Jednotky na planetě Balónků

Každá fyzikální soustava, chce-li dosáhnout nějakého fyzikálního uplatnění (výsledku), musí ze vstupních dat vyprodukovat číslo krát tzv. rozměr tohoto čísla. Všechna odvození v následujících řešeních uděláme v soustavě SI.

Když vyjadřujeme délku, hustotu, tlak apod. pomocí čísel, vždy musíme za napsanými ciframi uvést také jednotky, ve kterých jsme měřili. Naměřili jsme délku 12 centimetrů nebo 12 stop? Či např. osvětlení: je to 1 lux nebo Hefnerova svíčka na čtverečný yard? Jednotka je nedílnou součástí výsledku.

V našem případě máme dvě soustavy jednotek. První je soustava SI (tvořena metrem, sekundou, kilogramem, mol . . .), druhá je balonkovská soustava ŠTLM (špurgl, temp, luftík, muška, . . .). Každou fyzikální veličinu umíme převést z jedné soustavy jednotek do druhé.

Z nápovědy v první úloze (*Každý Balónek má maximálně jeden provázek.*) jste měli usoudit, že Balónci počítají ve dvojkové soustavě. Všechny číselné hodnoty byly proto zadané ve dvojkové soustavě a tak s nimi bylo potřeba nakládat. Řešení úloh uvádějí výsledky jak ve dvojkové tak v desítkové soustavě.

Zuzka Safernová & Honza Prachař

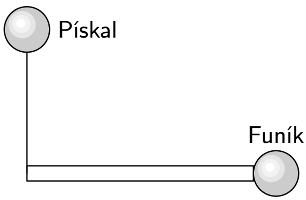
19. ročník, úloha IV . 3 . . . Balónci na kolotoči *(3 body; průměr 2,11; řešilo 36 studentů)*

V hlavním městě planety Balónků Medicinbaldorfu se jednou za debrecinský megatemp koná pouť. Hlavní atrakcí je speciální balónkovský kolotoč, který se Funík s Pískalem rozhodli navštívit.

Dutou tyčí délky L je provlečen provázek délky $l > L$. Na jeden konec provázku se přivázal Funík, na druhý konec Pískal. Oba kamarádi by měli vážit stejně, Funík ale ke snídani snědl kousek rozemleté traverzy a je o trošku těžší. Poté se tyč začne točit kolem svislé osy na ni kolmé. Určete polohu osy tak, aby vodorovná vzdálenost mezi Balónky byla co největší.

Vymyslel Jirka a Kájínek špatně pochopil.

Abychom mohli určit polohu osy, musíme si nejprve vhodně zvolit počátek soustavy souřadnic. Protože při změně polohy osy se mění těžiště soustavy, je vhodné místo těžiště zvolit jiný stabilnější počátek souřadnic. Zvolme třeba začátek tyče blíže lehčímu Balónkovi (Pískalovi). Dohodněme se i na počátečních podmínkách. Před tím, než se začne kolotoč točit, lehčí Balónek vystoupá do maximální výše a těžší Balónek zůstane nejníže (viz obr. 1). Poté se začne kolotoč otáčet konstantní úhlovou rychlostí ω.



Obr. 1

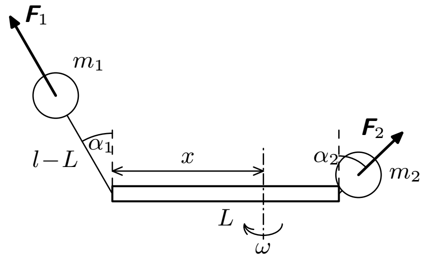
Zaveďme si ještě značení (viz obr. 2). Síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ jsou výslednice tíhové, vztlakové a odstředivé síly a x je hledaná poloha osy rotace.

Úloha se dá řešit tak, že si vzdálenost mezi Balónky vyjádříme jako funkci polohy osy rotace a její první derivaci položíme rovnou nule. Místo toho, abychom převedli úlohu na matematický problém, zkusíme se nejdříve nad úlohou zamyslet a pokusit se ji vyřešit fyzikální úvahou.

