

17. ročník, úloha IV. E ... Kolumbovo vejce (8 bodů; průměr 4,75; řešilo 16 studentů)

Roztočte vajíčko na špičce a změřte frekvenci, při které tato poloha přestane být stabilní (tj. vajíčko se začne točit ve vodorovné poloze). Použijte běžné slepičí vejce natvrdo uvařené. Můžete se pokusit i o teoretický model a srovnat ho s vašimi výsledky. Dobrou chuť!

Vajíčko roztáčela Lenka Zdeborová.

Teorie

Není jednoduché vytvořit nějaký teoretický model, protože není tak úplně jasné, z jakého důvodu se vajíčko překlápí. Jedná se tedy spíše o odhad než o seriózní předpověď. Přístupů je několik. Lze například vyjít z energetického hlediska a spočítat, při jaké rychlosti rotace je poloha vajíčka nestabilní. V autorském řešení vyjdeme z představy, že vajíčko se překlápí, pokud bude rychlost precese srovnatelná s rychlostí otáčení. Pro úhlovou rychlost precese Ω platí $M = L\Omega \sin \varphi$, kde φ je úhel odchýlení osy vajíčka od svislé osy, M moment tíhové síly a L moment hybnosti vajíčka. Potom dostáváme

$$\Omega = \frac{mgr \cos \varphi}{2\pi f J},$$

kde r je vzdálenost težiště vajíčka od bodu dotyku s podložkou a J moment setrvačnosti kolem osy symetrie. Z tohoto přístupu plyne pro frekvenci překlopení

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgr \cos \varphi}{J}}.$$

Pokud vajíčko považujeme za přibližně homogenní rotační elipsoid ($J = mb^2/10$) a úhel odchýlení je přitom malý, pak se výsledek zjednoduší na

$$f \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5ga}{b^2}} = 6,4 \text{ Hz},$$

kde a je délka vajíčka a b šířka vajíčka. Použité vajíčko mělo parametry: $m = 56 \text{ g}$, $a = 5,2 \text{ cm}$, $b = 4,0 \text{ cm}$.

Postup měření

Postup měření silně závisí na vybavenosti domácí laboratoře. Pokud nemáme doma žádné speciální vybavení, spokojíme se se stopkami. Na špičku vajíčka nalepíme papírek tak, aby bylo možno pomocí něj počítat otáčky. Pak již nezbyvá než vajíčko roztočit, změřit příslušný čas T , počet otáček N a pomocí vztahu

$$f = \frac{1}{NT}$$

spočítat frekvenci f .

Není ale v lidských silách sledovat pouhým okem tak vysoké frekvence. Proto je prakticky jedinou možností vše natočit na kameru. Pokud má naše kamera zabudovanou časomíru, není problém frekvenci dopočítat. Pokud tomu tak není, umístíme vedle vajíčka stopky. Při použití digitálních fotoaparátů v režimu video je nevýhodou nízká snímkovací frekvence (obvykle okolo 15 Hz).

Nejlepší metodou je použití pokročilé výpočetní techniky. Existují různé elektronické experimentální systémy napojené na počítač, jako je třeba ISES (Inteligentní Školní Experimentální Systém).

Výsledky měření

Jedním z těchto způsobů změříme čas T pro 10 otáček.

měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T [s]	1,17	1,20	1,23	1,23	1,28	1,16	1,31	1,34	1,19	1,24

Pro střední hodnotu dostaneme $\bar{T} = 1,24$ s. Jako systematickou chybu vezmeme nejmenší dílek času, což je $\Delta T_{\text{sys}} = 0,1$ s. Statistickou odchylku spočteme ze vztahu

$$\Delta x_{\text{st}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}.$$

Po dosazení dostaneme $\Delta T_{\text{st}} = 0,03$ s. Celkovou chybu spočteme ze vztahu

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{sys}})^2 + (3\Delta x_{\text{st}})^2}.$$

Pro výsledný čas tedy platí: $T = (1,24 \pm 0,09)$ s. Chyba času je tedy asi 7%. Protože relativní chyby T a f jsou stejné, můžeme psát konečný výsledek ve tvaru

$$f = (8,0 \pm 0,6) \text{ Hz}.$$

I když se naměřená hodnota neshoduje v rámci chyby s teoreticky předpovězenou hodnotou, řádově si výsledky odpovídají. Neshoda zřejmě pramení z ne úplně přesného teoretického modelu.

Poznámky k došlým řešením

Řešitelé se podle svých výsledků rozdělili do dvou skupin. První skupině vyšla frekvence v rozmezí 5 – 8 Hz, stejně jako tomu je v autorském řešení. Druhá skupina naměřila hodnotu 1,5 – 3 Hz. Neumím si tento rozpor vysvětlit. Je sice možné, že vajíčko má při rotaci více nestabilních poloh, ale nabízí se i prozaičtější řešení a to, že někteří řešitelé postavili vajíčko na bok místo na špičku.

Jarda Trnka

jarda@fykos.mff.cuni.cz