice má však jednu vadu – nesplňuje principy kvantové mechaniky. Obsahuje totiž druhé časové derivace, tj. při jejím řešení jsou potřeba dvě počáteční podmínky (počáteční stav a jeho časová derivace). To je však v příkrém rozporu s předpokladem, že k popsání vývoje systému potřebujeme znát pouze jeho počáteční stav (tzn. jednu počáteční podmínku).

S řešením tohoto problému přišel jeden z největších fyziků 20. století – *Paul Dirac*. Šikovnou manipulací s Kleinovou-Gordonovou rovnicí dospěl ke slavné Diracově rovnici

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - Mc)\psi(x) = 0, \quad (61)$$

která je již prvního řádu v derivacích. Rozbor této rovnice by zabral více času⁷⁰, nicméně vezte, že $\psi(x)$ tentokrát již nepředstavuje jednu funkci, ale celou čtveřici funkcí. To Dirac vysvětlil tak, že jeho rovnice nepopisuje bezspinovou částici jako Kleinova-Gordonova rovnice, ale částici se spinem $\frac{1}{2}$, a to společně i s její antičásticí. To dává dohromady čtyři komponenty $\psi(x)$.

I zde se však objevily problémy, tentokrát však skrytějšího rázu (konkrétně se jednalo o nemožnost zkonstruovat vlastní stavy operátoru polohy). To vše nakonec vedlo k závěru, že kvantová mechanika není slučitelná se speciální relativitou, a k jejímu zavržení jako fundamentální teorie.

Nemusíte ji však oplakávat ani kvůli tomu skákat z mostu, nejedná se totiž o žádnou tragédii. Ukazuje to jen na to, že i kvantová mechanika má své meze platnosti, stejně jako tomu je u klasické newtonovské fyziky.

Kvantová teorie pole

Kompletní propojení kvantové mechaniky a speciální teorie relativity se povedlo až v kvantové teorii pole. Ústředním pojmem je zde *operátor pole*, jenž obsahuje lineární kombinaci příslušných kreačních a anihilačních operátorů částic daných vlastností. Například operátor skalárního pole se dá napsat ve tvaru

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2E}} \left(e^{-ipx} \hat{a}(p) + e^{ipx} \hat{a}^\dagger(p) \right).$$

Vidíme, že tento operátor obsahuje kreační a anihilační operátory skalárních částic všech hybností. Další pole (vektorové, spinorové, ...) obsahují také všechny kombinace projekce spinu a případné další vlastnosti. Zkrátka, operátor pole obsahuje všechny možnosti pro daný typ částice, které mohou existovat. Takto zkonstruované operátory pole mají vhodné transformační vlastnosti vůči Lorentzově transformaci, což právě ve výsledku zaručuje splnění speciálněrelativistických podmínek.

Zapůsobením skalárního pole na vakuum dostaneme

$$\hat{\varphi}(x)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{dp}{\sqrt{2E}} e^{ipx} |p\rangle.$$

⁷⁰⁾ Pro zvědavce můžu alespoň poznamenat, že ∂_μ je vektor derivací

$$\partial_\mu = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Symbol γ^μ představuje čtveřici tzv. *Diracových matic*, což jsou matice 4×4 splňující jisté komutační relace.

Z této lineární kombinace vybereme jednu, pokud zprava zapůsobíme konkrétním stavem $|p'\rangle$ skalární částice s hybností p' . Normalizace se zde často volí netradičně, každopádně

$$\langle p' | \hat{\varphi}(x) | 0 \rangle \neq 0.$$

Nenulovost tohoto maticového elementu potvrzuje, že pole $\hat{\varphi}(x)$ skutečně generuje skalární částice.

Stejně jako v kvantové mechanice i zde chceme primárně počítat amplitudy přechodu z počátečního stavu $|\text{in}\rangle$ do koncového stavu $|\text{out}\rangle$. Tato amplituda odpovídá maticovému elementu

$$\langle \text{out} | \hat{S} | \text{in} \rangle \approx \langle \text{out} | \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x \hat{\mathcal{H}}(x) \right) | \text{in} \rangle,$$

kde $\hat{\mathcal{H}}(x)$ je hustota hamiltoniánu, $\hat{H}(t) = \int d^3x \hat{\mathcal{H}}(x)$. Tento vztah by vám měl být částečně povědomý již z normální kvantové mechaniky. Hustota hamiltoniánu $\hat{\mathcal{H}}$ je vytvořená z kvantových polí, které se v teorii vyskytují, a musí splňovat jisté podmínky symetrií. I zde se používají metody poruchové teorie, konkrétně v podobě tzv. *Feynmanových diagramů*.

Standardní model interakcí

Kvantová teorie pole je ideálním teoretickým prostředkem, jak popsat spektrum elementárních částic a jejich vzájemné interakce. Existují čtyři fundamentální interakce – elektromagnetická, silná a slabá jaderná a gravitační. První tři jmenované existují jako konzistentní kvantové teorie pole: pro elektromagnetismus kvantová elektrodynamika (*QED – Quantum electrodynamics*), pro silnou jadernou interakci kvantová chromodynamika (*QCD – Quantum chromodynamics*). Slabou jadernou interakci se podařilo sjednotit s elektromagnetickou ve společnou teorii elektroslabé interakce (*EW – Electroweak interactions*). Existuje spousta modelů, jak spojit všechny tři interakce působící v mikrosvětě v teorii Velkého sjednocení (*GUT – Grand unified theory*), žádná však není experimentálně potvrzena.

A co gravitace?

Poslední interakcí, o které jsme ještě nemluvili, je gravitační. Od dob Einsteina pro ni máme klasickou nekvantovou teorii – obecnou teorii relativity, která velmi dobře popisuje realitu. Přechod k teorii kvantové však skrývá několik potíží.

Dominantní oblast působení je na velkých škálách (hvězdy, černé díry, vesmír jako celek). V mikrosvětě jsou její efekty naprosto nepozorovatelné, proto je těžké zde dělat nějaké experimentální testy. Přesto daleko závažnějším problémem je nalezení samotného modelu kvantové teorie gravitace. Zejména jde o to, že v kvantové teorii pole se pozadí (prostorčas) bere jako konstantní, nehybné, nicméně gravitace (jak již víme od Einsteina) ho zakřivuje. Existuje spousta pokusů, jak tyto problémy nějak řešit či je alespoň obejít – supergravitace, kvantová smyčková gravitace, přesto prozatím bez rozhodujícího úspěchu.

Superstruny

Ještě ambicióznějším projektem je propojení všech čtyř typů interakcí do jedné kompletní teorie, která by popisovala celý vesmír, a to na všech škálách. Vedoucí

proud v tomto snažení se koncentruje kolem teorie superstrun (*Superstrings*). Mnoho již bylo v tomto oboru uděláno, ale situace je natolik složitá, že ke konkrétním závěrům se prozatím nedospělo. Teoretičtí fyzikové jsou v pohledu na teorii superstrun rozdělení a často do hry vstupují i emoce a iracionalita.

Prvním hlavním problémem je „přílišná bohatost teorie“. Kromě stavů, jež by se daly identifikovat se známým spektrem částic, obsahuje ještě spoustu dalších, které se v přírodě nerealizují, a zatím neexistuje způsob, jak je z teorie odstranit. Dalším zásadním problémem teorie superstrun je (alespoň prozatím) absence prediktivní síly, tj. v tomto stavu vývoje není schopna dávat nějaké experimentálně měřitelné předpovědi. Poslední vážnou výtkou, kterou odpůrci superstrun zdůrazňují, je přílišná „matematizace“ problému. Složitost problému vyžaduje obtížné matematické konstrukce a lidé, kteří se tímto zabývají, často již nemají kontakt s fyzikální podstatou, již tato teorie sleduje.

I přes tyto slabiny zůstávají superstruny nejslibnějším kandidátem na finální teorii. V tomto oboru pracuje celá řada špičkových fyziků a matematiků a mnoho významných objevů se již podařilo udělat. Mezi nejvýznamnější patří objev AdS/CFT korespondence v roce 1997, která v jistém smyslu dává dohromady objekty v obecné relativitě a v kvantové teorii pole.

Až budoucí výzkumy ukáží, jestli bude teorie superstrun zavržena jako zcela chybná, či naopak všechny nedostatky vyřeší a v učebnicích fyziky se objeví na nejčestnějším místě.

Úloha VII.S ... za nobelovku

Vytvořte lokální renormalizovatelnou kvantovou teorii pole, která popisuje všechny čtyři typy sil jako projevy jedné sjednocené interakce.



Řešení úloh ze seriálu

Úloha I. S ... Bohrova hypotéza

V této úloze se budeme zabývat atomem vodíku, který je tvořen velice hmotným jádrem s nábojem e a lehkým elektronem o hmotnosti m s nábojem $-e$, který kolem jádra obíhá pro kruhové trajektorii.

- Určete, jak na základě klasické fyziky závisí vzdálenost elektronu od jádra atomu na jeho celkové (kinetické a potenciální) energii E .
- Přijměme Bohrovu hypotézu, že moment hybnosti elektronu je kvantován, tzn. může nabývat jen velikosti $L = n\hbar$, kde n je přirozené číslo. V jaké vzdálenosti potom může elektron kolem jádra atomu obíhat?
- Určete frekvenci fotonu, který elektron vyzáří, pokud přejde z n -té do m -té povolené vzdálenosti od jádra.

- Celková energie elektronu se skládá z potenciální a kinetické části

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Rychlost elektronu zjistíme z rovnosti elektrostatické a odstředivé síly

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}}.$$

Dosadíme za velikost rychlosti v do vztahu pro energii a vyjádříme závislost $r = r(E)$.

$$r = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 E}.$$

Záporné znaménko je zde plně v pořádku, protože pro vázané stavy je $E < 0$. Volný elektron má nulovou energii.

- V úlohu a) jsme viděli, že v klasické mechanice se elektron může nacházet v libovolné vzdálenosti od jádra. Naložme teď na problém Bohrovu kvantovací podmínku $L = nh/2\pi$. Z toho jednoduše zjistíme, jaké rychlosti může elektron nabývat, $v = v(r)$.

