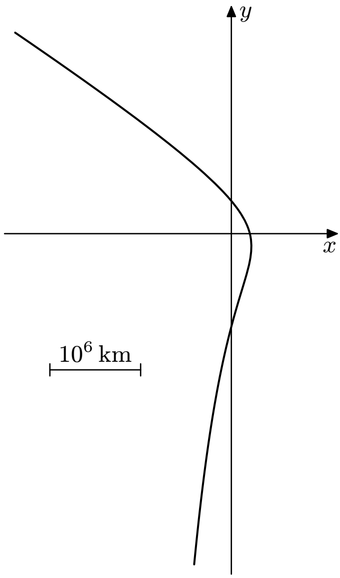
14. ročník, úloha III . S ... *sonda k Jupiteru* *(5 bodů; průměr ?; řešilo 15 studentů)*

Uvažujme družici letící k Jupiteru kolmo na jeho dráhu. Její rychlost ve velké vzdálenosti od Jupitera je $v_0 = 10\,000\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Družice proletí za Jupiterem, její minimální vzdálenost od jeho středu je přitom rovna trojnásobku Jupiterova poloměru. Určete výsledný směr a velikost rychlosti sondy.

Zadali autoři seriálu podle úlohy ze 30. IPhO v Itálii.

Využijeme-li poznatky ze seriálu, stane se z této na první pohled obtížné úlohy pouze geometrický problém. Víme, že v soustavě spojené s Jupiterem má sonda ve velké vzdálenosti rychlost $v = \sqrt{v_0^2 + v_\mathrm{J}^2}$, kde v_J je oběžná rychlost Jupitera. Podle vztahu pro celkovou energii, která je ve velké vzdálenosti rovna pouze kinetické energii sondy, platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{GMm}{2a} \quad \Rightarrow \quad |a| = \frac{GM}{v^2}\,.$$



Obr. 1

Z geometrie hyperboly plyne pro minimální vzdálenost R vztah $R = (\varepsilon - 1)\,|a|$ a pro úhel ϑ platí $\sin(\vartheta/2) = 1/\varepsilon$. Odtud snadno odvodíme

$$\vartheta = 2 \arcsin \frac{GM}{GM + Rv^2}\,.$$

Výpočtem ϑ je úloha téměř vyřešena a za správný postup jsme udělovali 3 body.

Zbývá provést přechod zpět do původní soustavy. Zvolíme např. následující konfiguraci: V původní soustavě se Jupiter pohybuje v záporném směru po ose x a sonda míří směrem vzhůru. V nové soustavě je vektor rychlosti sondy $\boldsymbol{v} = (v_\mathrm{J}, v_0)$. Po průletu po hyperbole se velikost tohoto vektoru nezmění, pouze se vektor otočí o úhel ϑ v kladném smyslu.

Toto otočení nejsnáze provedeme tak, že si $\boldsymbol{v}$ představíme jako komplexní číslo a násobíme jej výrazem $\cos\vartheta + i \sin\vartheta$ a výsledné komplexní číslo opět chápeme jako vektor. Lze to provést i jinak, např. přechodem do polárních souřadnic, ale tento způsob je asi nejrychlejší a navíc si nemusíme pamatovat žádné další vzorce. Výpočet je

$$(v_\mathrm{J} + iv_0)\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) = (v_\mathrm{J}\cos\vartheta - v_0\sin\vartheta) + i\,(v_0\cos\vartheta + v_\mathrm{J}\sin\vartheta)\ .$$

Výsledný vektor ještě převedeme do původní soustavy přičtením rychlosti Jupitera a dostáváme výslednou rychlost po průletu

$$\boldsymbol{v}_0{}' = (-v_0\sin\vartheta - v_\mathrm{J}\,(1 - \cos\vartheta)\,, v_0\cos\vartheta + v_\mathrm{J}\sin\vartheta)\ .$$

Pro numerický výpočet jsme použili následující data: $v_\mathrm{J} = 13{,}06\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, $v_0 = 10{,}00\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$, $R = 214\,000\,\mathrm{km}$ a $GM = 126\,900\,000\,\mathrm{km{\cdot}s^{-2}}$. Postupně vychází $\varepsilon = 1{,}457$, $\vartheta = 86^\circ 42'$ a $\boldsymbol{v}_0{}' = (-22{,}29; 13{,}61)\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$. Odtud už snadno spočteme velikost výsledné rychlosti $v_0' = 26{,}12\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$ a úhel odklonu $\varphi = 58^\circ 35'$.

Poznámky k vašim řešením: Podle počtu řešitelů lze usuzovat, že úloha byla obtížná. Ti, kdo ji poslali, si s ní ovšem poradili dobře. Nejčastější chybou bylo řešení úlohy přímo v původní soustavě. To je problematické, neboť v této soustavě neplatí ZZE ve tvaru $E_{k,\,\mathrm{sonda}} + E_p = \mathrm{konst}$, ale musí se započítat i kinetická energie Jupitera. Navíc nelze použít geometrii popsanou v seriálu, neboť v této soustavě se sonda vůbec nepohybuje po hyperbole. Při čtení těchto řešení mě ale napadlo zjistit, jak vypadá trajektorie sondy v původní soustavě. Přestože závislost polohy sondy na čase nelze analyticky vyjádřit ani v soustavě spjaté s Jupiterem, v parametrickém tvaru lze (poněkud komplikovaným výpočtem) přesně zjistit tvar trajektorie. Tvar trajektorie pro naše konkrétní hodnoty vidíme na obr. 1. Je použita stejná konfigurace, jako v řešení, počátek má význam polohy Jupitera v okamžiku, kdy k němu je planeta nejblíže. Na první pohled je jasné, že trajektorie má k hyperbole hodně daleko. Výpočet jsem provedl v programu *Maple*, takže pokud si chcete dál hrát, napište mi email a já vám pošlu zdroják.

Honza Houštěk

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.