17. ročník, úloha IV . S ... *magnetické pole ve vakuu* *(5 bodů; průměr 2,45; řešilo 11 studentů)*

a) Určete velikost a směr vektorů magnetické indukce $\boldsymbol{B}$ *a vektorového potenciálu* $\boldsymbol{A}$ *ve vzdálenosti* a *od přímého vodiče délky* l*, pokud jím prochází proud* I*.*

b) Mějme rovnoměrně nabitý kruh o poloměru a*, na němž se nachází náboj* Q*, který rovnoměrně roztočíme úhlovou rychlostí* ω *kolem osy procházející středem kruhu a kolmo na něj. V okolí kruhu vznikne elektromagnetické pole. Vypočtěte indukci* $\boldsymbol{B}$ *jeho magnetické složky v bodě na ose kruhu ve vzdálenosti* x *od jejího středu. Případně (za bonus) můžete také určit intenzitu* $\boldsymbol{E}$ *elektrické složky pole ve stejném bodě.*

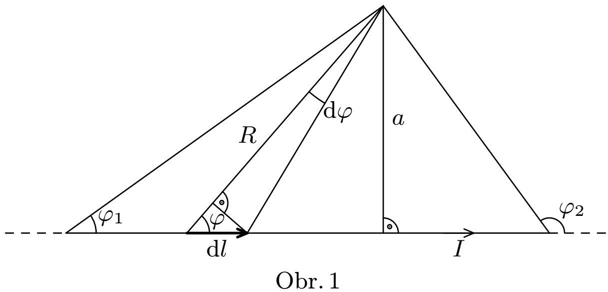
a) Řešení vychází z Biotova-Savartova zákona, ovšem je dobré si úlohu vhodně parametrizovat, například dle obr. 1. Zde φ_1 resp. φ_2 značí úhel sevřený mezi průvodičem a spojnicí prvního resp. druhého konce vodiče s bodem pozorování, a kolmou vzdálenost bodu, kde zjišťujeme pole, od proudovodiče a l délku vodiče. Polohu elementu vodiče o délce $\mathrm{d}l$ si vyjádříme pomocí úhlu φ, jak je znázorněno na obrázku. Jestliže $\boldsymbol{R}$ bude vyjadřovat polohový vektor místa pozorování vůči zmiňovanému elementu, bude pro velikost jeho příspěvku $|\mathrm{d}\boldsymbol{B}|$ k celkovému poli dle Biotova-Savartova zákona platit

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{B}| = \frac{\mu I}{4\pi}\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3}\right| = \frac{\mu I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l\sin\varphi}{R^2} = \frac{\mu I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{R} = \frac{\mu I}{4a\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

neboť z obrázku lze nahlédnout, že platí $R\sin\varphi = a$ a $\mathrm{d}l\sin\varphi = R\,\mathrm{d}\varphi$. Velikost magnetické indukce v požadovaném bodě zjistíme potom integrací přes celý vodič, tedy v rozmezí od φ_1 do φ_2. Čili

$$|\boldsymbol{B}| = \frac{\mu I}{4a\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu I}{4a\pi}\left(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\right).$$

Směr vektoru magnetické indukce lze pak snadno dourčit například ze známého pravidla pravé ruky. V situaci na obrázku bude $\boldsymbol{B}$ mířit z nákresny.



Obr. 1

Dále se požaduje určit vektorový potenciál. Vyjdeme ze vztahu pro vektorový potenciál ve speciálním případě lineárního proudovodiče. A sice

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu I}{4\pi}\int\limits_{\text{vodič}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{R}.$$

Jelikož v našem případě řešíme úlohu pro přímkový vodič, jsou všechny proudové elementy rovnoběžné, takže i výsledný vektorový potenciál bude mít směr protékajícího proudu. Stačí nám tedy určit jenom jeho velikost $|\boldsymbol{A}|$. Máme

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{\mu I}{4\pi} \int\limits_{\text{vodič}} \frac{\mathrm{d}l}{R} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}.$$

