

Zadání VI. série



Termín odeslání: 21. května 2001

Milí řešitelé Fykosu!

Máte v rukou zadání poslední série tohoto ročníku Fykosu, tedy poslední možnost, jak si ve výsledkové listině ještě trochu polepšit. Doufáme, že se vám budou úlohy líbit. Jejich řešení dostanete spolu s řešením 5. série a závěrečnou výsledkovou listinou v druhé polovině června. Přejeme vám hodně úspěchů v závěrečném období školního roku.

Jan Prokleška

Úloha VI.1 ... dielektrikum

Mějme deskový kondenzátor a uvnitř něj dielektrickou desku s relativní permitivitou $\varepsilon_r = 6$. Na kondenzátor přivedeme napětí $U = 10$ kV a necháme systém ustálit. Poté desku vyndáme a kondenzátor zkratujeme. Jaké napětí naměříme na kondenzátoru po vrácení desky? Materiál desky BaTiO_3 je feroelektrikum, zůstane zelektrizovaný!

Úloha VI.2 ... elektron u desky

Mějme nekonečnou vodivou uzeměnou desku. Ve vzdálenosti h od ní je umístěn náboj Q . Spočtete, jakou silou je náboj přitahován k desce.

Úloha VI.3 ... galaxie

Začátkem století existoval kosmologický model vesmíru, podle kterého byl vesmír homogenní (v každém místě stejný) a izotropní (v každém směru stejný). Takový vesmír v sobě zahrnoval rovnoměrně rozmístěné galaxie.

Předpokládejme, že všechny galaxie jsou co do množství vyzařovaného světla stejné. Spočtete, kolikrát více galaxií uvidíme, jestliže se místo pouhým okem budeme dívat na oblohu triedrem, kterým lze pozorovat objekty s magnitudou až 8,5.

Magnitudou se v astronomii měří jasnost objektu. Čím větší magnituda, tím slabší objekt vidíme. Slunce má -27 magnitud, Měsíc v úplňku -13^{mag} , nejjasnější hvězdy 0^{mag} a nejslabší hvězdy viditelné pouhým okem mají 6 magnitud.

Pomoci vám může Pogsonova rovnice, která porovnává magnitudy a pozorované intenzity dvou objektů:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right).$$

Zamyslete se nad tím, jak se změní řešení, když budou galaxie vyzařovat různé množství světla.

Úloha VI.4 ... rychlý proton

Jednou zaregistrovali v Utahu (USA) detektorem kosmického záření proton s energií 51 J. Spočtete jeho rychlost (nebo spíše o kolik se její rychlost liší od rychlosti světla). Odhadněte také zakřivení jeho dráhy v magnetickém poli 10 T.

Úloha VI.P ... domino

Určitě už jste si někdy hráli s dominem, tedy kvádry postavenými v řadě za sebou, které po shoení prvního z nich lavinovitě padají. Pokuste se odhadnout rychlost, kterou se tato vlna šíří, a jak tato rychlost závisí na rozměrech a hmotnosti kvádrů, vzdálenosti kvádrů ... Popište podrobně model, který ve svých úvahách použijete, a posuďte, nakolik odpovídá realitě.

Úloha VI. Exp ... zase domino

Proměřte rychlost padání dominových kostek z problémové úlohy pro různé podmínky. Můžete např. změřit závislost na vzdálenosti, hmotnosti či výšce kostek. Pokud budete řešit i problémovou úlohu, nezapomeňte porovnat vaši teorii s experimentem.

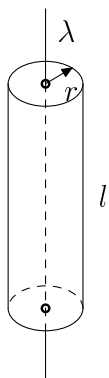


Řešení IV. série

Úloha IV. 1 ... vesmírná stříkačka (5 bodů, řešilo 20 studentů)

Představte si, že ve vakuu mimo gravitační pole stříkáme vodní paprsek. Kromě tohoto paprsku je zde kolmo (mimoběžně) k jeho původnímu směru umístěn nabitý nekonečný drát s délkovou hustotou náboje λ . Voda je stříkána z velmi velké vzdálenosti s počáteční rychlostí v . Vzdálenost přímky, ve které je stříkána voda (ve které se na začátku pohybuje vodní paprsek) a drátu je d . Spočítejte úhel, o který se odchýlí vodní paprsek od původního směru. Molekuly vody si představte jako elektrické dipóly, jejich vzájemné působení zanedbejte a také zanedbejte jejich moment setrvačnosti (tj. představte si, že všechna hmotnost molekuly je soustředěna uprostřed mezi náboji, které jsou nehmotné).

Zadal Karel Kouřil unešen odchylováním vody tekoucí z kohoutku pomocí nabitého hřebínku.



Obr. 1

Nejprve musíme vypočítat sílu, kterou nabitý drát působí na jednu molekulu vody. K tomu je potřeba určit elektrické pole drátu – viz obrázky (1) a (2). Nejdříve uvažujme případ, kdy je drát nabitý kladně (pro tento případ jsou obrázky (1) a (2) nakresleny). Výsledné pole \mathbf{E} v bodě A je dáno sečtením příspěvků $\Delta\mathbf{E}$ od jednotlivých bodů drátu. Celkový příspěvek $\Delta\mathbf{E}$ od bodů B a C, které jsou symetrické vůči bodu S, leží v rovině kolmé na drát a má směr spojnice bodů A a S. Tuto vlastnost má i výsledné pole \mathbf{E} v libovolném bodě, což je důsledkem nekonečnosti drátu. Zbývá tedy určit velikost E tohoto pole. To lze udělat sečtením (v tomto případě integrací) příspěvků od jednotlivých bodů drátu. V našem případě lze užít také Gaussovu větu, která říká, že celkový tok elektrické intenzity \mathbf{E} uzavřenou plochou S (integrál na levé straně) je přímo úměrný celkovému náboji Q v prostoru vymezeném plochou S :

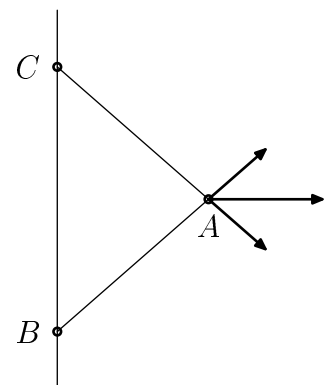
$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Uvažujme válec o poloměru r a výšce l , jehož osa splývá s drátem (viz obrázek (2)). Celkový náboj Q uvnitř válce je roven λl . Tok elektrické intenzity podstavami pláště je nulový, neboť vektor \mathbf{E} leží v rovině podstav. Protože je elektrická intenzita \mathbf{E} kolmá na plášť válce ve všech bodech a její velikost je na celém plášti stejná, je tok pláštěm válce roven součinu povrchu pláště a velikosti elektrické intenzity E . Gaussova věta má tedy tvar:

$$2\pi r l E = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Pokud by byl drát nabitý záporně, potom se změní pouze směr elektrického pole na opačný.

Ze známého elektrického pole drátu již můžeme určit sílu působící na jednu molekulu vody (neuvažujeme vzájemné působení molekul vody). Označme r vzdálenost středu molekuly od drátu. Molekulu si můžeme představit jako dva pevně spojené náboje opačného znaménka o velikosti Q , jejichž vzájemná vzdálenost je l . Nejprve opět uvažujme případ, kdy je drát nabitý kladně. Pokud je moment setrvačnosti dostatečně malý, potom je spojnice obou nábojů v každém okamžiku rovnoběžná s vektorem \mathbf{E} elektrické intenzity – viz obrázek (3). Blíže k drátu je vždy záporně nabitá část



Obr. 2

molekuly, neboť tato poloha je narozdíl od opačné (ta je také rovnovážná) stabilní. Molekula vody je tedy k drátu přitahovaná silou F , pro kterou platí:

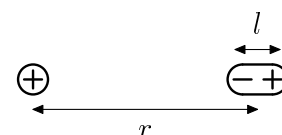
$$F = Q \left(E\left(r - \frac{l}{2}\right) - E\left(r + \frac{l}{2}\right) \right) = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{l}{2}} - \frac{1}{r + \frac{l}{2}} \right) = \frac{\lambda Q l}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2 - \frac{l^2}{4}}.$$

Součin Ql je roven velikosti elektrického dipólového momentu p jedné molekuly vody. Vzdálenost nábojů l je mnohem menší než vzdálenost r molekuly od drátu. Na jednu molekulu vody tudíž působí přitažlivá síla o velikosti:

$$F = \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Snadno nahlédneme, že v případě záporně nabitého drátu je výsledná síla stejná včetně směru působení.