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{nh}{2\pi mr}.$$

Srovnáme-li tento vztah pro rychlost se vztahem z části a) získaný ze silové úvahy, dostaneme

$$\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mr}} = \frac{nh}{2\pi mr} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{m\pi e^2}.$$

Vidíme tedy, že vzdálenost elektronu od jádra nemůže být v Bohrově modelu libovolná, ale může nabývat jen hodnot $r_n = r_0 n^2$, kde n je přirozené číslo, a

$$r_0 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{m \pi e^2} \doteq 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,53 \text{ \AA}$$

se nazývá *Bohrův poloměr*.

c) Z úkolů a) a b) odvodíme, že elektronu na n -té hladině odpovídá energie

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 n^2 h^2} = -1 \text{ Ry} \cdot \frac{1}{n^2} \doteq -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Tento vztah definuje energetickou jednotku atomové fyziky – Rydberg (Ry). Při přeskoku elektronu z n -té do m -té hladiny se vyzáří foton o energii

$$\Delta E_{nm} = E_n - E_m = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Podle Planckovy hypotézy je energie fotonu přímo úměrná frekvenci, tj. $E = hf$

$$f_{nm} = \frac{\Delta E_{nm}}{h} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Úloha II. S ... částice se spinem 1/2

Částice se spinem $\frac{1}{2}$ (např. elektron) se může nacházet ve dvou stavech projekce spinu na osu z . Buď spin míří nahoru, pak se nachází ve stavu $|\uparrow\rangle$, či dolů, to je ve stavu $|\downarrow\rangle$. Tyto dva stavy tvoří bázi dvoudimensionálního Hilbertova prostoru popisující právě částici se spinem $\frac{1}{2}$.

- Napište, jak vypadá operátor identity na tomto prostoru v řeči vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$.
- Najděte vlastní vektory a vlastní čísla matic S_1 , S_2 a S_3 .
- Máte zadány operátory \hat{S}_+ a \hat{S}_- ve tvaru $\hat{S}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$, $\hat{S}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Najděte jejich vyjádření v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ a určete, jak působí na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Jak vypadají vlastní vektory těchto operátorů a jaká jsou vlastní čísla?
- Definujme vektory

$$|\otimes\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad |\odot\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle).$$

Ukažte, že tyto vektory tvoří bázi na zadaném Hilbertově prostoru, a najděte vztah mezi koeficienty a , b v rozkladu $|\psi\rangle$ do původní báze a koeficienty c , d v rozkladu $|\psi\rangle = c|\otimes\rangle + d|\odot\rangle$ do nové báze.

- Napište tvar operátorů spinu \hat{S}_1 , \hat{S}_2 a \hat{S}_3 v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Určete jejich vlastní čísla a vektory.

- Víme, že vektory $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ tvoří na našem dvoudimensionálním Hilbertově prostoru bázi, operátor identity bude mít tedy podobu

$$\mathbb{I} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|.$$

V této bázi bude mít tento operátor samozřejmě podobu jednotkové matice.

- Úkolem je nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel spinových matic S_i , tj. řešit rovnice

$$S_i \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Vyřešením těchto algebraických rovnic dostaneme normalizované vlastní vektory

$$\begin{aligned} |S_1, \lambda = \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, & |S_1, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \\ |S_2, \lambda = \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |S_2, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ |S_3, \lambda = \frac{1}{2}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle, & |S_3, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Symbol λ samozřejmě značí příslušné vlastní číslo. Vidíme, že pro všechny matice jsou tato vlastní čísla pouze $\pm\frac{1}{2}$. To odráží fakt, že při měření spinu v libovolném směru můžeme vždy dostat jako výsledek pouze tyto dvě hodnoty a nic jiného. Zkrátka buď spin míří nahoru, nebo dolů. Častěji značíme vlastní číslo stejně jako operátor, tedy například $|S_3 = \frac{1}{2}\rangle = |\uparrow\rangle$.

c) Maticové vyjádření operátorů \widehat{S}_+ a \widehat{S}_- v bázi vektorů $|\uparrow\rangle$ a $|\downarrow\rangle$ najdeme z definice

$$S_+ = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \widehat{S}_+ | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \widehat{S}_+ | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | \widehat{S}_+ | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \widehat{S}_+ | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \uparrow \rangle \langle \downarrow | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_- = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \widehat{S}_- | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \widehat{S}_- | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | \widehat{S}_- | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \widehat{S}_- | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle & \langle \uparrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle \\ \langle \downarrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \uparrow \rangle & \langle \downarrow | \downarrow \rangle \langle \uparrow | \downarrow \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na obecný vektor $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ působí takto

$$\widehat{S}_+|\psi\rangle = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|\psi\rangle = b|\uparrow\rangle, \quad \widehat{S}_-|\psi\rangle = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|\psi\rangle = a|\downarrow\rangle.$$

Vidíme tedy, že operátor \widehat{S}_+ člen $a|\uparrow\rangle$ úplně „zahazuje“, naopak člen $b|\downarrow\rangle$ jaksi „povýší“ na $b|\uparrow\rangle$. Opravdu tento operátor zvyšuje třetí komponentu spinu o jednotku, tj. $|\downarrow\rangle = |S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$ zvedne na $|\uparrow\rangle = |S_3 = \frac{1}{2}\rangle$. Vektor $|\uparrow\rangle$ ale už nemá kam zvedat, takže ho vynuluje.

Operátor \widehat{S}_- se chová přesně opačně, tj. snižuje kvantové číslo příslušející \widehat{S}_3 o jednotku – mění $|\uparrow\rangle$ na $|\downarrow\rangle$, vektor $|\downarrow\rangle$ však už nemá na co změnit, tak ho vynuluje. Operátory \widehat{S}_+ a \widehat{S}_- proto nazýváme *posunovací* operátory.

Tento koncept je obecný a platí pro stav s libovolným spinem⁷¹, např. pro částici se spinem 2 by platilo

$$\widehat{S}_+|S_3 = 1\rangle = |S_3 = 2\rangle, \quad \widehat{S}_-|S_3 = 0\rangle = |S_3 = -1\rangle \quad \text{apod.}$$

Vektory odpovídající maximální, resp. minimální hodnotě kvantového čísla \widehat{S}_3 se samozřejmě působením \widehat{S}_+ , resp. \widehat{S}_- nulují, tj. $\widehat{S}_+|S_3 = 2\rangle = \widehat{S}_-|S_3 = -2\rangle = 0$. Vraťme se k našemu příkladu.

Stejný výsledek působení posunovacích operátorů bychom dostali vynásobením nalezených matic a obecného vektoru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}.$$

Je dobré si uvědomit, že oba postupy (maticový a operátorový) jsou naprosto ekvivalentní.⁷²

Nalezení vlastních vektorů a vlastních čísel těchto operátorů (matic) je úloha velmi triviální, nicméně dává pozoruhodné výsledky

$$|S_+, \lambda = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle, \quad |S_-, \lambda = 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle.$$

Ke každému z operátorů existuje pouze jeden vlastní vektor, ten druhý by byl identicky nulový⁷³. Jediný vlastní vektor a nulové vlastní číslo jsou signály toho, že ani jeden z těchto operátorů nepředstavuje pozorovatelnou veličinu.

⁷¹⁾ Dokonce se netýká pouze spinu, ale libovolné pozorovatelné.

⁷²⁾ Pro matematictější založené čtenáře mohou doplnit, že algebra operátorů je homomorfní s grupou regulárních matic $GL(n)$, tj. každý operátor lze vyjádřit jako matici.

⁷³⁾ Tomu by pak odpovídalo libovolné vlastní číslo, ale mluvit o něm u nulového vektoru postrádá smysl.

- d) Dva vektory tvoří na Hilbertově prostoru bázi, pokud jsou na sebe kolmé. To pro $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$ splněno je.

$$\langle\otimes|\odot\rangle = \frac{1}{2} (\langle\uparrow|\uparrow\rangle - \langle\downarrow|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\uparrow\rangle - \langle\uparrow|\downarrow\rangle) = 0.$$

Ve staré bázi má obecný vektor rozklad $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$. Do něj chytře vložíme identitu ve tvaru $I = |\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a(|\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|)|\uparrow\rangle + b(|\otimes\rangle\langle\otimes| + |\odot\rangle\langle\odot|)|\downarrow\rangle \\ &= (a\langle\otimes|\uparrow\rangle + b\langle\otimes|\downarrow\rangle)|\otimes\rangle + (a\langle\odot|\uparrow\rangle + b\langle\odot|\downarrow\rangle)|\odot\rangle. \end{aligned}$$

Skalární součiny vektorů staré a nové báze mají hodnoty

$$\langle\otimes|\uparrow\rangle = \langle\otimes|\downarrow\rangle = \langle\odot|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle\odot|\downarrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Po dosazení vyjde

$$|\psi\rangle = \frac{a+b}{\sqrt{2}}|\otimes\rangle + \frac{a-b}{\sqrt{2}}|\odot\rangle \Rightarrow c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{a-b}{\sqrt{2}}.$$

- e) Posledním úkolem bylo vyjádřit matice spinu v bázi vektorů $|\otimes\rangle$ a $|\odot\rangle$. Přímochárý postup „brute force“ vychází z definice

$$S'_i = \begin{pmatrix} \langle\otimes|\widehat{S}_i|\otimes\rangle & \langle\otimes|\widehat{S}_i|\odot\rangle \\ \langle\odot|\widehat{S}_i|\otimes\rangle & \langle\odot|\widehat{S}_i|\odot\rangle \end{pmatrix}.$$

K operátoru \widehat{S}_i vložíme z obou stran identitu ve tvaru $\mathbb{I} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ a dosadíme za známé hodnoty.

$$S'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad S'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S'_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

K takto získaným maticím pak osvědčeným postupem najdeme vlastní čísla a vlastní vektory.

$$\begin{aligned} |S'_1, \lambda = \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, & |S'_1, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \\ |S'_2, \lambda = \frac{1}{2}\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & |S'_2, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |S'_3, \lambda = \frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & |S'_3, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pozorný čtenář lehkou nahlédne, že matice S_2 a S_3 se prohodily a matice S_1 se komplexně sdružila. Vlastní vektory a vlastní čísla se oproti původnímu případu nezměnily (jen prodělaly stejnou záměnu jako jejich matice). Matice S'_2 je v této bázi diagonální, což značí, že $|\otimes\rangle$, resp. $|\odot\rangle$ jsou její vlastní vektory příslušné vlastním hodnotám $\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$.

