

**13. ročník, úloha V. 3 ... kyvadlo** (4 body; průměr ?; řešilo 34 studentů)

Mějme rotační těleso o hmotnosti  $m$ . Na jeho ose zvolme body  $A$  a  $B$  vzdálené  $d$ . Zavěsíme-li těleso v bodě  $A$ , kývá se se stejnou periodou, jako když jej zavěsíme v bodě  $B$ . Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm a kolmé na osu rotační symetrie je  $J$ . Určete všechny možné polohy těžiště tělesa vzhledem k bodům  $A$  a  $B$ .

Pro periodu kmitání fyzického kyvadla platí vztah

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{mgl}},$$

kde  $J_o$  je moment setrvačnosti našeho kmitajícího tělesa vůči ose, vůči které kmitá,  $l$  je vzdálenost osy od těžiště. Moment setrvačnosti tělesa vůči ose kmitání v bodě  $A$  (resp.  $B$ ) si vyjádříme pomocí Steinerovy věty

$$J_A = J + ml_A^2.$$

Podmínku rovnosti časů si napíšeme jako

$$2\pi \sqrt{\frac{J + ml_A^2}{mgl_A}} = 2\pi \sqrt{\frac{J + ml_B^2}{mgl_B}}.$$

Úpravou dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{J}{ml_A} + l_A &= \frac{J}{ml_B} + l_B, \\ (l_A - l_B) + \frac{J}{m} \left( \frac{1}{l_A} - \frac{1}{l_B} \right) &= 0, \\ (l_A - l_B) \left( l_A l_B - \frac{J}{m} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Je vidět, že první možnost je, když těžiště je uprostřed mezi body  $A$  a  $B$  ( $l_A - l_B = 0$ ). Vezmeme-li v úvahu vztah  $d = l_A + l_B$ , pak řešíme v druhém případě kvadratickou rovnici

$$x^2 - dx + \frac{J}{m} = 0,$$

její kořeny jsou

$$l_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{J}{m}},$$

platí-li  $J < md^2/4$ . To jsou další dvě možnosti. Když těžiště neleží mezi body  $A$  a  $B$ , pak řešíme rovnici  $x^2 - dx - J/m = 0$ . Řešením jsou analogicky vzdálenosti

$$l_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \frac{J}{m}}.$$

Tyto body nejsou omezeny podmínkou, jen si musíme uvědomit, že v případě, kdy je těžiště nad oběma body, pak těleso kolem této polohy kmitat nebude, poněvadž jde o labilní polohu.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.