Protože zanedbáváme vzájemné působení molekul, bude výsledný pohyb vodního paprsku stejný jako pohyb jedné molekuly. (Molekuly mezi sebou působí poměrně značnými silami a pohybují se velkými rychlostmi v důsledku tepelného pohybu. Výslednice mezimolekulových sil působících na jednu konkrétní molekulu je však prakticky nulová, neboť mezimolekulové síly mají různé směry. Tepelný pohyb molekul je chaotický, a proto k pohybu kapaliny jako celku nepřispívá. To znamená, že pokud bychom chtěli zpřesnit náš výpočet uvažováním vzájemného působení molekul, potom by bylo nejdůležitější vzájemné působení elektrických dipólů molekul, které se v důsledku působení vnějšího pole (pole drátu) orientují. Námi použitá aproximace má tedy oprávnění.)



Obr. 3

Vzhledem k počátečním podmínkám pohybu a charakteru silového působení drátu na molekuly bude pohyb vodního paprsku rovinný. (Pro obecnou počáteční rychlost to ale není pravda!) Síla působící na molekuly v této rovině klesá s druhou mocninou vzdálenosti od drátu. Pohyb molekul v tomto poli bude tedy stejný jako pohyb hmotného bodu pohybujícího se v gravitačním poli způsobeném bodovým tělesem umístěným v průsečíku drátu a roviny pohybu vodního paprsku. Vodní paprsek se tedy bude pohybovat po hyperbole. Zbývá určit parametry této trajektorie. To stejným způsobem jako v úlohu ze III. dílu seriálu.

Délku hlavní poloosy hyperboly označme a a délku vedlejší poloosy b . Z geometrie hyperboly plyne $b = d$ a podle seriálu platí

$$a = \frac{k}{mv^2}.$$

Úhel ϑ je úhel, o který se vodní paprsek odchýlí od původního směru. Mezi úhlem φ (úhel asymptoty a hlavní osy) a úhlem ϑ platí vztah $\vartheta = \pi - 2\varphi$. Dostáváme tedy:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{cotg} \varphi = \frac{a}{b} = \frac{k}{mv^2 d}.$$

Vodní paprsek se tedy odchýlí od původního směru o úhel:

$$\vartheta = 2 \operatorname{arctg} \frac{\lambda p}{2\pi\epsilon_0 mv^2 d}.$$

Hmotnost jedné molekuly vody lze snadno určit z Avogadrovy konstanty a z molární hmotnosti vody (určí se z relativních atomových hmotností vodíku a kyslíku). Velikost elektrického dipólového momentu jedné molekuly vody lze například určit měřením statické elektrické permitivity vody. Námi odvozený vztah pro odklon vodního paprsku bude se skutečností souhlasit tím více, čím menší bude teplota vody (musí ale zůstat kapalná). Je to způsobeno tím, že při vyšší teplotě je energie tepelného pohybu větší. Tepelný pohyb se totiž netýká pouze translačních stupňů volnosti ale i vnitřních stupňů volnosti molekul (např. rotačních a vibračních). Vzhledem k tepelné energii v rotačních stupních volnosti nedojde k úplné orientaci elektrického dipólu do směru vnějšího elektrického pole. Důsledkem je pak menší přitažlivá síla a tedy i menší odklon vodního paprsku.

Naše řešení rovněž neuvažuje skutečnost, že vlivem vnějšího pole dochází k polarizaci molekul vody (zvětšuje se velikost jejich elektrického dipólového momentu). V tomto případě tento jev není příliš výrazný (narozdíl od jiných kapalných dielektrik), neboť velikost permanentního dipólového momentu molekul vody je poměrně velká.

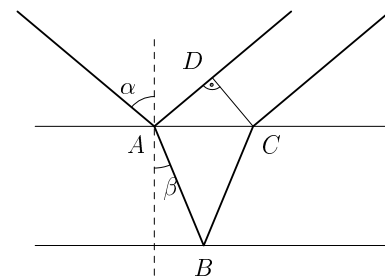
Karel Kolář
kkol8250@menza.mff.cuni.cz

Úloha IV. 2 ... ropná skvrna (5 bodů, řešilo 30 studentů)

Mějme na vodní kaluži kruhovou skvrnu od oleje o poloměru 1 m a tloušťce $10\ \mu\text{m}$. Na tuto skvrnu se díváme z její osy z výšky 1 m. Skvrna je osvětlena bílým světlem ze všech stran. Světlo z jednoho směru můžeme považovat za koherentní. Jaké barvy na hladině uvidíme?

Navrhla Lenka Zdeborová inspirována cvičením z optiky.

Uvažujme místo, kde světlo na vrstvu dopadá pod úhlem α (úhly měříme od kolmice k vrstvě). Část vlny se odrazí na rozhraní vzduch–olej (paprsek i na obr. 4), zbytek projde a opět se odrazí (či projde) od rozhraní olej–voda. V bodě C se opět vlna částečně odrazí a částečně projde atd. Nás zajímají zejména vlny odražené zpět do vzduchu. Tyto vlny se spolu skládají, v běžných případech stačí uvažovat první dvě odražené vlny i a vi , ostatní mají zanedbatelnou intenzitu. Při skládání vln i a vi hraje stěžejní roli rozdíl optických drah Δ obou vln. Spočtěme ho tedy nyní. Index lomu vody je menší než index lomu oleje, tedy při odrazu v bodě A dochází ke změně fáze vlnění (dráhový rozdíl $\lambda/2$), kdežto při odrazu v bodě B se fáze nemění. Dráhový rozdíl tedy je $\Delta = 2n|AB| - |AD| + \lambda/2$. Nesmíme zapomínat na to, že vlnoplocha je kolmá k paprsku, tudíž odečítáme vzdálenost $|AD|$. Indexem lomu násobíme, neboť do opticky hustého prostředí se vejde n -krát více vlnových délek než do vakua (frekvence vlnění je stejná, ale rychlost je menší). Z geometrie na obrázku a zákona lomu $\sin \alpha = n \sin \beta$ dostáváme postupně



Obr. 4

$$\Delta = \frac{2nd}{\cos \beta} - 2d \tan \beta \sin \alpha + \frac{\lambda}{2} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} - \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} + \frac{\lambda}{2}.$$

Aby interference byla konstruktivní, musí být dráhový rozdíl celočíselným násobkem vlnové délky ve vakuu. Tedy podmínka pro zesílení určité vlnové délky v určitém úhlu je

$$4d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} = (2k - 1)\lambda.$$

Rozdíl dvou sousedních vlnových délek, které se zesílí je

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{8d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{4k^2 - 1} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

$$\Delta \lambda < \frac{\lambda_c^2}{2d \sqrt{n^2 - 1}},$$

Pro $\lambda_c = 800\ \text{nm}$, $n = 1,5$ je $\Delta \lambda < 30\ \text{nm}$. Viditelné spektrum je široké asi $500\ \text{nm}$, tedy v každém místě se zesiluje alespoň 16 různých vlnových délek. Na hladině tedy uvidíme opět bílé světlo, abychom viděli duhové barvy, musela by vrstva být užší.

Lenka Zdeborová
Lenka.Zdeborova@st.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... měděný drát (3 body, řešilo 38 studentů)

Máme 50 kg mědi. Jaký nejdelší drát z tohoto množství materiálu lze vytvořit pro přenášení elektrického proudu 1 A, je-li okolní teplota 20 °C ? (Tepelnou kapacitu okolního vzduchu a přírody považujte za nekonečnou.)

Úlohu navrhl Miroslav Panoš.

V důsledku vnitřního odporu měděného drátu (s kruhovým průřezem) vzniká při průchodu elektrického proudu výkon, který se projevuje jako Jouleovo teplo a drát se zahřívá. Jedinou podmínkou je, aby se drát neroztavil. Uvnitř drátu vzniká tepelný výkon P daný vztahem $P = RI^2$, kde I je konstantní proud 1 A a R je elektrický odpor drátu daný vztahem vyjadřujícím zároveň závislost el. odporu na termodynamické teplotě T : $R = \rho_0[1 + \beta(T - T_0)]l/\pi r^2$, kde T_0 je teplota, při níž má měď měrný el. odpor ρ_0 , β je teplotní součinitel el. odporu mědi a r je poloměr drátu.

Drát se na povrchu ochlazuje tepelnou výměnou s okolím a tepelným zářením. Protože ze zadání uvažujeme okolí s nekonečně velkou tepelnou kapacitou, výměnu tepla bude charakterizovat pouze přestup tepla na rozhraní měď-vzduch daný vztahem $Q_1 = \gamma(T - T_v) 2\pi r l$, kde Q_1 tepelný výkon přestupu tepla, T_v je teplota vzduchu a γ je příslušný koeficient.