Pavel Motloch si všiml velmi významného jevu. Libovolný vektor vyjádřený v nové bázi můžeme na základě výsledků úlohy d) vyjádřit pomocí staré báze jako

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

kde čárkou explicitně zdůrazňujeme, že se jedná o novou bázi. Výše zmíněnou matici nazýváme *maticí přechodu* mezi starou a novou bázi. Libovolnou matici vyjádřenou v nové bázi můžeme potom zapsat pomocí její podoby ve staré bázi jako $A' = UAU^{-1}$, kde U je ona přechodová matice. V našem případě je vyjádření c, d pomocí a, b stejné, jako by tomu bylo naopak (obecně to tak být nemusí), tj.

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = U^{-1}.$$

Matice S'_i pak dostaneme velmi jednoduše prostým vynásobením tří matic $S'_i = US_iU^{-1}$, což je podstatně méně práce než v tradičním přístupu.

Úloha III. S ... *impulsmoment*

- a) Dokažte, že z komutační relace $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\varepsilon_{ijk}\hat{J}_k$ plyne kompatibilitnost operátoru \hat{J}_3 s operátorem \hat{J}^2 .
- b) Definujme posunovací operátory

$$\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2.$$

Vypočítejte komutační relace $[\hat{J}_+, \hat{J}_-]$, $[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}]$, $[\hat{J}_{\pm}, \hat{J}^2]$.

- c) Na základě těchto vztahů dokažte, že vektory $\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle$ jsou vlastními stavy operátorů \hat{J}^2 a \hat{J}_3 a platí pro ně

$$\hat{J}^2(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle) = j(j+1)(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle), \quad \hat{J}_3(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle) = (m \pm 1)(\hat{J}_{\pm}|j, m\rangle).$$

- d) (Bonus) Z předchozího vyplývá, že

$$\hat{J}_+|j, m\rangle = \alpha^{(+)}(j, m)|j, m+1\rangle, \quad \hat{J}_-|j, m\rangle = \alpha^{(-)}(j, m)|j, m-1\rangle,$$

kde $\alpha^{(\pm)}(j, m)$ jsou koeficienty závislé na j a m . Určete je.

Na začátku si jako pomocný vztah odvodíme důležitou vlastnost komutátoru

$$\begin{aligned} [\hat{J}_i^2, \hat{J}_j] &= \hat{J}_i^2\hat{J}_j - \hat{J}_j\hat{J}_i^2 = (\hat{J}_i^2\hat{J}_j - \hat{J}_i\hat{J}_j\hat{J}_i) + (\hat{J}_i\hat{J}_j\hat{J}_i - \hat{J}_j\hat{J}_i^2) = \\ &= \hat{J}_i[\hat{J}_i, \hat{J}_j] + [\hat{J}_i, \hat{J}_j]\hat{J}_i. \end{aligned}$$

Tato vlastnost se nazývá *linearita*.

- a) Kompatibilita operátoru \hat{J}_3 s kvadrátem impulsmomentu $\hat{J}^2 = \sum_i \hat{J}_i^2$ znamená $[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = 0$. Z linearity komutátoru plyne

$$\begin{aligned} [\hat{J}_3, \hat{J}^2] &= [\hat{J}_3, \hat{J}_1^2] + [\hat{J}_3, \hat{J}_2^2] + [\hat{J}_3, \hat{J}_3^2] = \\ &= \hat{J}_1[\hat{J}_3, \hat{J}_1] + [\hat{J}_3, \hat{J}_1]\hat{J}_1 + \hat{J}_2[\hat{J}_3, \hat{J}_2] + [\hat{J}_3, \hat{J}_2]\hat{J}_2, \end{aligned}$$

kde jsme využili toho, že operátor \hat{J}_3 komutuje s libovolnou funkcí sebe sama. Komutační relace nám dávají

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_1] = i\hat{J}_2, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_2] = -i\hat{J}_1.$$

Po dosazení pak dostaneme

$$[\hat{J}_3, \hat{J}^2] = i\hat{J}_1\hat{J}_2 + i\hat{J}_2\hat{J}_1 - i\hat{J}_2\hat{J}_1 - i\hat{J}_1\hat{J}_2 = 0.$$

Naprostou stejným postupem bychom dostali, že stejně tak komutují s \hat{J}^2 i operátory \hat{J}_1 a \hat{J}_2 .

b) Užití komutačních relací

$$[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = i\hat{J}_3, \quad [\hat{J}_2, \hat{J}_3] = i\hat{J}_1, \quad [\hat{J}_1, \hat{J}_3] = -i\hat{J}_2$$

a linearity vede po jednoduchých výpočtech na

$$\begin{aligned} [\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= [\hat{J}_1 + i\hat{J}_2, \hat{J}_1 - i\hat{J}_2] = \\ &= [\hat{J}_1, \hat{J}_1] + i[\hat{J}_2, \hat{J}_1] - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] + [\hat{J}_2, \hat{J}_2] = 2\hat{J}_3. \end{aligned}$$

Obdobně dostaneme pro další dva komutátory

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm\hat{J}_\pm, \quad [\hat{J}_\pm, \hat{J}^2] = 0.$$

c) O vektoru $|j, m\rangle$ víme, že je vlastním stavem operátoru \hat{J}^2 , resp. \hat{J}_3 příslušný vlastní hodnotě $j(j+1)$, resp. m , tj.

$$\hat{J}^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle, \quad \hat{J}_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle.$$

Definujme teď nový stav $|\psi_\pm\rangle = \hat{J}_\pm|j, m\rangle$. Působení operátoru \hat{J}^2 dává

$$\hat{J}^2|\psi_\pm\rangle = \hat{J}^2\hat{J}_\pm|j, m\rangle = \hat{J}_\pm\hat{J}^2|j, m\rangle = \hat{J}_\pm[j(j+1)|j, m\rangle] = j(j+1)|\psi_\pm\rangle,$$

kde jsme využili vztah $[\hat{J}^2, \hat{J}_\pm] = 0$ získaný v úkolu b). Podobně pro působení operátoru \hat{J}_3 máme

$$\begin{aligned} \hat{J}_3|\psi_\pm\rangle &= \hat{J}_3\hat{J}_\pm|j, m\rangle = (\hat{J}_\pm\hat{J}_3 \pm \hat{J}_\pm)|j, m\rangle = \hat{J}_\pm m|j, m\rangle \pm \hat{J}_\pm|j, m\rangle = \\ &= (m \pm 1)\hat{J}_\pm|j, m\rangle = (m \pm 1)|\psi_\pm\rangle. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že vektory $|\psi_\pm\rangle = \hat{J}_\pm|j, m\rangle$ jsou skutečně vlastními vektory operátorů \hat{J}^2 , \hat{J}_3 , které přísluší stejné hodnotě j jako vektor $|j, m\rangle$, ale jiným hodnotám m , konkrétně třetí komponentu impulsmomentu mění (posouvají) o jedničku.

d) Jako pomocný vztah si chytře rozepíšeme součin operátorů $\hat{J}_+\hat{J}_-$.

$$\begin{aligned} \hat{J}_+\hat{J}_- &= (\hat{J}_1 + i\hat{J}_2)(\hat{J}_1 - i\hat{J}_2) = \hat{J}_1^2 - i\hat{J}_2\hat{J}_1 + i\hat{J}_1\hat{J}_2 + \hat{J}_2^2 = \\ &= \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 - i[\hat{J}_1, \hat{J}_2] = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3. \end{aligned}$$

Jistě platí, že $\widehat{J}_1^2 + \widehat{J}_2^2 = \widehat{J}^2 - \widehat{J}_3^2$, což po dosazení dá

$$\widehat{J}_+ \widehat{J}_- = \widehat{J}^2 - \widehat{J}_3^2 + \widehat{J}_3.$$

Předkládaná rada v zadání nebyla žádným hlubokomyslným tvrzením, ale měla vás vést k výpočtu maticového elementu

$$\langle j, m | \widehat{J}_+ \widehat{J}_- | j, m \rangle,$$

a to dvěma způsoby. První užije právě získané relace

$$\langle j, m | \widehat{J}_+ \widehat{J}_- | j, m \rangle = \langle j, m | \widehat{J}^2 - \widehat{J}_3^2 + \widehat{J}_3 | j, m \rangle = j(j+1) - m^2 + m.$$

V druhém způsobu uplatníme radu a vyjádříme výsledek pomocí koeficientů $\alpha^{(\pm)}(j, m)$. Porovnáním pak pro ně získáme explicitní vztah. Doteď jsme se zabývali pouze případy, kdy operátor působil vlevo. Tady je však výhodné nechat zapůsobit \widehat{J}_+ nalevo, ale \widehat{J}_- napravo.

$$\langle j, m | \widehat{J}_+ = \langle j, m-1 | \alpha^{(-)}(j, m)^*.$$

Pro maticový element tedy máme

$$\langle j, m | \widehat{J}_+ \widehat{J}_- | j, m \rangle = |\alpha^{(-)}(j, m)|^2.$$

Porovnáním výsledků z obou způsobů výpočtu dostaneme

$$\alpha^{(-)}(j, m) = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}.$$

Obdobně počítáním maticového elementu $\langle j, m | \widehat{J}_- \widehat{J}_+ | j, m \rangle$ dospějeme k výrazu

$$\alpha^{(+)}(j, m) = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}.$$

Úloha IV . S ... spinová precese

Uvažujme částici se spinem $\frac{1}{2}$ v magnetickém poli, které míří ve směru osy z , $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, a zanedbejme všechny stupně volnosti kromě těch spinových. Jako jeden příklad báze, kterou zde můžeme zvolit, je dvojice vektorů s ostrou hodnotou projekce spinu na osu z : $|S_3 = \frac{1}{2}\rangle$, $|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$. Hamiltonián příslušný této částici lze napsat ve tvaru

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{S}_3,$$

kde $\omega = eB/2m$.