Tento integrál můžeme vyřešit například substitucí $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, potom

$$|\boldsymbol{A}| = \frac{\mu I}{4\pi} \int_{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\mu I}{4\pi} \left(\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} \right| \right).$$

Celá úloha je ovšem zadána poněkud pochybně. Na jedné straně se předpokládá stacionární případ, tj. že proudy jsou s časem konstantní, zanedbáváme Maxwellovy posuvné proudy. Na druhé straně ale pro konečný vodič jistě není splněna rovnice kontinuity, což je v přímém rozporu. Situace by se dala tak trochu zachránit tím, že bychom si konce vodiče spojili dalšími přímkovými vodiči s místem pozorování. Tyto by k výsledné magnetické indukci v daném místě nepříspívaly, neboť ve vektorovém součinu v Biot-Savartově zákonu vystupují dva rovnoběžné vektory.

b) Pro výpočet magnetické indukce si představíme nabitý kruh rozdělený na infinitezimální mezikruží o vnitřím poloměru r a šířce $\mathrm{d}r$. Takové mezikruží se bude díky rotaci disku chovat vlastně jako proudová smyčka. Náboj $\mathrm{d}Q$ soustředěný na smyčce ve výseči o středovém úhlu $\mathrm{d}\varphi$ se bude díky konstantní nábojové hustotě rovnat $\mathrm{d}Q = r\sigma \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r$. O úhel $\mathrm{d}\varphi$ se ale smyčka pootočí za čas $\mathrm{d}t = \mathrm{d}\varphi/\omega$, kde ω značí úhlovou rychlost rotace disku. Proud protékající elementární smyčkou $\mathrm{d}I$ potom bude roven $\mathrm{d}I = \mathrm{d}Q/\,\mathrm{d}t = \omega\sigma r \,\mathrm{d}r$. Výsledné magnetické pole, pro které lze ze symetrie úlohy opět nahlédnout, že v bodě ležícím na ose disku bude míti jen složku rovnoběžnou s osou, potom bude dáno díky principu superpozice jako součet všech příspěvků od jednotlivých proudových smyček. Požadovaný vztah proto získáme integrací přes celý kruh, tj. podle poloměru r v intervalu od 0 do a, s využitím vztahu uvedeného v textu seriálu pro magnetické pole elementární proudové smyčky. A sice

$$B = \int_{B(0)}^{B(a)} \mathrm{d}B\,(r) = \frac{\mu_0 \omega\sigma}{2} \int_0^a \frac{r^3 \,\mathrm{d}r}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{\mu_0 \omega\sigma}{2} \left[\frac{r^2 + 2x^2}{\sqrt{r^2 + x^2}} \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\mu_0 \omega\sigma}{2} \left(\frac{a^2 + 2x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} - 2\,|x| \right).$$

Nakonec vypočtěme elektrickou intenzitu pole vybuzeného takovýmto kruhem na jeho ose opět ve vzdálenosti x od středu. Poslouží nám analogická představa rozdělení kruhu na elementární mezikruží. Vzdálenost všech bodů mezikruží od osového bodu, kde nás pole zajímá, je pro dané mezikruží konstantní. Proto lze mezikruží o poloměru r a šířce $\mathrm{d}r$ považovat z hlediska velikosti intenzity ve zkoumaném bodě za bodový náboj o velikosti $\mathrm{d}Q = 2\pi r\sigma \,\mathrm{d}r$ umístěný ve vzdálenosti $\sqrt{x^2 + r^2}$. Výsledný vztah obdržíme opět prointegrováním přes celý disk podle poloměru, konkrétně

$$E\,(x) = \int_{E(0)}^{E(a)} \mathrm{d}E\,(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi\omega\sigma \int_0^a \frac{r \,\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2 + r^2}} =$$

$$= \frac{\omega\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\sqrt{r^2 + x^2} \right]_{r=0}^{r=a} = \frac{\omega\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + x^2} - |x| \right).$$

Z obdobných důvodů jako výše bude mít pole jen složku ve směru osy.

Míra Šulc
`fykos@mff.cuni.cz`