11. ročník, úloha III . 3 ... káva a mléko *(5 bodů; průměr ?; řešilo 48 studentů)*

Představte si, že jste zaspali a spěcháte. Uvaříte si kávu a máte 2 minuty na to, abyste ji vypili. Káva je horká a vy potřebujete během zmíněných 2 minut dosáhnout co nejnižší teploty. Kávu pijete samozřejmě s mlékem. Na vás je, abyste rozhodli, dosáhnete-li nižší teploty, když necháte kávu 2 minuty chladnout, pak do ní nalejete mléko a nebo mléko nalejete co nejdříve? Nebo je výhodnější nalét mléko někdy v průběhu chladnutí? Mléko má samozřejmě pokojovou teplotu.

Poznámka: Předpokládejte, že předané teplo je přímo úměrné rozdílu teplot tělesa a okolí, teplota tělesa se tedy bude exponenciálně přibližovat teplotě okolí.

Jak si co nejrychleji ochladit kávu nebo čaj mlékem, to je otázka, která trápí mnohé z vás i z nás. Je lepší nalít nejprve mléko a potom nechat chladit, nebo nechat kávu stydnout a mléko nalít těsně před konzumací?

Jak již bylo naznačeno v zadání, pokud v místnosti udržíme konstantní teplotu, pak se teplota kávy bude exponenciálně přibližovat k teplotě místnosti. Odvození není složité. Za krátký čas čas Δt káva odevzdá okolí teplo

$$\Delta Q = -kS_k(T - T_0)\Delta t\,,$$

kde T_0 jsme označili teplotu okolí, T je okamžitá teplota kávy, S je plocha, kterou se káva dotýká okolí a k je konstanta, která charakterizuje střední rychlost přestupu tepla z kávy do okolí. Změnu teploty kávy pak popisuje rovnice

$$\Delta Q = C_k \Delta T\,,$$

kde C_k je tepelná kapacita kávy. Spojíme-li obě rovnice dohromady, dostaneme

$$\frac{\Delta T}{T - T_0} = -\frac{kS_k}{c_k}\Delta t\,.$$

Z této rovnice dostaneme průběh teploty v čase – buď integrováním, nebo intuitivně (víme, že to bude nějaká exponenciální závislost). Označme $\alpha_k = kS_k/C_k$ a pak nejsložitější exponenciální závislost může mít tvar

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)\mathrm{e}^{-\alpha_k t}\,. \tag{1}$$

Po dostatečně dlouhé době zbyde z exponenciály nula ($\mathrm{e}^{-\infty} \to 0$) a proto musí být první člen v součtu T_0 – pokojová teplota. Na začátku je exponenciála rovna jedné ($\mathrm{e}^0 = 1$) a teplota tedy musí být rovna teplotě T_1. Proto dostaneme jako faktor před exponenciálou výraz $T_1 - T_0$.

Teď víme, jak káva chladne, když ji necháme stát. Co se stane, jestliže do ní nalijeme mléko? Pro tuto situaci můžeme napsat kalorimetrickou rovnici

$$C_k(T_k - T_{k+m}) = C_m(T_{k+m} - T_0)\,,$$

kde T_k je teplota kávy před smícháním, T_{k+m} teplota směsi po smíchání. Malou ekvilibristikou se vzorci dostaneme

$$T_{k+m} = T_0 + \frac{C_k}{C_k + C_m}(T_k - T_0)\,. \tag{2}$$

Nyní můžeme spočítat výslednou teplotu v případě, že mléko nalejeme do kávy v libovolném čase t. Nejprve káva stydne podle vztahu (1), získanou teplotu dosadíme do vztahu (2) za T_k a máme teplotu, kterou bude mít směs káva-mléko po smíchání

$$T_{k+m} = T_0 + (T_{\text{poč}} - T_0)\frac{C_k}{C_k + C_m}\mathrm{e}^{-\alpha_k t}\,.$$

V tuto chvíli nám ale ještě zbývá $2\,\mathrm{min}-t$ času do odchodu z domova. Pitivo nám bude stydnout podle vztahu podobného (1), kde za čas stydnutí dosadíme zbývající čas, tedy $2\,\mathrm{min} - t$. Ale to není vše, ještě musíme konstantu α_k vyměnit za konstantu α_{k+m}. Proč? Protože se změnila celková tepelné kapacita ochlazované kapaliny a také plocha kontaktu s okolím se zvětšila (každá samozřejmě jinak). Faktor v exponenciále můžeme napsat jako

$$\alpha_{k+m} = \frac{kS_{k+m}}{C_k + C_m}\,.$$

Dáme-li vše dohromady, dostaneme, že teplota kávy a mléka po dvou minutách chladnutí bude

$$T_{\mathrm{konc}} = T_0 + (T_{\mathrm{poč}} - T_0)\frac{C_k}{C_k + C_m}\mathrm{e}^{-\alpha_k t}\mathrm{e}^{-\alpha_{k+m}(2-t)}\,,$$

v závislosti na čase t, kdy jsme přilili mléko. Pokud budou oba koeficienty α_k a α_{k+m} shodné, můžeme argumenty v exponenciálách sečíst a dostaneme jedinou exponenciálu $\mathrm{e}^{-\alpha\cdot 2''}$ a tudíž výsledná teplota nebude záviset na okamžiku, kdy jsme mléko do kávy nalili.

Ale koeficienty nejsou stejné a proto bude záviset na čase nalití mléka. Exponenciálu ještě jednoduše upravíme na

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}\mathrm{e}^{-(\alpha_k - \alpha_{k+m})t}\,.$$

Závisí na rozdílu $\alpha_k - \alpha_{k+m}$, jestli to je klesající, nebo rostoucí funkce. To se dozvíme, zamyslíme-li se nad tím, jak se α_k liší od α_{k+m}. Záměrně jsem do definičního vztahu pro α_{k+m} nenapsal nový povrch jako součet, protože povrch se změní jen málo, kdežto tepelná kapacita vzroste pozorovatelně. To znamená, že $\alpha_{k+m} < \alpha_k$ a tudíž je výhodnější nalít mléko co nejpozději.

Na závěr ještě jednu poznámku: V praxi je proces chladnutí silně ovlivněn tím, jak vše zamícháme. A vzhledem k tomu, že se konstanty α_k a α_{k+m} od sebe liší jen velmi málo, převládnou spíše tyto jevy.

Jedním z nejúčinnějších procesů, při kterém něco chladne je vypařování. A rychlost vypařování je silně závislá na tlaku par vypařované kapaliny nad hladinou. Pokud tento tlak účinně snižujeme, např. odváděním par od hladiny (třebas foukáním), kapalina se odpařuje intenzivněji a protože výparné teplo se kapalině musí odebrat, tak se i ochlazuje.

Jan Hradil

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.