- a) Napište vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu \hat{H} . Určete, jak působí hamiltonián na obecný vektor $|\psi\rangle = a|S_3 = \frac{1}{2}\rangle + b|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$. Taktéž vypočtete, jak působí operátor

$$\hat{U}(t, 0) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar).$$

- b) Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou z -ové projekce spinu, tj. $|\psi(0)\rangle = |S_3 = \frac{1}{2}\rangle$. Určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$ a s jakou pravděpodobností naměříme částici ve stavu $|S_3 = \frac{1}{2}\rangle$ a s jakou v $|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$.
- c) V případě, že v čase $t = 0$ se částice nachází ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = \frac{1}{2}\rangle$, určete, v jakém stavu se bude nacházet v čase $t = \tau$. Určete také pravděpodobnosti, že při měření spinu ve směru y naměříme hodnoty $+\frac{1}{2}$, resp. $-\frac{1}{2}$.

Definujme střední hodnotu operátoru vztahem

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_j w_j A_j,$$

kde w_j je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu A_j . (Rozmyslete si, že je to přirozená definice střední hodnoty.) Předpokládejte, že se v čase $t = 0$ nachází částice ve stavu s ostrou hodnotou projekce spinu na osu y nahoru, tj. ve stavu $|S_2 = \frac{1}{2}\rangle$.

- d) Určete střední hodnoty operátorů spinu, tj. $\langle\hat{S}_1\rangle$, $\langle\hat{S}_2\rangle$ a $\langle\hat{S}_3\rangle$ v čase $t = 0$.
- e) Ty samé střední hodnoty vypočtete v čase $t = \tau$. Okomentujte, jak výsledek souvisí s názvem úlohy.

- a) Protože hamiltonián je až na násobení reálným číslem $\hbar\omega$ přímo operátor třetí komponenty impulsmomentu \hat{S}_3 , má s ním společné vlastní vektory a vlastní čísla jsou

$$\begin{aligned}\hat{H}|S_3 = \frac{1}{2}\rangle &= E_+|S_3 = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega|S_3 = \frac{1}{2}\rangle, \\ \hat{H}|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle &= E_-|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle.\end{aligned}$$

Působení hamiltoniánu na obecný vektor $|\psi\rangle$ je nyní už jasné.

Operátor $\hat{U}(t, 0)$ je funkce \hat{H} . Ze seriálu víme, že vlastní vektory jsou identické s vlastními vektory \hat{H} . Vlastní čísla pak nejsou nic jiného než příslušné funkce energie.

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, 0)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle &= \exp(-iE_+t/\hbar)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle = \exp(-\frac{1}{2}i\omega t)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle, \\ \hat{U}(t, 0)|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle &= \exp(-iE_-t/\hbar)|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle = \exp(\frac{1}{2}i\omega t)|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle.\end{aligned}$$

- b) Operátor časového vývoje z času $t = 0$ do času $t = \tau$ je pro náš systém přesně $\widehat{U}(\tau, 0)$ (proto jsme ho v první podúloze zkonstruovali). Už víme, jak působí na vektory $|S_3 = \pm \frac{1}{2}\rangle$, které jsou pro něj vlastními. Tudíž pro vektor $|\psi(0)\rangle = |S_3 = \frac{1}{2}\rangle$ dostaneme

$$|\psi(\tau)\rangle = \widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle.$$

Bystrým okem snadno nahlédneme, že je to náš starý dobrý vektor $|S_3 = \frac{1}{2}\rangle$ pouze vynásobený fázovým faktorem. Proto nás nepřekvapí, že pravděpodobnost, že naměříme v čase $t = \tau$ hodnotu z -ové komponenty spinu $+\frac{1}{2}$, bude

$$w_+ = |\langle S_3 = \frac{1}{2} | \exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right) |S_3 = \frac{1}{2}\rangle|^2 = 1.$$

Logicky pak $w_- = 0$. Analogický výsledek bychom dostali i pro počáteční stav $|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle$. Tento výsledek má obecnější platnost. Vektor se až na fázový faktor při časovém vývoji nemění, pokud je vlastním vektorem operátoru časového vývoje.

- c) Zde je výhodné rozložit si vektor $|S_2 = \frac{1}{2}\rangle$ do báze tvořené vektory $|S_3 = \pm \frac{1}{2}\rangle$. Vybavení znalostmi ze seriálu nebudeme mít s tímto rozkladem problém.

$$|S_2 = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

Analogicky pro druhý z vektorů platí

$$|S_2 = -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = \frac{1}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

Časový vývoj je opět zprostředkován operátorem $\widehat{U}(\tau, 0)$, kterým zapůsobíme na vektor $|\psi(0)\rangle = |S_2 = \frac{1}{2}\rangle$. A teď je již jasné, proč je rozklad do námi zvolené báze výhodný.

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\widehat{U}(\tau, 0)|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|S_3 = -\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Pravděpodobnosti naměření y -ové komponenty spinu $\pm \frac{1}{2}$ potom jsou

$$\begin{aligned} w_+ &= |\langle S_2 = \frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right) + \exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|^2 = \cos^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right), \\ w_- &= |\langle S_2 = -\frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 = \frac{1}{4} |\exp\left(-\frac{1}{2}i\omega\tau\right) - \exp\left(\frac{1}{2}i\omega\tau\right)|^2 = \sin^2\left(\frac{1}{2}\omega\tau\right). \end{aligned}$$

- d) Velmi podobným postupem, jakým jsme řešili předchozí úlohy, budeme pokračovat i zde. Z definice dostaneme pro střední hodnotu operátoru \widehat{S}_i v čase $t = 0$

$$\begin{aligned} \langle \widehat{S}_1 \rangle &= |\langle S_1 = \frac{1}{2} | S_2 = \frac{1}{2} \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_1 = -\frac{1}{2} | S_2 = \frac{1}{2} \rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \\ \langle \widehat{S}_2 \rangle &= |\langle S_2 = \frac{1}{2} | S_2 = \frac{1}{2} \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_2 = -\frac{1}{2} | S_2 = \frac{1}{2} \rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \\ \langle \widehat{S}_3 \rangle &= |\langle S_3 = \frac{1}{2} | S_2 = \frac{1}{2} \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_3 = -\frac{1}{2} | S_2 = \frac{1}{2} \rangle|^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že jsme dostali přesně to, co bychom intuitivně očekávali.

- e) Podstatně zajímavější je situace v případě, že necháme systém časově vyvíjet. Postup výpočtu je však zcela analogický. Systém tentokrát nemáme popsáný počátečním vektorem $|\psi(0)\rangle = |S_2 = \frac{1}{2}\rangle$, ale časově vyvinutým vektorem $|\psi(\tau)\rangle$, který již známe

$$|\psi(\tau)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1}{2}i\omega\tau) |S_3 = \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(\frac{1}{2}i\omega\tau) |S_3 = -\frac{1}{2}\rangle.$$

Počítáním maticových elementů dostaneme

$$\langle \hat{S}_1 \rangle = |\langle S_1 = \frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_1 = -\frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \sin \omega\tau,$$

$$\langle \hat{S}_2 \rangle = |\langle S_2 = \frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_2 = -\frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \cos \omega\tau,$$

$$\langle \hat{S}_3 \rangle = |\langle S_3 = \frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 \cdot \frac{1}{2} + |\langle S_3 = -\frac{1}{2} | \psi(\tau) \rangle|^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0.$$

Tyto výsledky ospravedlňují název úlohy. Střední hodnoty spinového vektoru „konají“ precesní pohyb v rovině xy , střední hodnota projekce na osu z zůstává neměnná.

Úloha V. S ... spin-orbitální interakce

Elektron je částice se spinem $\frac{1}{2}$ popsáným operátorem $\hat{\mathbf{S}}$. Kromě spinu však může mít i orbitální moment hybnosti popsáný operátorem $\hat{\mathbf{L}}$ a kvantovým číslem l . Celkový impulsmoment částice je pak definován jako

$$\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{S}} + \hat{\mathbf{L}}.$$

Předpokládejte, že se elektron nachází v druhém excitovaném stavu ($l = 2$).

- Určete možné velikosti celkového impulsmomentu j a kolikrát jsou tyto hodnoty degenerovány, tj. kolik vektorů $|l, l_3\rangle |s, s_3\rangle$ odpovídá danému j .
- Projekce na třetí osu jsou $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$. Stanovte, jaký celkový spin j a jeho projekci j_3 na třetí osu můžeme naměřit, a určete příslušné pravděpodobnosti.

Zajímavým jevem je samointerakce elektronu sama se sebou, a to právě prostřednictvím jeho impulsmomentů. Přesně řečeno spin interaguje s orbitálním momentem hybnosti. Tato spin-orbitální interakce je popsána hamiltoniánem

$$\hat{H}_{so} = a(\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{L}}),$$

kde a je konstanta a tečka představuje skalární součin dvou vektorů. V důsledku této interakce se energetické hladiny elektronu rozštěpí v závislosti na jeho spinové konfiguraci.

- Pokud je energie elektronu bez spin-orbitální interakce E_0 a orbitální moment hybnosti $l = 2$, určete vzdálenost rozštěpených energetických hladin.
- S jakou pravděpodobností tyto energie naměříme pro stav s projekcemi na třetí osu $s_3 = \frac{1}{2}$ a $l_3 = -1$?