Budeme-li považovat drát za absolutně černé těleso, bude tepelný výkon zářením Q_2 daný Stefan-Boltzmannovým vztahem $Q_2 = \sigma(T^4 - T_v^4) 2\pi r l$, kde σ je Stefan-Boltzmannova konstanta. Celkový ochlazující tepelný výkon je tedy součet Q_1 a Q_2 : $Q = Q_1 + Q_2$. Mezi výkony P a Q musí nastat rovnováha při teplotě T , která leží těsně pod bodem tání mědi, z čehož získáme minimální poloměr drátu r_{min} .

$$\frac{\rho_0[1 + \beta(T - T_0)]lI^2}{\pi r^2} = [\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)] 2\pi r l,$$

vyjádřením r :

$$r_{min}^3 = \frac{\rho_0[1 + \beta(T - T_0)]I^2}{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)] 2\pi^2}.$$

Uvážíme-li navíc teplotní roztažnost mědi, zkorigujeme poloměr i jednotku délky faktorem $[1 + \alpha(T - T_v)]$, kde α je součinitel délkové roztažnosti:

$$r_{min}^3 = \frac{\rho_0[1 + \beta(T - T_0)]I^2}{[\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)][1 + \alpha(T - T_v)]^3 2\pi^2}.$$

Nyní, známe-li r_{min} vypočteme maximální délku drátu L (za normální teploty) takto tenkého drátu o hmotnosti $m = 50 \text{ kg}$. Zřejmě platí $L = m/\rho \pi r_{min}^2$ a tedy

$$L = \frac{m \pi^{1/3} [1 + \alpha(T - T_v)]^2}{\rho} \left(\frac{[2\gamma(T - T_v) + \sigma(T^4 - T_v^4)]}{\rho_0[1 + \beta(T - T_0)]I^2} \right)^{2/3}.$$

Po dosazení tabulkových hodnot $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}$, $\beta = 4 \cdot 10^{-3}$, $\gamma = 10 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$, $T = 1356 \text{ K}$, $T_0 = 273 \text{ K}$, $\rho = 8930 \text{ kgm}^{-3}$ a námi dané teploty vzduchu $T_v = 293 \text{ K}$ a hmotnosti $m = 50 \text{ kg}$ lze získat odhad $L \approx 2200 \text{ km}$.

Proto, abychom mohli spojit vznik tepla uvnitř vodiče a jeho ochlazení na povrchu, je třeba uvážit tepelnou vodivost drátu, díky níž se dostane teplo k povrchu. Aby tomu tak bylo, musí být ale určitý rozdíl teplot mezi středem a povrchem drátu, čímž ale vznikne i rozdílný měrný el. odpor a tím i nižší výkon uprostřed drátu, který tak částečně zpětně reguluje zvýšenou teplotu.

Samozřejmě lze problém řešit diferenciální rovnicí 2.řádu v polárních souřadnicích, která však nakonec ukáže, že díky velmi dobré tepelné vodivosti mědi a velmi malé závislosti odporu na teplotě bude rozdíl teplot zanedbatelný. Navíc relativně špatné ochlazování na povrchu limituje teplotní spád uvnitř drátu.

Další problémy s řešením se objevily v souvislosti s konstantou přestupu tepla. Jednak byl problém ji najít a jednak tato konstanta už zahrnuje výměnu tepla zářením. Ale lze tedy předpokládat, že platí pro malé teploty a tím pádem při vyšších teplotách, kdy tok zářením roste se čtvrtou mocninou přejde lineární vztah pouze ve vztah pro výměnu tepla vedením.

Jakub Holovský
j.holovsky@cbox.cz

Úloha IV.4 ... Zvířátko (5 bodů, řešilo 43 studentů)

Představte si zvířátko, jehož charakteristický rozměr je L . Odhadněte, jak na L závisí vzdálenost, kterou je schopné urazit po poušti.

A jak závisí na L jeho rychlost běhu po rovině a do kopce? Určete také, jak závisí na velikosti zvířátka výška jeho výskoku.

Nápověda: Uvažte, že $s = vt$. Dále např. uveďte, jak závisí hmotnost zvířátka na L : Víme, že $m = \rho V$, kde ρ uvažujeme konstantní a V je úměrné L^3 , tedy $m \sim \rho L^3 \sim L^3$, hmotnost zvířátka tedy závisí přímo úměrně na L^3 .

Úlohu vypátral Jan Prokleška.

Předpokládejme, že zvířátko je savec, dále předpokládejme, že frekvence kroků zvířátka nezávisí na jeho velikosti (tj. na L), a že zvířátko se neliší v tělesné stavbě, ale pouze ve velikosti.

Nejdříve se zabýváme otázkou jak daleko schopno dojít na poušti. Pravděpodobně nejvíce limitujícím faktorem pro zvířátko je voda (například člověk bez jídla vydrží asi tak měsíc, bez vody nanejvýš pět dní), tu zvířátko jdoucí po poušti spotřebovává hlavně na ochlazování svého organismu. Množství vody v těle zvířátka je úměrné jeho objemu tedy: $M_{voda} \sim L^3$. Hlavním zdrojem ohřevu organismu zvířátka je teplo, které se v něm uvolňuje (pokud zanedbáme slunce — jeho vliv se dá těžko popsat nevíme, kde poušť je, jak dlouho tam trvá den...), množství uvolněného tepla je zřejmě úměrné objemu organismu a tudíž dostáváme vztah: $Q \sim L^3$. Toto odpadní teplo je třeba odvést právě pomocí vody pro hmotnost ztracené (vypocené) vody za jednotku času tedy dostáváme: $M_{vyp} \sim L^3$.

Vidíme tedy, že doba po kterou je zvířátko schopno jít po poušti nezávisí na L (zásoby vody jsou úměrné L^3 a rychlost s jakou je zvířátko ztrácí také).

Jediné v čem se tedy zvířátka budou lišit je délka kroku, ta je úměrná L pro celkovou vzdálenost tedy můžeme psát: $s \sim L$ (všechna zvířátka udělají stejný počet kroků, které mají délku přímo úměrnou L).

Nyní se zabýváme tím, jak rychle je zvířátko schopno běžet. Pravděpodobně nejvýraznější vliv na rychlost zvířátka má maximální frekvence kroků zvířátka. Pokusme se určit, jak závisí na L .

Na to aby zvířátko udělalo krok musí posunout končetinu směrem dopředu, tento pohyb je obecně nerovnoměrně zrychlený. Hmotnost končetiny je úměrná L^3 , síla, která ji urychluje, je úměrná L^2 (síla svalů závisí na počtu svalových vláken, a tedy na jeho průřezu), celkově tedy pro zrychlení máme: $a \sim L^{-1}$. Pokud použijeme vztah pro rovnoměrně zrychlený pohyb (řekněme, že si pohyb končetiny "rozsekáme" tak, že v jednotlivých částech celkového pohybu se pohybuje rovnoměrně zrychleně) $t = \sqrt{2s/a}$ a uvědomíme si, že $s \sim L$ dostaneme pro délku trvání kroku $T \sim L$ a protože délka kroku je rovněž přímo úměrná L , zjišťujeme, že z tohoto pohledu rychlost nezávisí na L .

Pokud započítáváme odporovou sílu, musíme si uvědomit, že $F_{odp} \sim L^2 \cdot v^2$ pro sílu, kterou je schopno působit zvířátko platí $F \sim L^2$ a tedy dostáváme ze rychlost nezávisí na L .

Při běhu do kopce se ve vyjádření odporové síly objeví další člen popisující sklon kopce, dostaneme tedy $F_{odp} \sim L^2 \cdot v^2 + L^3 \sin \alpha$ pro rychlost máme $v \sim \sqrt{k_1 - k_2 L \sin \alpha}$, kde k_1, k_2 jsou konstanty.

Při výskoku musí platit zákon zachování energie, tedy to, že práce vykonána zvířátkem se spotřebuje na jeho přemístění do větší výšky. Pro práci máme: $W = F \cdot s$ a tedy při uvážení $F \sim L^2$ a $s \sim L$ dostaneme $W \sim L^3$. Pro změnu potenciální energie zvířátka máme $\Delta E = mgh$ víme že $m \sim L^3$ celkově tedy opět dostáváme, že výška výskoku nezávisí na L .

Karel Kouřil

kourk0am@mbox.troja.mff.cuni.cz

Úloha IV.P ... míček ve vodě (3 body, řešilo 54 studentů)

Máme trubku ve tvaru písmene V, jedno rameno je svislé a na konci otevřené, druhé s ním svírá ostrý úhel a je na konci (nahore) zatavené. Trubka je téměř plná vody a v zataveném rameni nahore plave míček. Vymyslete způsob, jak dostat míček ven tak, aby voda nevytekla. Nesmíte ji vypustit, svislé rameno musí zůstat pořád svislé a do trubky nesmíte nic strkat.

Úlohu vymyslel Karel Kouřil.

