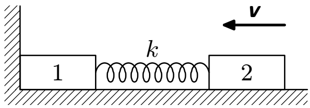
10. ročník, úloha VI . 2 ... pružina, kvádr a tření *(4 body; průměr ?; řešilo 33 studentů)*

Na obr. 1 máme dva stejné kvádry o hmotnosti m spojené pružinou o tuhosti k. Koeficient tření (statického i dynamického) je f. Jakou minimální rychlostí v musíme poslat kvádr č. 2 směrem ke stěně, aby se v průběhu nastalého děje pohnul i kvádr č. 1?



Obr. 1

V zadaní úlohy nebylo řečeno, v jakém stavu se na počátku soustava nachází, zda je pružina napjatá, stlačená, anebo v rovnovážné poloze. Rozebereme proto všechny možnosti.

Nejprve zavedeme souřadnou soustavu. Protože k vyřešení úlohy stačí vyšetřovat pohyb pouze kvádru č. 2, volíme souřadnice co nejvhodněji vůči danému tělesu. Osa x je v nárysu totožná s podložkou a její počátek je v místě, kde by se nacházelo těžiště kvádru č. 2, pokud by pružina byla v rovnováze.

Rozebereme si nyní silové působení na jednotlivé kvádry. Na oba působí stejná tíhová síla, a proto i stejná reakce podložky. Tyto síly jsou příčinou tření mezi kvádry a podložkou. Třecí síla má velikost $F_t = mgf$, kde f je koeficient tření, a působí vždy proti směru pohybu (dynamické tření), případně proti směru síly, která se snaží s tělesem pohnout (statické tření). Dále na oba kvádry působí síla pružiny, stejná co do velikosti, ale opačná co do směru. U této síly pro zjednodušení předpokládáme, že má během celého děje velikost úměrnou změně její délky: $F_p = k\Delta l$, kde k je tuhost pružiny. No a konečně na kvádr č. 1 působí síla od stěny, která vyrovnává všechny síly snažící se pohnout tímto kvádrem „skrz stěnu“. Ostatní síly (např. odporovou sílu vzduchu) zanedbáme.

Má-li se pohnout kvádr č. 1, což je zadáním úlohy, musí na něho působit síla pružiny směrem od stěny větší, než je třecí síla. K tomu je potřeba zjistit, zda se kvádr č. 2, při dané počáteční rychlosti, může dostat do místa, kde bude pružina dostatečně napnutá. Pro souřadnici tělesa č. 2, při vyrovnání síly tření a síly pružiny na těleso č. 1, musí platit

$$F_p = kx = F_t = mgf \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mgf}{k} \,. \tag{1}$$

Kvádr č. 2 musí dosáhnout této souřadnice s nenulovou rychlostí, aby se pohnul kvádr č. 1.

Úlohu lze řešit dvěma způsoby. Buď napíšeme pohybové rovnice, kdy je nutno kvůli třecí síle rozlišit případy pohybu kvádru č. 2 směrem ke stěně a ode stěny. Rovnice mají tvar

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = mgf - kx \,, \quad \text{pro pohyb ke stěně,}$$
$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -mgf - kmx \,, \quad \text{pro pohyb ode stěny.}$$

K těmto rovnicím musíme navíc zadat počáteční podmínky $x(t = 0) = x_0$ a $v(t = 0) = v_0$. Řešení je však, i když jej lze provést, obtížnější. Proto budeme úlohu řešit snazším způsobem: přes zákon zachování energie, kde započteme i přeměnu pohybové energie na tepelnou energii, která je způsobena třením. Uvažujeme přitom pouze těleso č. 2, které se pohybuje.

Na počátku děje má kvádr č. 2 energii

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \,, \tag{2}$$

kde první člen je kinetická energie a druhý člen vyjadřuje potenciální energii přítomnou díky silovému působení pružiny. Předpokládáme zde, že těleso má v čase $t = 0$ rychlost o velikosti v_0 směrem ke stěně. Této rychlosti nabylo určitým, blíže nepopsaným způsobem (např. velmi krátkým působením značné síly – úderem apod.). Počáteční výchylka x_0 je buď kladná, pokud je pružina napnuta, nulová, je-li v rovnováze, nebo záporná, je-li stlačena.

V určitém čase t_1 se kvádr přestane pohybovat směrem ke stěně a díky síle od pružiny se začne vracet zpět. V tomto okamžiku bude mít polohu x_1 a pouze potenciální energii, která se bude rovnat počáteční energii zmenšené o energii, která se přeměnila v teplo vlivem tření, tedy

$$E_1 = \frac{1}{2}kx_1^2 = E_0 - mgf(x_0 - x_1)\,. \tag{3}$$

Konečně v čase t_2 dosáhne kvádr souřadnice $x = mgf/k$, potřebné k tomu, aby se pohnul kvádr č. 1. V tomto okamžiku bude mít kvádr č. 2 energii

$$E_2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = E_1 - mgf(x - x_1)\,. \tag{4}$$

Část energie se opět ztratila třením.

Z rovnic (3) a (4) můžeme dosazením za E_0 z (2) a za x z (1) vyjádřit x_1 a v_0 pro krajní případ, kdy bude rychlost v kvádru č. 2 po dosažení souřadnice x nulová, čímž vypadne člen kinetické energie v rovnici (4). Uvědomíme-li si, že vzhledem ke zvolené souřadné soustavě musí být $v_0 < 0$ a $x_1 < 0$, obdržíme po úpravách

$$x_1 = -\frac{3mgf}{k}\,, \tag{5}$$

$$v_0 = -\sqrt{15g^2f^2\frac{m}{k} + 2gfx_0 - x_0^2\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad v_0 = -gf\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{15}, \quad \text{pro } x_0 = 0\,.$$

Měla by následovat krátká diskuse výsledků. Předně bychom si měli uvědomit to, že při velkém tření by dle našeho výpočtu (viz vztah (5)) muselo být také velké stlačení pružiny. Tedy v reálném případě musí být jednak vzdálenost mezi kvádry větší než x_1, dále pružina musí být natolik pružná, aby dovolila stlačení o tuto hodnotu. Jinak dojde k odrazu (ať už pružnému, či nepružnému) kvádru č. 2 a úloha se zkomplikuje, poněvadž pak musíme započítat délku plně stlačené pružiny.

Uvažujeme-li nenulové x_0, pak pro $x_0 < -3mgf/k$ a $x_0 > mgf/k$ je řešení více než jednoduché. V těchto případech může být totiž počáteční rychlost kvádru č. 2 nulová a kvádr č. 1 se pohne vždy.

Karel Houfek

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.