- a) Pro velikost celkového impulsmomentu máme jen dvě možnosti: $j = \frac{5}{2}$ a $j = \frac{3}{2}$. Degenerace je pak určena počtem stavů $|l, l_3\rangle|s, s_3\rangle$, které tvoří bázi příslušného podprostoru. Pro $j = \frac{5}{2}$ máme

$$\begin{aligned} j_3 = \pm \frac{5}{2} : & \quad |2, \pm 2\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 2 \text{ stavy;} \\ j_3 = \pm \frac{3}{2} : & \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, \pm 2\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy;} \\ j_3 = \pm \frac{1}{2} : & \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, 0\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy.} \end{aligned}$$

To dává dohromady celkem 10 různých stavů. Obdobně pro $j = \frac{3}{2}$ dostaneme

$$\begin{aligned} j_3 = \pm \frac{3}{2} : & \quad |2, \pm 2\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy;} \\ j_3 = \pm \frac{1}{2} : & \quad |2, \pm 1\rangle|\frac{1}{2}, \mp \frac{1}{2}\rangle, \quad |2, \pm 0\rangle|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle & 4 \text{ stavy.} \end{aligned}$$

V tomto případě dostaneme 8 různých stavů. To tedy znamená, že hodnota $j = \frac{5}{2}$ je 10krát degenerovaná, zatímco $j = \frac{3}{2}$ je 8krát degenerovaná.

- b) Velikost projekce celkového impulsmomentu na třetí osu máme pevně danou, $j_3 = l_3 + s_3 = -\frac{1}{2}$. Pomocí mašinérie C-G koeficientů pak dojdeme ke vztahu

$$\begin{aligned} |l=2, l_3=-1\rangle|s=\frac{1}{2}, s_3=\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot |j=\frac{5}{2}, j_3=-\frac{1}{2}, l=2, s=\frac{1}{2}\rangle + \\ &+ \sqrt{\frac{3}{5}} \cdot |j=\frac{3}{2}, j_3=-\frac{1}{2}, l=2, s=\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Příslušné pravděpodobnosti pro naměření velikosti celkového impulsmomentu jsou $p_{5/2} = 0,4$ a $p_{3/2} = 0,6$.

- c) K určení energií rozštěpených hladin je vhodné vztah pro spin-orbitální interakci vtipně upravit

$$\widehat{J}^2 = (\widehat{L} + \widehat{S})^2 = \widehat{L}^2 + 2(\widehat{L} \cdot \widehat{S}) + \widehat{S}^2 \quad \Rightarrow \quad \widehat{L} \cdot \widehat{S} = \frac{1}{2} (\widehat{J}^2 - \widehat{L}^2 - \widehat{S}^2).$$

Odtud je zřejmé, že vlastními stavy poruchy hamiltoniánu \widehat{H}_{so} budou právě stavy $|j, j_3, l, s\rangle$. Vlastní hodnoty celkového hamiltoniánu $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_{\text{so}}$ pak budou

$$\widehat{H}|j, j_3, l, s\rangle = E_0 + \frac{a}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)].$$

Konkrétně pro $l = 2, s = \frac{1}{2}$ máme

$$\begin{aligned} \widehat{H}|\frac{5}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle &= (E_0 + a)|\frac{5}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle, \\ \widehat{H}|\frac{3}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle &= (E_0 - \frac{3}{2}a)|\frac{3}{2}, j_3, 2, \frac{1}{2}\rangle. \end{aligned}$$

Vzdálenost rozštěpených hladin je $5a/2$.

- d) Pravděpodobnosti naměření těchto energií přesně kopírují výsledky z úlohy b). Velikosti spinu a orbitálního impulsmomentu jsou zadány, záleží pouze na velikosti celkového impulsmomentu. Platí tedy $p(E_0 + a) = 0,4$ a $p(E_0 - 3a/2) = 0,6$.

Úloha VI. S ... lineární harmonický oscilátor ve vnějším poli

Uvažujme lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 \hat{X}^2.$$

a) Určete maticové elementy

$$X_{mn} = \langle m | \hat{X} | n \rangle, \quad P_{mn} = \langle m | \hat{P} | n \rangle,$$

kde $|n\rangle$ (resp. $|m\rangle$) jsou vektory zkonstruované v textu seriálu.

b) Vypočítejte střední hodnotu energie ve stavu $|n\rangle$ a určete, jaká část této energie pochází od kinetického členu $\hat{P}^2/2M$ a jaká od členu potenciální energie $M\omega^2 \hat{X}^2/2$.

Vložme celý systém do slabého homogenního elektrického pole. Interakce se systémem je pak popsána hamiltoniánem

$$\hat{H}' = -F\hat{X},$$

kde F je konstanta a platí $\hat{H}' \ll \hat{H}_0$.

c) Vypočítejte v prvním řádu poruchové teorie opravu k energii n -té hladiny.

d) Řešte tuto úlohu přesně a srovnajte výsledek s poruchovým řešením.

a) Podle seriálu je rozpis operátorů \hat{X} a \hat{P} pomocí kreačních a anihilačních operátorů

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (a + a^\dagger), \quad \hat{P} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (a^\dagger - a).$$

Maticové elementy operátorů potom jsou

$$X_{mn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} \langle m | a^\dagger + a | n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1}),$$

$$P_{mn} = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} \langle m | a^\dagger - a | n \rangle = i\sqrt{\frac{\hbar M\omega}{2}} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} - \sqrt{n} \delta_{m,n-1}).$$

Tento výsledek mimo jiné znamená, že diagonální maticové elementy těchto operátorů jsou vždy nulové,

$$\langle n | \hat{X} | n \rangle = \langle n | \hat{P} | n \rangle = 0.$$

b) Pro střední hodnotu kinetické energie ve stavu $|n\rangle$ dostaneme

$$\begin{aligned} \langle n | \frac{\hat{P}^2}{2M} | n \rangle &= -\frac{\hbar\omega}{4} \langle n | (a^\dagger - a)^2 | n \rangle = \\ &= -\frac{\hbar\omega}{4} \langle n | a^\dagger a^\dagger + aa | n \rangle + \frac{\hbar\omega}{4} \langle n | a^\dagger a + aa^\dagger | n \rangle. \end{aligned}$$

První člen je nulový a druhý se dá pomocí komutační relace $[a, a^\dagger] = 1$ upravit, vyjde tedy

$$\langle n | \frac{\widehat{P}^2}{2M} | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \langle n | a^\dagger a | n \rangle + \frac{\hbar\omega}{4} \langle n | n \rangle = \frac{n\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{4} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Zcela identickým postupem dostaneme

$$\langle n | \frac{1}{2} M \omega^2 \widehat{X}^2 | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Pro celkovou energii poté platí

$$\langle n | \widehat{H}_0 | n \rangle = \langle n | \frac{\widehat{P}^2}{2M} | n \rangle + \langle n | \frac{1}{2} M \omega^2 \widehat{X}^2 | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

c) Podle seriálu dostáváme opravu k energii v prvním řádu poruchové teorie

$$\Delta E_n = \langle n | \widehat{H}' | n \rangle = -F \langle n | \widehat{X} | n \rangle.$$

Tento maticový element již známe – je nulový, jak bylo ukázáno v úloze a). Pro první opravu energie tedy platí $\Delta E_n = 0$.

d) Hamiltonián systému je dle zadání

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}' = \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \widehat{X}^2 - F \widehat{X}.$$

Nápověda říká, že tento hamiltonián je translačně invariantní, tj. při změně $\widehat{X} \rightarrow \widehat{X} - \xi$ se energetické spektrum nezmění. Udělejme tedy substituci $\widehat{X} = \widehat{X}' + \xi$,

$$\begin{aligned} \widehat{H} &= \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 (\widehat{X}' + \xi)^2 - F(\widehat{X}' + \xi) = \\ &= \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \widehat{X}'^2 + (M^2 \omega^2 \xi - F) \widehat{X}' + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \xi^2 - F\xi. \end{aligned}$$

Konstanta ξ je libovolná, tj. zvolme ji jako $\xi = F/(M^2 \omega^2)$. Hamiltonián nabude tvaru

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} M^2 \omega^2 \widehat{X}'^2 - \frac{F^2}{2M^2 \omega^2} = \widehat{H}'_0 - \frac{F^2}{2M^2 \omega^2}.$$

Díky translační invarianci platí

$$\langle n | \widehat{H}'_0 | n \rangle = \langle n | \widehat{H}_0 | n \rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Vidíme tedy, že při vložení do konstantního vnějšího pole se celé energetické spektrum posune o energii $\Delta E_n = -F^2/(2M^2 \omega^2)$. Ačkoliv první řád poruchové teorie dává nulovou opravu, skutečná změna energie je nenulová. Můžeme tedy říci, že tato změna je efekt vyššího řádu.



Akce FYKOSu

Podzimní soustředění ve Škrdlovicích

Soustředění se konalo od 14. do 21. října 2006 ve Škrdlovicích na Žďársku.

Organizátoři

Brom Pavel, Fiala Roman, Jirotko Tomáš, Kučka Zdeněk, Lipovský Jiří, Podolník Aleš, Prachař Jan, Ringel Matouš, Suková Petra, Sýkora Petr, Trnka Jaroslav, Tůma Karel.

Účastníci

Baxová Katarína, Benda Jakub, Berta Peter, Bogár Ondrej, Bukáček Marek, Formánek Martin, Hartman Juraj, Hermann Jan, Jelínek Jan, Jirků Hana, Kocourková Iva, Ledvina Lukáš, Lochmanová Jana, Malina Lukáš, Mazáč Dalimil, Motloch Pavel, Nečada Marek, Pechal Radim, Pospíšilová Lucie, Pšeno Pavol, Svobodová Helena, Šedek Jan, Šedivý Petr, Šimsa Daniel, Touška Kryštof, Vais Zdeněk.

Legenda

Píše se hvězdné datum 0610.14⁷⁴ a účastníci soustředění přijíždějí na skutečné soustředění Fyzikálního korespondenčního semináře (jak nebylo dosud obvyklé :-)). Po obligátním rozdělení do čtyř družstev a normálních seznamovačkách nebudou stále tušit, zda bude vůbec nějaká legenda.