Vyskytlo se několik zajímavých návrhů. Ale fungovaly jenom dva. Oba využívaly setrvačných sil. Stačí si uvědomit, že vztlaková síla působí opačným směrem než síla působící v systému (výslednice gravitační a zdánlivých sil $F = F_g + F_Z$). Uvažujme, že se síla moc nemění na rozměrech míčku, potom si to můžeme představit jako ekvivalentní k normální vztlakové síle v kapalině, jenom místo tíhového zrychlení vezmeme zrychlení $g' = F/m$. Takže vztlaková síla bude působit opačným směrem než F . Stačí nám tedy najít takovou zdánlivou sílu, aby výslednice směřovala směrem do středu zkumavky.

První návrh: Setrvačnou sílu vytvoříme pohybem zkumavky směrem dolů větším zrychlením než tíhovým. Potom výsledná síla v soustavě zkumavky bude působit směrem nahoru a míček se bude pohybovat opačným směrem — ke spojení trubek, potom bychom zastavili a kulička by vyplavala správnou trubkou. Toto řešení má trochu technické problémy, protože je celkem těžké pohybovat se velkým zrychlením dost dlouho.

Druhý návrh: Jako setrvačnou sílu vezmeme odstředivou. Třeba když jedete v autě v zatáčce tak na vás působí odstředivá síla. V tomto návrhu potřebujeme aby projekce síly na směr stěny trubky působila směrem nahoru (výsledná síla na míček potom působí opačně — směrem dolů k spojnicí): $F_0 > F_g \tan \alpha$. To můžeme dosáhnout velkými otáčkami, nebo velkou vzdáleností osy rotace od zkumavky.

Vtipné, ale špatné řešení bylo, že uzavřeme zkumavku a ohřejeme až se všechna voda vypaří, a potom míček spadne dolů. Má to však problém, že hustota té páry bude stejná jako vody, takže vztlaková síla stejná jako u vodě.

Miroslav Kladiva
miroslav.kladiva@st.mff.cuni.cz

Úloha IV . Exp ... změřte ho! (8 bodů, řešilo 48 studentů)

Ledová královna žije v říši, kde je všechno kromě lidí, živočichů, rostlin a několika málo dalších věcí z ledu. Chudinka královna zjistila, že potřebuje nové brýle. Jenže její dvorní brusič brýlí umí jenom brýle ze skla a snad by si vzpomněl, jak je udělat z ledu, ale potřeboval by na to znát jeho index lomu. A jelikož všechny MF tabulky v království jsou z ledu, nejde z nich nic přečíst, a tak mu nezbývá, než ho změřit, jenže neví jak. A tak vás prosí o pomoc. Poradte mu a pro jistotu i danou veličinu změřte sami, neboť on je nešika a nic jiného než brousit brýle neumí.

Úlohu navrhl Milan Berta, pohádku vymyslela Lenka Zdeborová.

Teorie:

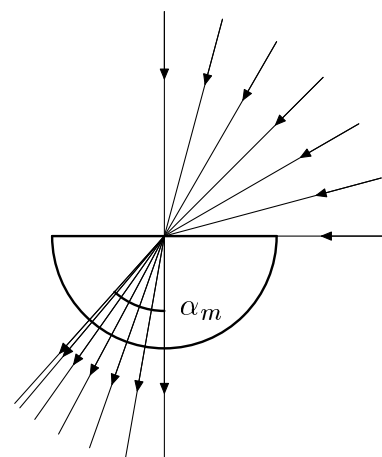
Pro index lomu světla platí Snellův zákon lomu

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2},$$

kde n_1 a n_2 jsou indexy lomu světla jednotlivých materiálů (pro vzduch $n_1 = 1$) a α_1 a α_2 jsou úhly, pod kterým paprsek na rozhraní vchází a vychází.

My jsme použili Abbeův polokulový refraktometr. Jeho základ tvoří průhledná polokoule o známém indexu lomu (většinou ze skla). Měří se ním mezní úhel, pro který, po položení kousku neznámého materiálu s indexem n_2 na polokouli, platí ($\alpha_1 = 90^\circ$)

$$n_2 = n_1 \sin \alpha_m$$



Obr. 5

Dalekohled se pohybuje po kružnici tak, aby byl vždy namířený na bod O, který je středem polokoule, a my tak vidíme jenom paprsky, které z něj vycházejí. Zjistíme průchod tmy a světla, právě tehdy se budeme dívat na rozhraní materiálů pod úhlem α_m

Nezáleží na čírosti materiálu. Jediné, co potřebujeme, je jedna hladká plocha. Ta se zajistí ponecháním ledové kostky chvíli na skle. To je velká výhoda, protože s přípravou pravidelného ledového tělesa jsou veliké potíže. Když bychom chtěli měřit úhel dopadu a lomu na rozhraní vzduch – led klasickou metodou, potřebujeme čirý exemplář ledu s hladkými a rovnoběžnými stěnami, jinak se dopustíme chyby. Protože my se do toho ledu budeme z některé strany i dívat.

Vybíráme z dalších metod, které byly v experimentálce použity. Vezmeme si na pomoc učebnici fyziky třetího ročníku – proto k sestavě jen krátce. Vyrobíme si ledový půlkruh a úhly α_1 a α_2 vyznačujeme špendlíky, přičemž všechny mají být při pohledu z boku na půlkruh v zákrytu. Záleží na tom s jakou přesností byl vyroben ten půlkruh. Nejpřesněji se dá vyrobit, když máme přesnou půlkruhovou formu. I tady se dal měřit mezní úhel.

Měříme tzv. Brewsterův úhel. Pře něj platí $\sin \alpha_p = n$. Je to úhel, při kterém se světlo (např. ze svíčky) úplně zpolarizuje. Jsou alespoň dva způsoby převedení. Rovná ledová plocha a polarizační sklíčko nebo dvě ledové plochy. To druhé je složitější. Potřebujeme zajistit, aby nám světlo dopadalo na led pod úhlem α_p a odtud odražené na druhou ledovou plochu taky pod úhlem α_p . V každém případě hledáme úhel, při kterém se nám světlo ze svíčky po odrazu(ech) ztratí.

”Jak vyrobit čirý led?”, se ptali někteří z vás. Nejčirější led se dá vyrobit podchlazením vody a následným drbnutím do nádoby s ní. Pomalé mražení je taky řešením, ale nejjednodušší snad je zajít si k některému rybníku nebo koupališti a poohlídnout se tam. Led bude zaručeně čistý, ale zpracovat ho na pravidelný útvar nám dá nemalou práci.

Naměřené a získané hodnoty:

Index lomu skla, ze kterého byla vyrobená polokoule: $n_1 = 1,737 \pm 0,002$

č.m.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
α_m	49°41'	49°45'	49°40'	49°45'	48°30'	50°00'	49°50'	49°42'	49°35'	49°40'
n_2	1,324	1,326	1,324	1,326	1,301	1,331	1,327	1,325	1,322	1,324
$\Delta n_2 / 10^{-3}$	1	3	1	3	22	8	4	2	1	1
$(\Delta n_2)^2 / 10^{-6}$	1	9	1	9	484	64	16	4	1	1

průměrná hodnota: $\bar{n}_2 = 1,323$

standardní odchylka: $\sigma_{stand} = 8 \cdot 10^{-3}$ ke hrubé chybě dle $3\sigma_{stand}$ kritéria nedošlo

statistická odchylka: $\sigma_{stat} = 3 \cdot 10^{-3}$

systematická odchylka: $\sigma_{syst} = 1 \cdot 10^{-3}$ což můžeme zanedbat

celková chyba: $\sigma_{celk} = 9 \cdot 10^{-3}$ hledaná hodnota: $n_2 = 1,32 \pm 0,01$

Diskuse: Chyb jsme se dopouštěli, když jsme určovali přechod mezi tmou a světlem. Totiž to rozhraní někdy nebylo ostré, vadila tam voda, která se tála z ledu a stékala skrz hranu polokoule. To by se dalo obejít, kdybychom jsme pracovali při teplotách pod nulou, nejlepší tedy venku (získat dostatečně veliký mrazák by byl docela problém).

Závěr: Hodnota indexu lomu ledu, kterou jsme naměřili pro žluté světlo, je $1,32 \pm 0,01$. Chyba měření vyšla 0,7%, což je velice dobré.

Na závěr ještě básnička od Lucie Vasické, která se nám velice líbila.

Já chudáček malinký,
sedím tady v zmrzlé díře,
očička mám malinký,
od pláče a bédování.

Královnička zmrzlé říše,
brejličky potřebuje,
avšak já hlupák starý,
index lomu zapomněl.

Po ta léta nedělání,
já brusič zlenivěl,
kdo pak mi jen poradí,
to, co já už zapomněl?

Nedělej si hlavu starý,
já ti to přec poradím,
kouknu do tabulek starých,
index lomu ledu prozradím.

