

17. ročník, úloha V. 2 ... loď duchů (4 body; průměr 2,50; řešilo 10 studentů)

Loď duchů pluje proti proudu, jehož rychlost je u . Duchové jsou líní a slabí na přihazování uhlí do kotlů. Poradte jim, jaká má být rychlost lodi v vůči vodě, aby loď měla minimální spotřebu uhlí. Předpokládejte, že spotřeba paliva je úměrná vykonané práci na danou dráhu. Jak se výsledek změní, pokud místo lodního šroubu bude loď poháněna řetězem uloženým na dně řeky?

Navrhl Jirka Franta.

Zabývejme se nejprve případem, kdy loď duchů pluje na pohon lodního šroubu. Za čas t loď vůči břehu ujede dráhu $s = (v - u)t$. Podle zadání spotřebu paliva Q uvažujeme úměrnou vykonané práci na dráhu s . Práci spočítáme jako působící sílu krát dráhu, na které síla působí. V našem případě působící síla je tak veliká, aby překonávala odpor vody, tj. $F = kv^2$, kde v konstantě k jsou zahrnuty všechny ostatní aspekty kromě rychlosti, jako tvar, velikost lodě a hustota vody. Tato síla působí po dráze, kterou loď za čas t ujede vůči vodě! Tedy $W = kv^2 \cdot vt$. Dosadíme-li za t z prvního vztahu a vydělíme práci uraženou dráhou s , dostáváme, že spotřeba paliva je úměrná funkci

$$Q \sim k \frac{v^3}{v - u}.$$

Zbývá tedy najít rychlost v tak, aby spotřeba byla nejmenší. To uděláme pomocí derivací nebo si nakreslíme funkci pro různé hodnoty rychlosti proudu u a polohu minima „vykoukáme“. Výsledkem je, že nejvýhodnější pro duchy je jet rychlostí

$$v = \frac{3}{2}u.$$

Co se změní v případě, že je loď poháněna řetězem uloženým na dně? Síla, kterou musí řetěz na loď působit je opět $F = kv^2$, touto silou se ovšem působí po dráze s , tj. té vůči břehu. Výsledkem je spotřeba paliva úměrná

$$Q \sim kv^2.$$

Tedy je pro duchy nejvýhodnější jet rychlostí těsně větší než je rychlost proudu.

Rozdíl obou případů je zřetelný, zamysleme-li se, kolik paliva je potřeba na udržení lodě na místě vzhledem ke břehu. V případě pohonu lodním šroubem to rozhodně nebude nula, kdežto v případě řetězu na dně ano. Podobně např. nekonáme žádnou práci, držíme-li kufr ve vzduchu na místě.

Lenka Zdeborová
fykos@mff.cuni.cz