Jednotlivým družstvům bude sděleno, jak se jmenuje jejich tým. Budou to: Original Series, Next Generation, Deep Space Nine a Voyager. Každé družstvo bude mít ve svých řadách k dispozici jednoho organizátora. Každé družstvo dostane (resp. bude odpromítána pro všechny) šifrovanou (možná lépe kódovanou, neboť asi nepůjde přímo o šifru) zprávu z budoucnosti. Nyní je třeba zdůraznit, že každé družstvo se nachází ve své době. Prvním úkolem bude tedy zprávu pochopit. Zpráva bude kódována do osmičkové soustavy⁷⁵. Tato skutečnost bude zdůrazněná rovnicí

$$8 = 10$$

na počátku zprávy. Zpráva bude obsahovat zoufalou žádost o pomoc⁷⁶ v boji proti skupince Q Kontinua⁷⁷ (vedenou nikým jiným než Q), které z rozmaru chce vytvořit z Galaxie černou díru jako skluzavku. Dále ve zprávě následuje postup přenesení se do budoucnosti.

Po získání těchto informací bude následovat přednáška o sci-fi. Účastníci se dozvědí základní informace ohledně Startreku. Kromě toho, že jim tyto údaje pomohou pochopit legendu, budou se jim nabyté znalosti hodit při hraní dalších her.

⁷⁴⁾ Způsob zápisu hvězdného data se postupně vyvíjel, dále budeme používat jinou notaci.

⁷⁵⁾ viz Hvězdná brána, Asgard

⁷⁶⁾ Pro pomoc je potřeba, aby pomohla všechna družstva z jednotlivých časů.

⁷⁷⁾ Jen pro ujasnění, Q se jmenují všichni obyvatelé Kontinua, dále když budeme psát o Q v jednotném čísle, myslíme tím jednoho konkrétního, kterého bude hrát jeden organizátor.

Po přenesení se do budoucnosti, hvězdné datum 42581,3, se setkají s podivínem, který jim prozradí, že zpráva byla odeslána automaticky ze sondy pilotované Datem, který byl přítomen počátku konce a prozatím hrozbě unikl, aby varoval Federaci. Ta však už nic nezmohla. Rozhodl se tedy požádat o pomoc do minulosti. Je to sice neuvěřitelné, ale Q tuto zprávu pustili dál. Možná z lenosti, možná ze své svrchovanosti. Q se jen pokusili zmanipulovat Data, aby odvysílal chybné údaje. Z jejich nepořádnosti se jim to ale nepodařilo. Při tomto zásahu se však do Datova pozitronového mozku dostala odpověď na základní otázku. Pokud by Dat byl schopen účastníkům říct tuto odpověď, pomohlo by jim to v porážce Q.

Bohužel Dat není schopen lokalizovat tuto informaci. Proto se rozhodnou účastníci cestovat zpět do minulosti, hvězdné datum 39812,3⁷⁸, kdy byl Dat vytvořen, a umístit do jeho hlavy pomocný „otázkočip“. Potom se vrátí zpět do 42624,0 a Dat jim prozradí, že odpovědí na základní otázku života, Vesmíru a vůbec je 42. Dále jim pustíme ukázkou ze Stopařova průvodce po Galaxii a vysvětlíme, že Q se vyvinuli z hyperinteligentních bytostí.

Pak bude pokračovat labyrint. Na konci labyrintu se dostanou až ke Q. Z labyrintu budou tedy znát základní otázku, od Data odpověď. Skupinka Q (jsou čtyři, jeden je samotný Q, zbylí 3 ostatní organizátoři) chce tedy vytvořit z Galaxie černou díru, což není triviální ani pro supermocné Q. Potřebují se proto dostat na nějaká strategická místa ve Vesmíru, odkud soustředí své síly a společně přetvoří Galaxii. Úkolem Grand Prix bude, aby každé z družstev zastavilo jednoho Q, jejich rozmístění bude ukryto v základní otázce. Družstva si libovolně rozdělí, kterého Q zastaví. Hra bude nastavena tak, aby účastníci *nemohli* za žádných okolností žádného ze čtyř Q zastavit. Družstvo Next Generation bude bojovat se samotným Q! Už to tedy vypadá, že Q uspějí a přemění Galaxii na luxusní skluzavku. Na palubě Next Generation bude však jeden Betazoid, který přesvědčí Q, že ničit Galaxii kvůli skluzavce není dobrý nápad. Že v Galaxii je možno najít lepší zábavu, než se klouzat. Q se tento Betazoid zalíbí a odpojí se ze sítě 4 Q, která měla zničit Galaxii. A ta je zachráněna!

Rozdělení organizátorů

jméno	jméno v legendě	popis	skupina
<i>Péťa</i>	Deanna Troi	Betazoid	Next Generation Q
<i>Kájínek</i>	Q	samotný Q	
<i>Jarda</i>	Dat	robot humanoidního vzhledu	
<i>Jirka</i>	Spot	Datova kočka	Deep Space Nine Voyager
<i>Zdeněk</i>	O'Brien	technik, inženýr	
<i>Ježíš</i>	doktor (nemá jméno)	doktor	Original Series
<i>Honza</i>	Kirk	kapitán ve stázi	
<i>Matouš</i>	–	ohavný Klingon	

⁷⁸⁾ 2. února 2338

Fotky



Skupinová fotografie z výletu



Matoušova přednáška o grupách

Jarní soustředění v Budišově u Třebíče

Soustředění se konalo od 21. do 28. dubna 2006 v Budišově na Třebíčsku.

Organizátoři

Brom Pavel, Fiala Roman, Jirotko Tomáš, Kučka Zdeněk, Lalinský Ján, Molda Vojtěch, Podolník Aleš, Prachař Jan, Scholz Marek, Sýkora Petr, Trnka Jaroslav.

Účastníci

Baxová Jana, Baxová Katarína, Bogár Ján, Cimpl Lukáš, Hakl Michael, Hermann Jan, Ledvina Lukáš, Malina Lukáš, Mazáč Dalimil, Nečada Marek, Pechal Radim, Pechová Alžběta, Pospíšilová Lucie, Svobodová Helena, Tintěra Tomáš, Touška Kryštof, Vais Zdeněk, Výška Martin.

Legenda

Účastníci jedou na soustředění FYKOSu. Jejich dopravní prostředek však nedo-razí do cíle (ztroskotá, má havárii) a všichni se musí dostat na jediný ostrov široko daleko (objekt), kde dostanou šanci na přežití. Dalším úkolem přeživších je seznámit se (jelikož havárie byla nečekaná, o seznamovačky by se měli postarat sami). Zároveň se však dozvedí něco důležitého! Ostrov není pustý; je obydlený podivnými osobami (organizátoři, orzi), kteří se účastníkům postupně představí jako neobyčejně chytrí lidé s pozoruhodnými znalostmi (přednášky organizátorů). Účastníci si určitě chtějí získat přízeň domorodců, proto chodí na jejich přednášky a snaží se jim být maximálně nápomocni.

Stále tu ale zůstává hlavní otázka: *Jaktože jsou původní obyvatelé ostrova tak vzdělaní, proč se chovají tak podivně a např. komunikují spolu v šifrách (konkr. pomocí šifer přes nástěnky)?!* V jedné takové šifře na nástěnce bude zakódována zpráva, že v neděli večer se na určeném místě bude konat tajná porada orgů. Účastníci by jí měli potají přihlížet a dozvedí se odpovědi na otázky výše. Nejdříve však musí uspokojit základní životní potřeby (přeživací hry v neděli odpoledne).

Při sledování tajné porady účastníci pochopí, že orgové jsou utlačováni místním utiskovatelem⁷⁹ a snaží se ho zničit; raději komunikují v šifrách, aby jejich plány nebyly zmařeny. Zajímají se o vědu a v jejich možnostech hledají cestu ke svému vysvobození. Je jich však málo, proto jeden nadhodí, že by jim ti ztroskotanci mohli pomoci, ale že zatím nejsou dostatečně prověřeny jejich znalosti a schopnosti k tomuto těžkému úkolu. Nyní je tedy čeká obstarání potravy, souboje, testy znalostí a schopností (náboj) a fyzická i teoretická příprava. Plán na další den (dny) bude naznačen vždy při večerních tajných poradách orgů. Vůdce se obrací k jednotlivým orgům a žádá je o přípravu těchto jednotlivých zkoušek v daných dnech (oblíbené hry na logiku, taktiku, kondici, . . . ; pouze labyrint se neuvádí).

V jednotlivých dnech tedy probíhají přednášky a testy připravenosti. Pomocí šifer na nástěnkách se účastníci dozvídají důležité informace. Připravují se na nejdůležitější pomoc orgům – zničení utiskovatele. Vedle toho vymýšlejí způsob, jak se z pustého ostrova vrátit domů.

Jeden z orgů náhodou objevil utiskovatelovo doupě a cestu k němu sám příslušným způsobem označil (labyrint), o čemž utiskovatel neví. S heslem „spoléhej jen