Jak řek, tak udělal,
starý brusič zajásal,
zachvilenu už zase znal index lomu ledu,
že je 1,31 vůči vzduchu pro žluté světlo.

Pár chvil na to, celý šťastný
brejličky vyráběl,
od krále a královničky
pochválení obdržel.

Milan Berta

bertm0am@artax.karlin.mff.cuni.cz

Úloha S.IV ... draci (5 bodů, řešilo 42 studentů)

a) Vžijte se do role prince, který se chystá useknout drakovi hlavu. Má dlouhý těžký meč. Jakým místem meče má vést úder, aby ho náraz nepraštil do ruky? Meč můžete považovat za homogenní, nebo navrhnout lepší model.

b) Vymyslete co nejreálnější model, jak draci chrlí oheň. Pokud nevěříte, že draci existují, můžete místo toho vymyslet, jak poznat směr rotace turbíny ve vysavači (aniž byste ho rozebírali).

c) Napište nám své návrhy na obsah dalších dílů seriálu.

Zadali autoři seriálu Honza Houštěk a Lenka Zdeborová

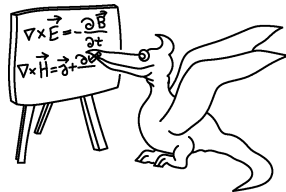
a) Uvažujme, že princovo zápěstí je zároveň osa otáčení meče. Před úderem do drakovy hlavy nechť se konec meče pohybuje rychlostí v , úhlová rychlost vzhledem k ose otáčení bude $\omega v/l$, kde l je délka meče. Nechť meč narazí do drakovy hlavy ve vzdálenosti d od prince, bod nárazu se při úderu zastaví, aby princ nebyl praštěn do ruky, nesmí se změnit rychlost bodu, který drží, tj. meč se musí zastavit celý. Celkový impuls momentu vzhledem k ose otáčení tedy bude $M\Delta t = I_0\Delta\omega = F\Delta t d = \Delta p d$, kde $I_0 = ml^2/3$ je moment setrvačnosti tyče, $\Delta p = mv/2$ je celková změna hybnosti, $\Delta\omega$ je celková změna úhlové rychlosti. Po dosazení a vyjádření dostáváme pro vzdálenost místa úderu od princovy ruky $d = 2l/3$.

b) Modelů, podle kterých draci chrlí oheň, se nám sešlo opravdu mnoho. Nejčastěji jste navrhovali, že drak má nějaké speciální plynové vaky, do kterých shromažďuje hořlavý plyn (methan, páry ethanolu atd.), jež vzniká v jeho útrobach při rozkladu potravy. V hubě má pak drak buďto křesátko na zubech nebo elektrický orgán jako mořští úhoři, jímž plyn po vytlačení ze zásobního vaku zapálí. Tlamu musí mít drak prorostlou nejlépe drahokamy, aby se nespálil.

Co se týče vysavače měli jsme při zadávání úlohy na mysli následující: Vezmeme vysavač do ruky (osa rotace motoru jde vodorovně) a otočíme ho kolem svislé osy kolmé na osu rotace turbíny. Změníme tím směr vektoru \mathbf{L} . Chceme-li udržet vysavač ve vodorovné poloze, musíme na něj podle druhé impulsové věty působit momentem sil ve směru změny $\Delta\mathbf{L}$. Tedy např. směřuje-li \mathbf{L} před nás a točíme-li doleva, budeme muset tlačít předeek vysavače dolů, piloti letadel říkají, že vysavač bude lehký na čumák.

Ve vašich řešeních se však nejčastěji objevil následující postup. Vysavač zavěsíme na provázek tak, aby osa rotace motoru byla svislá a zapneme ho. V počáteční fázi sebou vysavač škube na jednu stranu a to na stranu opačnou než se točí motor, stane se tak v důsledku reakční síly.

c) Řešení viz tento a příští díl seriálu :-).



Seriál na pokračování

Kapitola 6: Fundamentální principy mechaniky

Úvod

V prvním díle seriálu jsme formulovali základní „axiomy“ mechaniky – Newtonovy zákony, z nich jsme dosud vycházeli. V tomto předposledním díle si ukážeme alternativní formulace základních principů klasické mechaniky. Naše cesta se bude ubírat od Newtonova vektorového formalismu k formalismu analytickému, v němž základní veličiny mají skalární charakter a pohybové rovnice získáme jen derivováním těchto veličin podle vhodných proměnných. Význam alternativních formulací Newtonových pohybových zákonů spočívá zejména v tom, že podobným způsobem se popisují i nemechanické jevy (najdeme je např. v teorii pole či obecné relativitě). Dále nám tyto formulace (využívají diferenciálního a variačního počtu¹⁾) dávají nástroj na řešení složitých úloh. A v neposlední řadě jsou krásné a elegantní. Vzhledem k obtížnosti matematiky spojené s principy, které budeme uvádět, nebudeme většinou vztahy odvozovat či matematicky zdůvodňovat, toho se dočkáte ve 3. semestru MFF.

Vazby

Síly, které působí na hmotné body, můžeme rozdělit do dvou skupin. Na jedné straně jsou síly vtíštěné (pochvě) \mathbf{F} , např. gravitace, elektromagnetická síla, odpor vzduchu atd. Na druhé straně jsou to síly vazbové \mathbf{R} , tj. reakce podložek či obecnějších vazeb. Pod pojmem vazba si představujeme určité omezení pohybu např. matematické kyvadlo se musí pohybovat tak, aby vzdálenost závaží od osy otáčení byla stále stejná. Často je vazba dána pohybem po povrchu

¹⁾ Narozdíl od diferenciálního počtu, kde jsou proměnnými čísla, jsou ve variačním počtu proměnnými funkce.

jiného tělesa. Matematicky zapisujeme vazby následovně: Pohyb po kouli o poloměru a se středem v počátku je omezen vazbou $\varphi(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$. Pohyb po nakloněné rovině $\varphi(\mathbf{r}) = z - x \tan \alpha = 0$. Obecně vazby závisí na poloze, čase a rychlosti. Dále se budeme zabývat pouze popisem pohybu podrobeného tzv. holonomním (tzn. na rychlosti nezávislejícím) vazbám. Platí totiž velmi užitečné pravidlo, totiž že síly holonomních vazeb jsou k vazbám kolmé.

d'Alembertův princip

Uvažujme tedy pohyb podrobený holonomním vazbám. Označme $\delta \mathbf{x}$ malé posunutí, které je v souladu s vazbami. Toto posunutí skalárně vynásobíme vazbovou silou \mathbf{R} . Víme, že \mathbf{R} je kolmá na $\delta \mathbf{x}$, tedy $\delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{R} = 0$. Vazbovou sílu můžeme psát jako $\mathbf{R} = m\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}$. Po rozepsání do kartézských složek tedy pro pohyb hmotného bodu dostáváme podmínku

$$\sum_{i=1}^3 (m\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0 .$$

Ukazuje se, že tento vztah lze zobecnit pro N hmotných bodů v tzv. d'Alembertův princip mechaniky: Soustava N hmotných bodů se vyvíjí takovým způsobem, že

$$\sum_{i=1}^{3N} (m_i\ddot{x}_i - F_i)\delta x_i = 0 \quad (1)$$

pro každé tzv. virtuální posunutí δx_i , čímž míníme nekonečně malé posunutí, které je v každém okamžiku v souladu s holonomními vazbami ($\varphi_k(x_1, \dots, x_{3N}, t) = 0, k = 1, \dots, v$, kde v je počet vazeb). Jinak řečeno virtuální posunutí je libovolný vektor ležící v tečném prostoru k vazbám. Poznamenejme ještě pro ujasnění, že $m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j}, j = 1, \dots, N$. D'Alembertův princip je ekvivalentní Newtonovým pohybovým zákonům. Pro řešení úloh sám o sobě tento princip příliš užitečný není, ale odvozují se z něj dále uváděné principy.

Dva důsledky d'Alembertova principu

a) Není-li pohyb omezen žádnými vazbami, tj. vazbové síly nejsou (jsou nulové), musí (1) platit pro všechny δx_i , a tedy (1) přechází v Newtonovy rovnice $m_i\ddot{x}_i = F_i$.

b) Zkoumáme-li systém bez pohybů, je pro všechny i $\ddot{x}_i = 0$ a tedy se (1) redukuje na tzv. princip virtuálních prací

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i\delta x_i = 0 . \quad (2)$$

Slovně se dá (2) formulovat asi takto: Práce vykonaná při nekonečně malém virtuálním posunutí z rovnovážné polohy je nulová. Princip virtuálních prací se s výhodou používá při hledání rovnovážných poloh systému. V konzervativním poli (tj. pole, kde existuje potenciál) je řešení (2) ekvivalentní hledání polohy, ve které má potenciál stacionární bod (nejčastěji minimum).

