

18. ročník, úloha VI. S ... **Hamiltonův formalismus** (5 bodů; průměr 4,46; řešilo 13 studentů)

Langrangián částice v elektromagnetickém poli je

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2}m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 - q\varphi + q \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i A_i, \quad (1)$$

kde φ je elektrický potenciál a \mathbf{A} magnetický vektorový potenciál.

- Určete zobecněné hybnosti částice p_i příslušející rychlostem \dot{x}_i .
- Napište Hamiltonovu funkci (v souřadnicích (x_i, p_i) !).
- Řešte Hamiltonovy rovnice, je-li $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ a $\varphi = -Ex_1$.

Zadal Honza Prachař podle cvičení z teoretické mechaniky doc. Podolského.

Řešení této úlohy bude přímočaré, stačí se držet postupu, který jsme naznačili v minulém díle seriálu (jen je třeba si dát pozor, že q je náboj částice, nikoli zobecněná souřadnice).

- Zobecněné hybnosti určíme přímo z definice

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j + qA_j, \quad (2)$$

odtud inverzí vztahu vyjádříme \dot{x}_j

$$\dot{x}_j = \frac{1}{m}(p_j - qA_j). \quad (3)$$

Poslední vztah ještě prepíšeme do vektorové podoby

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A}).$$

- Lagrangián (1) a zobecněnou hybnost (2) dosadíme do definice Hamiltonovy funkce

$$H(x_j, p_j) = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}_i - L = \frac{1}{2}m \cdot \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 + q\varphi.$$

Poslední vztah ovšem ještě není vyjádření hamiltoniánu, musíme přejít k souřadnicím (x_j, p_j) . K tomu využijeme vztah (3) a dostaneme

$$H(x_j, p_j) = \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^3 (p_i - qA_i)^2 + q\varphi,$$

v úspornější vektorové podobě má hamiltonián tvar

$$H = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\varphi.$$

- Pro zadaný potenciál hamiltonián je (místo (x_1, x_2, x_3)) budeme od teď používat (x, y, z))

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - qEx = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - qEx.$$

Se znalostí Hamiltonovy funkce už jen zbývá vyřešit Hamiltonovy rovnice. Napišme si první sadu Hamiltonových rovnic $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0, \quad \frac{dp_z}{dt} = 0,$$

kteří mají řešení

$$p_x = qEt + p_{x0}, \quad p_y = p_{y0}, \quad p_z = p_{z0}, \quad (4)$$

kde p_{x0} , p_{y0} a p_{z0} jsou počáteční hybnosti částice. Do druhé sady Hamiltonových rovnic $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x}{m}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_y}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_z}{m}$$

dosadíme z (4)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_{x0}}{m} + \frac{qE}{m}t, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_{y0}}{m}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{p_{z0}}{m}$$

a soustavu vyřešíme

$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m}t + \frac{qE}{2m}t^2, \quad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m}t, \quad z = z_0 + \frac{p_{z0}}{m}t,$$

kde x_0 , y_0 a z_0 je počáteční poloha částice.

Částice se tedy bude podle očekávání ve směru os y a z pohybovat rovnoměrně přímočaře a ve směru osy x bude zrychlovat se zrychlením o velikosti $a = qE/m$.

Honza Prachář

honzik@fykos.mff.cuni.cz