15. ročník, úloha IV . E ... *led* *(8 bodů; průměr ?; řešilo 30 studentů)*

Dáme-li skleničku naplněnou částečně vodou do mrazáku, budeme ji mít za chvíli plnou ledu. Jeho povrch však nebude rovný, ale vypuklý. Zjistěte, proč tomu tak je a vypočtěte alespoň přibližně úhel, který bude svírat povrch ledu s vodorovnou rovinou. Porovnejte tento výsledek s experimentální hodnotou.

Teorie

Při tuhnutí zvětší voda svůj objem asi o 9%. Nejdříve tuhne po stranách sklenice a na dně, poté na hladině. Tekutá voda je pak uzavřena v ledové dutině a další tuhnutí (pokud je dostatečně pomalé) způsobí vypuklý tvar zmrzlé hladiny.

Popsat přesně tvar vypuknutí je obtížné. Jednak se hladina nezačne zvedat od krajů, ale až v určité vzdálenosti od okraje. Je do způsobeno tím, že v okamžiku, kdy hladina zamrzne a začne se zvedat, je už na stěnách skleničky namrzlá vrstva ledu.

Nejjednodušší představa je taková, že hladina bude mít tvar kulového vrchlíku o poloměru $r = R - d$, kde R je poloměr sklenice a d vzdálenost kraje vrchlíku od okraje sklenice. Označíme-li sklon hladiny na okraji vrchlíku α, platí pro poloměr křivosti vrchlíku $\varrho \sin \alpha = r$ a odtud vyjádříme objem vrchlíku

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3\varrho - h) = \pi r^3 \cdot \frac{(2 + \cos \alpha) \sin \alpha}{3 (1 + \cos \alpha)^2} .$$

Uvědomíme-li si, jaká zjednodušení jsme při tvorbě tohoto modelu prováděli, můžeme bez obav pro malý úhel α psát $\sin \alpha \approx \alpha$ a $\cos \alpha \approx 1$. Dostáváme tak pro maximální sklon hladiny ve sklenici vztah

$$\alpha = \frac{4V}{\pi r^3} . \tag{1}$$

Za V dosazujeme objem vrchlíku, který odpovídá zvětšení objemu vody od okamžiku, kdy začíná vrchlík růst, tedy přibližně

$$V = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{\varrho_{\text{voda}}}{\varrho_{\text{led}}} - 1\right) V_0 ,$$

kde V_0 je počáteční objem vody.

Realizace experimentu

Pro realizaci měření jsme vybrali sklenici ve tvaru téměř ideálního válce o vnitřním poloměru $R = 2{,}7\,\mathrm{cm}$. Použili jsme destilovanou vodu, mražení jsme prováděli ve výparníku lednice. Důležité pro vznik správného povrchu bylo odstranění jakýchkoliv otřesů během mražení. Úspěšnost připravy povrchu vhodného k měření úhlu byla asi 50%.

Připravený povrch jsme lehce vyleštili a úhel α měřili pomocí laserového ukazovátka tak, že jsme sklenici umístili na vodorovnou podložku pod upevněné ukazovátko svítící kolmo dolů a posouváním sklenice po podložce a pozorováním stopy na stropě jsme stanovili maximální sklon ledu.

Výsledky

Vzhledem k časové náročnosti jsme měření provedli pouze pro 4 různé objemy V_0. Pro všechny objemy jsme odhadli $d = 4\,\mathrm{mm}$. Naměřené hodnoty ukazuje následující tabulka.

V_0 [ml]	30	40	60	80
α_{exp} [°]	8,2	12,4	18,1	24,0
α_{teor} [°]	11,8	15,8	23,6	31,5

Vidíme, že teoretické výsledky se od experimentálních poněkud liší, dávají hodnoty asi o čtvrtinu větší. To je s ohledem na jednoduchost naší teorie slušný úspěch.

Chybu měření objemu (použili jsme odměrný válec) a měření úhlu lze zanedbat vzhledem ke statistické chybě, neboť při opakování měření se hodnoty lišily s rozptylem přibližně 20%. Hodnoty v tabulce jsou stanoveny jako průměr ze 3 měření.

Závěr

I přes velmi zjednodušenou teorii jsme dostali přijatelnou shodu s experimentem. Zejména ze souhlasu tvaru závislosti úhlu α na objemu V_0 usuzujeme, že naše vysvětlení vzniku vypukliny je správné.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.