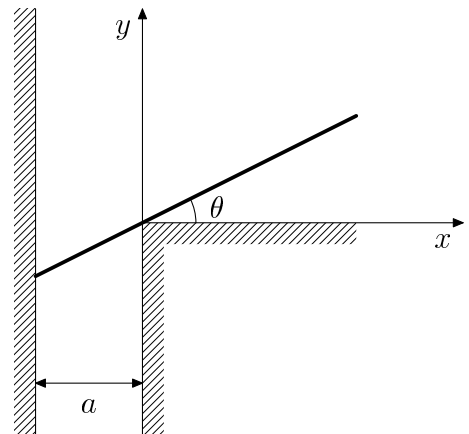
Příklad 15: tyčka

Najděte rovnovážnou polohu tyčky délky $2l$ opřené o hranu stolu a stěnu (viz obr. 6).

Zavedeme soustavu souřadnic, viz obr. 6. Princip virtuálních prací zapíšeme jako $F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z = 0$. Jelikož jedinou vtištěnou silou je tíha \mathbf{G} , která má směr osy y , redukuje se princip na $\delta y = 0$. Neboli rovnovážná poloha je tam, kde má souřadnice y (výška těžiště) extrém. Parametrizujeme polohu tyčky úhlem θ , pak $y(\theta) = -a \tan \theta + l \sin \theta$, zderivováním dostaneme $\delta y = (-a/\cos^2 \theta + l \cos \theta)\delta \theta = 0$, což platí pro

$$\cos \theta = (a/l)^{\frac{1}{3}},$$

pro takový úhel je tedy tyč v rovnovážné poloze.



Obr. 6

Lagrangeovy rovnice

Jedním z nejčastějších prostředků používaných při řešení složitějších mechanických úloh, jsou tzv. Lagrangeovy rovnice II. druhu. Mají totiž dvě zásadní výhody. Jednak se dají snadno sestavit (postup je téměř manuální činností), což oceníme zejména u složitých systémů, ve kterých bychom se při sestavování newtonovských rovnic do té spousty sil určitě zamotali. Druhá výhoda spočívá v tom, že Lagrangeův formalismus není vázaný na kartézské souřadnice, můžeme si tedy zvolit takové souřadnice, které se nejlépe hodí na daný problém. Drobná nevýhoda je skutečnost, že k používání formalismu je nutné umět derivovat a řešit diferenciální rovnice²⁾.

Podle vlastností systému se rozlišuje mnoho variant Lagrangeových rovnic, my se však zaměříme na nejjednodušší a nejužitečnější případ, kdy existuje potenciální energie (označme V). Celkovou kinetickou energii systému označme T ³⁾. Klíčovou veličinou je pak rozdíl $L = T - V$, který budeme nazývat Lagrangeova funkce nebo krátce *lagrangian* [čti lagránžián].

Pro popis systému si můžeme zvolit libovolnou sadu veličin, pomocí kterých umíme popsat každý možný stav systému. Volíme jich co nejméně a tak, aby co nejlépe „pasovaly“ na daný problém, tedy pro matematické kyvadlo kývající v jedné rovině nevolíme x, y, z , ale úhel vychýlení ze svislé polohy. Tím jsme zároveň vyřešili popis vazeb. Číslům popisujícím stav systému budeme říkat *zobecněné souřadnice* a označíme je $q_1 \dots q_n$. Většinou to budou vzdálenosti, poměry vzdáleností, nebo úhly.

Jediné, co musíme při řešení úlohy pomocí Lagrangeova formalismu udělat, je vyjádření L pomocí zobecněných souřadnic. Obecně to bude funkce zobecněných souřadnic q_i , jejich derivací \dot{q}_i a času. Tuto funkci postupně parciálně zderivujeme podle všech q_i a \dot{q}_i . Tím dostaneme $2n$ jakýchsi výrazů, které chápeme již pouze jako funkce času a sestavíme celkem n rovnic tohoto tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 . \quad (3)$$

To jsou již pohybové rovnice, jejichž řešením dostaneme závislost zobecněných souřadnic na čase. Uveďme tedy několik příkladů:

Příklad 16: volný pád

Pro řešení volného pádu potřebujeme jedinou zobecněnou souřadnici h – výšku nad zemí. Vyjádřit lagrangian je snadné, je totiž $T = m\dot{h}^2/2$, $V = mgh$ a tedy $L = T - V = m\dot{h}^2/2 - mgh$. Příslušné parciální derivace jsou $\partial L/\partial h = -mg$ a $\partial L/\partial \dot{h} = m\dot{h}$. Nyní zderivujeme druhý výraz podle času a dosadíme do (3). Dostáváme $m\ddot{h} + mg = 0$, tedy to samé, co bychom dostali z II. Newtonova zákona.

Příklad 17: matematické kyvadlo

Kývá-li kyvadlo v jedné rovině, stačí nám stačí jediná zobecněná souřadnice – úhel vychýlení ze svislé polohy φ . Má-li kyvadlo délku l a hmotnost m , platí $T = ml^2\dot{\varphi}^2/2$ a $V = -mgl \cos \varphi$. Sestavíme tedy Lagrangeovy rovnice:

$$\frac{d}{dt} (ml^2\dot{\varphi}) + mgl \sin \varphi = 0,$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Dostali jsme naši známou rovnici pro matematické kyvadlo, kterou řešíme pro malé kmity lineární (nahradíme $\sin \varphi$ argumentem φ).

Příklad 18: Huygensovo kyvadlo

Řešme pohyb kvádru, který dokonale klouzá bez tření uvnitř cykloidy (u kuličky by nám trochu komplikovaly život rotace). Cykloida je křivka, kterou opisuje bod kružnice, která se bez prokluzu valí po přímce. Na této úloze si ukážeme, jak je výhodná možnost volby zobecněné

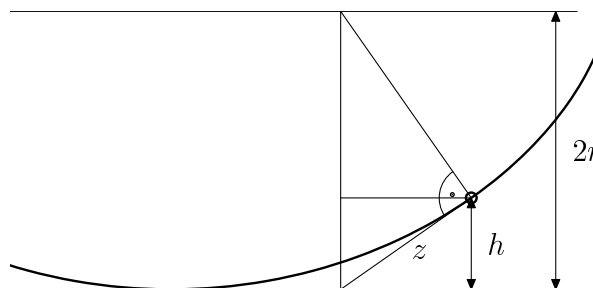
²⁾ Rovnice, ve které vystupuje neznámá funkce a její derivace. V podstatě každá pohybová rovnice je diferenciální rovnicí.

³⁾ Koho to mate, necht klidně píše E_p a E_k , varianta bez indexů je ale rychlejší na psaní.

souřadnice. Za zobecněnou souřadnici zvolíme v tomto případě vzdálenost z (viz obr. 7), protože pomocí ní snadno vyjádříme L . Velikost rychlosti kvádrů je totiž rovna dvojnásobku rychlosti, kterou se zvětšuje úsečka z (viz úloha seriálu), tedy $T = 2m\dot{z}^2$. Z Eukleidovy věty zase snadno vyjádříme výšku kvádrů nad nejnižším bodem cykloidy, $h = z^2/2r$. Máme tedy lagrangian $L = 2m\dot{z}^2 - mgz^2/2r$, ze kterého dostáváme Lagrangeovu rovnici

$$4m\ddot{z} + \frac{mg}{r}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{g}{4r}z = 0.$$

Dostali jsme rovnici harmonických kmitů s periodou $T = 2\pi\sqrt{4r/g}$. Přitom jsme nikde nic nezanedbávali ani nelinearizovali! Možná vás zarazilo slovo „kyvadlo“ v názvu této úlohy. Pokud bychom totiž přinutili závaží matematického kyvadla místo pohybu po kružnici k pohybu po cykloidě, mělo by takové kyvadlo periodu nezávislou na výchylce i pro velké úhly. Zkuste se zamyslet, jak by se to dalo udělat, v příštím a posledním dílu vám prozradíme řešení.



Obr. 7

Hamiltonův variační princip

V mechanice existují ještě obecnější principy, než Lagrangeovy rovnice. Většinou se již tolik nehodí k řešení úloh, ale mají velký teoretický význam. Jedním takovým principem je takzvaný *Hamiltonův variační princip* nebo též princip minimální akce.

Předpokládejme, že známe výchozí a konečnou konfiguraci systému (např.: v čase 0 je hmotný bod v počátku a v čase 10 s je v bodě [10 m, 20 m]). Princip minimální akce pak tvrdí, že si systém ze všech možných pohybů, kterými lze přejít z výchozího do konečného stavu, vybral právě ten, při kterém byla střední hodnota L^4) nejmenší možná. Taková formulace vám možná připomíná Fermatův princip minimálního času, ze kterého lze odvodit zákony paprskové optiky – přímočaré šíření, odraz i lom. Stejně tak lze z principu minimální akce odvodit Lagrangeovy rovnice a z nich Newtonovy zákony.

