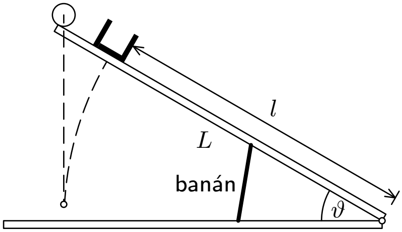
11. ročník, úloha V . 4 ... cvičená opice *(4 body; průměr ?; řešilo 31 studentů)*

Novopečený majitel zoologické zahrady by měl rád v pavilonu opic následující atrakci (viz obr. 1). Na jednom ze dvou prkýnek spojených pantem je ve vzdálenosti l od pantu připevněn miniaturní košíček a na konci prkýnka (ve vzdálenosti L od pantu) je položen míček. Prkýnko je podepřeno banánem, a svírá se zemí úhel ϑ . K této „aparatuře“ přijde hloupá opice (zatím nebyl čas ji vycvičit), a vezme si banán.

Vyvrcholením atrakce by mělo být to, že odbrzděné prkénko se dá do pohybu a míček by měl sám spadnout do košíčku. Diskutujte, zda-li je to vůbec možné a pokud ano, spočtěte jaké musí být l v závislosti na L a úhlu ϑ.



Obr. 1

Po odstranění banánu začne prkno s míčkem a košíčkem padat dolů. Předpokládáme, že míček je nějakým způsobem na prkénku přichycen a samovolně nespadne. Pokud se bod, na kterém leží míček, bude pohybovat s větším zrychlením než míček, odpojí se míček od prkna. Pokud bude zrychlení míčku větší, začne se kutálet po prkně dolů a bude po atrakci.

Pro náš případ neuvažujeme odpor vzduchu, poloha osy otáčení se nemění (např. prkno je na pantu bez tření), zanedbáme rozměry košíčku a odstranění banánu považujeme za okamžité a předpokládáme, že opice při tom nedá prkénku žádný impuls síly.

Nejprve si tedy spočítáme zrychlení bodu svisle pod míčkem pro každý úhel $\varphi < \Theta$. Začneme pohybovou rovnicí

$$M = J\varepsilon\,, \tag{1}$$

kde M je moment síly způsobující zrychlení prkna, J je moment setrvačnosti prkna a ε je úhlové zrychlení. Pokud zanedbáme hmotnost košíčku, můžeme podle Steinerovy věty psát

$$J = J_0 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\,mL^2\,, \tag{2}$$

kde $J_0 = \frac{1}{12}mr^2$. Pro moment M tíhové síly vůči ose otáčení platí

$$M = \tfrac{1}{2}F_G L\cos\varphi\,, \tag{3}$$

kde φ je okamžitý úhel svíraný prknem a podložkou. Dosazením (2) a (3) do (1) dostaneme

$$\tfrac{1}{2}g\cos\varphi = \tfrac{1}{3}L\varepsilon\,. \tag{4}$$

Tečné zrychlení ve vzdálenosti r od osy otáčení lze napsat jako

$$a = r\varepsilon\,. \tag{5}$$

Vzdálenost r se snadno vyjádří jako

$$r = L\,\frac{\cos\Theta}{\cos\varphi}\,. \tag{6}$$

Z (6) a (5) tedy plyne

$$a = L\varepsilon\,\frac{\cos\Theta}{\cos\varphi}\,. \tag{7}$$

Ze vztahů (4) a (7) potom dostaneme

$$a = \tfrac{3}{2} g \cos \Theta \,. \tag{8}$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že zrychlení bodu, který se nachází pod míčkem je konstantní v čase a závisí pouze na počátečním úhlu Θ. Podmínku pro úspěšný pád míčku do košíčku můžeme dostat dvěma způsoby.

1. V každém okamžiku pádu musí platit $a \geq g$. Po dosazení za a z (8) dostaneme podmínku.

$$\cos \Theta \geq \tfrac{2}{3} \,. \tag{9}$$

2. Prkénko musí spadnout dříve než míček. Pro dobu pádu prkna (bodu pod míčkem) platí vztah $L \sin \Theta = \frac{1}{2} a t_p^2$ a pro dobu pádu míčku platí $L \sin \Theta = \frac{1}{2} g t_m^2$. Po dosazení za a z (8) a předpokladu $t_p \leq t_m$ dostaneme opět podmínku (9).

Pro počáteční úhel tedy musí platit $\Theta \leq 48^\circ 11' 22{,}87''$.

Vzdálenost košíčku od osy otáčení spočteme velmi jednoduše pomocí goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníka. Platí tedy

$$l = L \cos \Theta \,.$$

Jiří Libra