10. ročník, úloha I . 2 ... *alchymistické zrcadlo* *(3 body; průměr ?; řešilo 94 studentů)*

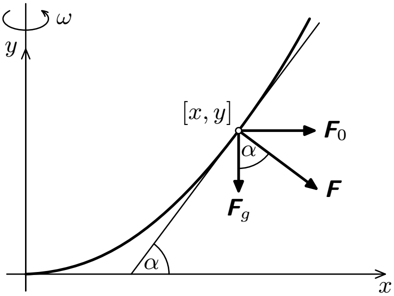
Mějme válcovou nádobu se rtutí. Roztočíme ji úhlovou rychlostí ω kolem rotační osy. Určete ohniskovou vzdálenost zrcadla, které tvoří povrch rtuti.

Hladina rotující kapaliny vytvoří paraboloid. Pro jednoduchost stačí pracovat v rovině svislého řezu procházejícího osou rotace. Položme počátek soustavy souřadnic do vrcholu paraboloidu. Pak má křivka rovnici

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 ,$$

což lze ukázat takto. Aby byla částice na hladině v klidu, musí být výslednice sil, které na ni působí, normálou k povrchu. Sklon hladiny je tedy dán poměrem velikostí sil gravitační a odstředivé

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} . \qquad (1)$$



Obr. 1

Křivka je tedy dána diferenciální rovnicí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2 x}{g} , \qquad (2)$$

z které integrací plyne

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + c ,$$

kde konstantu c položíme rovnou nule, vzhledem k volbě souřadné soustavy. Všimněte si, že ohnisková vzdálenost nezáleží na hmotnosti, tudíž ani na hustotě kapaliny.

Teď, když máme jasno ve tvaru křivky, je možné použít více postupů. Jednoduché je říci, že parabola daná rovnicí $x^2 = 2py$, má ohniskovou vzdálenost $p/2$, a odtud už vyjde

$$f = \frac{g}{2\omega^2} .$$

Delší, ale celkem spolehlivé řešení získáme tím, že vezmeme paprsek přicházející z nekonečna rovnoběžně s rotační osou ve vzdálenosti r, v místě dopadu se odrazí o dvojnásobný úhel než je úhel $\alpha(r)$ a hledáme, kde tento odražený paprsek protne osu. Při dobré orientaci ve vzorečcích analytické geometrie vyjde výsledek nezávislý na r. Na závěr bych se rád zmínil o elegantním způsobu řešení Uvažujme paprsek z nekonečna, rovnoběžný s osou, dopadající na hladinu v místě, kde je skloněna o úhel $\alpha = 45^\circ$ k vodorovné rovině. Tento paprsek se odrazí do vodorovné roviny a tudíž místo jeho odrazu je ve výšce rovné ohniskové vzdálenosti. Užitím rovnic (1) a (2) tak dostaneme

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 = \frac{\omega^2}{g} x_0 , \quad \text{z čehož} \quad x_0 = \frac{g}{\omega^2} .$$

Index 0 se vztahuje k onomu význačnému bodu. Po dosazení do rovnice paraboly obdržíme téměř okamžitě výsledek

$$f = y_0 = \frac{\omega^2}{2g} x_0^2 = \frac{\omega^2}{2g} \frac{g^2}{\omega^4} = \frac{g}{2\omega^2} .$$

Kdyby měl někdo z Vás pocit, že se jedná o teorii odtrženou od reálného světa, vězte, že na stejném principu pracoval originální astronomický přístroj. Jednalo se o tzv. Nušlův cirkumzenitál, kterým se určovaly časy průchodů hvězd kružnicí určité výšky nad horizontem. Přístroj existoval ve třech exemplářích.

Pavel Bubák & Jan Mocek

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.