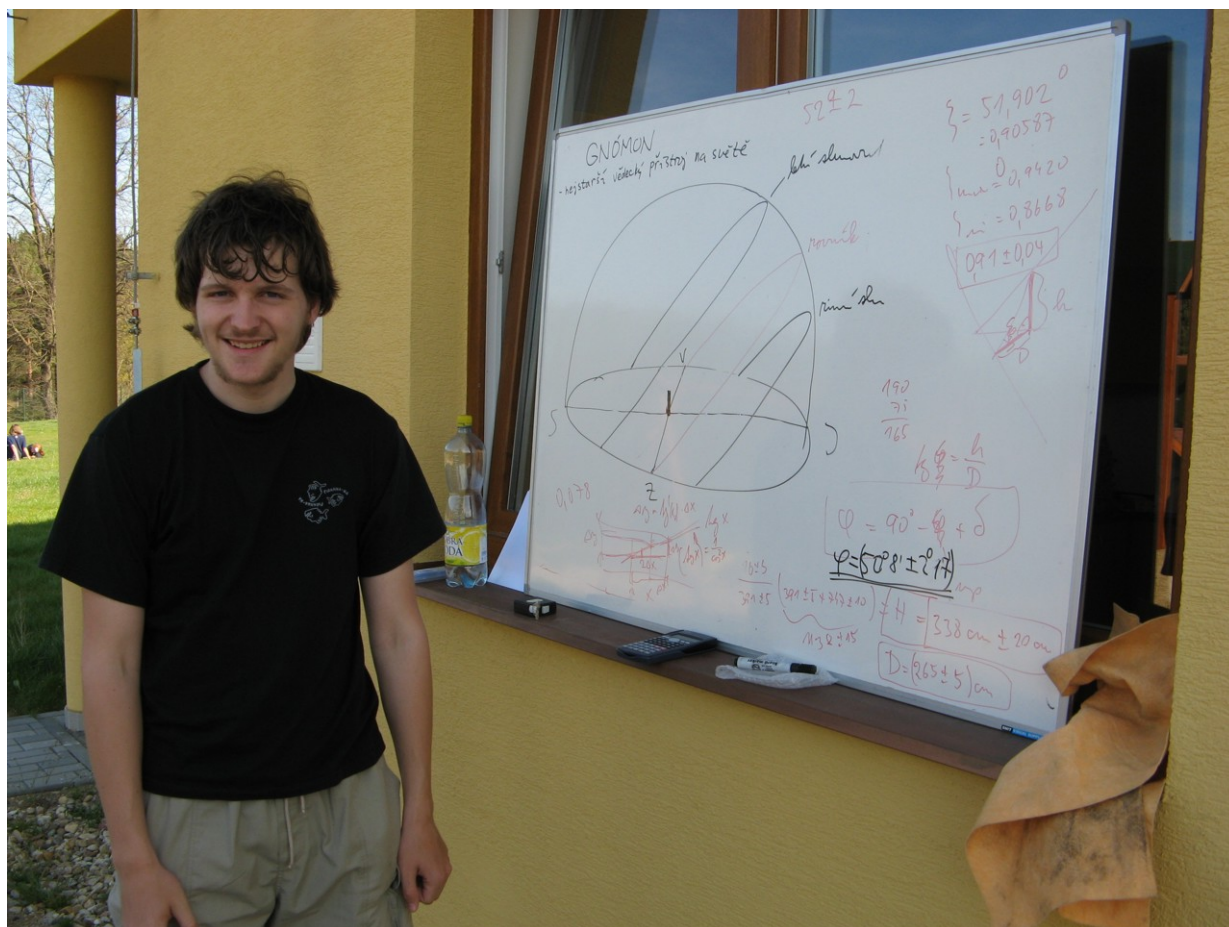
⁷⁹⁾ Utiskovatel je bytost, na kterou se obecně svádí vše špatné.

sám na sebe“ raději o svém tajemství nikomu neřekl, proto je labyrint zamlčován do poslední chvíle. Také sám utiskovatel dává o sobě vědět: zajmul jednoho z organizátorů a jednu ze skupin omámil na celé odpoledne, aby mu oddaně sloužila. Ostatní skupiny tedy musí orga zásobovat a zachránit (běhací hra).

Vysvobození orgů se však zkomplikuje. Orzi netuší, že jeden z přítomných na tajných poradách je sám nežádoucí host (ani šifry nepomohly) – utiskovatel tedy ví o domluvených plánech. Naštěstí objevitel jeho doupěte oznámí své tajemství šifrou v pravý čas, tj. těsně před labyrintem (dvě šifry v jednom – první je nápadně triviální – zmate utiskovatele, jenž se vydá na udané místo a přišedším účastníkům oznamuje, že je to divné, že zatím nikdo z orgů nepřišel, ať tu zprávu raději ještě jednou prověří a ať mu přijdou říci, že počká tady na místě). Účastníci rozluští složitější šifru s plným vysvětlením a s úkolem vydat se do utiskovatelova doupěte (labyrint). Již tuší identitu utiskovatele; potvrdí se jim to v jeho doupěti pomocí nějakých indicií a zároveň z deníku se dozvědí způsob, jak se lze utiskovatele zbavit: zničit jeho jediný lék.

Na GP musí tento jediný lék utiskovatele zlikvidovat – ovšem musí zničit, resp. spotřebovat také surovinu na jeho výrobu. Od orgů za splnění nějakého úkolu připravenosti získávají dílčí informace, díky nimž mohou zjistit, o jaký lék se vlastně jedná. Vyvrcholením potom je smrt utiskovatele a ocenění nejzasloužilejších, samozřejmě s řádnou společenskou oslavou vítězství.

Fotky



Měření zeměpisné šířky pustého ostrova pomocí gnómonu

Týden s aplikovanou fyzikou a Den s experimentální fyzikou

Organizátoři

Bednář Jan, Brom Pavel, Kučka Zdeněk, Lalinský Ján, Lipovský Jiří, Podolník Aleš, Prachař Jan, Suková Petra, Sýkora Petr, Tůma Karel.

Účastníci

Baxová Jana, Baxová Katarína, Benda Jakub, Bogár Ján, Bogár Ondrej, Cagaš Petr, Cimpl Lukáš, Figulová Jana, Formánek Martin, Hakl Michael, Hermann Jan, Chlebounová Zuzana, Ledvina Lukáš, Malina Lukáš, Nečada Marek, Paschkeová Helena, Pechal Radim, Pechová Alžběta, Pospíšilová Lucie, Suchomelová Dana, Svobodová Helena, Šedivý Petr, Šimsa Daniel, Tintěra Tomáš, Trudič Pavel, Vais Zdeněk, Výška Martin.

Reportáž

V týdnu 2.–5. dubna 2007 proběhl první ročník akce pro řešitele FYKOSu a jeho organizátory. Nová akce navázala na tradiční každoroční událost Den s experimentální fyzikou (DSEF v pondělí 2. dubna), kterého se zúčastnilo celkem 56 osob, z toho 2 středoškolské profesorky a 12 neřešitelů FYKOSu. DSEFu se téměř pravidelně účastní skupina řešitelů ze Slovenské republiky, která přijíždí do Prahy s několikadenním předstihem (mj. na prohlídku památek). Náplň letošního Dne tvořily exkurze na následující pracoviště MFF UK: Katedra fyziky povrchů a plazmatu, řádkovací tunelovací mikroskop, van der Graaffův urychlovač, laboratoř nízkých teplot a jaderné magnetické rezonance, které se pravidelně opakují, dále jako nová pracoviště: laboratoř optiky, kalorimetrie a laboratoř Mössbauerovy spektroskopie. Pro účastníky starší 16 let byla domluvena exkurze ke školnímu reaktoru Vrabec (Katedra jaderných reaktorů FJFI ČVUT). Překvapivě poslední exkurze se oproti harmonogramu protáhly, neboť účastníci horlivě diskutovali s lektory exkurzí. Částečně to umožnila okolnost, že polovina z nich v Praze zůstala z důvodu účasti na Týdnu s aplikovanou fyzikou (TSAF).

TSAFu se účastnilo 28 pozvaných nejlepších řešitelů FYKOSu, asi třetina byly dívky. První dva dny (v pondělí a v úterý) jsme byli ubytováni na koleji UK Větrník. V úterý 3. dubna proto probíhal program v Praze. Navštívili jsme závod Siemens kolejová vozidla, s. r. o. ve Zličíně. Exkurze začala na vrátnici v historické tramvaji a pokračovala ve výrobní hale závodu. Proces výroby lokomotiv a souprav účastníky zaujal, náš průvodce (místní inženýr) naše dotazy výborně zodpověděl. Na odpoledne si pro účastníky připravil doc. Podolský (ÚTF MFF UK) přednášku s titulem „James Clerk Maxwell a zrození dynamické teorie elektromagnetického pole“. Večer jsme pak zhlédli představení „Mise na měsíc 3D“ v kině IMAX.

Ve středu 4. dubna jsme vlakem odcestovali do Ondřejova. Tento den byl totiž vyhrazen návštěvě Astronomického ústavu AV ČR v Ondřejově v době 14:00–18:30 a po večeri 20:00–23:00 h. V odpolední části se účastníci seznámili s technickým vybavením a aktuálně řešenou problematikou na těchto pracovištích: dvoumetrový dalekohled Stelárního oddělení, zenit-teleskop (PZT) a robotizovaný dalekohled (BART). Exkurze vedli přední čeští odborníci, kteří dokázali zodpovědět zvědavé dotazy středoškoláků i organizátorů. Díky vyjasnění oblohy mohly po večerní přednášce na

Stelárním oddělení proběhnout návštěva vědeckého měření na dvoumetrovém dalekohledu a pozorování oblohy v historické západní kopuli.

Ve čtvrtek 5. dubna nás brzy ráno odvezl autobus do JE Dukovany, kde pro nás byla od 9:00 h naplánována exkurze. Ještě před jejím začátkem jsme si prohlédli fotovoltaickou sluneční elektrárnu v areálu elektrárny. S průvodci jsme absolvovali prohlídku informačního centra. Prohlídka byla především díky průvodcům velice zajímavá, nikdy už nezapomeneme na pocit být součástí aktivní zóny reaktoru. Seznámili jsme se s typy reaktorů, havarijním systémem, problematikou jaderného odpadu i s budoucností jaderné energetiky. Poté následovala samotná exkurze – po bezpečnostní kontrole při vstupu jsme prošli areálem elektrárny a navštívili halu se strojovnou. K vidění bylo mnoho zajímavého, že jsme všechno ani nestačili vstřebat. Na závěr exkurze jsme se dobře naobědvali v místní kantýně.

Odpoledne (13:30–15:30) jsme přešli do přečerpávací vodní elektrárny Dalešice. Po prohlídce informačního centra jsme se mohli podívat do zázemí elektrárny. Exkurze byla o to zajímavější, že se zrovna pracovalo na výměně jedné z turbín. V podzemí jsme byli nejvíce ohromeni pohledem na potrubí přivádějící vodu na turbíny a hlukem vytvořeným rotující turbínou. Jednu vysloužilou turbínu jsme si na závěr prohlédli venku před elektrárnou.

Tím byl Týden s aplikovanou fyzikou zakončen. Ještě před rozloučením nám účastníci akce pochválili a vyjádřili zájem o její konání i příští rok.

Fotky



Návštěva JE Dukovany

FYKOSí Fyziklání

Fyziklání je soutěž v řešení příkladů z fyziky pro studenty středních škol, která se konala 20. 12. 2006 v učebně F1, Ke Karlovu 5, Matematicko-fyzikální fakulta UK.

