17. ročník, úloha I . 3 ... *vrh šikmý vzhůru* *(4 body; průměr 2,23; řešilo 48 studentů)*

Fykosák se (po absolvování letošního soustředění) rozhodne cvičit v hodu granátem. Nemá ale k dispozici rovný terén, tak hází ve svahu. Směrem dolů dokáže dohodit 62 m, ale proti svahu jen 53 m (udělal mnoho pokusů, takže v obou případech nalezl optimální úhel). Určete sklon svahu.

Při nedostatku rovného terénu vymyslel Honza Houštěk.

Zjistěme, kam nejdále můžeme dohodit. Pro y-ovou a x-ovou souřadnici šikmého vrhu platí vztah

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \;\; x = v_0 t \cos\alpha .$$

Vyjádřením t z x-ové souřadnice, dosazením do y-ové dostaneme křivku závislou na α, po které poletí granát. Celý výraz pak zjednodušíme dosazením výšky $H = v_0^2/2g$.

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - x\operatorname{tg}\alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0,$$

$$x^2\operatorname{tg}^2\alpha - 4Hx\operatorname{tg}\alpha + x^2 + 4Hy = 0.$$

Rovnice pro $\operatorname{tg}\alpha$ má smysl pouze tehdy, je-li diskriminant větší nebo roven nule.

$$D = 4x^2\left(4H^2 - x^2 - 4Hy\right) \quad\Rightarrow\quad x^2 \le 4H^2 - 4Hy,$$

což nám říká, že všechny body, které můžeme zasáhnout šikmým vrhem při dané rychlosti, se nacházejí uvnitř paraboly $x^2 = 4H^2 - 4Hy$. Tato parabola se nazývá obalová křivka a určuje, kam nejdále můžeme dohodit. Rychlost, kterou Fykosák vyhazuje, je stále co největší, protože se snaží dohodit co nejdále. Fykosák stojí v bodě $[0, 0]$. Rovnici kopce můžeme vyjádřit rovnicí $y = kx$, kde $k = \operatorname{tg}\varphi$ je směrnice přímky a φ je úhel kopce. Stačí spočítat průsečíky ochranné paraboly s kopcem.

Eliminací y dostáváme rovnici

$$x^2 + 4Hkx - 4H^2 = 0.$$

Řešením rovnice dostaneme x-ové souřadnice dopadu x_1, x_2. Dle Viètových vztahů víme

$$x_1 + x_2 = -4Hk, \tag{1}$$

$$x_1 x_2 = -4H^2. \tag{2}$$

Vztah mezi x-ovými souřadnicemi a vzdálenostmi d_1 (vrh dolů z kopce), d_2 (nahoru do kopce) je

$$d_1^2 = \frac{x_1^2}{\cos^2\varphi} = x_1^2(1 + k^2),$$

$$d_2^2 = \frac{x_2^2}{\cos^2\varphi} = x_2^2(1 + k^2).$$

Odtud dostáváme

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{d_1^2 + d_2^2}{1 + k^2}, \tag{3}$$

$$x_1 x_2 = -\frac{d_1 d_2}{1 + k^2}. \tag{4}$$

Znaménko mínus je zde, protože součin x-ových souřadnic musí být záporný. Umocněním (1) na druhou a podělením (2) dostáváme

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2}{x_1x_2} = -4k^2.$$

Dosazením (3) a (4) získáme

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d_1 - d_2}{2\sqrt{d_1d_2}}.$$

Číselně pak vychází $\varphi \doteq 4{,}5\,^\circ$.

Karel Tůma
kajinek@fykos.mff.cuni.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.