My si zde pro ilustraci ukážeme, že pro nejjednodušší pohyb – pohyb volného tělesa – je střední hodnota lagrangianu pro skutečný pohyb opravdu menší než pro jakýkoliv jiný pohyb. Protože nemáme dostatek prostředků na řešení tohoto problému pomocí integrálů, rozdělíme si časový interval $(0, t)$ na n stejně širokých částí (n je velké) a označme v_i rychlost v i -tém intervalu. Nechť počáteční poloha je v počátku a koncová v bodě se souřadnicemi $[d, 0, 0]$. Pro rychlosti pak platí

$$\sum_{i=1}^n \frac{t}{n} v_i = d \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i = \frac{d}{t}.$$

Lagrangian pro volné těleso je pouhá kinetická energie, neboť potenciální je konstantní. Vyjádříme tedy jeho střední hodnotu:

$$L_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{m}{2} v_i^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{2L_s}{m}.$$

Z matematiky možná znáte nerovnost mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2},$$

kde rovnost nastává pouze v případě $v_1 = v_2 = \dots = v_n$. Dosadíme-li do této nerovnosti, dostáváme po snadné úpravě

$$L_s \geq \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{t} \right)^2.$$

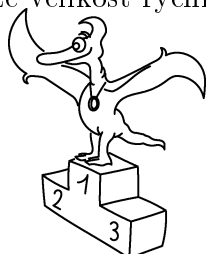
⁴⁾ Střední hodnota funkce na intervalu je definovaná jako plocha pod grafem této funkce lomeno šířka intervalu.

Střední hodnota lagrangianu je tedy větší nebo rovna konstantě, která nezávisí na průběhu pohybu. Minimální bude tedy v případě, že nastane rovnost. Pak jsou ale všechny rychlosti stejné a jde o rovnoměrný přímočarý pohyb s rychlostí $v = d/t$. Vlastně jsme tedy pomocí Hamiltonova variačního principu dokázali I. Newtonův zákon.

Úloha VI. S ... principy mechaniky

a) Pomocí principu virtuálních prací nalezněte rovnovážnou polohu systému na obr. 6, pokud navíc na konec tyče zavěsíme závaží o hmotnosti M .

b) Dokažte tvrzení, které jsme při řešení pohybu Huygensova kyvadla použili pro pohyb po cykloidě, totiž, že velikost rychlosti pohybu vyšetřovaného bodu je rovna $2\dot{z}$.



Pořadí řešitelů
po IV. sérii



Kategorie čtvrtých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	IV	Σ
	Student	Pilný	F.1	MFF UK	5	5	3	5	3	8	5	100	34	134
1	Jan	Kunc	4.A	G Kolín	2	5	1	1	3	8	2	65	22	97
2	Peter	Čendula	4.B	G Liptovský Mikuláš	—	—	—	—	—	—	—	—	0	69
3	Martin	Beránek		G Praha - Ohradní	—	—	3	3	2	—	3	69	11	66
4	Vladimír	Fuka	sept. A	G Rakovník	—	2	1	—	1	3	1	31	8	55
5	Zoltán	Mics	4.B	G Šahy	4	2	2	1	3	—	5	65	17	53
6	Juraj	Feilhauer	B	G Bratislava	2	—	1	1	1	0	2	24	7	41
7	Miroslav	Kozel	4.A		1	4	1	0	0	—	1	27	7	35
8	Jan	Kratochvíl	4.K	SPŠST Praha - Pan.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	32
9	Pavol	Mikčo	4.B	G Stropkov	—	—	—	—	—	—	—	—	0	31
10 - 11	Peter	Valachovič	4.B	SPŠ Trenčín	—	—	0	1	1	2	2	25	6	29
10 - 11	Karel	Židek	4.E	G Opava	—	—	—	—	—	—	—	—	0	29
12	Martin	Sikora		G Bílovec	3	—	—	—	—	2	—	38	5	27
13	Nina	Benešová		G Praha	—	—	—	—	—	4	—	50	4	26
14 - 15	Zdeněk	Cejnar	4.A	G Říčany	—	2	—	—	1	—	—	30	3	24
14 - 15	Patrik	Hudec	4.C	G Bílovec	—	—	0	—	—	3	—	27	3	24
16	František	Havlůj		G Praha	—	—	—	—	—	—	—	—	0	23
17	Petra	Adamová	4.A	G Benešov	—	—	—	0	—	5	1	38	6	22
18 - 19	Jakub	Levic	sept. B	G Louny	—	—	—	—	—	—	—	—	0	21
18 - 19	Jaroslav	Tykal	4.C	G Jihlava	—	—	—	—	—	—	—	—	0	21
20 - 21	Dáša	Eisenmann.	4.A	G Praha - Mezi šk.	—	—	0	0	—	—	3	27	3	19
20 - 21	Ondřej	Plašil	okt. B	G Praha - Chodovická	—	—	—	—	—	—	—	—	0	19
22	Sebastian	Höppner			5	5	2	—	—	5	1	69	18	18
23 - 24	Ladislav	Benda		GJKT	—	—	—	—	—	—	—	—	0	17
23 - 24	Lukáš	Sobek			0	—	—	0	—	1	—	6	1	17
25	Jaromír	Chalupský	sept. A	G Sušice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	16
26	Pavel	Řezanka	4.C	G Praha - Zborovská	—	—	0	—	0	—	2	15	2	14
27 - 28	Jan	Bauer	sept. A	G Praha - Sladk.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	13
27 - 28	Petra	Dobroucká	7.BV.	G Moravská Třebová	—	—	—	—	—	—	—	—	0	13
29 - 31	Pavel	Hančar		SPŠ Jičín	—	—	0	—	1	—	—	13	1	12
29 - 31	Ondřej	Svítek			5	2	—	—	3	—	2	60	12	12
29 - 31	Martin	Šzablatura		SPŠ Karviná	—	—	—	1	3	0	—	25	4	12
32 - 34	Jan	Alster	sept. A	G Holešov	—	—	—	—	—	—	—	—	0	11

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>100</i>	<i>34</i>	<i>134</i>
32 - 34	Martin	Holík	4.C	G Bílovec	—	—	—	—	—	—	—	—	0	11
32 - 34	Pavel	Janda	sept.	G Telč	—	—	—	—	—	—	—	—	0	11
35 - 36	Michal	Bláha	4.M	SPŠST Praha - Pan.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	10
35 - 36	Jaroslava	Plasová	okt. C	G Klatovy	—	—	—	—	—	—	—	—	0	10
37	Ivan	Dovica		G Košice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	9
38 - 42	Martin	Jakl	6.D	G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
38 - 42	Pavel	Kočica	4.A	G Uh. Brod	—	—	—	1	0	—	—	13	1	8
38 - 42	Tomáš	Leško			—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
38 - 42	Martin	Šimek	sexta	G Telč	—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
38 - 42	Vojtěch	Uhlíř		G Uherské Hradiště	—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
43 - 44	Ivan	Banas	4.G	G Martin	—	—	—	—	—	—	—	—	0	7
43 - 44	Michal	Tarana		G Žilina	—	—	—	—	—	—	—	—	0	7
45 - 46	Martin	Hrba	sept. A	G Sušice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	5
45 - 46	Alice	Koželuhová		G Brno	—	—	—	—	—	—	—	—	0	5