Pravidla

Soutěže se zúčastňují družstva s nejvýše pěti členy. Družstvům, které se skládají z méně členů, není žádné zvýhodnění poskytnuto. Na začátku soutěže dostane každé družstvo 7 příkladů. Za každý správně vyřešený příklad dostane nový příklad. Příklady se hodnotí stupnicí bodů podle toho, na kolikátý pokus je výsledek správný. Samotná soutěž probíhá 3 hodiny. Při řešení příkladů je možné používat kalkulačku a MFCH tabulky.



Výsledky

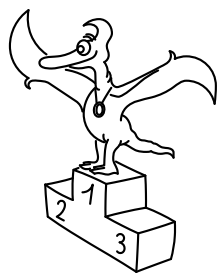
1. G Jana Keplera a G Nad Alejí **147 bodů**
(Michal Rolínek, Karel Pajskr, Dalimil Mazáč, Martin Výška, Matěj Peterka)
2. G Piešťany alias Bublínky **144 bodů**
(Tomáš Bzdušek, Boris Fačkovec, Lukáš Konečný, Tříška Martin, Juraj Danko)
3. G Christiana Dopplera A **138 bodů**
(Lukáš Malina, Pavel Malý, Helena Svobodová, Tomáš Tintěra, Jakub Večeřa)
4. G Jana Nerudy **115 bodů**
(Jakub Benda, Jakub Balhar, Martin Šnajdr, Martin Pospíšil, Petr Poldauf)
5. PČG Karlovy Vary A **109 bodů**
(Lukáš Ledvina, Tomáš Beňák, Michal Fečík, Michaela Čapková, M. Schwarz)
6. G Brno-Řečkovice **105 bodů**
(Hana Jirků, Marek Kaleta, Alexander Slávik, Z. Farka, Helena Paschkeová)
7. G Grösslingová – Gamča **105 bodů**
8. G J. K. Tyla Hradec Králové **94 bodů**
(Jakub Zajíc, Jan Borna, Martin Michálek, Pavel Vitvar, Martin Petr)
9. G Boskovice **79 bodů**
(Zdeněk Vais, Martin Barák, Filip Rozbořil, Jakub Rozbořil, Michal Bednář)
10. G Říčany B **70 bodů**
(Tomáš Kolín, Vít Hybner, Martin Kolář, Martin Plajner, Václav Šámal)
11. G Christiana Dopplera C **66 bodů**
(Pavel Bibr, Vít Humpál, František Louda, Tomáš Peterka, Jan Valášek)
12. G Christiana Dopplera B **64 bodů**
(Le Duc Khanh Chuong, Michael Hakl, Pavel Rucký, V. Sláma, Radek Zubatý)
13. G J. Jungmanna Litoměřice **59 bodů**
(Daniel Šimsa, Radek Vašátko, Jiří Vorobel, Dušan Ospalík, Michaela Fryčová)
14. G Matyáše Lercha Brno **55 bodů**
(Lucie Pospíšilová, Jan Páral, Jan Láník, Hana Stříbrná, Michal Tesařík)
15. G Opatov, Praha **51 bodů**
(Jan Jelínek, Vojtěch Tábor, Filip Hejda, Stanislav Sláčík, Tadeáš Lejsek)

16. G Mladá Boleslav A **41 bodů**
(Miloš Broulík, Lukáš Červenka, Jirka Schubert, Ivan Moc)
17. G Jeseník B **40 bodů**
(Václav Blechta, Jan Zmelík, Jakub Tejchman, Jiří Hročíčka, Petr Ditler)
18. G Říčany A **37 bodů**
(Ondřej Kupka, Jaroslav Petr, Jan Beránek, Zdeněk Houfek, Matouš Macháček)
19. G Jeseník A **35 bodů**
(Lucie Kadrmanová, Tomáš Javůrek, Jan Macháček, Štěpán Kozák, Emil Málík)
20. PČG Karlovy Vary B **30 bodů**
(Martin Kos, Tomáš Kafka, Petr Hoza, Zdeněk Pekáček, Daniel Červenkov)
21. G Mladá Boleslav B **22 bodů**
(Jana Vyskočilová, Pavel Nechanický, Daniela Kudláčková, Ctirad Červinka, Matouš Zdobinský)

Fotky



Vítězný tým



Pořadí nejlepších řešitelů

Kategorie 4. ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 200
1. <i>Jakub Benda</i>	G Jana Nerudy, Praha	143
2. <i>Jan Jelínek</i>	G Konstantinova Praha	112
3. <i>Lukáš Malina</i>	G Ch. Dopplera, Praha	69
4. <i>Pavel Motloch</i>	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	62
5. <i>Pavol Pšeno</i>	G Ružomberok	60
6. <i>Tomáš Tintěra</i>	G Ch. Dopplera, Praha	55
7. <i>Ondrej Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	50
8. <i>František Příbyl</i>	G Milevsko	48
9. <i>Martin Formánek</i>	G Uherské Hradiště	42
10. <i>Kryštof Touška</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	37

Kategorie 3. ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	Σ 200
1. <i>Dalimil Mazáč</i>	G Jana Keplera, Praha	125
2. <i>Jan Hermann</i>	G Český Krumlov	100
3. <i>Marek Nečada</i>	G Jihlava	89
4. <i>Lukáš Ledvína</i>	PČG Karlovy Vary	86
5. <i>Helena Svobodová</i>	G Ch. Dopplera, Praha	75
6. <i>Airidas Korolkovas</i>	KTU gymnasium, Kaunas, Litva	70
7. <i>Petr Šedivý</i>	G Dašická, Pardubice	62
8. <i>Zdeněk Vais</i>	G Boskovice	43
9. <i>Pavel Trudič</i>	SPŠ Hronov	38
10. <i>Jakub Michálek</i>	Cranbrook, MI, USA	35

Kategorie 2. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Helena Paschkeová</i>	G Terezy Novákové, Brno	94
2. <i>Martin Výška</i>	G Nad Alejí, Praha	94
3. <i>Lukáš Cimpl</i>	G Frenštát pod Radhoštěm	71
4. <i>Michael Hakl</i>	G Ch. Dopplera, Praha	69
5. <i>Peter Vanya</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	67
6. <i>Katarína Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	48
7. <i>Michal Mairner</i>	G Žilina – Vlčince	45
8. <i>Zuzana Chlebounová</i>	G M. Koperníka, Bílovec	40
9. <i>Alžběta Pechová</i>	SPŠS Vsetín	38
10. <i>Jana Figulová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	29

Kategorie 1. ročníků

jméno	škola	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	200
1. <i>Ján Bogár</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	87
2. <i>Petr Cagaš</i>	G Lesní čtvrť, Zlín	87
3. <i>Jana Baxová</i>	G Ľudovíta Štúra, Trenčín	58
4. <i>Tereza Steinhartová</i>	G J. K. Tyla, Hradec Králové	52
5. <i>Tereza Jeřábková</i>	SPŠ a SOU Letohrad	20

Ve výsledkových listinách jsou pouze nejlepší řešitelé. Kompletní výsledkové listiny včetně bodování jednotlivých úloh jsou na našich webových stránkách.

JAN PRACHAŘ A KOLEKTIV
Fyzikální korespondenční seminář
XX. ročník – 2006/07

Předmluva: Jan Prachař

Náměty úloh:

Jan Prachař (I.3, I.4, II.1, II.2, II.3, II.4, II.E, III.P,
IV.2, IV.E, V.4, V.E, VI.1, VI.2, VI.4),
Jaroslav Trnka (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.2, V.S, VI.S),
Pavel Brom (I.1, III.3, III.E), Michael Komm (V.P, VI.P, VI.E),
Marek Pechal (III.2, IV.4, VI.3), Jan Hradil (III.1, V.4),
Zuzana Safernová (I.2, I.P), Petr Sýkora (II.P, V.1),
Pavel Augustinský (V.3), Ján Lalinský (IV.1),
Matouš Ringel (III.4), Karel Tůma (IV.3), Peter Zalom (IV.P),
Lenka Zdeborová (I.E)

Autoři řešení úloh:

Jaroslav Trnka (I.S, II.S, III.S, IV.S, V.S, VI.S),
Tomáš Jirotko (I.E, II.3, III.1, VI.4),
Ján Lalinský (II.E, III.P, IV.1, V.2),
Marek Pechal (I.1, III.2, IV.4, VI.3),
Petr Sýkora (II.P, IV.E, V.1, VI.E),
Zdeněk Kučka (III.3, V.4, VI.2),
Aleš Podolník (I.4, II.4, IV.2),
Jan Prachař (V.3, V.P, VI.1),
Vojtěch Molda (IV.3, V.E), Marek Scholz (I.P, III.4)
Peter Zalom (II.E, IV.P), Pavel Brom (III.E),
Roman Derco (I.2), Roman Fiala (VI.P),
Pavol Habuda (II.2), Miroslav Hrubý (II.1), Petra Malá (I.3)

Seriál o kvantové fyzice: Jaroslav Trnka

Legenda podzimního soustředění: Karel Tůma

Legenda jarního soustředění: Pavel Brom

Týden s aplikovanou fyzikou: Jan Prachař, Pavel Brom

Sazba: Jan Prachař

Obrázky a grafy: Jan Prachař, Marek Pechal, Petr Sýkora

Recenzoval: Jan Prachař

Jazykové korektury: Pavel Brom, Jiří Lipovský, Marcela Janatová

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Vyberte si povolání v energetice

Vzdělávací program ČEZ Svět energie připravil pro studenty, kteří se rozhodují o volbě povolání, nový vzdělávací materiál: třídičnou brožuru Člověk na svém místě.



Program připravený odborníky a psychology vám pomůže při rozhodování. Obsahuje užitečné rady z oblasti psychologie a personalistiky, testy, cvičení a rozhovory se zaměstnanci ČEZ, kteří vám představí některá zajímavá povolání z oblasti energetiky.

Brožuru si můžete objednat na www.cez.cz/vzdelavaciprogram, kde najdete i jiné zajímavé materiály o energetice pro vaše studium.



1992–2007
15 let vzdělávacího programu ČEZ