Osu umístíme na konec tyče k těžšímu Balónkovi $x = L$ a postupně jí budeme posouvat směrem k lehčímu Balónkovi $x = 0$.

1. V prvním případě bude těžší Balónek namáčknut na tyč a lehčí Balónek bude co nejdále od osy. Vzdálenost mezi Balónky se tak bude limitně[1] blížit l pro velké ω. Ekvivalentně k tomu se úhel α_1 blíží pravému úhlu. Tato poloha je jasný lokální extrém, neboť vzdálenost nemůže být větší než l a navíc při pouze malém posunutí osy směrem k lehčímu Balónkovi je zřejmé, že vzdálenost klesá.
2. Při posouvání osy směrem k lehčímu Balónkovi stále klesá účinek odstředivé síly na lehčího Balónka a roste účinek odstředivé síly na těžšího Balónka, α_1 klesá. V určitém okamžiku musí nastat rovnost velikostí sil F_1 a F_2, tedy $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Nastala rovnovážná poloha, která je však labilní. Při dalším posunutí převládne síla $\boldsymbol{F}_2$ a těžšího Balónka přetáhne lehčí Balónek a namáčkne ho na tyč určitou silou. Tato poloha je evidentně další lokální extrém, tentokrát minimum.[2]
3. Posouváme-li osu dále směrem k lehčímu Balónkovi, pozorujeme, že vliv odstředivé síly na těžšího Balónka stále roste, zatímco vliv odstředivé síly na lehčí balónek stále klesá. Takto se dostaneme až na konec tyče $x = 0$, kde nutně musí nastat další lokální extrém. Vzdálenost mezi balónky se zase limitně[1] blíží l pro veliké ω. Ekvivalentně tomu se α_2 blíží pravému úhlu.

Který ze dvou lokálních extrémů je globální? Zase se nejdřív zamysleme. Vzdálenost mezi Balónky je tím větší, čím jsou úhly α_1 a α_2 větší. Tyto úhly jsou tím větší, čím větší je velikost odstředivé síly. Tedy globální extrém musí nastat až v druhém případě. Maximální vzdálenost mezi Balónky tedy nastane v případě, umístíme-li osu na konec tyče u lehčího Balónka.



Obr. 2

Co se vlastně stane, když Balónci nasednou na kolotoč podle obr. 1 a začnou se točit kolem této osy? Těžší Balónek přetáhne lehčího jen v případě, že velikost odstředivé síly těžšího Balónka bude větší než výslednice vztlakové a tíhové síly lehčího Balónka. Vyjádříme si tedy mezní úhlovou rychlost ω_0

$$V\varrho g - m_1 g = m_2\omega_0^2 L \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = \sqrt{|V\varrho - m_1|g/m_2 L}\,,$$

kde V je objem Balónka, ϱ je hustota atmosféry a g je místní tíhové zrychlení.

V celé úloze uvažujeme, že Balónci v průběhu otáčení zůstávají ve společné rovině s osou a tyčí. Ve skutečnosti tomu tak není. Balónci mají jistý fázový posuv (jsou ve skluzu), ale to na výsledek úlohy nemá vliv.

[1] Pro případ, kdy se velikost vztlakové síly bude rovnat velikosti tíhové síly, bude vzdálenost mezi Balónky l pro jakékoliv ω.

[2] Soustava se jen malým posunutím k lehčímu Balónkovi dostane do nové stabilní rovnovážné polohy. Zajímavé je, že kdybychom nyní pohnuli osou směrem k těžšímu Balónkovi, původní labilní rovnovážný stav bychom zde už nenašli. Museli bychom se vrátit mnohem více zpět v závislosti na poměru hmotností obou Balónků. Soustava se totiž změnila – lehčí Balónek je namáčknut na tyč a těžší Balónek zaujal svou rovnovážnou polohu co nejdále od osy rotace.

Mnozí řešitelé hledali osu v těžišti. Jiní vyjádřili funkční závislost vzdálenosti Balónků, ale nikoliv na poloze osy. Závěrem lze říci, že nic není tak jednoduché, jak se zdá.

Roman Fiala & Zdeněk Kučka
roman@fykos.mff.cuni.cz, zdenek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.