17. ročník, úloha V . S ... nabliáda *(5 bodů; průměr 3,00; řešilo 6 studentů)*

a) *Uvažujte potenciál elektrického pole, pro který platí $\varphi(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{A}$ je konstantní vektor. Spočtěte vektor elektrické indukce, když víte, že $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.*

b) *Spočtěte vektor magnetické indukce $\boldsymbol{B}$, pokud pro vektorový potenciál platí*

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G}}{r},$$

kde $\boldsymbol{G}$ je konstantní vektor. Magnetickou indukci můžeme spočítat ze znalosti vektorového potenciálu pomocí vztahu $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$.

c) *Určete, co je výsledkem působení Laplaceova operátoru na polohový vektor $\boldsymbol{r}$. Laplaceův operátor působící na vektor definujeme podle vztahu*

$$\Delta\boldsymbol{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

a) Vztah pro $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi(r)$ si rozepíšeme tak, jak je ukázáno v seriálu.

$$\boldsymbol{E} = -\nabla(\boldsymbol{r}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}_{\mathrm{D}}).$$

Kolem tečky můžeme prohazovat vektory, tudíž můžeme psát

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\boldsymbol{r}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{A} - \nabla\boldsymbol{A}_{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{r}.$$

Jelikož je $\nabla\boldsymbol{r} = \mathbb{I}$ a $\nabla\boldsymbol{A} = 0$, protože $\boldsymbol{A}$ je konstantní vektor, dostáváme

$$\boldsymbol{E} = -\mathbb{I} \cdot \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}.$$

b) K řešení lze použít výsledek úlohy spočtené v seriálu

$$\nabla \times (a\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{uv} - \boldsymbol{vu}) \cdot \nabla a + a(\boldsymbol{u}\nabla \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + a(\boldsymbol{v} \cdot \nabla\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla\boldsymbol{v}).$$

Pokud položíme $a = 1/r$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{G}$, vyjde po dosazení a úpravách

$$\nabla \times \left(\frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G}}{r}\right) = (\boldsymbol{rG} - \boldsymbol{rG}) \cdot \nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\nabla \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}\nabla \cdot \boldsymbol{r}) + \frac{1}{r}(\boldsymbol{G} \cdot \nabla\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} \cdot \nabla\boldsymbol{G}).$$

Pokud si uvědomíme, že $\nabla\frac{1}{r} = -\boldsymbol{r}/r^3$, $\nabla\boldsymbol{r} = \mathbb{I}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ a jakékoliv derivace $\boldsymbol{G}$ jsou nula, protože se jedná o konstantní vektor, dostaneme

$$\begin{aligned}\nabla\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{rG} - \boldsymbol{rG}) \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) + \frac{1}{r}(\boldsymbol{r}\nabla \cdot \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}\nabla \cdot \boldsymbol{r}) + \frac{1}{r}(\boldsymbol{G} \cdot \nabla\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r} \cdot \nabla\boldsymbol{G}),\\ &= -\frac{\boldsymbol{rG} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{\boldsymbol{Gr} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{G}}{r} + \frac{\boldsymbol{G} \cdot \mathbb{I}}{r},\\ &= -\frac{\boldsymbol{rr} \cdot \boldsymbol{G}}{r^3} - \frac{\boldsymbol{G}r}{.}\end{aligned}$$

V poslední úpravě jsme využili vztahu $\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = r^2$ a toho, že kolem tečky můžeme prohazovat.

c) Stačilo pouze dosadit do připraveného vztahu

$$\Delta \boldsymbol{r} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{r} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{r}.$$

Protože $\operatorname{rot} \boldsymbol{r} = 0$, $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$ a gradient konstanty je nula, dostáváme

$$\Delta \boldsymbol{r} = 0.$$

Jarda Trnka
jarda@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.