Kategorie třetích ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	<i>5</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>5</i>	<i>3</i>	<i>8</i>	<i>5</i>	<i>100</i>	<i>34</i>	<i>134</i>
1	Eva	Skopalová		G Poprad	—	4	3	1	1	8	3	69	20	86
2	Michael	Komm	sept.	G Praha - Parlářova	—	2	3	2	3	1	3	48	14	57
3	Luboš	Bednárik	3.F	G Trenčín	—	—	0	1	1	8	2	50	12	56
4	Michal	Hajn		G Jihlava	—	—	—	0	3	3	0	29	6	49
5	Miroslav	Šulc	sexta B	G Ústí n. L.	—	3	1	3	0	4	1	41	12	46
6	Matej	Dubový	3.B	G Trenčín	—	—	0	0	1	3	1	21	5	45
7	Ondřej	Vencálek	3.B	G Frýdek-Místek	—	—	0	4	—	6	—	71	10	40
8	Miroslav	Frost	sept. A	G Brno - Elgartova	—	3	2	1	1	0	2	31	9	38
9	Zdeněk	Čejka		G Praha - U Lib. zám.	—	—	—	—	1	7	—	62	8	37
10	Václav	Matouš	3.A	G Klatovy	—	—	—	0	0	2	—	13	2	36
11	Tomáš	Buchta		G Praha-Zborovská	—	—	0	1	3	1	—	26	5	34
12	Iva	Kouřilová	3.B	OA Blansko	—	—	—	—	—	—	7	140	7	32
13	Jakub	Galgonek		GPB Frýdek-Místek	—	—	—	—	1	—	—	20	1	31
14	Jiří	Kosina	sexta	G Blansko	—	—	—	—	2	—	1	30	3	26
15	Lenka	Beranová	sept. C	G Klatovy	—	5	—	—	—	6	1	67	12	24
16	Jan	Fröhlich	7.A	G Praha - Mezi šk.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	22
17 - 18	Miroslav	Krůs	3.A	G Klatovy	0	—	—	0	—	5	1	29	6	19
17 - 18	Jaroslava	Schovancová		G Praha	—	—	0	—	1	—	—	13	1	19
19	Jakub	Kratochvíl		G Čáslav	—	—	—	—	3	—	2	50	5	16
20 - 21	Jiří	Eliášek	3.B	G Trutnov	—	—	3	—	—	—	—	100	3	14
20 - 21	Jindřich	Štáštka	3.E	G Sokolov	2	—	—	0	—	—	—	25	2	14
22 - 23	Milan	Jalový	sexta A	G Blansko	—	—	—	—	1	—	1	20	2	13
22 - 23	Jiří	Palek	3.A	G Nové Strašecí	—	—	—	—	—	—	—	—	0	13
24	Pavel	Kwecien	3.A	G Dvůr Králové	—	—	—	—	—	—	—	—	0	12
25 - 26	Václav	Bouše	3.A	G Praha - Mezi šk.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	10
25 - 26	Jana	Nováková	3.A	G Ždár n. Sázavou	—	—	—	—	—	—	—	—	0	10
27	Zuzana	Svobodová		G Zlaté Moravce	—	—	0	1	1	—	—	18	2	9
28 - 30	Anna	Fučíková		G Třebíč	—	—	—	3	1	—	1	38	5	8
28 - 30	Karol	Martinka	3.G	G Trenčín	—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
28 - 30	David	Šubrt		G Děčín	—	—	—	0	—	—	—	0	0	8
31 - 33	Michal	Kabát	3.A	G Púchov	—	—	—	1	0	—	1	15	2	7
31 - 33	Miroslav	Kačena	sept.	G Trenčín	—	—	—	—	—	—	—	—	0	7
31 - 33	Michal	Zapletal	P2C	G Rožnov p. R.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	7
34 - 36	Matěj	Görner		G Praha	—	—	—	—	—	—	—	—	0	6
34 - 36	Zdenka	Marková	3.A	G Holešov	—	—	—	—	—	—	—	—	0	6
34 - 36	Karel	Martišek	sexta A	G Brno - Elgartova	—	—	—	—	—	—	—	—	0	6
37	Ondřej	Srba	3.B	G Příbor	—	—	—	—	—	—	—	—	0	3
38	Petr	Čech	3.A	G Přerov	—	—	—	—	—	—	—	—	0	2
39 - 40	David	Herčík		G Liberec	—	—	—	—	—	—	—	—	0	1
39 - 40	Branislav	Zríny	sept. A		—	—	—	—	1	—	0	10	1	1

Kategorie druhých ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	5	5	3	5	3	8	5	100	34	134
1	Miroslav	Hejna	6A8	G Rychnov n. K.	5	5	3	5	3	7	6	100	34	116
2	Lukáš	Chvátal	6A8.	G Brno - Vejrostova	5	3	—	1	1	—	6	70	16	66
3	Michal	Bareš	sexta A	G Plzeň - Mik. nám.	—	4	3	2	3	6	3	72	21	64
4	Václav	Cviček	2.A	G Frýdek-Místek	—	3	1	3	3	5	3	62	18	63
5	Jan	Prachař		G Rychnov n. K.	5	3	0	2	1	7	2	59	20	58
6	Luboš	Matásek	sexta A	G Plzeň - Mik. nám.	—	—	1	2	1	7	—	58	11	56
7	Tibor	Vansa		G Moravská Ostrava	0	3	0	1	1	8	—	45	13	51
8	Karel	Tůma	sexta A	G Moravská Ostrava	—	3	0	1	1	7	3	52	15	50
9	Jaroslav	Trnka	2.B	G Praha	0	0	0	2	1	8	2	38	13	48
10	Petr	Šimek	2.A	G Blansko	—	—	—	—	—	3	—	38	3	37
11	Vít	Šípál	2.B	G Ústí n. L. - Jateční	—	—	—	2	0	6	3	52	11	34
12	Jaroslav	Kudlička	sexta A	G Hodonín	—	5	2	—	1	7	—	71	15	28
13	Barbora	Galaczková	2.B	G Třinec	—	—	—	—	1	8	—	69	9	24
14	Miroslav	Havelka		G Zastávka	1	2	0	1	1	0	2	21	7	23
15	Marek	Vyšinka	6AV	G Brno	1	—	—	0	—	—	2	17	3	21
16	Pavel	Čížek	sexta	G Kralupy n. Vl.	—	—	0	1	—	—	—	17	1	16
17 - 18	Václav	Varvařovský	kvinta A	G Plzeň - Mik. nám.	—	—	—	—	—	—	—	—	0	15
17 - 18	Miroslav	Zgažar		SPŠCH Ostrava	—	—	0	—	—	7	—	64	7	15
19	Bára	Vostracká	sexta		—	—	—	—	—	—	—	—	0	13
20 - 21	Šárka	Kreuzová	sexta		—	—	—	—	—	—	—	—	0	12
20 - 21	Stanislav	Mlenský	2.B	COP Hronov	—	2	0	—	0	5	—	33	7	12
22 - 23	Jan	Klusoň	sexta	G Litomyšl	—	—	—	—	—	—	—	—	0	11
22 - 23	Petr	Pošta		G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	11
24	Markéta	Růžičková	2.A	G Cheb	—	—	—	—	—	—	—	—	0	10
25 - 27	Petr	Gibas	A	G Praha - Zborovská	—	—	—	—	—	—	—	—	0	9
25 - 27	Lukáš	Snášel	2.B	COP Hronov	—	1	—	—	—	3	—	31	4	9
25 - 27	Jaroslav	Štencl	B		—	—	—	—	—	3	—	38	3	9
28	Zuzana	Kopová		G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	8
29 - 30	Jan	Křivka	2.B	COP Hronov	—	2	—	—	0	1	—	17	3	7
29 - 30	Jan	Šmrek		G Bratislava	—	—	—	—	—	—	—	—	0	7
31	Zdeněk	Štupňánek		G Znojmo	—	1	—	—	—	0	—	8	1	6

Kategorie prvních ročníků

	Jméno	Příjmení	Třída	Škola	1	2	3	4	5	6	S4	%	IV	Σ
	<i>Student</i>	<i>Pilný</i>	<i>F.1</i>	<i>MFF UK</i>	5	5	3	5	3	8	5	100	34	134
1	Petr	Houštěk	kvarta	G Pelhřimov	0	5	0	—	—	3	1	29	9	64
2	Alexandr	Kazda		G Praha	3	3	—	1	1	—	5	57	13	53
3	Lucie	Vasická		G Most	—	—	—	1	—	1	3	31	5	14
4 - 5	Hana	Suhomeřová	9.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	—	—	3	—	38	3	12
4 - 5	Martin	Váňa	1.D	SPSS Praha	—	—	—	—	—	—	—	—	0	12
6 - 7	Michal	Havel		COP Hronov	—	1	0	—	0	—	—	8	1	11
6 - 7	Jan	Kuchař		GJKT	—	—	—	—	—	—	—	—	0	11
8	Mária	Šedivá	1.A	ZŠ Trenčín	—	—	—	—	—	1	—	13	1	10
9	Jana	Vrábelová			—	—	—	—	—	5	—	63	5	8
10	Jana	Babovácová		G Most	—	1	—	—	—	—	1	20	2	7
11	Jan	Křetínský		G Brno	—	—	—	—	3	—	—	60	3	6
12 - 14	Miroslav	Frantes		G Benešov	0	—	—	0	—	—	—	0	0	5
12 - 14	Filip	Kozel	1.A	COP Hronov	—	—	—	—	2	—	—	40	2	5
12 - 14	Přemysl	Rubeš		G Pardubice	—	—	—	—	—	—	—	—	0	5
15	Lukáš	Voleský	1.B		—	—	—	—	0	—	—	0	0	4

Naše adresa:

FYKOS**Matematicko-fyzikální fakulta UK — ÚTF****V Holešovičkách 2****180 00 Praha 8****<http://fykos.mff.cuni.cz>**

Fyzikální korespondenční seminář, který je zastřešen Oddělením vnějších vztahů a propagace MFF UK, je organizován studenty MFF UK za podpory Ústavu teoretické fyziky MFF UK a jeho zaměstnanců a Jednoty českých matematiků a fyziků.